ЧАСТЬ I

ТАБЛИЧНОЕ ЗАДАНИЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ. КВАДРАТУРЫ

Одним из основных в математике является понятие функции. Функция $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ может быть задана некоторой формулой, например, $y = x^2$, которую можно хранить и использовать в компьютере в виде программы, по которой для каждого фиксированного значения x вычисляется значение $y = x^2$.

Однако, как правило, функция $y = f(x)$ задается приближенно тем или иным конечным набором чисел — некоторой таблицей, обрабатывая которую, можно получить приближенное значение функции при каждом фиксированном x. Этой таблицей может служить, например, конечный набор первых коэффициентов разложения функции в степенной ряд.

Например, для функции

$$e^x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

таблицей может служить конечный набор чисел

$$1, \quad \frac{1}{1!}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n!};$$

n задано.

Чем больше натуральное n, тем точнее можно восстановить функцию по таблице значений n первых коэффициентов ее разложения в степенной ряд, пользуясь расшифровывающей эту таблицу формулой

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Однако обычно таблица значений функции $y = f(x_n)$ получается в результате ее измерения или вычисления в некотором наборе точек $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Тогда возникает задача восстановления (интерполяции) функции в точках x, не совпадающих с $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Наиболее употребительны и удобны алгебраическая и тригонометрическая интерполяции. Мы рассмотрим оба этих способа интерполяции. Рассмотрим здесь также задачу вычисления определенных интегралов по таблице функции, поскольку основные способы получения формул (квадратур) для приближенного вычисления определенных интегралов тесно связаны с интерполяционными формулами.

ГЛАВА 1

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Пусть заданы точки $x = x_0$, $x = x_1$, ..., $x = x_n$ и значения $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ функции $f(x)$ в этих точках. Соответствие

x_0	x_1	...	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	...	$f(x_n)$

будем называть *таблицей значений функции* $f(x)$ *в узлах* $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Это название несколько условно, так как значение $f(x_j)$ может записываться бесконечной десятичной дробью (например, $\sqrt{3}$), а для работы на машине все числа должны быть округлены до десятичных (или двоичных) дробей с конечным числом знаков.

Алгебраическим интерполяционным многочленом $P_n(x) = P_n(x, f, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ назовем многочлен

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

степени не выше n, который в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принимает значения $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

§ 1. Существование и единственность интерполяционного многочлена

1. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.

Теорема 1. *Пусть заданы узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n$, среди которых нет совпадающих, и значения $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ функции в этих узлах. Существует один и только один многочлен $P_n(x) = P_n(x, f, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ степени не выше n, принимающий в заданных узлах x_k заданные значения $f(x_k)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что существует не более, чем один интерполяционный многочлен $P_n(x)$, а затем построим его.

Если бы таких многочленов было два, $P_n^{\mathrm{I}}(x)$ и $P_n^{\mathrm{II}}(x)$, то их разностью $R_n(x) = P_n^{\mathrm{I}}(x) - P_n^{\mathrm{II}}(x)$ был бы многочлен степени не выше n, обращающийся в нуль в $n+1$ точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Но каждый многочлен, отличный от тождественного нуля, имеет ровно столько корней, считая их кратности, какова его степень. Поэтому $R_n(x) \equiv 0$, т. е. $P_n^{\mathrm{I}}(x) \equiv P_n^{\mathrm{II}}(x)$. Единственность доказана.

Введем теперь вспомогательные многочлены

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}.$$

Очевидно, что $l_k(x)$ есть многочлен степени n и что выполнены равенства

$$l_k(x)\Big|_{x_j} = \begin{cases} 1, & x_j = x_k, \\ 0, & x_j \neq x_k, \end{cases} \qquad j = 0, 1, ..., n.$$

Многочлен $P_n(x)$, заданный равенством

$$P_n(x) = P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n) = \\ = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + ... + f(x_n)l_n(x), \qquad (1)$$

и есть искомый интерполяционный многочлен.

Действительно, он имеет степень не выше n, так как каждое слагаемое $f(x_j)l_j(x)$ есть многочлен степени не выше n. Кроме того, для него, очевидно, выполнены равенства $P_n(x_j) = f(x_j)$ $(j = 0, 1, ..., n)$. □

Мы не только доказали теорему, но и выписали интерполяционный многочлен $P_n(x)$ в виде формулы (1), которая называется *записью интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.*

Употребительны и другие записи (единственного) интерполяционного многочлена $P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n)$. Особенно часто используют запись в форме Ньютона.

2. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона. Разностные отношения. Пусть функция $f(x)$ в точках x_a, x_b, x_c, x_d и т. д. принимает некоторые значения $f(x_a)$, $f(x_b)$, $f(x_c)$, $f(x_d)$ и т. д. Разностное отношение нулевого порядка $f(x_k)$ функции $f(x)$ в точке x_k определим как значение функции в этой точке:

$$f(x_k) = f(x_k), \qquad k = a, b, c, d, ... \qquad (2)$$

Разностное отношение первого порядка $f(x_k, x_t)$ функции $f(x)$ для (произвольной) пары точек x_k, x_t определим через разностные отношения нулевого порядка:

$$f(x_k, x_t) = \frac{f(x_t) - f(x_k)}{x_t - x_k}.$$

Вообще разностное отношение $f(x_0, x_1, ..., x_n)$ n-го порядка определим через разностные отношения порядка $n-1$, положив

$$f(x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_0, x_1, ..., x_{n-1})}{x_n - x_0}. \qquad (3)$$

Интерполяционный многочлен $P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n)$ можно записать в следующей форме Ньютона:

$$P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + ... \\ ... + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})f(x_0, x_1, ..., x_n). \qquad (4)$$

Несколько ниже мы докажем справедливость формулы (4), а пока установим некоторые следствия из нее.

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = P_{n-1}(x, f, x_0, x_1, ..., x_{n-1}) + \\ + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}). \qquad (5)$$

Доказательство очевидно.

Следствие 2. *Разностное отношение $f(x_0, x_1, ..., x_n)$ порядка n равно коэффициенту c_n при члене x^n, входящем в интерполяционный многочлен*

$$P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_0,$$

т. е. справедливо равенство

$$f(x_0, x_1, ..., x_n) = c_n. \qquad (6)$$

Доказательство. Очевидно, что в правую часть выражения (4) член x^n входит с коэффициентом $f(x_0, x_1, ..., x_n)$. □

Следствие 3. *Разностное отношение $f(x_0, x_1, ..., x_n)$ обращается в нуль в том и только том случае, если $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ суть значения некоторого многочлена Q_m, степень которого m строго меньше n.*

Доказательство. Если $f(x_0, x_1, ..., x_n) = 0$, то из выражения (4) видно, что интерполяционный многочлен $P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n)$, принимающий при x_j значения $f(x_j)$ $(j = 0, 1, ..., n)$, есть многочлен степени меньше n, поскольку в силу равенства (6) коэффициент c_n при x^n равен нулю. Обратно: ввиду единственности интерполяционного многочлена степени не выше n многочлен $Q_m(x)$ совпадает с интерполяционным многочленом $P_n(x, f, x_0, ..., x_n) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_0$. Ввиду того, что $m < n$, из равенства $Q_m(x) = P_n(x, f, x_0, x_n)$ следует, что $c_n = 0$. В силу равенства (6) тогда $f(x_0, x_1, ..., x_n) = 0$. □

Следствие 4. *Разностное отношение $f(x_0, x_1, ..., x_n)$ не изменяется при произвольной перестановке его аргументов $x_0, x_1, ..., x_n$ между собой.*

Доказательство. Переставим узлы $x_0, x_1, ..., x_n$ между собой так, что на месте с номером j окажется один из узлов $x_0, x_1, ..., x_n$, который мы обозначим x_j' $(j = 0, 1, ..., n)$. Очевидно, что интерполяционный многочлен от нумерации узлов не зависит: $P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n) \underset{x}{\equiv} \underset{x}{\equiv} P_n(x, f, x_0', x_1', ..., x_n')$. Поэтому наряду с записью (4) справедлива запись

$$P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n) = f(x_0') + f(x_0', x_1')(x - x_0') + ... \\ ... + f(x_0', x_1', ..., x_n')(x - x_0')(x - x_1')...(x - x_{n-1}'), \qquad (7)$$

так что в силу равенства (6)

$$f(x_0', x_1', ..., x_n') = c_n. \qquad (8)$$

Сравнивая равенства (6) и (8), убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения $f(x_0, x_1, ..., x_n) = f(x_0', x_1', ..., x_n')$. □

Следствие 5. *Справедливо равенство*

$$f(x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n, f, x_0, x_1, ..., x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})}. \qquad (9)$$

Доказательство. В равенстве (5) положим $x = x_n$. Тогда левая часть примет значение $f(x_n)$, а формула (9) станет очевидной. □

Теорема 2. *Интерполяционный многочлен* $P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n)$ *допускает запись в форме Ньютона, т. е. имеет место формула* (4).

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n. При $n = 0$ формула (4) справедлива. Допустим, что ее справедливость уже установлена для $n = 1, 2, ..., k$. Покажем, что она имеет место и для $n = k + 1$, т. е. докажем равенство

$$P_{k+1}(x, f, x_0, x_1, ..., x_k, x_{k+1}) = P_k(x, f, x_0, x_1, ..., x_k) + \\ + f(x_0, x_1, ..., x_k, x_{k+1})(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_k). \quad (10)$$

Заметим, что в силу предположения индукции о справедливости равенства (4) для $n \leqslant k$ доказательства следствий 1–5, которые мы провели, опираясь на справедливость равенства (4), сохраняют силу при $n \leqslant k$.

Переходя к доказательству равенства (10), сначала покажем, что многочлен $P_{k+1}(x, f, x_0, x_1, ..., x_k, x_{k+1})$ можно записать в форме

$$P_{k+1}(x, f, x_0, x_1, ..., x_k, x_{k+1}) = P_k(x, f, x_0, x_1, ..., x_k) + \\ + \frac{f(x_{k+1}) - P_k(x_{k+1}, f, x_0, x_1, ..., x_k)}{(x_{k+1} - x_0)...(x_{k+1} - x_k)}(x - x_0)...(x - x_k). \quad (11)$$

Очевидно, что в правой части равенства (11) стоит многочлен степени не выше $k + 1$, принимающий в точках x_j значения $f(x_j)$ $(j = 0, 1, ..., k + 1)$. Поэтому выражение в правой части равенства (11) есть интерполяционный многочлен

$$P_{k+1}(x, f, x_0, x_1, ..., x_{k+1}).$$

Сравнивая формулы (10) и (11), видим, что для доказательства справедливости (10) надо установить равенство

$$f(x_0, x_1, ..., x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - P_k(x_{k+1}, f, x_0, x_1, ..., x_k)}{(x_{k+1} - x_0)...(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)}. \quad (12)$$

В силу следствия 4 получаем

$$P_k(x, f, x_0, x_1, ..., x_k) = P_k(x, f, x_1, x_2, ..., x_k, x_0) = \\ = P_{k-1}(x, f, x_1, x_2, ..., x_k) + \\ + f(x_1, x_2, ..., x_k, x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k). \quad (13)$$

Воспользуемся формулой (13) при $x = x_{k+1}$ и придадим правой части равенства (12) следующий вид:

$$\frac{f(x_{k+1}) - P_k(x_{k+1}, f, x_0, x_1, ..., x_k)}{(x_{k+1} - x_0)...(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)} = \\ = \frac{1}{x_{k+1} - x_0} \frac{f(x_{k+1}) - P_{k-1}(x_{k+1}, f, x_1, ..., x_k)}{(x_{k+1} - x_1)...(x_{k+1} - x_k)} - \frac{f(x_1, x_2, ..., x_k, x_0)}{x_{k+1} - x_0}. \quad (14)$$

В силу следствия 5 уменьшаемое в правой части равенства (14) совпадает с выражением

$$\frac{1}{x_{k+1} - x_0} f(x_1, x_2, ..., x_{k+1}).$$

В силу следствия 4 в вычитаемом можно переставить аргументы так, что оно совпадет с $\dfrac{f(x_0, x_1, ..., x_k)}{x_{k+1} - x_0}$.

Таким образом, правая часть равенства (14) есть

$$\frac{f(x_1, x_2, ..., x_{k+1}) - f(x_0, x_1, ..., x_k)}{x_{k+1} - x_0} = f(x_0, x_1, ..., x_{k+1}),$$

так что равенство (14) совпадает с доказываемым равенством (12). □

Теорема 3. *Пусть* $x_0 < x_1 < ... < x_n$, *функция* $f(x)$ *определена на отрезке* $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$ *и имеет на этом отрезке производную порядка* n. *Тогда*

$$n!\, f(x_0, x_1, ..., x_n) = f^{(n)}(\xi), \quad (15)$$

где ξ — *некоторая точка отрезка* $[x_0, x_n]$.

Доказательство. Функция

$$\varphi(x) \equiv f(x) - P_n(x, f, x_0, ..., x_n) \quad (16)$$

обращается в нуль в $n + 1$ точках $x_0, x_1, ..., x_n$. По теореме Ролля ее производная обращается в нуль хотя бы в одной точке между каждыми двумя соседними нулями функции $\varphi(x)$. Таким образом, функция $\varphi'(x)$ обращается в нуль не менее, чем в n точках. Аналогично $\varphi''(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке между каждыми двумя нулями функции $\varphi'(x)$ и имеет поэтому не менее, чем $n - 1$ нулей.

Рассуждая аналогично, убедимся, что $\varphi^{(n)}(x)$ имеет хотя бы один нуль. Обозначим его ξ, так что $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$. Продифференцируем тождество (16) ровно n раз и положим после этого $x = \xi$:

$$0 = \varphi^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - \frac{d^n}{dx^n} P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n)\big|_{x=\xi}. \quad (17)$$

Но

$$\frac{d^n}{dx^n}[P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n)] = \frac{d^n}{dx^n}[P_{n-1}(x, f, x_0, x_1, ..., x_{n-1}) + \\ + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})] \equiv 0 + n!\, f(x_0, x_1, ..., x_n).$$

Поэтому из выражения (17) следует равенство (15). □

Теорема 4. *Значения $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ выражаются через разностные отношения $f(x_0), f(x_0, x_1), ..., f(x_0, x_1, ..., x_n)$ формулами*

$$f(x_i) = f(x_0) + (x_i - x_0)f(x_0, x_1) + (x_i - x_0)(x_i - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + ... \\ ... + (x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{n-1})f(x_0, x_1, ..., x_n), \\ i = 0, 1, ..., n,$$

т. е. формулами вида

$$f(x_i) = a_{i0}f(x_0) + a_{i1}f(x_0, x_1) + ... + a_{in}f(x_0, ..., x_n), \quad i = 0, 1, ..., n. \tag{18}$$

Для доказательства можно воспользоваться равенствами $f(x_i) = P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n)|_{x=x_i}$ и записью интерполяционного многочлена в форме (4).

3. Сравнение записей в форме Лагранжа и Ньютона. Для вычисления значения функции $f(x)$ в точке x, не являющейся узлом интерполяции, можно положить $f(x) \approx P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n)$.

Пусть $P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n)$ уже найден, но мы решили для уточнения привлечь еще один узел x_{n+1} и значение $f(x_{n+1})$ в нем. Тогда для вычисления $P_{n+1}(x, f, x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1})$ с помощью формулы (1) нужно заново провести всю работу. Для вычисления по формуле Ньютона

$$P_{n+1}(x, f, x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n) + \\ + f(x_0, x_1, ..., x_{n+1})(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

нужно вычислить только поправку

$$f(x_0, x_1, ..., x_{n+1})(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n).$$

Кстати, сразу будет видно, насколько она велика.

4. Обусловленность задачи построения интерполяционного многочлена. Пусть узлы интерполяции $x_0, x_1, ..., x_n$ лежат на некотором отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ — заданные числа. Соответствующий интерполяционный многочлен $P_n(x) = P_n(x, f, x_0, x_1, ..., x_n)$ будем для краткости обозначать $P_n(x, f)$.

Придадим значениям $f(x_j)$ некоторые возмущения $\delta f(x_j)$ $(j = 0, 1, ..., n)$, и интерполяционный многочлен $P_n(x, f)$ заменится многочленом $P_n(x, f + \delta f)$. Из записи (1) видно, что $P_n(x, f + \delta f) = P_n(x, f) + P_n(x, \delta f)$, так что возмущение, которое претерпевает интерполяционный многочлен, есть $P_n(x, \delta f)$. Это возмущение при заданных $x_0, x_1, ..., x_n$ зависит только от δf, но не от f. Примем за меру чувствительности интерполяционного многочлена к возмущениям δf задания функции в узлах наименьшее число L_n, при котором для каждого δf выполнено неравенство

$$\max_{a<x<b} |P_n(x, \delta f)| \leqslant L_n \max_j |\delta f(x_j)|.$$

Числа $L_n = L_n(x_0, x_1, ..., x_n, a, b)$ $(n = 0, 1, ...)$ называют *константами Лебега*. Эти числа растут с ростом n. Их поведение при возрастании n существенно зависит от расположения точек x_j $(j = 0, 1, ..., n)$ на отрезке $[a, b]$.

Если, например, $n = 1$, $x_0 = a$, $x_1 = b$, то $L_1 = 1$. Если $x_0 \neq a$, $x_1 \neq b$, то $L_1 \geqslant \dfrac{b-a}{2|x_1 - x_0|}$, т. е. чувствительность интерполяции может быть сколь угодно сильной, если x_1 и x_0 достаточно мало различаются. Читатель легко проверит эти утверждения об L_1.

В случае равномерно расположенных узлов

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, ..., n; \quad h = \frac{b-a}{n},$$

можно показать, что

$$2^{n-1} > L_n > 2^{n-3}\frac{1}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{1}{n - 3/2}, \tag{19}$$

т. е. чувствительность результата интерполяции к погрешностям при задании $f(x_j)$ будет резко возрастать с ростом n. Погрешности при задании $f(x_j)$ неизбежны как при получении значений путем измерений, так и в результате округлений.

Пусть теперь $a = -1$, $b = 1$, а узлы заданы формулой

$$x_j = -\cos\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}, \quad j = 0, 1, ..., n. \tag{20}$$

Можно показать, что при условии (20)

$$L_n \leqslant \frac{2}{\pi}\ln n + 1, \tag{21}$$

т. е. с ростом n константы Лебега, в отличие от (19), растут очень медленно, так что в этом случае вычислительная неустойчивость не является препятствием для использования интерполяционных многочленов высокой степени.

5. О плохой сходимости интерполяции по равноотстоящим узлам. Не следует думать, что для каждой непрерывной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, интерполяционный многочлен $P_n(x, f)$, построенный по значениям $f(x_j)$ в равноотстоящих узлах $x_j = a + jh$, $x_0 = a$, $x_n = b$, с ростом n все меньше уклоняется от функции $f(x)$. Можно показать, например, что для функции $f = \dfrac{1}{x^2 + 0{,}25}$, имеющей производные всех порядков, при $a = -1$ и $b = 1$ уклонение $\max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - P_n(x)|$ не стремится к нулю с ростом n.

Задачи

1. Требуется вычислить $f(1,14)$ с помощью линейной, квадратической и кубической интерполяций, используя следующую таблицу:

x	1,08	1,13	1,20	1,27	1,31
$f(x)$	1,302	1,386	1,509	1,217	1,284

Осуществить расчет с помощью интерполяционных многочленов в формах Лагранжа и Ньютона.

2. Пусть $x_j = jh$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — узлы, расположенные с шагом h. Проверить равенство

$$f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1})}{2!\,h^2}.$$

3. Пусть $a = x_0$, $a < x_1 < b$, $x_2 = b$. Вычислить значение константы Лебега L_2, если $x_1 = (a+b)/2$.

Показать, что при $x_1 \to a$ или $x_1 \to b$ константа Лебега $L_2 = L_2(x_0, x_1, x_2, a, b)$ неограниченно возрастает.

4. Проверить утверждение об интерполяции функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 0{,}25}$ из п. 5 экспериментально, выводя графики $f(x)$ и $P_n(x, f)$ на экран дисплея ЭВМ.

§ 2. Классическая кусочно многочленная интерполяция

Высокая чувствительность интерполяционных многочленов к погрешностям при задании таблицы и возможное отсутствие сходимости последовательности $P_n(x, f)$ с ростом n при равноотстоящих узлах заставляет использовать кусочно многочленную интерполяцию.

1. Определение кусочно многочленной интерполяции. Пусть функция $f(x)$, определенная на $[a, b]$, задана в виде $f = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n))$ $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b)$. Для восстановления функции между узлами $x_0, x_1, \ldots, x_n$ можно воспользоваться функцией, которая между каждыми двумя соседними узлами является многочленом заданной невысокой степени, например первой, второй, третьей и т. д. Соответствующая интерполяция называется *кусочно линейной*, *кусочно квадратичной* и т. д.

В случае кусочно линейной интерполяции на отрезке $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$ для аппроксимации функции $f(x)$ используется линейный интерполяционный многочлен $P_1(x, f, x_k, x_{k+1})$. В случае квадратичной интерполяции на отрезке $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$ можно воспользоваться одним из многочленов $P_2(x, f, x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$ или $P_2(x, f, x_{k-1}, x_k, x_{k+1})$.

Аналогично строятся кусочно многочленные интерполяции произвольной степени s. Именно, при заданном s на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ используем интерполяционный многочлен $P_s(x, f, x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots \ldots, x_{k-j+s})$, где j — одно из чисел $0, 1, \ldots, s-1$. Желательно, чтобы отрезок $[x_k, x_{k+1}]$ был возможно ближе к середине отрезка $[x_{k-j}, x_{k-j+s}]$. Поэтому целесообразно выбирать в качестве j то из чисел $0, 1, \ldots \ldots, s-1$, которое ближе к $s/2$, и вместо $P_s(x, f, x_{k-j}, \ldots, x_{k-j+s})$ использовать сокращенное обозначение, положив

$$P_s(x, f, x_{k-j}, \ldots, x_{k-j+s}) = P_s(x, f_{kj}).$$

2. Формула для погрешности интерполяции. Займемся оценкой погрешности

$$R_s(x) \equiv f(x) - P_s(x, f_{kj}), \quad x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}, \tag{1}$$

возникающей при приближенной замене $f(x)$ многочленом $P_s(x, f_{kj})$. Воспользуемся следующей общей теоремой о формуле для погрешности.

Теорема 1. *Пусть $f(t)$ — функция, определенная на некотором отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и имеющая непрерывную производную некоторого порядка $s+1$. Пусть $t_0, t_1, \ldots, t_s$ — произвольный набор попарно различных точек из отрезка $[\alpha, \beta]$, $f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_s)$ — значения функции $f(t)$ в этих точках, а $P_s(t)$ — интерполяционный многочлен степени не выше s, построенный по этим значениям. Тогда погрешность интерполяции $R_s(t) = f(t) - P_s(t)$ можно представить в виде*

$$R_s(t) = \frac{f^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}(t - t_0)(t - t_1)\ldots(t - t_s), \tag{2}$$

где $\xi = \xi(t)$ — некоторая точка из интервала $\alpha < t < \beta$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $t = \bar t \in [\alpha, \beta]$ и докажем формулу (1) при этом $\bar t$. Если $\bar t$ совпадает с одним из узлов интерполяции, $\bar t = t_j$ $(j = 0, 1, \ldots, s)$, то погрешность $f(\bar t) - P_s(\bar t)$ обращается в нуль. Формула (2) также дает $R_s(\bar t) = 0$ при произвольном ξ, так что формула (2) доказана для $t = \bar t = t_j$ $(j = 0, 1, \ldots, s)$.

Докажем теперь формулу (1) для $t = \bar t$ в предположении, что фиксированное $\bar t \in [\alpha, \beta]$ не совпадает ни с одним из узлов интерполяции. Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(t) - P_s(t) - k(t - t_0)(t - t_1)\ldots(t - t_s), \tag{3}$$

выбрав число k так, чтобы при $t = \bar t$ функция $\varphi(t)$ обращалась в нуль, т. е. положив

$$k = \frac{f(\bar t) - P_s(\bar t)}{(\bar t - t_0)(\bar t - t_1)\ldots(\bar t - t_s)}. \tag{4}$$

Числитель в формуле (4) есть значение $R_s(\bar t)$ погрешности; поэтому из этой формулы следует, что

$$R_s(\bar t) = k(\bar t - t_0)(\bar t - t_1)\ldots(\bar t - t_s). \tag{5}$$

Функция $\varphi(t)$ обращается в нуль в $s+2$ точках $\bar t, t_0, t_1, \ldots, t_s$. Производная $\varphi'(t)$ обращается в нуль не менее, чем в $(s+1)$-й точке, так как по теореме Ролля между каждыми двумя соседними точками, где функция $\varphi(t)$ обращается в нуль, найдется точка, где обращается в нуль ее производная $\varphi'(t)$. Аналогично $\varphi''(t)$ имеет не менее, чем s нулей, $\varphi^{(3)}(t)$ — не менее, чем $s-1$ нулей и т. д., наконец, $(s+1)$-я производная $\dfrac{d^{s+1}}{dx^{s+1}}\varphi(t)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке $\xi \in (\alpha, \beta)$. Заметим, что

$$\frac{d^{s+1}}{dt^{s+1}}t^{s+1} = (s+1)!,$$

а также $(t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_s) = t^{s+1} + Q_s(t)$, где $Q_s(t)$ — некоторый многочлен степени s. Заметим еще, что

$$\frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}}P_s(t) \equiv \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}}Q_s(t) \equiv 0.$$

Возьмем производную порядка $s+1$ от функции $\varphi(t)$, заданной формулой (3). Получим

$$\varphi^{(s+1)}(t) = f^{(s+1)}(t) - k(s+1)!.$$

Отсюда при $t = \xi$ в силу $\varphi^{(s+1)}(\xi) = 0$ следует, что

$$k = \frac{f^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}.$$

Подставляя найденное k в равенство (5), получаем формулу для $R_s(\bar{t})$, которая в силу произвольности выбора $\bar{t}$ совпадает с формулой (2). □

Теорема 2. *В условиях предыдущей теоремы справедлива оценка*

$$\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|R_s(t)| \leqslant \frac{1}{(s+1)!}\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|f^{(s+1)}(t)|(\beta-\alpha)^{s+1}. \qquad (6)$$

Доказательство. Заметим, что для любого значения $t \in [\alpha, \beta]$ каждое из выражений $t-t_0, t-t_1, \ldots, t-t_s$ не превосходит по модулю число $\beta-\alpha$, а затем воспользуемся формулой (2):

$$|R_s(t)| = \frac{1}{(s+1)!}|f^{(s+1)}(\xi)(t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_s)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(s+1)!}\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|f^{(s+1)}(t)|(\beta-\alpha)^{s+1}. \qquad (7)$$

Поскольку $t \in [\alpha, \beta]$ в левой части выражения (7) произвольно, то отсюда следует (6). □

Подчеркнем, что оценка (6) доказана нами при произвольном расположении узлов $t_0, t_1, \ldots, t_s$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Для конкретного фиксированного расположения узлов она может быть несколько улучшена. Например, в случае линейной интерполяции и расположения узлов t_0, t_1 в концах α, β отрезка $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ получим

$$|R_1(t)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!}(t-\alpha)(t-\beta)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|f''(t)|\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|(t-\alpha)(t-\beta)| = \frac{1}{8}\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|f''(t)|(\beta-\alpha)^2 \qquad (8)$$

и соответственно

$$\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|R_1(t)| \leqslant \frac{1}{8}\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|f''(t)|(\beta-\alpha)^2, \qquad (9)$$

в то время как оценка (6) при $s=1$ принимает вид

$$\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|R_1(t)| \leqslant \frac{1}{2}\max_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|f''(t)|(\beta-\alpha)^2.$$

Воспользуемся теоремами 1, 2 для оценки погрешности (1) кусочно многочленной интерполяции функции $f(x)$ на отрезке $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$. Положим

$$\alpha = x_{k-j},\quad \beta = x_{k-j+s},\quad t_0 = \alpha = x_{k-j},\quad t_1 = x_{k-j+1},\ \ldots,\ t_s = \beta = x_{k-j+s}.$$

Далее очевидно, что

$$\max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}}|R_s(x, f_{kj})| \leqslant \max_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta}|R_s(x, f_{kj})|,$$

а в силу (6) отсюда следует неравенство

$$\max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}}|R_s(x, f_{kj})| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(s+1)!}\max_{x_{k-j}\leqslant x\leqslant x_{k-j+s}}|f^{(s+1)}(x)|(x_{k-j+s}-x_{k-j})^{s+1}. \qquad (10)$$

Если величина $|f^{(s+1)}(x)|$ сильно меняется на отрезке $[a, b]$, то для получения оценки (10), гарантирующей заданную точность, шаг сетки и число $x_{k-j+s} - x_{k-j}$ должны быть меньше там, где $|f^{(s+1)}(x)|$ больше.

В случае равноотстоящих узлов оценка (10) влечет

$$\max_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_{k+1}}|R_s(x, f_{kj})| \leqslant \frac{s^{s+1}}{(s+1)!}\max_{x_{k-j}\leqslant x\leqslant x_{k-j+s}}|f^{(s+1)}(x)|h^{s+1}, \qquad (11)$$

где h — шаг сетки узлов интерполяции.

Отметим особо случай кусочно линейной интерполяции. В этом случае $s=1$, $\alpha = x_k$, $\beta = x_{k+1}$. Опираясь на оценку (9), получаем

$$\max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}}|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{8}\max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}}|f''(x)|(x_{k+1}-x_k)^2. \qquad (12)$$

Будем считать в дальнейшем, что $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — равноотстоящие узлы, так что $x_{k+1} - x_k = h = (b-a)/n$. Из оценки (11) следует, что

$$\max|R_s(x, f_{kj})| \leqslant \mathrm{const}\cdot\max_{x_{k-j}\leqslant x\leqslant x_{k-j+s}}|f^{(s+1)}(x)|h^{s+1}, \qquad (13)$$

где постоянная не зависит от шага сетки h.

3. Приближение производных функции, заданной своими значениями в узлах сетки.

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$ и имеет непрерывную производную некоторого порядка $s+1$ на этом отрезке. Пусть $x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots, x_{k-j+s}$ — узлы интерполяции, причем $\alpha = x_{k-j} < \ldots < x_{k-j+s} = \beta$. Для вычисления производных*

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q}, \quad q = 1, 2, \ldots, s,$$

на отрезке $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$ можно воспользоваться интерполяционным многочленом $P_s(x, f_{kj})$, положив

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} \approx \frac{d^q}{dx^q} P_s(x, f_{kj}), \quad x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}. \tag{14}$$

При этом погрешность удовлетворяет оценке

$$\max_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} \left| \frac{d^q f(x)}{dx^q} - \frac{d^q}{dx^q} P_s(x, f_{kj}) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\max\limits_{x_{k-j} \leqslant x \leqslant x_{k-j+s}} |f^{(s+1)}(x)|}{(s-q+1)!} (x_{k-j+s} - x_{k-j})^{s+1-q}. \tag{15}$$

Доказательство. Функция $\varphi(x) = f(x) - P_s(x, f_{kj})$ обращается в нуль в точках $x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots, x_{k-j+s}$. Поэтому производная функции $\varphi(x)$ обращается в нуль по крайней мере в s точках, поскольку между каждыми двумя нулями функции $\varphi(x)$ по теореме Ролля есть нуль функции $\varphi'(x)$. Аналогично, $d^q\varphi(x)/dx^q$ имеет не менее, чем $s - q + 1$ нулей на отрезке $x_{k-j} \leqslant x \leqslant x_{k-j+s}$.

Это значит, что $\dfrac{d^q f(x)}{dx^q}$ и многочлен $\dfrac{d^q}{dx^q} P_s(x, f_{kj})$ степени не выше $s - q$ совпадают в некоторых $s - q + 1$ точках, т. е. многочлен $P_s^{(q)}(x, f_{kj})$ является интерполяционным для функции $f^{(q)}(x)$ на отрезке $x_{k-j} \leqslant x \leqslant x_{k-j+s}$ степени не выше $s - q$ по некоторым $s - q + 1$ узлам, лежащим на этом отрезке. Функция $f^{(q)}(x)$ имеет производную порядка $s - q + 1$:

$$\frac{d^{s-q+1}}{dx^{s-q+1}} f^{(q)}(x) = \frac{d^{s+1}}{dx^{s+1}} f(x).$$

Поэтому можно воспользоваться теоремой 2, приняв $\alpha = x_{k-j}$, $\beta = x_{k-j+s}$, и в силу оценки (6) написать

$$\max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} |f^{(q)} - P_s^{(q)}(x, f_{kj})| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(s-q+1)!} \max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} |f^{(s+1)}(x)| (\beta - \alpha)^{s-q+1}, \tag{16}$$

откуда в силу $\alpha \leqslant x_k < x_{k+1} \leqslant \beta$ следует оценка (15). □

4. Оценка неустранимой погрешности при приближении функции по ее значениям в узлах интерполяции и выбор степени кусочно многочленной интерполяции. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, \pi]$, и пусть заданы ее значения в узлах равномерной сетки $x_k = k\pi/n$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. По таблице $f(x_0), f(x_1), \ldots \ldots, f(x_n)$ в принципе нельзя восстановить функцию $f(x)$ точно, потому что различные функции могут совпадать в точках x_k $(k = 0, 1, \ldots \ldots, n)$, т. е. иметь одинаковые таблицы. Если, например, о функции $f(x)$ кроме ее таблицы известно лишь, что она непрерывна, то ее нельзя восстановить в точке $x \neq x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ ни с какой гарантированной точностью.

Пусть о функции $f(x)$ известно, что она имеет производную некоторого порядка $s + 1$, причем

$$\max_x |f^{(s+1)}(x)| \leqslant M_s = \text{const}. \tag{17}$$

Укажем две функции из этого класса, $M_s = 1$:

$$f^{\mathrm{I}}(x) = \frac{\sin nx}{n^{s+1}}, \quad f^{\mathrm{II}}(x) = -\frac{\sin nx}{n^{s+1}},$$

для которых таблицы совпадают (обе чисто нулевые):

$$f^{\mathrm{I}}(x_k) = f^{\mathrm{II}}(x_k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

и которые уклоняются друг от друга на величину порядка h^{s+1}:

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{\mathrm{I}}(x) - f^{\mathrm{II}}(x)| = \max_{0 \leqslant x \leqslant \pi} 2\left|\frac{\sin nx}{n^{s+1}}\right| = 2h^{s+1}.$$

Таким образом, по таблице функции при дополнительном знании лишь оценки (17) в принципе нельзя восстановить функцию всюду на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ с точностью больше $O(h^{s+1})$. Другими словами, погрешность $O(h^{s+1})$ неустранима при восстановлении функции $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ по ее таблице.

Очевидно, что

$$\max_x \left| \frac{d^q}{dx^q} f^{\mathrm{I}}(x) - \frac{d^q}{dx^q} f^{\mathrm{II}}(x) \right| = 2\frac{1}{n^{s-q+1}} = 2h^{s-q+1},$$

так что неустранимая погрешность при восстановлении производной $d^q f(x)/dx^q$ есть $O(h^{s-q+1})$.

Как мы видели, восстановление функции $f(x)$ или ее производной $d^q f(x)/dx^q$ по приближенным формулам (14) имеет погрешность, по порядку совпадающую с неустранимой. Если использовать интерполяцию степени $q < s$, то погрешность будет $O(h^{q+1})$, т. е. произойдет потеря порядка малости погрешности, дополнительная к той $O(h^{s+1})$, которая обусловлена заданием функции ее таблицей и неустранима.

С другой стороны, использование интерполяции степени $q > s$ не может повысить порядок малости (неустранимой) погрешности $O(h^{s+1})$ и ускорить сходимость при $h \to 0$. В этом смысле степень s

кусочно многочленной интерполяции функций, удовлетворяющих условию (17), является оптимальной.

Замечание. Проведенные рассуждения относятся к поведению погрешности при $h \to 0$. При фиксированном h интерполяция некоторой степени $q < s$ может оказаться более точной, чем интерполяция степени s. Кроме того, при задании $f(x_k)$ $(k = 0, 1, ..., n)$ приближенно с некоторым числом десятичных знаков потеря точности при интерполяции за счет приближенного задания $f(x_k)$ $(k = 0, 1, ..., n)$ при увеличении s возрастает (растут константы Лебега (19) из § 1). Поэтому интерполяция высокой степени (выше третьей) употребляется редко.

5. Насыщаемость (гладкостью) кусочно многочленной интерполяции. Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, и пусть задана ее таблица $f(x_k)$ в равноотстоящих узлах x_k $(k = 0, 1, ..., n)$; $h = (b - a)/n$. Мы видели, что погрешность кусочно многочленной интерполяции степени s с помощью интерполяционных многочленов $P_s(x, f_{kj})$ на отрезке $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$ в случае, если $f^{(s+1)}(x)$ существует и ограничена, имеет порядок $O(h^{s+1})$. Если об $f(x)$ известно лишь, что она имеет ограниченную производную некоторого порядка $q + 1$ $(q < s)$, то неустранимая погрешность при ее восстановлении по таблице есть $O(h^{q+1})$. Можно показать, что при интерполяции с помощью $P_s(x, f_{kj})$ порядок $O(h^{q+1})$ достигается. Если $f(x)$ имеет ограниченную производную порядка $q + 1$ $(q > s)$, то погрешность интерполяции с помощью $P_s(x, f_{kj})$ остается равной $O(h^{s+1})$, т. е. порядок погрешности не реагирует на дополнительную сверх $s + 1$ производных гладкость функции $f(x)$. Это свойство кусочно многочленной интерполяции называют *свойством насыщаемости (гладкостью)*.

Задачи

1. Каков должен быть шаг h таблицы функции $f(x) = \sin x$ для того, чтобы при кусочно линейной интерполяции погрешность не превосходила 10^{-6}?

2. Каков должен быть шаг h таблицы функции $f(x) = \sin x$, чтобы погрешность при кусочно квадратичной интерполяции не превосходила 10^{-6}?

3. Значения $f(x)$ могут быть измерены в заданной точке с погрешностью $|\delta f| \leqslant 10^{-4}$.

С каким шагом h разумно составить таблицу функции $f(x)$, если восстанавливать функцию по ее таблице с помощью кусочно линейной интерполяции?

4*. Вопрос задачи 3, но для кусочно квадратичной интерполяции.

5. Пусть

$$f'(x) \approx \begin{cases} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, & (18) \\ \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, & (19) \end{cases}$$

и пусть $|f''(x)| \leqslant 1$ и $|f'''(x)| \leqslant 1$.

а) Найти h, чтобы погрешность была меньше 10^{-3}.

б*) Пусть f задана с погрешностью δ. Какова наибольшая точность, достижимая по формулам (18), (19), и как выбрать h?

в*) Показать, что результат, полученный при оптимальном h по (19), неулучшаем по порядку погрешности относительно δ.

§ 3. Кусочно многочленная гладкая интерполяция (сплайны)

Классическая кусочно линейная, кусочно квадратичная и вообще кусочно многочленная интерполяции заданной степени s приводят к интерполирующей функции (интерполянту), которая в узлах интерполяции, вообще говоря, не имеет производной даже первого порядка.

Существует два типа кусочно многочленных интерполянтов — локальные и нелокальные сплайны, обладающие заданным числом производных всюду, включая узлы интерполяции.

1. Локальная интерполяция гладкости s и ее свойства. Пусть заданы узлы x_l интерполяции и значения функции $f(x_l)$ в них. Зададим натуральное (целое положительное) число s, фиксируем натуральное j $(0 \leqslant j \leqslant s - 1)$. Каждой точке x_l сопоставим интерполяционный многочлен $P_s(x, f_{lj})$, построенный по значениям $f(x_{l-j})$, $f(x_{l-j+1})$, ..., $f(x_{l-j+s})$ в узлах $x_{l-j}, x_{l-j+1}, ..., x_{l-j+s}$. Кусочно многочленный локальный сплайн $\varphi(x, s)$, имеющий непрерывные производные порядка s, определим равенствами

$$\varphi(x, s) = Q_{2s+1}(x, k), \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, \pm 1, ..., \tag{1}$$

где $Q_{2s+1}(x, k)$ — многочлен степени не выше $2s + 1$, определяемый равенствами

$$\left.\frac{d^m Q_{2s+1}(x, k)}{dx^m}\right|_{x=x_k} = \left.\frac{d^m P_s(x, f_{kj})}{dx^m}\right|_{x=x_k}, \quad m = 0, 1, 2, ..., s, \tag{2}$$

$$\left.\frac{d^m Q_{2s+1}(x, k)}{dx^m}\right|_{x=x_{k+1}} = \left.\frac{d^m P_s(x, f_{k+1,j})}{dx^m}\right|_{x=x_{k+1}}, \quad m = 0, 1, 2, ..., s. \tag{3}$$

Теорема 1. *Существует один и только один многочлен степени не выше $2s + 1$, удовлетворяющий (2), (3).*

Доказательство. Система $2s + 2$ линейных уравнений относительно коэффициентов многочлена

$$Q_{2s+1}(x, k) = c_{0k} + c_{1k}x + ... + c_{2s+1,k}x^{2s+1},$$

получающегося из системы (2), (3) при замене правых частей нулями, имеет только тривиальное решение

$$c_{ik} \underset{i}{\equiv} 0.$$

Действительно, в противном случае существовал бы многочлен Q_{2s+1} степени не выше $2s+1$, который в силу (2), (3) имел бы корни $x = x_k$, $x = x_{k+1}$ кратности $s+1$ каждый, т. е. имел бы $2s+2$ корней, считая их кратности. В силу этого противоречия определитель системы (2), (3) отличен от нуля, и она имеет одно и только одно решение при любых правых частях. □

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ есть многочлен степени не выше s. Тогда интерполянт $\varphi(x,s)$ совпадает с этим многочленом.*

Доказательство. Докажем тождество $\varphi(x,s) = f(x)$ на отрезке $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$ между соседними узлами, т. е. докажем, что $Q_{2s+1}(x,k) = f(x)$. В силу единственности интерполяционного многочлена $P_s(x, f_{kj}) \equiv P_s(x, f_{k+1,j}) \equiv f(x)$. Теперь видно, что многочлен $Q_{2s+1}(x,k) \equiv f(x)$ дает решение системы (2), (3). □

Теорема 3. *Кусочно многочленная интерполирующая функция $\varphi(x,s)$, определенная равенством* (1), *в узлах интерполяции x_l совпадает с заданными в них значениями $f(x_l)$ $(l = 0, \pm 1, \ldots)$. Кроме того, $\varphi(x,s)$ имеет всюду в области своего определения непрерывную производную порядка s.*

Доказательство. В произвольном узле x_l функции $Q_{2s+1}(x, l-1)$, $Q_{2s+1}(x,l)$ в силу равенств (2), (3) имеют производные порядков $m = 0, 1, \ldots, s$, совпадающие с соответствующими производными одного и того же интерполяционного многочлена $P_s(x, f_{lj})$. В силу (1) это доказывает теорему. □

Запишем $Q_{2s+1}(x,k)$ в виде

$$Q_{2s+1}(x,k) = P_s(x, f_{kj}) + R_{2s+1}(x,k), \tag{4}$$

обозначив через $R_{2s+1}(x,k)$ поправку к классическому интерполяционному многочлену $P_s(x, f_{kj})$.

Теорема 4. *Поправку $R_{2s+1}(x,k)$ можно записать в виде*

$$R_{2s+1}(x,k) = \\ = (x_{k+1} - x_k)^{s+1} f(x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots, x_{k-j+s+1})\, q_{2s+1}\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, k\right), \tag{5}$$

где $f(x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots, x_{k-j+s+1})$ — разностное отношение порядка $s+1$ и

$$q_{2s+1}(X,k) = \left(\frac{x_{k+s-j+1} - x_{k-j}}{x_{k+1} - x_k}\right) \times \\ \times \sum_{T=0}^{s} \left\{ \left[\prod_{i=1}^{s} \left(X - \frac{x_{k-j+i} - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) \right]_{X=1}^{(r)} \right\} l_r(X), \quad X = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \tag{6}$$

$$l_r(X) = \frac{X^{s+1}(X-1)^r}{r!\, s!} \sum_{m=0}^{s-r} (-1)^m \frac{(s+m)!}{m!} (X-1)^m. \tag{7}$$

Выражение $[\ldots]_{X=1}^{(r)}$ означает производную по X порядка r, вычисленную при $X = 1$.

Замечание 1. Можно считать, что формула локальной интерполяции гладкости s получена путем замены в интерполяционном многочлене $P_{s+1}(x, f_{kj})$, записанном в форме Ньютона

$$P_{s+1}(x, f_{kj}) = P_s(x, f_{kj}) + f(x_{k-j}, x_{k-j+1}, \ldots, x_{k-j+s+1})\, \varphi_{s+1}(x,k),$$

$$\varphi_{s+1}(x,k) = (x - x_{k-j})(x - x_{k-j+1}) \ldots (x - x_{k-j+s}),$$

многочлена $\varphi_{s+1}(x,k)$ многочленом

$$(x_{k+1} - x_k)^{s+1} q_{2s+1}\left(\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, k\right).$$

Для иллюстрации теоремы 4 заметим, что в силу формул (4)–(7) в случае $s = 0$, $j = 0$ локальный сплайн $\varphi(x,s)$ осуществляет кусочно линейную интерполяцию. В наиболее интересном для приложений случае $s = 2, j = 1$ и $x_{k+j} - x_k = h = \text{const}$

$$R_5(x,k) = P_2(x, f_{k,1}) + \frac{h^3}{2!} \frac{f(x_{k+2}) - 3f(x_{k+1}) + 3f(x_k) - f(x_{k-1})}{h^3} \times \\ \times \left(\frac{x - x_k}{h}\right)^3 \frac{x - x_{k+1}}{h} \left(3 - \frac{2(x - x_k)}{h}\right). \tag{8}$$

Доказательство теоремы 4 приведем в конце параграфа.

Теорема 5. *Пусть функция $f(x)$ определена всюду на отрезке $x \in [x_{k-j}, x_{k-j+s+1}]$ и имеет на этом отрезке ограниченную производную порядка $s+1$. Тогда на отрезке $x \in [x_k, x_{k+1}]$ справедливы приближенные равенства*

$$f^{(m)}(x) \approx \frac{d^m \varphi(x,s)}{dx^m}, \quad m = 0, 1, \ldots, s, \tag{9}$$

с оценками погрешности

$$\left| f^{(m)}(x) - \frac{d^m \varphi(x,s)}{dx^m} \right| \leqslant \\ \leqslant \text{const} \frac{(x_{k+s-j+1} - x_{k-j})^{s+1}}{(x_{k+1} - x_k)^m} \max_{x_{k-j} \leqslant x \leqslant x_{k-j+s+1}} |f^{(s+1)}(x)|, \tag{10}$$

$$m = 0, 1, \ldots, s.$$

Доказательство. В силу равенства (1) и формулы (4)

$$\left| f^{(m)}(x) - \frac{d^m \varphi(x,s)}{dx^m} \right| \leqslant |f^{(m)}(x) - P_s^{(m)}(x, f_{kj})| + |R_{2s+1}^{(m)}(x,k)|. \tag{11}$$

Но в теореме 3 из § 2 установлена оценка

$$|f^{(m)}(x) - P_s^{(m)}(x, f_{kj})| \leqslant \text{const}_1 \cdot h^{s+1-m}. \tag{12}$$

Далее, учитывая, что $\dfrac{d^m}{dx^m} = \dfrac{1}{(x_{k+1}-x_k)^m}\dfrac{d^m}{dX^m}$, $X = \dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$, получаем

$$\left|\frac{d^m R_{2s+1}(x,k)}{dx^m}\right| =$$
$$= (x_{k+1}-x_k)^{s+1-m}\,|f(x_{k-j},x_{k-j+1},\dots,x_{k-j+s+1})|\times$$
$$\times\left|\frac{x_{k+s-j+1}-x_{k-j}}{x_{k+1}-x_k}\right|\left|\sum_{r=0}^{s}\left\{\left[\prod_{i=1}^{s}\left(X-\frac{x_{k-j+i}-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\right]^{(r)}_{X=1}\right\}l_r^{(m)}(X)\right|. \quad (13)$$

В силу теоремы 3 из § 1

$$(s+1)!f(x_{k-j},x_{k-j+1},\dots,x_{k-j+s+1}) = f^{(s+1)}(\xi),\quad \xi\in[x_{k-j},x_{k-j+s+1}]. \quad (14)$$

Тогда из (13) очевидно, что

$$\left|\frac{d^m R_{2s+1}(x,k)}{dx^m}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}_2\cdot|x_{k+1}-x_k|^{s+1-m}\max_{x_{k-j}\leqslant x\leqslant x_{k-j+s-1}}\left|\frac{d^{s+1}f(x)}{dx^{s+1}}\right|, \quad (15)$$

где const_2 зависит только от величины отношения

$$\frac{x_{k-j+s+1}-x_{k-j}}{x_{k+1}-x_k} \quad (16)$$

и остается ограниченной, если величина (16) в процессе измельчения сетки остается ограниченной.

Из выражений (11), (12), (15) следует оценка (10). □

Сделаем два замечания о неулучшаемости построенных нами локальных сплайнов (1) в некотором смысле.

Замечание 2. Оценки (10) в случае постоянного шага $x_{k+1}-x_k=(b-a)/n=h$ гарантируют сходимость $\varphi^{(m)}(x,s)$ к $f^{(m)}(x)$ с порядком h^{s+1-m} $(m=0,1,\dots,s)$. Предполагая, что $f(x)$ имеет ограниченные производные только до порядка $s+1$, более точно восстановить функцию $f(x)$ и ее производные по значениям $f(x_l)$ $(l=0,\pm1,\dots)$ нельзя, поскольку эти значения не содержат достаточной для этого информации, как мы показали в п. 4 § 2.

Замечание 3. Для вычисления $\varphi(x,s)$ при каждом x используется не более $s+2$ узлов интерполяции. Эта характеристика локальности формулы (1) неулучшаема в следующем смысле.

Если потребовать, чтобы использовалось не более $s+1$ точек, то для сходимости $\varphi^{(m)}(x,s)$ к $f^{(m)}(x)$ с порядком h^{s+1-m} пришлось бы отказаться от условия непрерывности даже первых производных от $\varphi(x,s)$ и ограничиться классической кусочно многочленной интерполяцией степени не выше s.

В случае если задано конечное число $n+1$ узлов $x_0,x_1,\dots,x_n$, лежащих на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, формулу (1) вблизи концов отрезка надо изменить, определив интерполянт $\varphi(x)=\varphi(x,s,a,b)$ равенствами

$$\varphi(x,s,a,b)=\begin{cases} P_s(x,f_{jj}), & \text{если}\quad x_0\leqslant x\leqslant x_j,\\ Q_{2s+1}(x,k), & \text{если}\quad x\in[x_k,x_{k+1}],\\ & \text{причем}\quad k=j,j+1,\dots,n+j-s-1,\\ P_s(x,f_{n+j-s,j}), & \text{если}\quad x_{n+j-s}\leqslant x\leqslant x_n.\end{cases}$$

Напомним, что $P_n(x,f_{kj})$ введено в конце п. 1 § 2.

Интерполянт $\varphi(x,s,a,b)$, определенный на $[a,b]$, имеет непрерывные производные до порядка s. Для него имеют смысл утверждения, аналогичные теоремам 1–5.

Локальная гладкая интерполяция введена автором в 1952 г. для функций на многомерной прямоугольной сетке с постоянным шагом; приведенные здесь формулы получены автором в 1974 г. Результаты для многомерного случая и библиографию см. в [16, с. 303–309].

2. Нелокальная гладкая кусочно многочленная интерполяция. Пусть заданы узлы $x_0,x_1,\dots,x_n$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, и значения функции $f(x_i)$ $(i=0,1,\dots,n)$ в этих узлах. Поставим задачу: найти на каждом отрезке $x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}$ кубический многочлен $P_3(x,k)$ так, чтобы возникающая при этом на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ кусочно многочленная функция совпадала с заданной функцией в узлах и имела непрерывные производные до порядка $s=2$. Эта функция зависит от двух произвольных постоянных и называется *кубическим сплайном Шонберга.* Сплайны минимальной для заданного s степени построены Шонбергом не только при $s=2$, но и при всех натуральных s.

Пусть $f(x)$ имеет на $[a,b]$ ограниченную производную некоторого порядка $s+1$. Тогда непрерывный с производными порядка s сплайн при подходящих постоянных сохраняет неулучшаемые приближающие свойства классической, а также локальной гладкой кусочно многочленной интерполяций в том смысле, что для него в случае, если существует $f^{(s+1)}(x)$, выполнены оценки типа (10). Однако сплайны Шонберга теряют свойство локальности, присущее как классической кусочно многочленной интерполяции, так и локальной гладкой интерполяции: коэффициенты многочлена, задающего интерполянт на каком-либо отрезке $x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}$, зависят от значений $f(x_0), f(x_1),\dots$ $\dots, f(x_n)$ функции во всех узлах $x_0,x_1,\dots,x_n$, число которых n растет в случае измельчения сетки.

Отметим еще, что (нежелательное) свойство насыщаемости гладкостью, неизбежно присущее локальным классической и гладкой интерполяциям, несмотря на потерю локальности, остается также и у нелокальных сплайнов: для функций $f(x)$, имеющих более $s+1$ производных, нелокальные сплайны гладкости s при постоянном шаге $h=(b-a)/n$ сетки имеют погрешность $O(h^{s+1})$ того же порядка малости по отношению к $h=1/n$, что и для функций $f(x)$, имеющих только $(s+1)$-ю производную.

Нелокальные сплайны Шонберга при заданном числе непрерывных производных реализуются многочленами наименьшей возможной степени n (например, $m=3$, если $s=2$ — кубические сплайны Шонберга).

Подробнее о сплайнах Шонберга и других сплайнах см. [1, 2, 9, 12, 16, 22] и имеющуюся там библиографию.

3. Доказательство теоремы 4. Коэффициенты многочлена

$$Q_{2s+1}(x,k)=c_0+c_1x+\ldots+c_{2s+1}x^{2s+1} \tag{17}$$

определяются из системы линейных уравнений (2), (3). Правые части уравнений, составляющих систему (2), имеют вид

$$a_0^{(m)}f_{k-j}+a_1^{(m)}f_{k-j+1}+\ldots+a_s^{(m)}f_{k-j+s},$$

а составляющих систему (3) — вид

$$b_0^{(m)}f_{k-j+1}+b_1^{(m)}f_{k-j+2}+\ldots+b_s^{(m)}f_{k-j+s+1},\qquad m=0,1,\ldots,s,$$

где $a_i^{(m)}$, $b_i^{(m)}$ $(i=0,1,\ldots,s)$ — некоторые числа, не зависящие от $f_{k-j},\ f_{k-j+1},\ldots,f_{k-j+s+1}$.

Поэтому решение $c_0,c_1,\ldots,c_{2s+1}$ системы (2), (3) состоит из чисел, которые определяются заданными $f_{k-j},f_{k-j+1},\ldots,f_{k-j+s+1}$ по формулам вида

$$c_r=\alpha_0^{(r)}f_{k-j}+\alpha_1^{(r)}f_{k-j+1}+\ldots+\alpha_{s+1}^{(r)}f_{k-j+s+1},\qquad r=0,1,\ldots,2s+1, \tag{18}$$

$\alpha_l^{(r)}$ — некоторые числа, не зависящие от $f_{k-j},f_{k-j+1},\ldots,f_{k-j+s+1}$. Подставив выражения (18) в (17) и собрав все слагаемые, содержащие f_{k-j+l} $(l=0,1,\ldots,s+1)$, получим запись многочлена (17) в виде

$$Q_{2s+1}(x,k)=\sum_{l=0}^{s+1}f_{k-j+l}\,p(x,l), \tag{19}$$

где $p(x,l)$ $(l=0,1,\ldots,s+1)$ — некоторые многочлены от x. Заменим в (19) числа f_{k-j+l} по формулам (18) из § 1. Многочлен $Q_{2s+1}(x,k)$ примет вид

$$Q_{2s+1}(x,k)=\sum_{l=0}^{s}f(x_{k-j},x_{k-j+1},\ldots,x_{k-j+l})\,q_l(x,k)+$$
$$+(x_{k+1}-x_k)^{(s+1)}f(x_{k-j+1},x_{k-j+2},\ldots,x_{k-j+s+1})\,\widetilde{q}_{2s+1}(x,k), \tag{20}$$

где $q_l(x,k)$ $(l=0,1,\ldots,s)$ и $\widetilde{q}_{2s+1}(x,k)$ — некоторые многочлены, не зависящие от $f(x_{k-j}),f(x_{k-j+1}),\ldots,f(x_{k-j+s+1})$. Воспользуемся этой независимостью для отыскания многочленов $q_l(x,k)$. Зададим $f_{k-j},\ f_{k-j+1},\ldots,f_{k-j+s}$ произвольно, а $f_{k-j+s+1}$ зададим равенством

$$f_{k-j+s+1}=P_s(x,f_{kj})\big|_{x=x_{k-j+s+1}}.$$

В силу теоремы 2 в этом случае

$$Q_{2s+1}(x,k)=P_s(x,f_{kj}),$$

а в силу следствия 3 из формулы Ньютона (см. § 1) разностное отношение $f(x_{k-j},x_{k-j+1},\ldots,x_{k-j+s+1})$ порядка $s+1$ обращается в нуль. Таким образом, формула (20) примет вид

$$P_s(x,f_{kj})=\sum_{l=0}^{s}f(x_{k-j},x_{k-j+1},\ldots,x_{k-j+l})\,q_l(x,k). \tag{21}$$

В силу произвольности значений $f_{k-j},f_{k-j+1},\ldots,f_{k-j+s}$ отсюда следует, что $q_l(x,k)=(x-x_{k-j})(x-x_{k-j+1})\ldots(x-x_{k-j+l})$ $(l=0,1,\ldots,s)$. Из (21) следует также, что равенству (20) можно придать вид

$$Q_{2s+1}(x,k)=P_s(x,f_{kj})+$$
$$+(x_{k+1}-x_k)^{s+1}f(x_{k-j},x_{k-j+1},\ldots,x_{k-j+s+1})\,\widetilde{q}_{2s+1}(x,k). \tag{22}$$

Для вычисления многочлена $\widetilde{q}_{2s+1}(x,k)$ зададим

$$f_{k-j}=f_{k-j+1}=\ldots=f_{k-j+s}=0,\qquad f_{k-j+s+1}=1. \tag{23}$$

При условиях (23) формула (22) примет вид

$$Q_{2s+1}(x,k)=(x_{k+1}-x_k)^{s+1}f(x_{k-j},x_{k-j+1},\ldots,x_{k-j+s+1})\,\widetilde{q}_{2s+1}(x,k). \tag{24}$$

Заметим, что при условиях (23) интерполяционный многочлен $P_{s+1}(x,f,x_{k-j},x_{k-j+1},\ldots,x_{k-j+s+1})$ в силу справедливости его записи в форме Лагранжа совпадает с многочленом

$$\prod_{l=0}^{s}\frac{x-x_{k-j+l}}{x_{k-j+s+1}-x_{k-j+l}}, \tag{25}$$

а в силу записи в форме Ньютона (см. (4) из § 1) имеет вид

$$f(x_{k-j},x_{k-j+1},\ldots,x_{k-j+s+1})\prod_{l=0}^{s}(x-x_{k-j+l}). \tag{26}$$

Приравнивая (25) и (26) друг другу, получаем, что при условиях (23)

$$f(x_{k-j},x_{k-j+1},\ldots,x_{k-j+s+1})=\Big[\prod_{l=0}^{s}(x_{k-j+s+1}-x_{k-j+l})\Big]^{-1}. \tag{27}$$

Таким образом, из (24) получаем

$$\widetilde{q}_{2s+1}(x,k)=(x_{k+1}-x_k)^{-s-1}Q_{2s+1}(x,k)\prod_{l=0}^{s}(x_{k-j+s+1}-x_{k-j+l}), \tag{28}$$

где выражения в правой части вычислены при условиях (23).

Преобразуем (28) к требуемому виду (6), (7). Для этого найдем явную формулу для $Q_{2s+1}(x,k)$ при условиях (23). Заметим, что благодаря условию (2) значение $x=x_k$ является корнем кратности $s+1$ многочлена $Q_{2s+1}(x,k)$, так что $Q(x)=Q_{2s+1}(x)/(x-x_k)^{s+1}$ есть многочлен степени s.

Разложим $Q(x)$ по степеням $x-x_{k+1}$:

$$Q_{2s+1}(x,k)=(x-x_k)^{s+1}\frac{Q_{2s+1}(x,k)}{(x-x_k)^{s+1}}=$$
$$=(x-x_k)^{s+1}\sum_{r=0}^{s}\frac{1}{r!}\left[\frac{Q_{2s+1}(x,k)}{(x-x_k)^{s+1}}\right]^{(r)}_{x=x_{k+1}}(x-x_{k+1})^r. \qquad (29)$$

Используем равенство (3) и напишем

$$\frac{d^r}{dx^r}\left[\frac{Q_{2s+1}(x,k)}{(x-x_k)^{s+1}}\right]\Big|_{x=x_{k+1}}=$$
$$=\sum_{l=0}^{r}C_r^l\left(\frac{d^{r-l}}{dx^{r-l}}P_s(x,f,x_{k-j+1},\dots,x_{k-j+s+1})\right)\Big|_{x=x_{k+1}}\times$$
$$\times[(x-x_k)^{-s-1}]^{(l)}_{x=x_{k+1}}. \qquad (30)$$

Но при условии (23) в силу (1)

$$P_s(x,f,x_{k-j+1},\dots,x_{k-j+s+1})=\prod_{i=1}^{s}\frac{x-x_{k-j+i}}{x_{k-j+s+1}-x_{k-j+i}}. \qquad (31)$$

Подставляя (31) в (30), получаем

$$\frac{d^r}{dx^r}\left[\frac{Q_{2s+1}(x,k)}{(x-x_k)^{s+1}}\right]\Big|_{x=x_{k+1}}=\left[\prod_{i=1}^{s}(x_{k-j+s+1}-x_{k-j+i})\right]^{-1}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{r}C_r^l[(x-x_k)^{-s-1}]^{(l)}_{x=x_{k+1}}\left[\prod_{i=1}^{s}(x-x_{k-j+i})\right]^{r-l}_{x=x_{k+1}}. \qquad (32)$$

Подставляя (32) в (29), а (29) в (28), получаем явное выражение для $\widetilde{q}_{2s+1}(x,k)$ в виде двойной суммы по l и по r, которое зависит от x только как сложная функция $q_{2s+1}(X,k)$ от $X=(x-x_k)/(x_{k+1}-x_k)$:

$$\widetilde{q}_{2s+1}(x,k)=q_{2s+1}(X,k).$$

Изменяя порядок суммирования в полученной формуле для $q_{2s+1}(X,k)$, получаем запись в форме (6), (7). □

Задачи

1. Пусть $x_{k+1}-x_k=h=\mathrm{const}$.

Выпишите многочлены $l_t(x,s)$, с помощью которых локальный сплайн $\widetilde{\psi}(x,s)$ заданной гладкости s, определяемый при $x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}$ равенством (4), можно записать в форме

$$\widetilde{\psi}(x,s)=\sum_t f(x_t)\,l_t(x,s).$$

Рассмотреть случаи: $s=0,\ j=0$; $s=1,\ j=0$; $s=2,\ j=2$.

2. Найти точные значения констант Лебега

$$L_s=\max_{\substack{|f_m|=1,\\ k-j\leqslant m\leqslant k-j+s+1}}\ \max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}}|Q_{2s+1}(x)|$$

для локальных гладких сплайнов при $s=2,\ j=1$.

3. Доказать, что в случае $x_{t+1}-x_t=h=\mathrm{const}$

$$\max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}}\left|\frac{d^mQ_{2s+1}(x)}{dx^{(m)}}\right|\leqslant$$
$$\leqslant c\max_{0\leqslant j\leqslant s-m+1}|f(x_{k-j+i},x_{k-j+i+1},\dots,x_{k-j+i+m})|,\qquad m=0,1,\dots,s,$$

где $c=c(s,j,m)$ не зависят от h.

Вычислить c в случаях: $s=0,\ j=0$; $s=2,\ j=1$.

§ 4. Интерполяция функций двух переменных

Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ задана в узлах некоторой правильной или нерегулярной сетки. Как восстановить ее приближенно в точках (x,y), не принадлежащих множеству узлов?

1. Случай прямоугольной сетки. Пусть сетка образована пересечением прямых $x=x_k$ $(k=0,\pm1,\dots)$ и прямых $y=y_l$ $(l=0,\pm1,\dots)$. Считаем, что $x_{k+1}>x_k$, $y_{l+1}>y_l$ при любых целых k,l. Значение функции в узле (x_k,y_l) обозначим через f_{kl}. Для вычисления функции в точке $(\overline{x},\overline{y})$ можно воспользоваться аппаратом кусочно многочленной интерполяции заданной степени s для функций одного переменного.

Для этого сначала осуществляется кусочно многочленная интерполяция заданной степени по x на каждой из прямых $y=y_l$. Затем при каждом интересующем нас значении $x=\overline{x}$ осуществляется кусочно многочленная интерполяция (той же или другой степени) по y вдоль прямой $x=\overline{x}$ по значениям функции $f(x,y)$ в точках $(\overline{x},y_l)$, полученным на первом шаге процесса. Например, в случае кусочно линейной интерполяции по обоим аргументам этот процесс приводит для интерполяции в прямоугольнике $x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}$, $y_l\leqslant y\leqslant y_{l+1}$ к интерполяционному многочлену

$$P(x,y)=f_{kl}\frac{(x-x_{k+1})(y-y_{l+1})}{(x_k-x_{k+1})(y_l-y_{l+1})}+f_{k+1,l}\frac{(x-x_k)(y-y_{l+1})}{(x_{k+1}-x_k)(y_l-y_{l+1})}+$$

$$+ f_{k+1,l+1}\frac{(x-x_k)(y-y_l)}{(x_{k+1}-x_k)(y_{l+1}-y_l)} + f_{k,l+1}\frac{(x-x_{k+1})(y-y_l)}{(x-x_{k+1})(y_{l+1}-y_l)}.$$

2. Треугольные сетки. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой криволинейной области D, причем известно, что в “горловине” функция быстро изменяется.

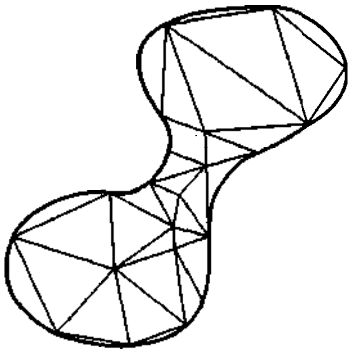

Рис. 2

В таком случае прямоугольная сетка неудобна для табличного задания функции, так как эта сетка не связана с формой границы области D и, кроме того, ее нельзя сгустить только в горловине. Можно воспользоваться треугольной сеткой (рис. 2), свободной от этих недостатков, и принять за узлы интерполяции вершины треугольников.

Если $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma$ — значения $f(x,y)$ в вершинах α, β, γ треугольника, то можно осуществить приближенное вычисление функции внутри треугольника с помощью линейной функции

$$f(x,y) \approx P(x,y) = ax + by + c,$$

подобрав a, b, c из условий

$$ax_\alpha + by_\alpha + c = f_\alpha,$$
$$ax_\beta + by_\beta + c = f_\beta,$$
$$ax_\gamma + by_\gamma + c = f_\gamma,$$

где (x_α, y_α), (x_β, y_β), (x_γ, y_γ) — соответственно координаты вершин α, β, γ. Погрешность интерполяции для функции $f(x,y)$ с непрерывными вторыми производными будет $O(h^2)$, где h — длина наибольшей стороны треугольника.

Существуют способы построения кусочно многочленной интерполяции более высокого порядка, а также кусочно многочленной гладкой интерполяции. Аналогичные конструкции существуют и для интерполяции функций многих переменных.

Подчеркнем, что объем таблиц, обеспечивающих возможность восстановления функции данной гладкости с заданной точностью, быстро возрастает с ростом числа аргументов, а алгоритмы усложняются.

Задачи

1. Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет вторые производные, ограниченные по модулю единицей.

Как экономно выбрать точки сетки на плоскости, чтобы по значениям функции $z = f(x,y)$ в выбранных точках можно было восстановить функцию в любой точке квадрата $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$ с погрешностью, не превосходящей $\varepsilon = 10^{-3}$?