

1. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel? nullához, ha $x \rightarrow a$. Az f függvény a pontbeli deriválhatósága tehát azt jelenti, hogy a függvény az a pont környezetében „jól” közelíthető lineáris függvénnnyel. Ezt a közelítést gyakran az

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x - a) \quad (\text{ha } x \sim a)$$

jelöléssel fejezzük ki. A szóban forgó lineáris függvény grafikonja az

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

egyenletű egyenes, ami az f függvény grafikonjának $(a, f(a))$ pontbeli érintője. ■

2. Mi a Taylor-polynom definíciója?

1. Definíció. Ha $n \in \mathbb{N}$, $a \in D_f$ és $f \in D^n\{a\}$, akkor a

$$\begin{aligned} T_{n,a}f(x) &:= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

polinomot az f függvény a ponthoz tartozó n -edik Taylor-polynomjának nevezünk.

3. Mi a kapcsolat a függvénynek és Taylor-polinomjának deriváltjai között a Taylorpolinom középpontjában?

4. Fogalmazza meg a Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal néven tanult tételt!

2. Tétel (Taylor-formula). Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f \in D^{n+1}(K(a))$. Ekkor $\forall x \in K(a)$ ponthoz $\exists \xi$ az a és az x pontok között, hogy

$$f(x) - T_{n,a}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}.$$

A fenti képlet jobb oldalán álló függvényt Lagrange-féle maradéktagnak nevezzük.

5. Hogyan deniálja egy függvény Taylor-sorát?

2. Definíció. Ha $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \in D^\infty\{a\}$, akkor a

$$\begin{aligned} T_a f(x) &:= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

hatványsort az f függvény a ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük.

Az $a = 0$ esetben használatos a **Maclaurin-sor** elnevezés is.

6. Mi a kapcsolat hatványsor összegfüggvényének a deriváltjai és a hatványsor együtthatói között?
7. Milyen elégséges feltételeket ismer függvények Taylor-sorral történő előállítására?

4. Tétel (Elégséges feltétel függvények Taylor-sorral történő előállítására).

Legyen $f \in D^\infty(K(a))$, és tegyük fel, hogy $\exists M > 0$ valós szám, amire

$$\forall x \in K(a), \forall n \in \mathbb{N}: |f^{(n)}(x)| \leq M$$

teljesül. Ekkor f -nek az a ponthoz tartozó Taylor-sora a $K(a)$ halmazon előállítja az f függvényt, vagyis fennáll a következő egyenlőség

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in K(a)).$$

8. Milyen állítást ismer az $1/(1-x)$ függvény hatványsoros előállítására?