

1. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel? nullához, ha  $x \rightarrow a$ . **Az  $f$  függvény a pontbeli deriválhatósága tehát azt jelenti, hogy a függvény az  $a$  pont környezetében „jól” közelíthető lineáris függvénnyel.** Ezt a közelítést gyakran az

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x - a) \quad (\text{ha } x \sim a)$$

jelöléssel fejezzük ki. A szóban forgó lineáris függvény grafikonja az

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

egyenletű egyenes, ami az  $f$  függvény grafikonjának  $(a, f(a))$  pontbeli érintője. ■

2. Mi a Taylor-polinom definíciója?

**1. Definíció.** Ha  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathcal{D}_f$  és  $f \in D^n\{a\}$ , akkor a

$$\begin{aligned} T_{n,a}f(x) &:= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

polinomot az  $f$  függvény  $a$  ponthoz tartozó  $n$ -edik Taylor-polinomjának nevezzük.

3. Mi a kapcsolat a függvénynek és Taylor-polinomjának deriváltjai között a Taylorpolinom középpontjában?

4. Fogalmazza meg a Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal néven tanult tételt!

**2. Tétel (Taylor-formula).** Legyen  $n \in \mathbb{N}$ , és tegyük fel, hogy  $f \in D^{n+1}(K(a))$ . Ekkor  $\forall x \in K(a)$  ponthoz  $\exists \xi$  az  $a$  és az  $x$  pontok között, hogy

$$f(x) - T_{n,a}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}.$$

A fenti képlet jobb oldalán álló függvényt **Lagrange-féle maradéktagnak** nevezzük.

5. Hogyan definiálja egy függvény Taylor-sorát?

**2. Definíció.** Ha  $a \in \mathcal{D}_f$  és  $f \in D^\infty\{a\}$ , akkor a

$$\begin{aligned} T_a f(x) &:= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

hatványsort az  **$f$  függvény  $a$  ponthoz tartozó Taylor-sorának** nevezzük.

Az  $a = 0$  esetben használatos a **Maclaurin-sor** elnevezés is.

6. Mi a kapcsolat hatványsor összegfüggvényének a deriváltjai és a hatványsor együtthatói között?

7. Milyen elégséges feltételeket ismer függvények Taylor-sorral történő előállítására?

**4. Tétel (Elégséges feltétel függvények Taylor-sorral történő előállítására).**  
Legyen  $f \in D^\infty(K(a))$ , és tegyük fel, hogy  $\exists M > 0$  valós szám, amire

$$\forall x \in K(a), \forall n \in \mathbb{N}: |f^{(n)}(x)| \leq M$$

teljesül. Ekkor  $f$ -nek az  $a$  ponthoz tartozó Taylor-sora a  $K(a)$  halmazon előállítja az  $f$  függvényt, vagyis fennáll a következő egyenlőség

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in K(a)).$$

8. Milyen állítást ismer az  $1/(1-x)$  függvény hatványsoros előállítására?