

10. gyakorlat

TÖBBVÁLTOZÓS ANALÍZIS 1.

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények folytonossága

Emlékeztető. Az \mathbb{R}^2 lineáris téren az $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vektor *euklideszi normáját* így értelmezzük:

$$\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Két $x, y \in \mathbb{R}^2$ pont *távolságát* a norma segítségével értelmezzük:

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad (x \in \mathbb{R}^2).$$

Egy $a \in \mathbb{R}^2$ pont $r > 0$ sugarú *környezetén* a

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| < r\}$$

halmazt értjük. $K_r(a)$ az a pont körüli r sugarú nyílt körlap.

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *folytonos az $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f$ pontban*, (jelben $f \in C\{(a_1, a_2)\}$), ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0 \text{ úgy, hogy } \forall (x, y) \in \mathcal{D}_f, \ |(x, y) - (a_1, a_2)| < \delta \text{ pontban } |f(x, y) - f(a_1, a_2)| < \varepsilon.$$

Tétel. (A folytonosságra vonatkozó átviteli elv) Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in C\{(a_1, a_2)\} \iff \forall (x_k, y_k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f, \ \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k, y_k) = (a_1, a_2) \text{ esetén } \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k, y_k) = f(a_1, a_2).$$

Az átviteli elvből következik, hogy ha $\exists (x_k, y_k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f$ sorozat, amely az (a_1, a_2) ponthoz konvergál, de

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k, y_k) \neq f(a_1, a_2),$$

akkor az f függvény nem folytonos az (a_1, a_2) pontban.

1. Feladat. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} & ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0, 0)$ pontban!

Megoldás. A tört számlálója és a nevezője az origóhoz közeli pontokban 0-hoz közeli értékeket vesz fel. Két kicsi szám hárnyadosáról van szó. Azt már tudjuk, hogy az bármi lehet. A feladat állítása szerint a tört az origóhoz közeli pontokban 0-hoz közeli értékeket vesz fel.

A folytonosság definíciója alapján azt kell belátnunk, hogy

$$(*) \ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in \mathcal{D}_f, \ |(x, y) - (0, 0)| < \delta \text{ pontban } |f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon.$$

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ valós számot. Ha $(x, y) = (0, 0)$, akkor $|f(x, y) - f(0, 0)| = 0 < \varepsilon$.

Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, akkor

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{x^2 \cdot |y|^3}{2x^2 + y^2} \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot |y|^3 \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \cdot |y|^3 = |y|^3 \leq \\ &\leq (\text{ha felteszük, hogy } \|(x, y)\| < 1, \text{ akkor } |y| < 1) \leq |y|^2 \leq x^2 + y^2 = \underbrace{\|(x, y)\|^2}_{\|(x, y)\| < \sqrt{\varepsilon}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Így, ha $\delta := \min\{1, \sqrt{\varepsilon}\}$, akkor (*) teljesül, ami azt jelenti, hogy $f \in C\{(0, 0)\}$.

2. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0, 0)$ pontban!

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan az f függvényértékek az origóhoz közeli pontokban két kicsi szám hánnyadosa. Most azt kell megmutatnunk, hogy nem igaz az, hogy minden ilyen hánnyados közel van a 0-hoz.

A folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint elég lenne olyan, a $(0, 0)$ ponthoz tartó (x_n, y_n) ($n \in \mathbb{N}$) pontsorozatot találni, amelyre a függvényértékek sorozatának a határértéke nem egyenlő a $(0, 0)$ pontban felvett $f(0, 0) = 0$ függvényértékkel.

Vegyük észre, hogy ha f értékeit például az $y = x$ egyenes pontjaiban tekintjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$f(x, y) = f(x, x) = \frac{2x \cdot x}{x^2 + x^2} = 1 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Így, ha $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ($n \in \mathbb{N}^+$), akkor a sorozat az origóhoz konvergál:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0), \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty,$$

de $f(x_n, y_n) = 1$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, tehát $f(x_n, y_n) \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow +\infty$. Ez a határérték különbözik az $f(0, 0) = 0$ függvényértéktől, ami azt jelenti, hogy az f függvény nem folytonos az origóban.

3. Feladat. Legyen

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}), \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy f leszűkítése minden, az origón átmenő egyenesre egy folytonos egy változós függvény, de $f \notin C\{(0, 0)\}$.

Megoldás. Három esetet fogunk megkülönböztetni:

- f leszűkítése az $y = 0$ egyenesre: $\varphi(x) := f(x, 0) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$) folytonos függvény.
- f leszűkítése az $x = 0$ egyenesre: $\varphi(y) := f(0, y) = 0$ ($y \in \mathbb{R}$) folytonos függvény.
- f leszűkítése az $y = mx$ egyenesekre, ahol $m \neq 0$ rögzített paraméter:

$$\varphi(x) := f(x, mx) = \frac{x^2 \cdot (mx)}{x^4 + (mx)^2} = m \cdot \frac{x}{x^2 + m^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Mivel $f(0, 0) = 0$, így $\varphi(0) = 0$, azaz a fenti összefüggés is igaz $x = 0$ -ra. Tehát φ folytonos függvénytetszőleges $m \neq 0$ paraméter esetén.

A feladat első állítása szerint, ha egyenes mentén az origóhoz közeledünk, akkor a függvényben szereplő hánnyados értéke nullához tart.

A feladat második állítása szerint nem igaz az, hogy az origóhoz közelí *tetszőleges* pontokban felvett függvényértékek is közel vannak a $(0, 0)$ pontban felvett $f(0, 0) = 0$ függvényértékhez. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint elég lenne olyan, a $(0, 0)$ ponthoz tartó (x_n, y_n) ($n \in \mathbb{N}$) pontsorozatot találni, amelyre a függvényértékek sorozatának a határértéke nem egyenlő a $(0, 0)$ pontban felvett $f(0, 0) = 0$ függvényértékkel.

Vegyük észre, hogy most az $y = mx^2$ parabolák mentén kaphatunk ilyen sorozatokat, mivel

$$f(x, y) = f(x, mx^2) = \frac{x^2 \cdot (mx^2)}{x^4 + (mx^2)^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

nem függ az x értéktől. Legyen például $m = 1$, és vegyük például az

$$(x_n, y_n) = (x_n, x_n^2) := \left(\frac{1}{n}, \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozatot. Világos, hogy ez a sorozat az origóhoz konvergál:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow (0, 0), \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty,$$

de $f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, tehát $f(x_n, y_n) \rightarrow \frac{1}{2}$, ha $n \rightarrow +\infty$. Ez a határérték különbözik az $f(0, 0) = 0$ függvényértéktől, ami azt jelenti, hogy az f függvény nem folytonos az origóban.

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények határértéke

Emlékeztető. Az $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}'_f$ pontban **van határértéke**, ha $\exists A \in \mathbb{R}$, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f$, $0 < \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < \delta$ pontban $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Tétel. (A határértékre vonatkozó átviteli elv) Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)} f = A \iff \forall (x_k, y_k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f \setminus \{(a_1, a_2)\}, \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k, y_k) = (a_1, a_2) \text{ esetén } \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k, y_k) = A.$$

Az átviteli elvből következik, hogy ha van két olyan $(x_k, y_k), (u_k, v_k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f \setminus \{(a_1, a_2)\}$ sorozat, amely az (a_1, a_2) ponthoz konvergál, de

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k, y_k) \neq \lim_{k \rightarrow +\infty} f(u_k, v_k),$$

akkor az f függvénynek nincs határértéke az (a_1, a_2) pontban.

4. Feladat. Lássuk be, hogy

$$a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4y}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

$$b) \quad a \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} \text{ határérték nem létezik!}$$

Megoldás.

a) A definíció alapján fogjuk a határértékeket igazolni:

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ (\star) \quad & 0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \text{ esetén } \left| \frac{x^4y}{(x^2+y^2)^2} - 0 \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ekkor $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ pontban

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^4y}{(x^2+y^2)^2} - 0 \right| &= |y| \cdot \frac{(x^2)^2}{(x^2+y^2)^2} \leq |y| \cdot \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x, y)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Így, ha $\delta := \varepsilon$, akkor (\star) teljesül.

b) A határértékre vonatkozó átviteli elv szerint elegendő két olyan, a $(0, 0)$ ponthoz tartó sorozatot találni, amelyekre a

$$g(x, y) := \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$$

függvényértékek sorozatának a határértéke különböző.

Rögzített $m \in \mathbb{R}$ esetén tekintsük g értékeit az $y = mx$ egyenletű egyenes pontjaiban:

$$g(x, y) = g(x, mx) = \frac{x^4}{(x^2+(mx)^2)^2} = \frac{1}{(1+m^2)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Ekkor

- ha $m = 0$ és így $(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, 0\right) \rightarrow (0, 0)$ $\implies g(x_n, y_n) = \frac{1}{(1+0^2)^2} = 1$,
- ha $m = 1$ és így $(u_n, v_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0)$ $\implies g(u_n, v_n) = \frac{1}{(1+1^2)^2} = \frac{1}{4}$.

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (0, 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n, v_n),$$

de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n, y_n) = 1 \neq \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n, v_n),$$

ezért a g függvénynek nincs határértéke a $(0, 0)$ pontban.

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények parciális deriváltjai

Emlékeztető. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{és} \quad a = (a_1, a_2) \in \text{int } \mathcal{D}_f.$$

A függvény grafikonja a térben a $z = f(x, y)$ egyenletű felület. Fektessünk az a ponton át az x tengellyel párhuzamos egyenest (t tengelyt). Ennek pontjai az xy síkban: $(a_1 + t, a_2)$ ($t \in \mathbb{R}$).

Vegyük a függvény értékeit ezekben a pontokban, és képezzük velük az

$$F_x(t) := f(a_1 + t, a_2) \quad ((a_1 + t, a_2) \in \mathcal{D}_f)$$

valós-valós függvényt. Ez a függvény értelmezhető a $t = 0$ pontnak egy $K(0)$ környezetében, mert $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$. Az F_x függvény képe egy, a felületen futó (metszet)görbe, vagyis a $z = f(x, y)$ egyenletű **felület** és az $y = a_2$ (x, z tetszőleges) egyenletű **sík** metszésvonala. Az **f függvény x változó szerinti parciális deriváltját az a pontban** (jele: $\partial_x f(a)$ vagy $\partial_1 f(a)$) úgy értelmezzük, mint **az F_x függvény deriváltja a 0 pontban**, feltéve, hogy a derivált létezik, azaz

$$\partial_x f(a) := \partial_1 f(a) := F'_x(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_x(t) - F_x(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

$F'_x(0)$ a metszetgörbe $P(a, f(a))$ pontbeli **érintőjének** a meredeksége.

Az y változó szerinti parciális deriváltat hasonló módon értelmezzük: $F_y(t) := f(a_1, a_2 + t)$ ($t \in K(0)$), és

$$\partial_y f(a) := \partial_2 f(a) := F'_y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_y(t) - F_y(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

Egy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény i -edik ($i = 1, 2$) változója szerinti parciális deriváltját az $a = (a_1, a_2) \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban úgy számítjuk ki, hogy az a pont koordinátáit az i -edik kivételével rögzítjük, és az így kapott valós-valós függvényt deriváljuk (ha az deriválható).

5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait!

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^3}{xy} \quad (x, y > 0).$$

Megoldás. Ha x szerint deriválunk, akkor y rögzített és x -et tekintjük változónak:

$$\partial_x f(x, y) = \frac{2x \cdot xy - (x^2 - y^3) \cdot y}{(xy)^2} = \frac{2x^2y - x^2y + y^4}{x^2y^2} = \frac{x^2y + y^4}{x^2y^2} = \frac{x^2 + y^3}{x^2y}.$$

Ha y szerint deriválunk, akkor x rögzített és y -et tekintjük változónak:

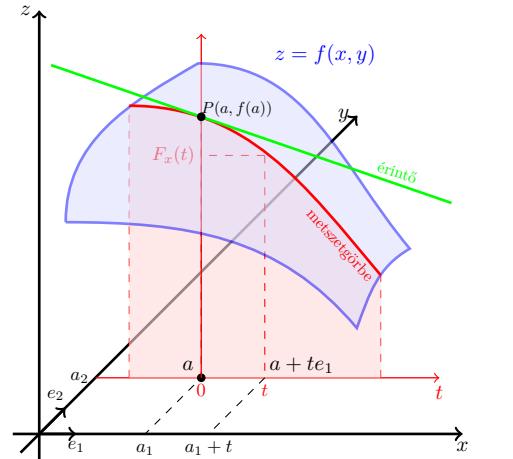
$$\partial_y f(x, y) = \frac{-3y^2 \cdot xy - (x^2 - y^3) \cdot x}{(xy)^2} = \frac{-3xy^3 - x^3 + xy^3}{x^2y^2} = \frac{-2xy^3 - x^3}{x^2y^2} = -\frac{x^2 + 2y^3}{xy^2}.$$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények iránymenti deriváltjai

Emlékeztető. A parciális deriváltaknál az e_i kanonikus vektorokkal párhuzamos „irányokban” deriváltuk az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értékeiből keletkezett valós-valós függvényt az a pontban. Ezt úgy fogjuk általánosítani, hogy egy tetszőleges irányban csináljuk ugyanezt.

Egy $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minden $v = (v_1, v_2)$ egységvektor ($v_1^2 + v_2^2 = 1$) szerint képezhetjük a v irányú iránymenti deriváltat valamely $a = (a_1, a_2) \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban. Az

$$F_v : K(0) \ni t \mapsto f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) = f(a + tv)$$



valós-valós függvény $t = 0$ pontban vett deriváltját (amennyiben létezik) nevezük **az f függvény v irányú iránymenti deriváltjának az a pontban**.

Tétel. Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2) \in \text{int } \mathcal{D}_f$, illetve az f függvénynek léteznek a parciális deriváltjai egy $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezetben, és ezek folytonosak az a pontban. Ekkor az f függvénynek az a pontból induló tetszőleges $v = (v_1, v_2)$ egységvektor irányban létezik az iránymenti deriváltja, és

$$\partial_v f(a) = \partial_1 f(a) \cdot v_1 + \partial_2 f(a) \cdot v_2.$$

6. Feladat. Legyen

$$f(x, y) := x^2 - xy + y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2),$$

$a = (a_1, a_2) = (1, 1)$ és v az x -tengely pozitív ágával $3\pi/4$ szöget bezáró euklideszi normában vett egységvektor. Határozzuk meg a $\partial_v f(a)$ iránymenti deriváltat!

Megoldás. A feladatban szereplő v irányvektor az alábbi módon határozható meg:

$$v = (v_1, v_2) = \left(\cos \frac{3\pi}{4}, \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Ezután az iránymenti derivált kiszámolására vonatkozó téTEL feltételeit ellenőrizzük. Az f függvény parciális deriváltfüggvényei léteznek:

$$\partial_1 f(x, y) = 2x - y, \quad \partial_2 f(x, y) = -x + 2y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

és folytonosak minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban. A szóban forgó téTEL szerint a kérdezett iránymenti derivált létezik, és

$$\partial_v f(1, 1) = \partial_1 f(1, 1) \cdot v_1 + \partial_2 f(1, 1) \cdot v_2 = 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

7. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x, y) := \frac{y^3}{e^{2x+1}} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény iránymenti deriváltját a $P \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ pontban a $u = (1, 2)$ vektor által meghatározott irány mentén!

Megoldás. Az iránymenti derivált kiszámítására vonatkozó téTEL alkalmazzuk. Mindkét változó szerinti elsőrendű parciális deriváltak léteznek minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, és

$$\partial_x f(x, y) = -2 \frac{y^3}{e^{2x+1}}, \quad \partial_y f(x, y) = \frac{3y^2}{e^{2x+1}}.$$

Ezek a függvények minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban folytonosak és

$$f'(x, y) = (\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y)) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Az f függvénynek tehát a P pontban minden irányban létezik az iránymenti deriváltja és

$$\partial_v f(P) = \langle f'(P), v \rangle,$$

ahol

$$f'(P) = f'\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\partial_x f\left(-\frac{1}{2}, 1\right), \partial_y f\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right) = (-2, 3)$$

és v az u irányú euklideszi normában vett egységvektor, azaz

$$v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{(1, 2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Így

$$\partial_v f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \left\langle (-2, 3), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$