

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

UN PROBLÈME DE CONTRÔLE STOCHASTIQUE AVEC STRATÉGIES  
BORNÉES APPLIQUÉ AUX FONDS DISTINCTS

MÉMOIRE  
PRÉSENTÉ  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR  
AYOUB BAKRAOUI

AOÛT 2023

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toute ma famille pour leur soutien inconditionnel durant toutes ces années.

Je suis très reconnaissant envers ma directrice de recherche Anne Mackay pour ses précieux conseils et son encadrement. Elle a su me guider et motiver mon intérêt pour la recherche concernant différents sujets en assurance.

Je tiens aussi à remercier le professeur Jean-François Renaud qui a suscité mon intérêt pour le contrôle stochastique et ses différentes applications en finance et en assurance.

Je remercie également Félix Locas pour tous les échanges en statistiques et en mathématiques qu'on a partagé durant ces dernières années. Merci aussi à Amani et Youssoupha pour leurs discussions philosophiques qui nous permettaient des fois de faire fructifier nos pauses après des heures de recherche.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	v
RÉSUMÉ	vii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I NOTIONS DE BASE	4
1.1 Fonctions d'utilité et aversion au risque ou à la perte . . . . .	4
1.1.1 Le paradoxe de Saint-Pétersbourg . . . . .	5
1.1.2 Aversion au risque . . . . .	6
1.1.3 Exemples de fonctions d'utilité . . . . .	7
1.1.4 L'utilité « S-shaped » . . . . .	8
1.2 Éléments de calcul stochastique . . . . .	11
1.3 Concepts du contrôle stochastique optimal . . . . .	15
1.3.1 Processus de diffusion contrôlés . . . . .	15
1.3.2 Principe de programmation dynamique et solutions de viscosité . . .	17
1.4 Quelques notions sur les modèles de survie . . . . .	27
1.4.1 La durée de vie future . . . . .	27
1.4.2 La force de mortalité . . . . .	28
CHAPITRE II FORMULATION DU PROBLÈME DE CONTRÔLE STOCHAS- TIQUE APPLIQUÉ À UN FONDS DISTINCT HYBRIDE	30
2.1 Marché financier et dynamique du fonds distinct . . . . .	31
2.1.1 Marché financier . . . . .	31
2.1.2 La dynamique du fonds distinct . . . . .	32

2.1.3	Les stratégies admissibles . . . . .	35
2.2	Problème de contrôle stochastique appliqué au fonds distinct avec une utilité « classique » . . . . .	36
2.2.1	Éléments du modèle . . . . .	37
2.2.2	Principe de programmation dynamique . . . . .	38
2.2.3	L'équation HJB . . . . .	39
2.2.4	Caractéristiques de la fonction de valeur . . . . .	42
2.2.5	Existence et unicité de la solution de viscosité de (II.13) . . . . .	49
2.3	Problème de contrôle stochastique appliqué au fonds distinct avec une utilité « S-shaped » . . . . .	60
2.3.1	Éléments du modèle . . . . .	60
2.3.2	Principe de programmation dynamique . . . . .	62
2.3.3	L'équation HJB . . . . .	62
2.3.4	Caractéristiques de la fonction de valeur $V_S$ . . . . .	63
2.3.5	Existence et unicité de la solution de viscosité de (II.37) . . . . .	67
CHAPITRE III RÉSOLUTION NUMÉRIQUE		72
3.1	Discrétisation du problème d'optimisation . . . . .	73
3.1.1	Formulation discrète des équations HJB . . . . .	73
3.1.2	Conditions limites . . . . .	77
3.2	Étude numérique de la fonction de valeur et des stratégies optimales sans effet de la mortalité . . . . .	84
3.2.1	Le cas d'une utilité « classique » . . . . .	84
3.2.2	Le cas d'une utilité « S-shaped » . . . . .	90
3.3	Étude numérique de la fonction de valeur et des stratégies optimales avec effet de la mortalité . . . . .	95
3.3.1	Le cas d'une utilité « classique » . . . . .	96
3.3.2	Le cas d'une utilité « S-shaped » . . . . .	99
CONCLUSION		102

ANNEXE A	DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (1.3.1)	105
ANNEXE B	ANALYSE DES STRATÉGIES CONSTANTES	108
B.1	Approche générale . . . . .	108
B.2	$\tilde{U}$ est une fonction d'utilité « classique » . . . . .	110
B.3	$\tilde{U}$ est une fonction d'utilité « S-shaped » . . . . .	111
B.3.1	Le cas $0 \leq \theta \leq G$ . . . . .	112
B.3.2	Le cas $\theta > G$ . . . . .	113
ANNEXE C	MÉTHODES DES DIFFÉRENCES FINIES	116
C.1	Approximation des dérivées de premier et second ordre . . . . .	116
C.2	Une application à l'équation différentielle III.3 . . . . .	117

## LISTE DES FIGURES

1.1	Illustration d'une solution de viscosité continue . . . . .	25
2.1	Fonction d'utilité « classique » pour $G = 1$ et $\gamma = -1$ . . . . .	42
2.2	Fonction d'utilité pour différentes valeurs du seuil $\theta$ . . . . .	63
2.3	Dérivée première de la fonction d'utilité pour des paramètres $\gamma_1 = 0.2$ et $\gamma_2 = 0.4$ . . . . .	64
3.1	Fonctions de gain . . . . .	83
3.2	Stratégie optimale pour $\gamma = -2$ avec $c_F = 0.02448 - c_s$ . . . . .	85
3.3	Stratégie optimale pour $\gamma = -5$ avec $c_F = 0.02448 - c_s$ . . . . .	85
3.4	Fonction de valeur dans le cas d'une utilité « classique » pour différents niveaux d'aversion $\gamma$ avec $c_F = 0.02448 - c_s$ et $\nu_t \in [0, 1]$ . . . . .	87
3.5	Fonction de valeur dans le cas d'une utilité « classique » pour différents niveaux d'aversion $\gamma$ avec $c_F = 0.02448 - c_s$ et $\nu_t \in [0, 8]$ . . . . .	87
3.6	Sensibilité de la stratégie optimale à une combinaison générale de frais dans le cas d'une utilité « classique » et une valeur du fonds $F_t^\nu = 1.2$ . . . . .	89
3.7	Sensibilité de la fonction de valeur à une combinaison générale de frais dans le cas d'une utilité « classique » . . . . .	89
3.8	Stratégie optimale pour $\theta = 0.95$ avec $c_F = 0.02448 - c_s$ . . . . .	91
3.9	Stratégie optimale pour $\theta = 1.05$ avec $c_F = 0.02448 - c_s$ . . . . .	91
3.10	Fonction de valeur dans le cas d'une utilité « S-shaped » pour différents seuils $\theta$ avec $c_F = 0.02448 - c_s$ et $\nu_t \in [0, 1]$ . . . . .	92
3.11	Sensibilité de la stratégie optimale à une combinaison générale de frais dans le cas d'une utilité « S-shaped » et une valeur du fonds $F_t^\nu = 0.9$ . . . . .	94

3.12	Sensibilité de la stratégie optimale à une combinaison générale de frais dans le cas d'une utilité « S-shaped » et une valeur du fonds $F_t^\nu = 1.2$ . . . . .	94
3.13	Sensibilité de la fonction de valeur à une combinaison générale de frais dans le cas d'une utilité « S-shaped » . . . . .	94
3.14	Variation de la force de mortalité de l'assuré et sa probabilité de survie jusqu'à l'échéance $T$ par âge . . . . .	95
3.15	Fonction de valeur dans le cas d'une utilité « classique » avec effet de la mortalité et $\gamma = -2$ . . . . .	96
3.16	Stratégies optimales dans le cas d'une utilité « classique » avec effet de la mortalité pour $\gamma = -2$ , $t = 2$ et $F_t^\nu = 1.2$ . . . . .	98
3.17	Gain optimal dans le cas d'une utilité « S-shaped » avec effet de la mortalité	100
3.18	Stratégie optimale dans le cas d'une utilité « S-shaped » avec effet de la mortalité pour $t = 2$ et $F_t^\nu = 1.2$ . . . . .	101

## RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, on s'intéresse à un problème d'optimisation stochastique du point de vue d'un assuré détenant un fonds distinct hybride avec une garantie à l'échéance en cas de survie ou au moment du décès et qui désire maximiser son utilité espérée. On traite principalement deux problèmes distincts à savoir le cas d'un assuré averse au risque et celui d'un détenteur de fonds distinct averse à la perte caractérisé par une fonction d'utilité « S-shaped ». On suit la même structure des frais d'assurance proposée par MacKay et Ocejo (2022) ainsi qu'une dynamique de fonds similaire, mais on impose une contrainte sur les contrôles qui permet d'interdire l'utilisation de l'effet de levier par l'assuré. En appliquant la théorie de viscosité, on établit pour chaque problème que la fonction de valeur considérée est l'unique solution de viscosité de l'équation HJB. Cependant, les résultats analytiques de la fonction de valeur et de la stratégie optimale correspondante sont assez difficiles à obtenir si on ne se restreint pas aux contrôles constants. Pour contourner ce problème, on se limite à l'étude d'une forme discrétisée des équations HJB dont la convergence vers l'unique solution de viscosité a été démontrée dans la littérature. En analysant l'impact de la structure des frais sur les fonctions de gains, on constate qu'elles sont toujours plus sensibles par rapport aux frais  $c_f$  appliqués à la totalité du fonds. Toutefois, on remarque que l'ajout d'une garantie en cas de décès fait en sorte qu'un assuré averse au risque considère en général des stratégies optimales plus risquées alors que le détenteur du fonds adopte des contrôles moins risqués lorsqu'il est averse à la perte et que ses bénéficiaires reçoivent un montant minimal garanti au moment de son décès.

**Mots clés :** Fonds distincts, contrôle stochastique, équations HJB, solutions de viscosité, aversion au risque, aversion à la perte



## INTRODUCTION

### Présentation générale

Depuis la fin des années 90, de nombreux types de produits d'assurance-vie et de rentes liées aux marchés financiers ont été développés, dont les fonds distincts<sup>1</sup> qui permettent à leurs détenteurs de bénéficier de plusieurs avantages des marchés financiers et d'être assurés contre les différents risques financiers (marché, taux, ...) et actuariels (mortalité, rachat, ...).

Plusieurs types de garanties sont offertes par les assureurs dans de tels contrats, le lecteur peut se référer à l'ouvrage de Hardy (2003) pour une présentation plus détaillée sur le sujet.

Dans le cas d'un fonds distinct, l'assuré peut verser à l'assureur une prime unique à la conception de la police d'assurance ou des primes périodiques pendant la durée du contrat.

Ensuite, la compagnie d'assurance investit les primes reçues dans plusieurs actifs (par exemple un actif risqué et un autre sans risque) et collecte des frais<sup>2</sup> qui permettent de financer la garantie offerte au détenteur du fonds. Pour un fonds distinct contenant une garantie à l'échéance (GMMB), l'assuré reçoit à la fin du contrat la valeur maximale entre le niveau atteint par le fonds à l'échéance et le montant garanti par l'assureur. Dans le cas d'un contrat avec une garantie en cas de décès (GMDB), l'assuré reçoit au moment du décès la valeur du fonds si elle dépasse la garantie et collecte cette dernière autrement.

La popularité de ces produits est due principalement à leur utilisation dans des plans à long terme pour la retraite ainsi qu'à leurs avantages en matière d'impôts.

---

1. C'est une terminologie utilisée dans le marché canadien qui est équivalente à celle de « variable annuities » répandue dans le marché américain.

2. La dynamique de ces frais est d'une grande importance dans la tarification ainsi que la commercialisation de ces produits.

## Motivation

Malgré les nombreux avantages de ces produits pour les assurés, le marché des fonds distincts a connu une baisse considérable des ventes au cours de la dernière demi-décennie à tel point que « les assurés rachètent la valeur de leurs fonds plus rapidement que la collecte des montants des nouveaux contrats » (voir Bernard et Moenig (2019)).

De nombreuses raisons ont été évoquées dans la littérature pour essayer d'expliquer cette tendance, notamment l'impact de la dynamique des frais sur le comportement de rachat des assurés entre autres. Pour remédier à cette baisse de la demande, Bernard et Moenig (2019) introduisent une structure tarifaire dépendante du temps qui permet de réduire les frais d'assurance tout en maintenant une rentabilité du contrat acceptable par l'assureur. Dans ce sens, Bernard *et al.* (2014) et MacKay *et al.* (2017) traitent directement le problème de rachat des contrats en le rendant sous-optimal par le biais d'une structure de frais qui dépend des valeurs que le fonds atteint durant la période du contrat. Toutefois, les idées présentées dans les articles cités ci-dessus comme la majorité de la littérature se focalisent principalement sur le problème d'un point de vue de l'assureur. L'article de MacKay et Ocejó (2022) faisant partie des rares articles à s'intéresser au problème d'un point de vue de l'assuré, propose un contrat « plus flexible » qui permet au détenteur du fonds de changer ses proportions investies pendant la durée de la police d'assurance. Aussi, la dynamique des frais introduite dans ce document s'adapte à la composition du portefeuille de l'assuré afin de maximiser l'utilité de l'assuré tout en maintenant une tarification équitable du contrat.

L'étude dans ce mémoire s'inspire de MacKay et Ocejó (2022) mais traite un cas particulier d'un assuré qui détient en plus une garantie en cas de décès dans son contrat et qui n'a pas le droit d'adopter des stratégies d'investissement avec un effet de levier. Pour autant que nous sachions, un tel problème n'a pas été traité en littérature.

Ainsi, on ne peut plus appliquer directement l'approche martingale utilisée dans l'article cité ci-dessus. Pour y remédier, on se base sur des méthodes provenant du contrôle stochastique et de la théorie des solutions de viscosité pour résoudre les problèmes présentés dans ce travail.

## La structure du mémoire

Le restant de ce mémoire est organisé comme suit. Le premier chapitre introduit les différents concepts qu'on juge nécessaires pour une bonne compréhension des différentes étapes de ce travail. Ainsi, on commence par présenter les notions d'utilité pour des individus averses au risque ou à la perte, ensuite on rappelle brièvement quelques éléments pertinents du calcul stochastique et du contrôle stochastique. La dernière partie de ce premier chapitre contient quelques concepts des mathématiques actuarielles sur les modèles de survie en général et la loi de mortalité de Gompertz-Makeham en particulier.

Au chapitre II, on présente d'abord une formulation mathématique du modèle utilisé qui permet d'établir une dynamique du fonds distinct prenant en compte les frais d'assurance collectés tout au long du contrat. Les deux parties suivantes se focalisent sur l'analyse analytique de la fonction de gain optimal d'un assuré averse au risque ou à la perte détenant un fonds distinct avec une garantie à l'échéance en cas de survie et garantissant un montant minimal aux bénéficiaires désignés par l'assuré s'il est décédé avant la fin du contrat. Finalement, on s'intéresse dans le chapitre III à la résolution et l'étude numérique des résultats analytiques établis précédemment au chapitre II.

# CHAPITRE I

## NOTIONS DE BASE

Le présent chapitre permet de définir les différents concepts utilisés dans la formulation et la résolution du problème d'optimisation de portefeuille appliqué aux fonds distincts.

Ainsi, on aborde en premier lieu la notion de fonction d'utilité et d'aversion au risque ou à la perte. Ensuite, on rappelle brièvement les outils de mathématiques financières nécessaires dans la modélisation et les éléments de contrôle stochastique utilisés dans les chapitres suivants pour la résolution du problème d'optimisation. Enfin, on rappelle quelques notions des mathématiques actuarielles traitant les modèles de survies.

### 1.1 Fonctions d'utilité et aversion au risque ou à la perte

On se base principalement sur les premiers chapitres de Pennacchi (2008) et Ingersoll (1987) pour introduire la théorie de l'utilité « classique » et sur l'article de Kahneman et Tversky (1979) pour présenter quelques éléments de la théorie des perspectives dans la partie 1.1.4. L'objectif de tout investisseur est d'obtenir le rendement le plus élevé possible correspondant à son profil de prise de risque.

Supposons que l'investisseur peut construire son portefeuille en se limitant à deux actifs :

- Un actif sans risque à rendement fixe.
- Un actif risqué avec un rendement espéré supérieur.

En fonction de ses préférences, l'investisseur va soit investir la totalité de son patrimoine dans l'un de ces deux actifs, soit le répartir entre les deux.

Mais comment peut-il évaluer la performance d'une stratégie donnée ?

La première approche utilisée était celle de la valeur espérée du gain, jusqu'à l'introduction du « Paradoxe de Saint-Pétersbourg » par Nicolas Bernoulli en 1713.

### 1.1.1 Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

#### 1.1.1.1 Le jeu

Supposons qu'un parieur peut participer au jeu suivant :

« Une pièce de monnaie à pile ou face est lancée jusqu'à obtenir face et le joueur obtient alors  $Y = 2^{n-1}$  où  $n \geq 1$  est le nombre de fois où la pièce a été lancée ».

Comme la probabilité d'obtenir face pour la première fois au  $n^{\text{ème}}$  lancer est  $p_n = (\frac{1}{2})^n$  alors le gain espéré du joueur est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \\ &= \infty .\end{aligned}$$

#### 1.1.1.2 Le paradoxe

En se fiant uniquement au gain espéré, on peut s'attendre à ce qu'un parieur accepte d'entrer dans le jeu (à n'importe quel prix fini), ce qui ne donne pas de prix raisonnable pour considérer le jeu. Le paradoxe est la divergence entre ce que les gens semblent prêts à payer pour entrer dans le jeu et la valeur infinie espérée. En 1738 (Voir Bernoulli (1954))<sup>3</sup>, Daniel Bernoulli a proposé une solution qui a révolutionné le monde de la finance. Il a suggéré de modifier le montant nominal et de le remplacer par l'utilité de ce montant, c'est-à-dire une fonction qui associe à chaque montant une quantité représentant sa valeur (subjective) pour le joueur. Ainsi, l'utilité espérée du joueur devient

$$\mathbb{E}[U(Y)] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n U(2^{n-1}).$$

---

3. C'est une traduction de l'article original de Bernoulli

Aussi, d'après Bernoulli, l'utilité découlant d'une petite augmentation de la richesse sera inversement proportionnelle à la quantité de biens précédemment possédés. Autrement dit, l'utilité supplémentaire (ou marginale) provenant d'une augmentation de la fortune d'un individu diminue en fonction de sa richesse initiale. Par exemple, une augmentation de la richesse de 1000\$ vaut moins pour l'individu s'il a une fortune de 2 000 000\$ au lieu de 500 000\$. Cette idée mène à la définition d'une fonction d'utilité strictement croissante et strictement concave.

### 1.1.2 Aversion au risque

Bernoulli avait reconnu que la propriété de concavité implique que l'individu serait averse au risque. L'aversion au risque représente le fait qu'un individu n'accepte pas une loterie équitable  $\tilde{\epsilon}$  (c'est-à-dire  $\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}] = 0$ ). Ainsi, pour un tel individu, en notant  $U$  sa fonction d'utilité et  $W$  sa richesse alors

$$\mathbb{E}[U(W + \tilde{\epsilon})] < U(W) .$$

Pour inciter un individu averse au risque à s'engager dans un pari équitable, il faudrait lui offrir un montant compensatoire  $\pi > 0$  en plus de celui du pari, qu'on cite généralement comme prime de risque. On pourra alors trouver un montant  $\pi > 0$  vérifiant

$$\mathbb{E}[U(W + \tilde{\epsilon} + \pi)] = U(W) .$$

Une mesure qui est souvent utilisée pour quantifier l'aversion au risque d'un individu est l'aversion absolue au risque d'Arrow-Pratt (*Arrow-Pratt absolute risk-aversion function*) définie pour chaque niveau de richesse  $W > 0$  par

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} .$$

Ce terme mesure l'aversion au risque locale (ou infinitésimale). On utilise aussi la fonction d'aversion au risque relative, qu'on note  $R(W)$ , qui est déduite à partir de l'aversion au risque absolue par

$$R(W) = WA(W).$$

Pour plus de détails sur le concept d'aversion au risque dans les deux contextes d'investissement et d'assurance, le lecteur peut se référer à la section 1.12 de Ingersoll (1987).

### 1.1.3 Exemples de fonctions d'utilité

On présente ci-dessous les fonctions d'utilités « *classiques* ».

#### **Définition 1.1.1**

Une fonction  $U : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est dite fonction d'utilité classique si :

- i)  $U$  est strictement croissante ;
- ii)  $U$  est strictement concave ;
- iii)  $U$  est continûment différentiable.

Une fonction de la définition 1.1.1 doit en plus satisfaire les deux conditions d'Inada<sup>4</sup> (voir Inada (1963)), c'est-à-dire

$$\lim_{W \rightarrow 0} U'(W) = \infty, \quad \lim_{W \rightarrow \infty} U'(W) = 0.$$

---

4. L'effet de la première unité de richesse est le plus grand alors que celui d'une unité additionnelle est nulle lorsqu'on s'approche d'une richesse infinie.

### 1.1.3.1 Fonctions d'utilité HARA

Ingersoll (1987) cite la famille des fonctions d'utilité à aversion absolue hyperbolique (*hyperbolic absolute risk aversion*) s'écrivant sous la forme

$$U(W) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left( \frac{aW}{1-\gamma} + b \right)^\gamma, \quad (\text{I.1})$$

où  $\gamma < 1$ ,  $b > 0$ ,  $\gamma \neq 0$  et  $\frac{aW}{1-\gamma} + b > 0$

Pour des fonctions d'utilité de la forme (I.1), les fonctions d'aversion au risque absolue et relative sont données par

$$A(W) = \frac{a(1-\gamma)}{aW + b(1-\gamma)}, \quad R(W) = \frac{aW(1-\gamma)}{aW + b(1-\gamma)}.$$

Alors pour le cas particulier  $b = 0$ , on obtient  $R(W) = 1 - \gamma$  (*constante*). C'est une sous-famille dite famille d'utilité à aversion relative au risque constante (CRRA, *constant relative risk aversion*).

En posant  $b = 0$  et  $a = (1-\gamma)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ , on retrouve la fonction d'utilité isoélastique (qui appartient à la famille CRRA)

$$U(W) = \frac{W^\gamma}{\gamma}, \quad \gamma < 1 \text{ et } \gamma \neq 0 \quad (\text{I.2})$$

Comme décrit ci-dessus, la fonction d'aversion relative au risque de cette fonction d'utilité est  $R(W) = 1 - \gamma$ . Donc, plus le paramètre  $\gamma$  est petit, plus l'aversion au risque est grande.

### 1.1.4 L'utilité « S-shaped »

Dans la section précédente, on a traité le cas des fonctions d'utilité « classiques » concaves et où les personnes sont toujours averses au risque dans leurs choix. Cependant, selon Kahneman et Tversky (1979), les gens sont averses au risque dans les choix contenant des gains sûrs et s'intéressent aux choix plutôt risqués pour les pertes sûres. Autrement dit, cette aversion à la perte est définie en se basant sur les gains et les pertes de la richesse par rapport à un seuil de référence prédéfini plutôt qu'aux variations absolues de la richesse totale.



Pour illustrer les limitations d'une approche se basant sur une aversion au risque pour toute valeur de la richesse, on présente un exemple en assurance cité dans Kahneman et Tversky (1979).

#### 1.1.4.1 Un exemple d'assurance « probabilisée »

Supposons que la richesse initiale d'un individu est dénoté par  $W$  et que ses choix sont décrits par

$$(w_1 : p_1, w_2 : p_2, \dots, w_n : p_n),$$

où  $\{w_i\}_{i=1}^n$  détermine les niveaux de richesses possibles et  $\{p_i\}_{i=1}^n$  leurs probabilités respectives. Considérons une assurance de propriété où la probabilité de survenance d'un incident est  $p$  et supposons que cet individu est *indifférent* entre les choix avec ou sans assurance après avoir comparé sa prime à payer  $y$  avec les dégâts possibles à sa propriété  $x$ .

Cet individu apprend ensuite qu'une compagnie d'assurance promet le contrat suivant pour un assuré payant une prime  $ry$  au lieu de  $y$  pour un certain  $r \in (0, 1)$ . En cas de dommages à la propriété, l'un des deux choix est adopté par la compagnie d'assurance :

- Elle dédommage tous les dégâts et réclame les  $(1 - r)y$  restantes de la prime avec une probabilité  $rp$ .
- Elle rend à l'assuré sa prime  $ry$  et donc il subit la totalité de ses dommages avec une probabilité  $(1 - r)p$

Ainsi, l'assuré a les perspectives suivantes :

- $(W - x : p, W : 1 - p)$  si l'individu ne prend pas d'assurance.
- $(W - y : 1)$  si l'individu opte pour une assurance « régulière ».
- $(W - y : rp, W - x : (1 - r)p, W - ry : 1 - p)$  si l'assuré préfère une assurance « probabilisée ».

Dénotons par  $U$  la fonction d'utilité de cet individu et supposons sans perte de généralités que  $U(W - x) = 0$  et  $U(W) = 1$ . Alors par son indifférence entre les choix d'assurer ou non

sa propriété compte tenu de la prime suggérée, il vient

$$\begin{aligned} p U(W - x) + (1 - p)U(W) &= U(W - y) \\ \Rightarrow U(W - y) &= 1 - p. \end{aligned}$$

Donc, son utilité pour l'assurance « probabilisée » est donnée par

$$rp U(W - y) + (1 - r) p U(W - x) + (1 - p)U(W - ry) = (1 - p)(rp + U(W - ry)).$$

Ainsi, l'individu préfère l'assurance « probabilisée » à un contrat d'assurance si et seulement si  $U(W - ry) > 1 - rp$ , ce qui est valide uniquement pour les cas des fonctions d'utilités concaves. D'après cette analyse, on constate qu'un individu qui est toujours averse au risque opte pour un contrat plus risqué (assurance « probabilisée ») plutôt que celui d'un contrat régulier d'assurance où il transfère le risque complètement à sa compagnie d'assurance.

Alors, on conclut que la notion du risque n'est pas adéquatement représentée par des utilités « classiques » comme le montre le grand nombre de personnes qui ont refusé un tel contrat « probabilisé » dans le sondage effectué dans l'article cité ci-dessus. C'est pour cette raison que dans Kahneman et Tversky (1979), les auteurs ont opté pour des fonctions d'utilité convexes pour les pertes et concaves pour les gains.

On modélise de telles fonctions comme suit

$$U(w) = \begin{cases} -U_2(\theta - w) & \text{si } 0 \leq w < \theta \\ U_1(w - \theta) & \text{si } w \geq \theta, \end{cases}$$

où  $\theta$  est un seuil de préférence relative à l'individu et  $U_1$ ,  $U_2$  sont des fonctions d'utilités « classiques » vérifiant  $U_1(0) = -U_2(0)$  pour garantir la continuité de  $U$  en  $w = \theta$ .

## 1.2 Éléments de calcul stochastique

Dans cette section, on introduit brièvement les concepts de mathématiques financières nécessaires dans la résolution du problème d'optimisation. Les différentes définitions sont basées sur le livre de Steele (2001).

Le processus stochastique le plus important et le plus utilisé est le mouvement brownien.

La première utilisation considérable du mouvement brownien en finance était celle de Louis Bachelier en 1900 dans sa thèse de doctorat, dans laquelle il a présenté une analyse stochastique des marchés d'actions et d'options.

### Définition 1.2.1

*Un processus stochastique  $\{W_t : 0 \leq t \leq T\}$  sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est appelé mouvement brownien s'il vérifie les propriétés suivantes :*

- i)  $W_0=0$  ;*
- ii) Pour tout ensemble fini de temps  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$ , les variables aléatoires  $W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, W_{t_4} - W_{t_3}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  sont indépendantes ;*
- iii) Pour tout  $0 \leq s < t \leq T$ , l'accroissement  $W_t - W_s$  est de distribution normale d'espérance 0 et de variance  $t - s$  ;*
- iv)  $\mathbb{P}(\{w \in \Omega : t \rightarrow W_t(w) \text{ est continue } \}) = 1$  .*

L'un des principaux concepts de l'étude des processus aléatoires est celui des martingales. En effet, cette théorie a permis au début de comprendre l'impossibilité de gagner de l'argent en pariant sur des jeux équitables et constitue toujours un outil indispensable de l'analyse quantitative dans plusieurs domaines.

**Définition 1.2.2**

Soit  $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$  un processus stochastique et  $\mathcal{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X : 0 \leq t \leq T\}$  sa filtration naturelle (où  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$ ).  $X$  est une martingale si :

- i)  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t^X$ -mesurable pour tout  $0 \leq t \leq T$  ;
- ii)  $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$  pour tout  $0 \leq t \leq T$  ;
- iii)  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s^X] = X_s$  pour tout  $0 \leq s \leq t \leq T$ .

Un concept très important en mathématiques financières est celui de temps d'arrêt qu'on définit comme suit.

**Définition 1.2.3**

Soit  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$  une filtration. Une variable aléatoire positive (et possiblement  $= \infty$ )  $\tau$  est un temps d'arrêt si  $\{w : \tau(w) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  pour tout  $0 \leq t \leq T$ .

L'un des intérêts des temps d'arrêt est dans la construction des processus « arrêtés » qui héritent la propriété martingale des processus d'origine.

On énonce le théorème suivant connu sous le nom du théorème d'arrêt de Doob.

**Théorème 1.2.1**

Soit  $X$  une martingale continue par rapport à la filtration  $\mathcal{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X : 0 \leq t \leq T\}$ . Si  $\tau$  est un temps d'arrêt par rapport à  $\mathcal{F}^X$  alors le processus  $M_t = X_{t \wedge \tau}$  est une martingale.

Pour une preuve détaillée du résultat, le lecteur peut consulter le théorème 4.1 de Steele (2001).

Avant de s'intéresser aux processus d'Itô, on présente quelques résultats utiles sur les martingales locales.

**Définition 1.2.4**

Soit  $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$  un processus stochastique. On dit que  $X$  est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt  $(\tau_k)_{k \geq 0}$  telle que  $\mathbb{P}(\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = T) = 1$  et pour tout  $k$ , le processus  $\{X_{t \wedge \tau_k} : 0 \leq t \leq T\}$  est une martingale.

A partir de cette définition, on peut dégager le résultat suivant :

**Théorème 1.2.2**

Soit  $H = \{H_t : 0 \leq t \leq T\}$  un processus stochastique tel que  $\mathbb{P}\left(\int_0^T H_s^2 ds < \infty\right) = 1$ ,  
 alors  $\left\{\int_0^t H_s dW_s : 0 \leq t \leq T\right\}$  est une martingale locale.

En effet, il suffit de considérer la suite de temps d'arrêt  $\tau_k = \inf\{t : \int_0^t H_s^2 ds \geq k\} \wedge T$

Les deux théorèmes suivants sont des cas particuliers de martingales locales souvent utilisées.

**Théorème 1.2.3**

Soit  $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$  une martingale locale et  $\tau$  un temps d'arrêt alors  
 $M = \{X_{t \wedge \tau} : 0 \leq t \leq T\}$  est aussi une martingale locale.

**Démonstration :**

Comme  $X$  est une martingale locale alors  $\exists(\tau_k)_{k \geq 0}$  une suite croissante de temps d'arrêt telle que  $\mathbb{P}(\tau_k \rightarrow T) = 1$  et  $X_{t \wedge \tau_k}$  est une martingale pour tout  $k$ . On a  $M_{t \wedge \tau_k} = X_{(t \wedge \tau) \wedge \tau_k} = X_{(t \wedge \tau_k) \wedge \tau}$  et  $X_{t \wedge \tau_k}$  est une martingale, alors  $X_{(t \wedge \tau_k) \wedge \tau}$  est une martingale (par le théorème 1.2.1). Ainsi  $M_{t \wedge \tau_k}$  est une martingale, d'où  $M$  est une martingale locale. ■

**Théorème 1.2.4**

Soit  $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$  une martingale locale continue et  $B$  une constante telle que  
 $\forall t \in [0, T], |X_t| \leq B$  alors  $X$  est une martingale.

**Démonstration :**

Soit  $(\tau_k)_{k \geq 0}$  une suite croissante de temps d'arrêt telle que  $\mathbb{P}(\tau_k \rightarrow T) = 1$  et  $X_{t \wedge \tau_k}$  est une martingale pour tout  $k$ . Ainsi pour  $s \leq t$  on a que :  $\mathbb{E}[X_{t \wedge \tau_k} | \mathcal{F}_s^X] = X_{s \wedge \tau_k}$ .

Comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = T$  alors  $X_{t \wedge \tau_k} \rightarrow X_t$ , donc par  $X_{s \wedge \tau_k} \rightarrow X_s$  et  $|X_{t \wedge \tau_k}| \leq B < \infty$ , on obtient en utilisant le théorème de convergence dominée que  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s^X] = X_s$ .

Ainsi  $X$  est une martingale. ■

On termine cette section concernant les concepts de base du calcul stochastique en rappelant les processus d'Itô et le lemme d'Itô (voir la section 8 de Steele (2001) pour plus de détails).

Un modèle souvent utilisé dans la valorisation des actifs en mathématiques financières est celui du mouvement brownien géométrique, solution de l'équation différentielle stochastique  $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$  où  $S_t$  est le prix de l'actif au moment  $t$ . Une généralisation naturelle de ce modèle est celui obtenu à partir des processus d'Itô.

### Définition 1.2.5

Soit  $\mathcal{F}^W = \{\mathcal{F}_t^W : 0 \leq t \leq T\}$  la filtration générée par le mouvement brownien.

On dit que  $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$  est un processus d'Itô si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

où

- $X_0$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable.
- $K = \{K_t : 0 \leq t \leq T\}$  est un processus adapté tel que  $\mathbb{P}(\int_0^T |K_s| ds < \infty) = 1$ .
- $H = \{H_t : 0 \leq t \leq T\}$  est un processus adapté tel que  $\mathbb{P}(\int_0^T H_s^2 ds < \infty) = 1$

Pour la manipulation de ce genre de processus, il est indispensable d'utiliser la formule (lemme) d'Itô<sup>5</sup> qui consitue l'élément de référence en calcul stochastique.

### Théorème 1.2.5 (Une version du Lemme d'Itô)

Soit  $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$  un processus d'Itô tel que défini en (1.2.5)

et  $f \in \mathbb{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$  alors :

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle_s \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) H_s^2 ds \end{aligned}$$

où  $\langle X \rangle$ <sup>6</sup> est le processus de variation quadratique de  $X$ .

5. Démontrée pour la première fois par le mathématicien japonais Kiyoshi Itô dans les années 1940

6. Pour plus de détails, on réfère le lecteur à la sous-section 8.6 de Steele Steele (2001).

Les théorèmes et définitions de cette section avec les éléments de la section suivante sont suffisants pour entamer la résolution des problèmes de contrôle stochastique sur les fonds distincts introduits aux chapitres suivants.

### 1.3 Concepts du contrôle stochastique optimal

La résolution des problèmes de contrôle stochastique est souvent fortement dépendante des hypothèses fixées a priori sur le modèle étudié et ses paramètres. Ainsi, on rappelle dans cette partie quelques notions pertinentes dans notre analyse en se basant sur l'approche de Hamilton-Jacobi. En effet, la technique de programmation dynamique de Bellman permet de relier l'étude des problèmes de contrôle optimal aux solutions d'une classe particulière d'équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires. On discute brièvement dans cette section des solutions au sens « classique » de ces équations différentielles résultantes et des limitations de cette approche quand à la vérification de l'optimalité des solutions dans certains cas.

Cependant, la résolution des problèmes traités dans ce travail requiert une approche alternative qui est souvent utilisée lorsque la régularité de la solution n'est pas garantie. Dans le cadre de ce mémoire, on s'intéresse principalement aux processus de diffusion contrôlés et on se base sur Yong et Zhou (1999) et Touzi (2012) pour expliciter les résultats et les définitions.

#### 1.3.1 Processus de diffusion contrôlés

On travaille uniquement avec un horizon de temps fini, donc on fixe  $T < \infty$ .

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité donné,  $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$  une filtration satisfaisant les hypothèses usuelles, c'est-à-dire que  $\mathcal{F}_0$  contient tous les ensembles négligeables,

$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ , et soit  $W(\cdot)$  un mouvement brownien adapté à  $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ .

Considérons la dynamique suivante d'équations différentielles stochastiques contrôlées :

$$\begin{cases} dX(s) = \mu(X(s), u(s))ds + \sigma(X(s), u(s))dW(s) & s \in (t, T) \\ X(t) = x, \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

où  $u \in \mathcal{U}$ , avec  $\mathcal{U}$  l'ensemble des processus de contrôle progressivement mesurables à valeurs dans  $\mathbb{U}$  vérifiant

$$\mathbb{P} \left( \int_0^T |\mu(X(s), u(s))| \, ds + \int_0^T |\sigma(X(s), u(s))|^2 \, ds < \infty \right) = 1 .$$

On suppose également que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\mu(0, u(s))|^2 \, ds \right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[ \int_0^T |\sigma(0, u(s))|^2 \, ds \right] < \infty .$$

Souvent on fixe des hypothèses a priori sur le coefficient de dérive  $\mu$ , celui de volatilité  $\sigma$  et sur l'ensemble des valeurs du contrôle  $\mathbb{U}$ . Ces hypothèses permettent généralement de s'assurer en premier lieu de l'existence et de l'unicité d'une solution forte à l'équation différentielle stochastique, ainsi que l'existence et l'unicité de la solution optimale du problème de contrôle stochastique étudié.

Posons les hypothèses suivantes sur les paramètres d'intérêt. Ces suppositions sont adaptés au problème qui nous intéresse et seront vérifiées par la suite au chapitre 2.

### **Hypothèse 1.3.1**

$\mathbb{U}$  est un ensemble compact , ( $H_{\mathbb{U}}$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \text{ La fonction } \mu(.,.) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \times \mathbb{U} \\ (ii) \exists L_{\mu} \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{U} : \\ \quad |\mu(x, u) - \mu(y, u)| \leq L_{\mu} |x - y| , \end{array} \right. \quad \text{( $H_{\mu}$ )}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \text{ La fonction } \sigma(.,.) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \times \mathbb{U} \\ (ii) \exists L_{\sigma} \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{U} : \\ \quad |\sigma(x, u) - \sigma(y, u)| \leq L_{\sigma} |x - y| . \end{array} \right. \quad \text{( $H_{\sigma}$ )}$$



C'est bien établi que sous ces hypothèses (voir le Théorème 3.1 de Touzi (2012) ), on a :

$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, u \in \mathcal{U}$ , il existe une unique solution à (I.3) qu'on note  $X_{t,x}^u(r)$  et qui satisfait

$$X_{t,x}^u(r) = x + \int_t^r \mu(X_{t,x}^u(s), u(s))ds + \int_t^r \sigma(X_{t,x}^u(s), u(s))dW(s) ,$$

où  $X_{t,x}^u$  est le processus stochastique correspondant à l'état initial  $x$  au moment  $t$  et au contrôle  $u$ . Rappelons le résultat suivant dans la théorie des équations différentielles stochastiques cité dans le Théorème 2.4 de Touzi (2012) et le Théorème 1.6.3 de Yong et Zhou (1999).

### **Théorème 1.3.1**

*Sous les hypothèses  $(H_U), (H_\mu)$  et  $(H_\sigma)$ ,  $\exists C > 0$  (dépendante de  $T, L_\mu$  et  $L_\sigma$ ) tel que pour tout  $u \in \mathcal{U}$ ,  $0 \leq t \leq T$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on a*

$$\mathbb{E}[\sup_{l \in [t, T]} |X_{t,x}^u(l)|^p] \leq C(1 + |x|^p) , \quad (\text{I.4})$$

$$\mathbb{E}[\sup_{l \in [t, T]} |X_{t,x}^u(l) - X_{t,y}^u(l)|^p] \leq C|x - y|^p , \quad (\text{I.5})$$

*pour  $p \geq 2$ .*

Une démonstration de ce théorème pour le cas  $p = 2$  est fournie en annexe A. Les deux démonstrations sont très similaires alors on se contente de traiter la première inégalité.

#### 1.3.2 Principe de programmation dynamique et solutions de viscosité

L'un des principaux objectifs du contrôle stochastique est de maximiser (minimiser) une fonction objective dépendant d'un processus stochastique contrôlé. Considérons une fonction de gain de la forme

$$J(t, x, u) = \mathbb{E} \left[ \int_t^T \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, T) g(X_T^u) \mid \mathcal{F}_t \right] , \quad (\text{I.6})$$

où  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $\beta$  est une fonction déterministe,  $f$  et  $g$  des fonctions mesurables et  $X_t^u = x$ .

On définit également la fonction de valeur  $V(t, x)$  par

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} J(t, x, u), \quad (\text{I.7})$$

pour  $t \in [0, T]$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

Les deux approches souvent utilisées en programmation dynamique pour résoudre un problème de contrôle stochastique sont basées sur

- i) Un lemme de vérification.
- ii) Les solutions de viscosité.

Avant de discuter brièvement de ces deux approches, on établit le principe de programmation dynamique pour les problèmes où la fonction de valeur a la forme (I.7).

### 1.3.2.1 Principe de programmation dynamique

Le principe de programmation dynamique est l'outil principal dans la théorie du contrôle stochastique. Il est basé sur le principe d'optimalité de Bellman cité au chapitre 3 de Bellman (1957).

*Une stratégie optimale a la propriété que, quelle que soit la décision précédente (c'est-à-dire, contrôle), les décisions restantes doivent constituer une politique optimale par rapport à l'état résultant des décisions précédentes.*

*(Bellman, Dynamic Programming, 1957)*

Pour des problèmes du type (I.6) et pour une fonction de valeur  $V$ , le principe de programmation dynamique est donné par la proposition suivante :

#### **Proposition 1.3.1**

*Soit  $X^u$  un processus défini par l'équation différentielle stochastique (I.3).*

*Si  $V$  est une fonction de valeur sous la forme (I.7) où  $\beta$  est une fonction déterministe vérifiant*

$$\beta(t, T) = \beta(t, s) \beta(s, T), \quad \text{pour } 0 \leq t \leq s \leq T.$$

Alors pour  $0 \leq t \leq \tau \leq T$ , on a

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, \tau) V(\tau, X_\tau^u) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (\text{I.8})$$

**Remarque 1.3.1.** On choisit cette condition sur la fonction  $\beta$  puisqu'elle est adaptée aux problèmes étudiés dans le chapitre suivant.

**Démonstration :**

Fixons  $\tau \in (t, T)$ .

On a que

$$\begin{aligned} J(t, x, u) &= \mathbb{E} \left[ \int_t^T \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, T) g(X_T^u) \mid \mathcal{F}_\tau \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \int_t^T \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, T) g(X_T^u) \mid \mathcal{F}_\tau \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, \tau) \mathbb{E} \left[ \int_\tau^T \beta(\tau, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(\tau, T) g(X_T^u) \mid \mathcal{F}_\tau \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, \tau) J(\tau, X_\tau^u, u) \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Puisque  $J(\tau, X_\tau^u, u) \leq V(\tau, X_\tau^u)$  alors  $J(t, x, u) \leq \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, \tau) V(\tau, X_\tau^u) \mid \mathcal{F}_t \right]$  pour tout  $u$ . En prenant le supremum sur  $u$  des deux côtés, on obtient

$$V(t, x) \leq \sup_u \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, \tau) V(\tau, X_\tau^u) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Comme  $V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} J(t, x, u)$  pour tout  $t \in [0, T)$  et  $x \in \mathbb{R}$  alors  $\forall \epsilon > 0, \exists u_\epsilon$ <sup>7</sup>

$$V(t, x) - \epsilon \leq J(t, x, u_\epsilon) \leq V(t, x).$$

Soit la stratégie  $\tilde{u}$  définie sur  $[t, T]$  par

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{pour } [t, \tau], \\ u_\epsilon & \text{pour } (\tau, T]. \end{cases}$$

---

7. L'existence d'un tel contrôle est garantie sous l'hypothèse  $(H_U)$  qui stipule que l'ensemble  $U$  est compact.

Supposons que  $\tilde{u}$  est progressivement mesurable. Alors

$$\begin{aligned}
V(t, x) &\geq J(t, x, \tilde{u}) \\
&= \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, \tau) \mathbb{E} \left[ \int_\tau^T \beta(\tau, s) f(s, X_s^{u_\epsilon}) ds + \beta(\tau, T) g(X_T^{u_\epsilon}) \mid \mathcal{F}_\tau \right] \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, \tau) J(\tau, X_\tau^u, u_\epsilon) \mid \mathcal{F}_t \right].
\end{aligned}$$

Puisque  $J(\tau, X_\tau^u, u_\epsilon) \geq V(\tau, X_\tau^u) - \epsilon$ , on a

$$V(t, x) \geq \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, \tau) V(\tau, X_\tau^u) \mid \mathcal{F}_t \right] - \epsilon, \quad \forall u, \forall \epsilon.$$

Ainsi,

$$V(t, x) \geq \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, \tau) V(\tau, X_\tau^u) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Alors on obtient le principe de programmation dynamique désiré

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau \beta(t, s) f(s, X_s^u) ds + \beta(t, \tau) V(\tau, X_\tau^u) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

■

**Remarque 1.3.2.** *La démonstration élaborée ci-dessus manque toutefois de rigueur dans la construction de  $\tilde{u}$ . En effet, la mesurabilité progressive de  $\tilde{u}$  doit être vérifiée en se basant sur le théorème de sélection mesurable énoncé dans El Karoui et Jeanblanc Picque (1988).*

Le lecteur peut se référer au chapitre 4 (Théorème 3.3) de Yong et Zhou (1999) et au théorème 3.3 de Touzi (2012) pour une démonstration plus détaillée.

### 1.3.2.2 L'approche par vérification

L'objectif général de cette approche est de montrer qu'une certaine « intuition » de la fonction de valeur est la solution optimale du problème.

Étant donné une solution assez régulière  $\tilde{V}$  d'une équation différentielle de second degré aux dérivées partielles non linéaire, résultante du problème de contrôle étudié, on donne des conditions suffisantes qui permettent de conclure que  $\tilde{V}$  coïncide avec la fonction de valeur  $V$ . C'est ce qui est désigné comme lemme de vérification.

Parmi les travaux utilisant cette approche, on cite les deux articles de Merton en optimisation de portefeuille (Merton (1969) et Merton (1971)) qui ont ouvert la voie pour plusieurs recherches sur le sujet.

Cependant, en fonction du problème posé, la vérification a priori des conditions de régularité qui doivent être satisfaites par la solution candidate n'est pas toujours directe surtout pour les cas où on ne dispose pas de solutions explicites pour le problème étudié.

### 1.3.2.3 L'approche par les solutions de viscosité

Pour remédier aux limitations de l'approche précédente (une fonction de valeur qui n'est pas connue a priori et pas assez régulière pour appliquer le lemme d'Itô), Crandall et Lions(1983) ont introduit la notion des solutions de viscosité pour les équations différentielles non linéaires de premier ordre. Ils ont par la suite généralisé ce concept pour l'appliquer à ceux de second ordre. On cite dans cette partie les principaux résultats de cette théorie qui sont pertinents pour notre problème d'optimisation. Pour une présentation plus approfondie, le lecteur est encouragé à consulter l'excellent document de synthèse de Crandall *et al.* (1992). Cette théorie fournit l'existence et l'unicité d'une solution pour une classe plus générale d'équations différentielles non linéaires, connues sous le nom d'équations de Hamilton-Jacobi (HJ), qui peuvent être écrites sous la forme suivante

$$F(\mathbf{x}, v(\mathbf{x}), Dv(\mathbf{x}), D^2v(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad (\text{I.9})$$

où  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}(d) \rightarrow \mathbb{R}$  avec

- $\mathcal{S}(d)$  l'ensemble des matrices symétriques de taille  $d \times d$ ,
- $v$  une fonction de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,
- $Dv$  le gradient de la fonction  $v$ ,
- $D^2v$  la matrice hessienne de  $v$ .

pour que la théorie s'applique à une équation de type  $F = 0$ , il faut que  $F$  satisfasse les deux conditions suivantes :

Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ ,  $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  avec  $r \leq s$ ,  $p \in \mathbb{R}^d$ ,  $(M, \tilde{M}) \in \mathcal{S}(d) \times \mathcal{S}(d)$  avec  $M \leq \tilde{M}$  (i.e  $\tilde{M} - M$  est définie positive) alors

$$\begin{aligned} \text{(Ellipticité)} \quad & F(\mathbf{x}, r, p, \tilde{M}) \leq F(\mathbf{x}, r, p, M), \\ \text{(Monotonie)} \quad & F(\mathbf{x}, r, p, M) \leq F(\mathbf{x}, s, p, M). \end{aligned} \tag{I.10}$$

Pour ce mémoire on va travailler sur des cas particuliers de (I.9), des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) qui s'écrivent

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) - H(t, x, v(t, x), \frac{\partial v}{\partial x}(t, x), \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)) = 0, \tag{I.11}$$

pour  $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}$ . Dans ce cas,  $H$  doit nécessairement vérifier

$$\begin{aligned} \text{(Ellipticité)} \quad & H(t, x, r, q, m) \leq H(t, x, r, q, \tilde{m}), \\ \text{(Monotonie)} \quad & H(t, x, r, q, m) \geq H(t, x, s, q, m), \end{aligned} \tag{I.12}$$

pour tout  $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}$ ,  $(m, \tilde{m}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  avec  $m \leq \tilde{m}$  et  $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  où  $r \leq s$ . En effet, on peut voir que (I.11) est un cas particulier de (I.9) en prenant  $\mathbf{x} = (t, x)$ ,  $d = 2$  et

$$F((t, x), r, (p, q), M) = -p - H(t, x, r, q, M_{2,2}), \tag{I.13}$$

où

- $r = v$ ,  $p = \frac{\partial v}{\partial t}$  et  $q = \frac{\partial v}{\partial x}$ ,
- $M = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{pmatrix}$ ,
- $H : [0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

L'intérêt primordial des solutions de viscosité est qu'une fonction  $v$  ne doit pas nécessairement avoir des dérivées de premier et deuxième ordre pour être une solution « au sens des viscosité » de (I.9). En effet, on estime la vraie fonction de valeur en travaillant avec des fonctions dites de « test » qui sont suffisamment régulières pour montrer que  $v$  est solution de (I.11) dans un sens « de viscosité ». Avant de présenter une caractérisation formelle des solutions de viscosités, on présente une introduction intuitive qui permet de les relier aux solutions « classiques ».

### 1.3.2.3.1 Une intuition pour les solutions continues

Dans cette partie, on présente une intuition qui permet de relier les équations suffisamment régulières de (I.9) à celles de viscosité.

Supposons qu'il existe une solution régulière  $v$  telle que  $Dv(x)$  et  $D^2v(x)$  sont bien définies et considérons un ensemble de fonctions de test  $\phi(x)$ . Supposons que  $(v - \phi)$  admet un maximum global en  $x_0 \in \mathcal{O}$  satisfaisant  $v(x_0) = \phi(x_0)$  alors

$$(v - \phi)(x) \leq 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{O} \quad \text{et} \\ \max(v - \phi) = v(x_0) - \phi(x_0) = 0, \quad x_0 \in \mathcal{O}.$$

Ainsi, on obtient en  $x_0$  que

$$D\phi(x_0) = Dv(x_0) \text{ et } D^2\phi(x_0) \geq D^2v(x_0).$$

Alors par la condition d'ellipticité dans (I.10) ,

$$\begin{aligned} F(x_0, v(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) &= F(x_0, v(x_0), Dv(x_0), D^2\phi(x_0)) \\ &\leq F(x_0, v(x_0), Dv(x_0), D^2v(x_0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En se basant sur l'analyse ci-dessus, on peut constater que l'équation

$F(x_0, v(x_0), Dv(x_0), D^2v(x_0)) = 0$  implique l'inégalité

$$F(x_0, v(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0 \tag{I.14}$$

pour toute fonction régulière qui satisfait

$$\begin{aligned} v - \phi &\leq 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{O} \quad \text{et} \\ \max(v - \phi) &= v(x_0) - \phi(x_0) = 0, \quad x_0 \in \mathcal{O}. \end{aligned} \tag{I.15}$$

Considérons maintenant un autre ensemble de fonctions de test régulières  $\varphi(x)$  telles que

$$\begin{aligned} v - \varphi &\geq 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{O} \\ \min(v - \varphi) &= v(x_0) - \phi(x_0) = 0, \quad x_0 \in \mathcal{O}. \end{aligned} \tag{I.16}$$

C'est-à-dire qu'il existe un point  $x_0 \in \mathcal{O}$  tel que  $v - \varphi$  admet un minimum global en  $x_0$  qui satisfait  $v(x_0) = \varphi(x_0)$ .

En suivant une analyse similaire, on peut démontrer que pour de telles fonctions de test on obtient l'inégalité

$$F(x_0, v(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0. \tag{I.17}$$

À partir de cette brève introduction, on a démontré que l'égalité (I.9) implique les deux inégalités (I.14) et (I.17) définies en utilisant des fonctions de test régulières.

Cependant, ce qui est plus intéressant c'est qu'on peut arriver à l'égalité (I.9) en se basant sur les deux inégalités. En effet, on peut choisir  $\phi = v$  et  $\varphi = v$  comme des cas spéciaux de fonctions de test, et en utilisant le même raisonnement on peut démontrer que  $F(x_0, v(x_0), Dv(x_0), D^2v(x_0)) \leq 0$  et  $F(x_0, v(x_0), Dv(x_0), D^2v(x_0)) \geq 0$  pour tout  $x_0 \in \mathcal{O}$  puisque tout point  $x_0$  est minimum et maximum global de  $v - v$ .

Par conséquent, si on assume l'existence d'une solution « classique » à (I.9), alors on peut obtenir une spécification équivalente à partir des inégalités (I.14) et (I.17). Toutefois, même dans le cas où il n'existe pas de solutions suffisamment régulières pour (I.9), on peut toujours utiliser les conditions (I.14-I.15) et (I.17-I.16) afin de définir une solution à (I.9) puisque toutes les dérivées sont toujours bien définies pour les fonctions de test.

Ceci est l'intuition derrière l'introduction des solutions de viscosité « continues ».



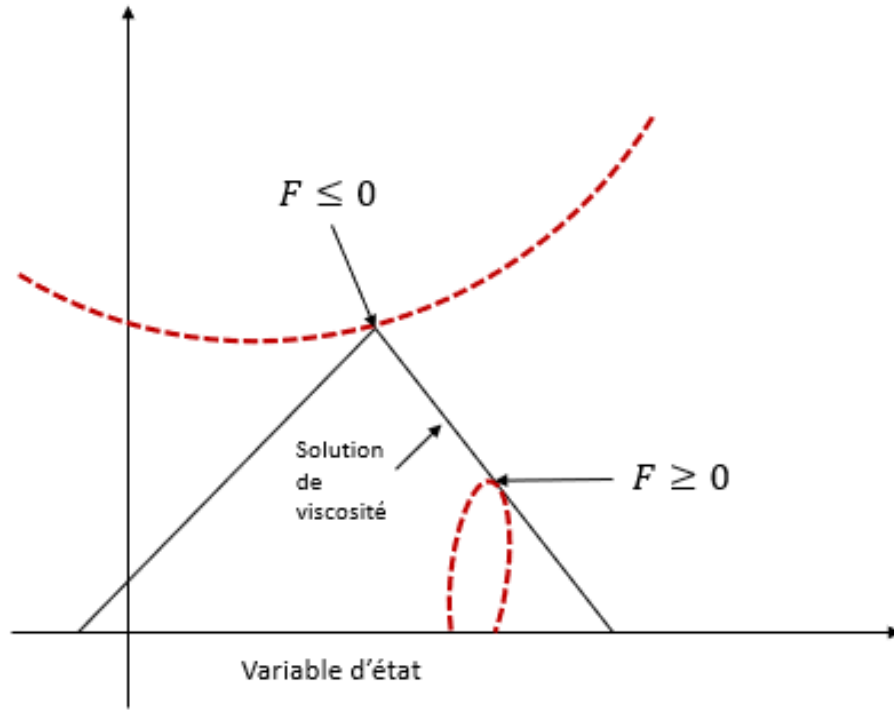


FIGURE 1.1: Illustration d'une solution de viscosité continue

La courbe supérieure en pointillés représente une fonction de test régulière  $\phi$  qui touche la solution de viscosité par le dessus en un point  $x_0$  et  $F(x_0, v(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \leq 0$ .

La courbe inférieure en pointillés représente une fonction de test régulière  $\varphi$  qui touche la solution de viscosité par le dessous en un point  $x_0$  et  $F(x_0, v(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0$ .

Comme on peut remarquer à partir de l'illustration, on peut avoir certains points où une fonction de test suffisamment régulière ne peut toucher la solution de viscosité que par le haut, par le bas ou ni l'un ni l'autre.

On introduit ci-dessous une définition générale des solutions de viscosité continues de l'équation (I.9).

**Définition 1.3.1**

Soit  $v : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

i)  $v$  est une sous-solution de viscosité de (I.9) sur  $\mathcal{O}$  si

$\forall (x_0, \varphi) \in \mathcal{O} \times C^2(\mathcal{O})$  où  $(v - \varphi)$  admet un maximum global en  $x_0$  sur  $\mathcal{O}$ , on a

$$F(x_0, v(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0. \quad (\text{I.18})$$

ii)  $v$  est une sur-solution de viscosité de (I.9) sur  $\mathcal{O}$  si

$\forall (x_0, \varphi) \in \mathcal{O} \times C^2(\mathcal{O})$  où  $(v - \varphi)$  admet un minimum global en  $x_0$  sur  $\mathcal{O}$ , on a

$$F(x_0, v(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0. \quad (\text{I.19})$$

iii)  $v$  est une solution de viscosité de (I.9) sur  $\mathcal{O}$  si c'est une sous-solution de viscosité et une sur-solution de viscosité de (I.9) sur  $\mathcal{O}$ .

**1.3.2.3.2 Le cas général**

Dans la définition 1.3.1, la solution de viscosité est supposée « continue ». Cependant, dans plusieurs cas, l'analyse de la continuité d'une solution n'est pas directe surtout en l'absence de formes « explicites » pour l'équation (I.9).

Avant de présenter une caractérisation formelle des solutions de viscosités discontinues, on rappelle une définition des enveloppes semi-continues.

**Définition 1.3.2**

Soit  $v : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement bornée.

i) L'enveloppe semi-continue supérieure de  $v$  est la fonction définie par  $v^*(x) = \limsup_{y \rightarrow x} v(y)$ .

ii) L'enveloppe semi-continue inférieure de  $v$  est la fonction définie par  $v_*(x) = \liminf_{y \rightarrow x} v(y)$ .

**Remarque 1.3.3.** En menant une analyse similaire à celle adoptée dans 1.3.2.3.1 et en utilisant les enveloppes semi-continues  $v^*$  et  $v_*$  au besoin au lieu de  $v$ , on peut obtenir une définition équivalente à (1.3.1) pour le cas discontinue.

On présente ci-dessous une définition caractérisant les solutions de viscosité discontinues de l'équation (I.9).

### Définition 1.3.3

Soit  $v : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement bornée.

i)  $v$  est une sous-solution de viscosité de (I.9) sur  $\mathcal{O}$  si

$\forall (x_0, \varphi) \in \mathcal{O} \times C^2(\mathcal{O})$  où  $x_0$  est un maximum global de  $(v^* - \varphi)$  sur  $\mathcal{O}$ , on a

$$F(x_0, v^*(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0. \quad (\text{I.20})$$

ii)  $v$  est une sur-solution de viscosité de (I.9) sur  $\mathcal{O}$  si

$\forall (x_0, \varphi) \in \mathcal{O} \times C^2(\mathcal{O})$  où  $x_0$  est un minimum global de  $(v_* - \varphi)$  sur  $\mathcal{O}$ , on a

$$F(x_0, v_*(x_0), D\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0. \quad (\text{I.21})$$

iii)  $v$  est une solution de viscosité de (I.9) sur  $\mathcal{O}$  si c'est une sous-solution de viscosité et une sur-solution de viscosité de (I.9) sur  $\mathcal{O}$ .

## 1.4 Quelques notions sur les modèles de survie

On présente brièvement dans cette partie quelques éléments des mathématiques actuarielles traitant les modèles de survie, avec lesquels le lecteur peut aisément suivre les développements aux chapitres suivants. La première partie de cette section introduit de manière générale les concepts qu'on juge pertinents pour comprendre les différentes démarches dans ce travail, ensuite on présente la notion de force de mortalité tout en traitant un cas particulier concernant le modèle de survie utilisé dans ce mémoire.

### 1.4.1 La durée de vie future

Une compagnie d'assurance vie émettant une police ne sait pas exactement le moment de versement du capital-décès, donc l'assureur a besoin d'un modèle de mortalité qui permet de calculer les probabilités de décès/survie à des âges particuliers.

Notons  $T_\kappa$  la variable aléatoire caractérisant la durée de vie future d'un individu âgé  $\kappa$  (i.e.  $\kappa + T_\kappa$  est l'âge au décès de cet individu) et soit  $S_\kappa(t) = 1 - F_\kappa(t) = \mathbb{P}(T_\kappa > t)$  la fonction de survie de  $T_\kappa$  représentant ainsi la probabilité qu'un assuré âgé  $\kappa$  survit pour au moins  $t$  années. Une relation<sup>8</sup> utile et souvent utilisée de la fonction de survie  $S_\kappa(t)$  est

$$S_\kappa(t + u) = S_\kappa(t) S_{\kappa+t}(u), \quad \text{pour tout } u > 0.$$

#### 1.4.2 La force de mortalité

Un autre concept nous permettant de caractériser la probabilité de décès dans un futur immédiat est le taux instantané de mortalité. C'est la force de mortalité  $\lambda_\kappa$ , définie par

$$\lambda_\kappa = \lim_{\delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta t} \mathbb{P}(T_\kappa \leq \delta t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\delta t} (1 - S_\kappa(\delta t)).$$

Après quelques calculs usuels, il est possible de démontrer que

$$S_\kappa(t) = \exp \left\{ - \int_\kappa^{\kappa+t} \lambda_r dr \right\}.$$

Ainsi, la force de mortalité caractérise complètement la distribution de la durée de vie future d'un individu. En effet, en connaissant  $\lambda_\kappa$  pour tout  $\kappa \geq 0$  on peut déterminer toutes les probabilités de survie  $S_\kappa(t)$  pour tout  $\kappa$  et  $t$ .

##### 1.4.2.1 Notation actuarielle

Les notations  $S_\kappa(t)$  et  $F_\kappa(t)$  utilisées précédemment sont souvent adoptées en statistique. Généralement en mathématiques actuarielles, on se base sur les notations suivantes

$$\begin{aligned} {}_t p_\kappa &= \mathbb{P}(T_\kappa > t) = S_\kappa(t), \\ {}_t q_\kappa &= \mathbb{P}(T_\kappa \leq t) = 1 - {}_t p_\kappa, \\ \dot{e}_\kappa &= \mathbb{E}[T_\kappa] = \int_0^\infty {}_t p_\kappa dt. \end{aligned}$$

---

8. Le lecteur peut consulter le deuxième chapitre de Dickson *et al.* (2009) pour une démonstration de ce résultat.

Ainsi, on récupère les relations suivantes

$$\begin{aligned} {}_{t+u}p_{\kappa} &= {}_tp_{\kappa} {}_up_{\kappa+t} \quad \text{pour tout } u > 0, \quad \text{et} \\ {}_tp_{\kappa} &= \exp \left\{ - \int_{\kappa}^{\kappa+t} \lambda_r \, dr \right\}. \end{aligned}$$

#### 1.4.2.2 La loi de mortalité de Gompertz-Makeham

Les premières tentatives permettant l'élaboration d'une théorie quantitative du vieillissement, de la mortalité et de la durée de vie remontent au XVIIe siècle, et donc il existe une vaste littérature sur le sujet. Cependant, le modèle proposé par l'actuaire Benjamin Gompertz, qui suppose que la mortalité humaine augmente exponentiellement en fonction de l'âge de l'individu, a marqué une nouvelle ère pour la science actuarielle. En effet, de nombreuses contributions dans le domaine des modèles de mortalité généralise le modèle de Gompertz. Une extension notable est celle présentée par l'actuaire William M. Makeham dans Makeham (1860) où l'auteur constate qu'on peut améliorer le modèle de Gompertz en ajoutant une constante indépendante de l'âge  $\kappa$  de l'individu. Ainsi, le modèle considéré est

$$\lambda_{\kappa} = A_1 + A_2 C^{\kappa}, \quad \text{où } A_1 > 0, \, A_2 > 0 \text{ et } C > 1.$$

En utilisant les relations établies ci-dessus, on obtient

$${}_tp_{\kappa} = \exp \left\{ \frac{A_2 C^{\kappa}}{\ln(C)} (1 - C^t) - A_1 t \right\}$$

et

$$\dot{e}_{\kappa} = \int_0^{\infty} \exp \left\{ \frac{A_2 C^{\kappa}}{\ln(C)} (1 - C^t) - A_1 t \right\} dt.$$

→ Exemple numérique

Pour des valeurs  $A_1 = 0.0001$ ,  $A_2 = 0.00035$ ,  $C = 1.075$  et en considérant trois assurés d'âges respectifs  $\kappa = 50$ ,  $\kappa = 60$ ,  $\kappa = 65$ . On aboutit aux espérances de vie résiduelle suivantes

$$\dot{e}_{50} = 21.6, \quad \dot{e}_{60} = 15.1, \quad \dot{e}_{65} = 12.3.$$

## CHAPITRE II

### FORMULATION DU PROBLÈME DE CONTRÔLE STOCHASTIQUE APPLIQUÉ À UN FONDS DISTINCT HYBRIDE

Après avoir défini au chapitre précédent les concepts de base en théorie de l'utilité, calcul stochastique et contrôle stochastique optimal, on s'intéresse dans ce chapitre à l'application de ces notions afin d'optimiser le portefeuille d'un détenteur de fonds distinct caractérisé par une garantie à l'échéance en cas de survie (GMMB)<sup>9</sup> ainsi qu'une garantie en cas de décès (GMDB)<sup>10</sup>. On consacre la première section de ce chapitre à la présentation de la dynamique du fonds distinct. Ensuite, on s'intéresse à l'optimisation de ce contrat hybride pour un assuré qui évalue ses choix selon une fonction d'utilité « classique ». Dans la dernière partie de ce chapitre, on traite le cas où le détenteur d'un tel fonds est averse à la perte, c'est-à-dire qu'il examine ses choix en comparant ses gains et pertes par rapport à un seuil prédéfini en utilisant une fonction d'utilité « S-shaped ».

---

9. Guaranteed Minimum Maturity Benefit

10. Guaranteed Minimum Death Benefit

## 2.1 Marché financier et dynamique du fonds distinct

### 2.1.1 Marché financier

Soit un horizon de temps fini  $T > 0$  et un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

Considérons le marché financier du modèle de Black-Scholes contenant un actif risqué

$S = \{S_t : 0 \leq t \leq T\}$  et un autre sans risque  $B = \{B_t : 0 \leq t \leq T\}$  dont les dynamiques sont données par

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt, & B_0 &= 1 \\ dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, & S_0 &= s \end{aligned} \tag{II.1}$$

où  $W = \{W_t : 0 \leq t \leq T\}$  est un mouvement brownien standard et les paramètres  $r \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $\sigma > 0$  sont des constantes.

On définit  $\pi = \{\pi_t : 0 \leq t \leq T\}$  et  $\Gamma = \{\Gamma_t : 0 \leq t \leq T\}$  deux processus adaptés à  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ , la filtration standard engendrée par  $W$ , représentant le nombre d'unités investis dans l'actif risqué et dans l'actif sans risque respectivement. La valeur du portefeuille résultant au temps  $0 \leq t \leq T$  est notée par  $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$  où

$$X_t = \pi_t S_t + \Gamma_t B_t, \quad X_0 = x_0 > 0.$$

Soit  $\nu_t$  la proportion du portefeuille investie dans l'actif risqué et  $1 - \nu_t$  celle investie dans l'actif sans risque au temps  $t$ . On définit ainsi le processus  $\nu = \{\nu_t : 0 \leq t \leq T\}$  caractérisant la stratégie d'investissement par

$$\nu_t = \frac{\pi_t S_t}{X_t}$$

et la valeur du portefeuille correspondant à ce contrôle par  $X^\nu = \{X_t^\nu : 0 \leq t \leq T\}$ .

On se limite dans le contexte de ce mémoire aux stratégies d'investissements autofinancées, définies ci-dessous.

**Définition 2.1.1**

Une stratégie d'investissement  $\nu = \{\nu_t : 0 \leq t \leq T\}$  est dite autofinancée si

$$dX_t^\nu = \pi_t dS_t + \Gamma_t dB_t .$$

La définition ci-dessus signifie que la variation de la valeur du portefeuille est causée uniquement par la variation des actifs composant le portefeuille.

Soit  $\nu = \{\nu_t : 0 \leq t \leq T\}$  une stratégie d'investissement autofinancée.

On a donc

$$\begin{aligned} dX_t^\nu &= \pi_t [\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t] + \Gamma_t [r B_t dt] \\ &= \frac{\nu_t X_t^\nu}{S_t} [\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t] + \frac{(1 - \nu_t) X_t^\nu}{B_t} r B_t dt \\ &= [\nu_t(\mu - r) + r] X_t^\nu dt + \nu_t \sigma X_t^\nu dW_t . \end{aligned}$$

On peut aussi écrire

$$dX_t^\nu = [\alpha \nu_t + r] X_t^\nu dt + \nu_t \sigma X_t^\nu dW_t , \quad (\text{II.2})$$

avec  $\alpha = \mu - r > 0$  .

### 2.1.2 La dynamique du fonds distinct

Tel que mentionné en introduction, un fonds distinct est un outil d'investissement composé d'une garantie qui protège d'un risque (décès, baisse du marché,...).

Dans notre cas, on s'intéresse aux fonds distincts de type GMMB et GMDB qui garantissent un montant prédéterminé à l'échéance ou au décès de l'assuré.

En d'autres mots, l'assureur s'engage à payer la différence entre le montant de cette garantie et la valeur du fonds distincts si cette différence est positive

- à l'échéance pour un contrat GMMB,
- à l'instant du décès de l'assuré pour un contrat GMDB, ou
- au premier temps entre l'échéance et l'instant du décès pour un détenteur des deux contrats.



Dans le cadre de cette étude, on suppose que l'assureur a toujours le montant nécessaire pour honorer son engagement et qu'il est impossible pour l'assuré de retirer son investissement avant l'échéance ou son décès.

Soit  $F^\nu := \{F_t^\nu : 0 \leq t \leq T\}$  le processus stochastique représentant la valeur d'un fonds distinct où  $F_t^{\nu_t}$  représente la valeur du fonds à l'instant  $t$  dont une proportion  $\nu_t$  est investie dans l'actif risqué de valeur  $S_t$  et  $(1 - \nu_t)$  investie dans l'actif sans risque de valeur  $B_t$  (représentés dans (II.1)). Des frais sont payés à partir du fonds tout au long de la période d'investissement pour financer la garantie du fonds à l'échéance ou au décès. La structure de ces frais est d'une grande importance dans la conception, la tarification et la couverture de ces produits, ce qui peut fortement impacter leurs ventes dans le marché des fonds distincts. Par exemple, l'un des désavantages d'une dynamique de frais constante est l'incitation aux rachats du contrat par l'assuré comme cité dans Bernard et Moenig (2019) et Bernard *et al.* (2014). Pour un résumé sur les différentes dynamiques des frais traitées dans la littérature concernant les fonds distincts, le lecteur est fortement encouragé à consulter la section 1.1 de Wang et Zou (2021).

L'assuré dans notre étude ne peut pas retirer son investissement avant l'échéance ou son décès, mais il a la possibilité de changer la composition de son portefeuille dans le temps. Autrement dit, on étudie la situation où la prime initiale peut être répartie entre un actif risqué et un actif sans risque, et où cette combinaison peut être rééquilibrée en continu. Ainsi, on suit la dynamique proposée dans MacKay et Ocejo (2022) qui tient compte du risque lié à l'investissement dans l'actif risqué.

Notons  $C = \{C_t : 0 \leq t \leq T\}$  le processus stochastique représentant le montant total des frais prélevés du fonds distinct et on discerne deux composantes :

- (i) une partie des frais proportionnelle au montant investi dans l'actif risqué représentée par un taux  $c_s$  ;
- (ii) une partie des frais proportionnelle au montant total du fonds liée à un taux  $c_F$  .

Les taux  $c_s, c_F \geq 0$  sont des constantes.

Alors l'équation caractérisant le processus des frais prélevés du fonds distincts est donnée par

$$\begin{aligned} dC_t &= c_s \nu_t F_t^\nu dt + c_F F_t^\nu dt \\ &= (c_s \nu_t + c_F) F_t^\nu dt . \end{aligned}$$

En combinant la dynamique du portefeuille décrite à la section II.1 et l'équation des frais prélevés du fonds (2.1.2), on obtient l'équation différentielle stochastique du fonds distinct représentée par

$$\begin{aligned} dF_t^\nu &= \pi_t dS_t + \Gamma_t dB_t - dC_t \\ &= \frac{\nu_t F_t^\nu}{S_t} dS_t + \frac{(1 - \nu_t) F_t^\nu}{B_t} dB_t - dC_t \\ &= \nu_t \mu F_t^\nu dt + \nu_t \sigma F_t^\nu dW_t + (1 - \nu_t) r F_t^\nu dt - dC_t \\ &= [\alpha \nu_t + r] F_t^\nu dt + \nu_t \sigma F_t^\nu dW_t - dC_t \\ &= [(\alpha - c_s) \nu_t + r - c_F] F_t^\nu dt + \nu_t \sigma F_t^\nu dW_t , \end{aligned} \tag{II.3}$$

avec  $\alpha = \mu - r$ .

**Remarque 2.1.1.** *En posant  $\tilde{\mu} = \mu - c_s - c_F$ ,  $\tilde{r} = r - c_F$  et  $\tilde{\alpha} = \tilde{\mu} - \tilde{r}$  on constate que (II.3) est équivalente à*

$$dF_t^\nu = [\tilde{\alpha} \nu_t + \tilde{r}] F_t^\nu dt + \nu_t \sigma F_t^\nu dW_t .$$

Ainsi, on peut se ramener à une équation d'un portefeuille autofinancé, de forme comparable à celle de l'équation (II.2).

On impose que  $c_s < \alpha = \mu - r$  car sinon les frais proportionnels au montant investi dans l'actif risqué dépasseront les gains moyens générés par cet investissement.

On cherche à maximiser l'utilité espérée du montant perçu à l'échéance ou à l'instant du décès par un assuré détenant un fonds distinct évoluant selon la dynamique (II.3) et avec une valeur initiale  $F_0$  à l'instant  $t = 0$ . Dénотons par  $G$  la garantie à l'échéance en cas de survie ou à l'instant du décès.

Pour le reste de ce mémoire, on utilise la notation suivante

$$A(F_t^\nu, \nu_t) = [(\alpha - c_s)\nu_t + r - c_F]F_t^\nu \quad \text{et} \quad B(F_t^\nu, \nu_t) = \sigma\nu_t F_t^\nu, \quad (\text{II.4})$$

où  $A$  représente le coefficient de dérive de l'équation différentielle stochastique (II.3) et  $B$  celui de diffusion.

Une écriture équivalente de la dynamique du fonds distinct est donc

$$dF_t^\nu = A(F_t^\nu, \nu_t)dt + B(F_t^\nu, \nu_t)dW_t. \quad (\text{II.5})$$

### 2.1.3 Les stratégies admissibles

L'une des étapes fondamentales dans un problème de contrôle stochastique est celle de la définition de l'ensemble des stratégies admissibles. Souvent, le critère qui permet de caractériser cet ensemble est la difficulté technique des démonstrations du problème considéré. Cependant, quelque situations exigent en plus de considérer des contraintes (financières, économiques,...) propre au problème. Dans notre cas :

- on étudie uniquement des stratégies d'investissement autofinancées, et
- on considère la caractérisation  $\mathbb{P}\left(\int_0^T (F_s^\nu)^2 ds < \infty\right) = 1$  pour utiliser les propriétés déjà citées auparavant dans la section 1.2 concernant les martingales locales dans les démonstrations. En effet, avec cette condition, l'intégrale stochastique dans (II.3) représente une martingale locale.

Le lecteur peut consulter la section 3.2 de Pham (2009) pour une présentation générale des ensembles de contrôles admissibles. Dénотons l'ensemble des stratégies admissibles par :

$$\mathcal{A}(t, x) = \left\{ \nu : \nu_s \text{ est } \mathcal{F}_s - \text{mesurable } \forall s \in [t, T], F_t^\nu = x, F_s^\nu \geq 0 \forall s \in [t, T], \right. \\ \left. \mathbb{P}\left(\int_0^T (F_s^\nu)^2 ds < \infty\right) = 1 \right\}, \quad (\text{II.6})$$

où  $x \geq 0$  représente la valeur du fonds à l'instant  $t$ . Plus tard, on se restreindra également aux stratégies prenant valeur dans  $\mathbb{U} = \{\nu : \nu_t \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{mesurable et } \nu_t \in [0, 1] \forall t \in [0, T]\}$ .

## 2.2 Problème de contrôle stochastique appliqué au fonds distinct avec une utilité « classique »

Dans cette section, on examine un contrat combinant une garantie financière en cas de survie à maturité ainsi qu’une garantie en cas de décès si ce dernier survient avant l’échéance. Comme c’est le cas dans la majorité des articles en actuariat, ne traitant pas le risque systémique de mortalité, on assume dans le reste de ce travail que l’exposition de l’assureur à la mortalité est totalement « diversifiable » et que le risque de marché est indépendant de celui de mortalité (Voir la section 2.3 de MacKay *et al.* (2017) pour plus de détails).

Une grande partie de la littérature sur ce type de problèmes s’inspire généralement de la théorie d’optimisation de portefeuille et plus précisément de celle se basant sur l’*approche martingale*. Cette technique est souvent utilisée lorsque le marché financier est considéré complet<sup>11</sup>. Dans un contexte général d’optimisation de l’utilité, l’approche martingale a été utilisée dans Karatzas *et al.* (1987) , Cox et Huang (1989) et Pliska (1986).

Pour une application de cette méthode aux fonds distincts et plus particulièrement à un contrat de type GMMB le lecteur peut se référer à MacKay et Oejo (2022).

Cependant dans le contexte de ce mémoire, on se limite à un espace de contrôles

$\mathbb{U} = [0,1]$ , c’est-à-dire que les stratégies d’investissement considérées ne permettent pas de vente à découvert. Ainsi, la propriété de complétude du marché financier n’est plus vérifiée et la formulation de base de la technique citée ci-dessus n’est plus applicable.

Pour contourner cette limitation, on applique les notions présentées à la section 1.3 au contexte d’un fonds distinct en dérivant d’abord l’équation HJB<sup>12</sup> reliée au problème pour s’intéresser ensuite à l’existence et l’unicité d’une solution de viscosité.

Avant de traiter les particularités du problème de contrôle stochastique, on introduit ci-dessous le cadre de travail utilisé dans cette section.

---

11. Tous les droits contingents peuvent être répliqués à partir des actifs composant ce marché financier.

12. Une équation différentielle aux dérivées partielles non linéaire comme présentée dans (I.11)

### 2.2.1 Éléments du modèle

Supposons que les préférences de l'assuré sont modélisées par une fonction d'utilité isoélastique  $U$  définie par

$$U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \quad \gamma \in (-\infty, 1) \setminus \{0\} \quad (\text{II.7})$$

On introduit aussi la filtration  $\{\mathcal{F}_t^M\}_{0 \leq t \leq T}$  contenant l'information binaire (vivant ou mort) sur la mortalité de l'assuré et on pose<sup>13</sup>  $\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^M)$  pour tout  $0 \leq t \leq T$ .

Notons  $\tau_D$  la durée de vie aléatoire d'un assuré, d'âge  $\kappa$  à l'instant  $t = 0$ , avec une force de mortalité *déterministe*  $\lambda_{\kappa+s}$  pour tout  $s \in (0, T)$ . Supposons finalement que le détenteur du contrat évalue son legs avec une version modifiée de la fonction d'utilité définie dans (II.7), notée  $U_b(\cdot)$ , où le paramètre  $b \geq 0$ <sup>14</sup> contrôle le niveau de son utilité, c'est-à-dire que

$$U_b(x) = b \frac{x^\gamma}{\gamma}, \quad \text{où } b \geq 0 \text{ et } \gamma \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$$

On inclut dans notre étude un facteur d'actualisation  $\rho > 0$  représentant la valeur temporelle de l'argent relativement à l'assuré. Une option valide est de supposer que le détenteur du fonds distinct évalue sa richesse dans le temps en actualisant avec le taux de l'actif sans risque  $r$ . Ainsi, on se permet d'utiliser le même cadre de travail utilisé dans Huang et Milevsky (2008) pour mener notre étude analytique et numérique pour le reste de ce travail.

Dans la suite de cette partie, on évalue l'expression analytique de la fonction de gain qui nous permettra de définir une fonction de valeur pour un détenteur d'un tel contrat.

Dénotons par  $J_b(t, x, \nu)$  la fonction de gain d'un assuré en vie à l'âge  $\kappa + t$  qui cherche à maximiser l'utilité espérée de sa richesse terminale en cas de survie et de son legs en cas de décès selon une stratégie d'investissement admissible  $\nu$  et une dynamique du fonds (II.5).

On obtient donc une fonction de gain représentée par la forme ci-dessous.

---

13.  $\mathcal{F}_t$  est la filtration contenant l'information sur le marché financier et  $\sigma(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^M)$  signifie la tribu engendrée par  $\mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{F}_t^M$

14. Une étude de sensibilité de ce paramètre est présentée au prochain chapitre pour évaluer son effet sur le gain ainsi que la politique d'investissement suivie par l'assuré.

$$\begin{aligned}
J_b(t, x, \nu) &= \mathbb{E} \left\{ e^{-\rho(T-t)} U(\max(G, F_T^\nu)) \mathbb{1}_{(\tau_D > T)} + e^{-\rho(\tau_D-t)} U_b(\max(G, F_{\tau_D}^\nu)) \mathbb{1}_{(t < \tau_D \leq T)} \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left\{ e^{-\rho(T-t)} U(\max(G, F_T^\nu)) \mathbb{1}_{(\tau_D > T)} + e^{-\rho(\tau_D-t)} U_b(\max(G, F_{\tau_D}^\nu)) \mathbb{1}_{(t < \tau_D \leq T)} \mid \tilde{\mathcal{F}}_t, \mathcal{F}_T \right\} \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ e^{-\rho(T-t)} U(\max(G, F_T^\nu))_{T-t} p_{\kappa+t} + \mathbb{E} \left\{ e^{-\rho(\tau_D-t)} U_b(\max(G, F_{\tau_D}^\nu)) \mathbb{1}_{(t < \tau_D \leq T)} \mid \tilde{\mathcal{F}}_t, \mathcal{F}_T \right\} \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ e^{-\rho(T-t)} U(\max(G, F_T^\nu))_{T-t} p_{\kappa+t} + \int_t^T e^{-\rho(s-t)} U_b(\max(G, F_s^\nu))_{s-t} p_{\kappa+t} \lambda_{\kappa+s} ds \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \int_t^T e^{-\rho(s-t)} g_b(F_s^\nu)_{s-t} p_{\kappa+t} \lambda_{\kappa+s} ds + e^{-\rho(T-t)} g(F_T^\nu)_{T-t} p_{\kappa+t} \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right\},
\end{aligned} \tag{II.8}$$

avec  $g_b(x) = U_b(G + (x - G)^+)$  et  $g(x) = U(G + (x - G)^+)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .

**Remarque 2.2.1.** *Il faut bien noter qu'on peut récupérer la fonction de gain d'un assuré détenant seulement un GMMB en posant  $\rho = 0$ ,  $b = 0$  et  $\lambda_{\kappa+t} \equiv 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . En effet, dans ce cas un seul flux est reçu à l'échéance  $t = T$  par un assuré qui est supposé toujours vivant à cet instant.*

Pour le reste de cette partie, on dénote par  $V_b(t, x)$  la fonction de valeur qui maximise  $J_b(t, x, \nu)$  sur l'ensemble des stratégies d'investissements admissibles  $\mathcal{A}(t, x) \cap \mathbb{U}$ , donc

$$V_b(t, x) = \sup_{\nu \in \mathcal{A}(t, x) \cap \mathbb{U}} J_b(t, x, \nu). \tag{II.9}$$

Pour alléger la notation, on pose pour la suite  $\mathcal{U}(t, x) = \mathcal{A}(t, x) \cap \mathbb{U}$  où la restriction aux processus dans  $\mathbb{U}$  sert à empêcher l'utilisation de l'effet de levier.

### 2.2.2 Principe de programmation dynamique

Les expressions pour  $J_b(t, x, \nu)$  et  $V_b(t, x)$  établies ci-dessus sont des cas particuliers de formes décrites à la section 1.3.2. En effet, on récupère la forme dans (I.6) en posant

$$f(s, x) = \lambda_{\kappa+s} g_b(x) \quad \text{et} \quad \beta(t, s) = e^{-\rho(s-t)}_{s-t} p_{\kappa+t}.$$

Pour  $0 \leq t \leq s \leq T$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ , comme  $_{T-t} p_{\kappa+t} = _{s-t} p_{\kappa+t} \text{ }_{T-s} p_{\kappa+s}$  alors il en découle que  $\beta(t, T) = \beta(t, s) \beta(s, T)$ . Ainsi, en appliquant la proposition (1.3.1), on obtient le principe

de programmation dynamique du problème étudié dans cette section, c'est-à-dire

$$V_b(t, x) = \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x)} \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau e^{-\rho(s-t)} g_b(F_s^\nu)_{s-t} p_{\kappa+t} \lambda_{\kappa+s} ds + e^{-\rho(\tau-t)}_{\tau-t} p_{\kappa+t} V_b(\tau, F_\tau^\nu) | \tilde{\mathcal{F}}_t \right], \quad (\text{II.10})$$

pour tout  $0 \leq t \leq \tau \leq T$ .

### 2.2.3 L'équation HJB

L'équation HJB ou l'équation de programmation dynamique correspondante est la version infinitésimale du principe de programmation dynamique. Elle décrit le comportement de la fonction de valeur  $V_b$  lorsque  $\tau$  est « proche » de  $t$  dans (II.10). Les étapes qui permettent la dérivation de cette équation reposent généralement sur de fortes conditions sur  $V_b$ .

Supposons que  $V_b$  est suffisamment régulière pour justifier les différents calculs de cette partie et fixons  $\tau = t + h$  avec  $h > 0$ . Par (II.10), on a pour tout  $\nu \in \mathcal{U}(t, x)$

$$V_b(t, x) \geq \mathbb{E} \left\{ \int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)} g_b(F_s^\nu)_{s-t} p_{\kappa+t} \lambda_{\kappa+s} ds + e^{-\rho h}_{h} p_{\kappa+t} V_b(t+h, F_{t+h}^\nu) | \tilde{\mathcal{F}}_t \right\}. \quad (\text{II.11})$$

En appliquant le lemme d'Itô à  $\phi_b(s, F_s^\nu) = e^{-\rho(s-t)}_{s-t} p_{\kappa+t} V_b(s, F_s^\nu)$  dans l'intervalle  $[t, t+h]$ , on obtient

$$\begin{aligned} & e^{-\rho h}_{h} p_{\kappa+t} V_b(t+h, F_{t+h}^\nu) - V_b(t, x) \\ &= \int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)}_{s-t} p_{\kappa+t} \left[ -\rho V_b(s, F_s^\nu) - \lambda_{\kappa+s} V_b(s, F_s^\nu) + \frac{\partial V_b}{\partial t}(s, F_s^\nu) \right] ds \\ &+ \int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)}_{s-t} p_{\kappa+t} \frac{\partial V_b}{\partial x}(s, F_s^\nu) dF^\nu + \frac{1}{2} \int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)}_{s-t} p_{\kappa+t} \frac{\partial^2 V_b}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) d\langle F^\nu \rangle_s \\ &= \int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)}_{s-t} p_{\kappa+t} \left[ -\rho V_b(s, F_s^\nu) - \lambda_{\kappa+s} V_b(s, F_s^\nu) + \frac{\partial V_b}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial V_b}{\partial x} A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_b}{\partial x^2} B^2(F_s^\nu, \nu_s) \right] ds + \int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)}_{s-t} p_{\kappa+t} \frac{\partial V_b}{\partial x}(s, F_s^\nu) B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s, \end{aligned}$$

où

$$A(F_t^\nu, \nu_t) = [(\alpha - c_s)\nu_t + r - c_F] F_t^\nu \quad \text{et} \quad B(F_t^\nu, \nu_t) = \sigma \nu_t F_t^\nu.$$

Supposons que les conditions d'application de l'un des deux théorèmes 1.2.3 ou 1.2.4 soient vérifiées pour établir que l'intégrale stochastique  $\int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)}_{s-t} p_{\kappa+t} \frac{\partial V_b}{\partial x}(s, F_s^\nu) B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s$

est une martingale. On obtient alors pour tout  $h > 0$ ,  $\nu \in \mathcal{U}(t, x)$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)} g_b(F_s^\nu) {}_{s-t}p_{\kappa+t} \lambda_{\kappa+s} ds + e^{-\rho h} {}_h p_{\kappa+t} V_b(t+h, F_{t+h}^\nu) \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right\} - V_b(t, x) \\ &= \mathbb{E} \left\{ \int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)} {}_{s-t}p_{\kappa+t} \left[ -\rho V_b(s, F_s^\nu) - \lambda_{\kappa+s} V_b(s, F_s^\nu) + \frac{\partial V_b}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial V_b}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_b}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa+s} g_b(F_s^\nu) \right] ds \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right\}. \end{aligned}$$

Par (II.11), il découle

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)} {}_{s-t}p_{\kappa+t} \left[ -\rho V_b(s, F_s^\nu) - \lambda_{\kappa+s} V_b(s, F_s^\nu) + \frac{\partial V_b}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial V_b}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_b}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa+s} g_b(F_s^\nu) \right] ds \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right\} \leq 0, \end{aligned}$$

pour tout  $\nu$  admissible. Si on assume qu'on peut intervertir la limite et l'espérance alors en appliquant le théorème d'accroissement fini, on a pour tout  $\nu \in \mathcal{U}(t, x)$

$$\frac{\partial V_b}{\partial t}(t, x) + \left\{ -(\rho + \lambda_{\kappa+t}) V_b(t, x) + \frac{\partial V_b}{\partial x}(t, x) A(x, \nu_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_b}{\partial x^2}(t, x) B^2(x, \nu_t) + \lambda_{\kappa+t} g_b(x) \right\} \leq 0.$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_b}{\partial t}(t, x) + \sup_\nu \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_b}{\partial x^2}(t, x) B^2(x, \nu_t) + \frac{\partial V_b}{\partial x}(t, x) A(x, \nu_t) - (\rho + \lambda_{\kappa+t}) V_b(t, x) \right\} \\ & + \lambda_{\kappa+t} g_b(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

En supposant l'existence d'un contrôle optimal  $\nu^*$  alors par (II.10) on a

$$V_b(t, x) = \mathbb{E} \left\{ \int_t^{t+h} e^{-\rho(s-t)} g_b(F_s^{\nu^*}) {}_{s-t}p_{\kappa+t} \lambda_{\kappa+s} ds + e^{-\rho h} {}_h p_{\kappa+t} V_b(t+h, F_{t+h}^{\nu^*}) \mid \mathcal{F}_t^* \right\}.$$



Par des arguments similaires à ceux utilisés ci-dessus, on obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_b}{\partial t}(t, x) + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_b}{\partial x^2}(t, x) B^2(x, \nu_t^*) + \frac{\partial V_b}{\partial x}(t, x) A(x, \nu_t^*) - (\rho + \lambda_{\kappa+t}) V_b(t, x) \right\} \\ + \lambda_{\kappa+t} g_b(x) = 0 . \end{aligned} \quad (2)$$

En combinant (1) et (2), on établit l'équation HJB correspondante

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_b}{\partial t}(t, x) + \sup_{\nu} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_b}{\partial x^2}(t, x) B^2(x, \nu_t) + \frac{\partial V_b}{\partial x}(t, x) A(x, \nu_t) - (\rho + \lambda_{\kappa+t}) V_b(t, x) \right\} \\ + \lambda_{\kappa+t} g_b(x) = 0 , \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

pour  $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^+$  et avec la condition terminale  $V_b(T, x) = g(x)$ .

Notons  $H_b(t, x, v, q, m) = \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x)} \left\{ \frac{1}{2} m B^2(x, \nu_t) + q A(x, \nu_t) - v (\rho + \lambda_{\kappa+t}) \right\} + \lambda_{\kappa+t} g_b(x)$ .

**Remarque 2.2.2.** La fonction  $H_b$  vérifie les deux conditions citées dans (I.12).

Pour pouvoir utiliser la théorie sur les solutions de viscosité de l'équation (II.12), on se base sur une écriture équivalente de (II.12) respectant les conditions décrites dans la section 1.3.2.3. Ainsi, l'équation (HJB) qu'on analyse dans cette section a la forme

$$-\frac{\partial V_b}{\partial t}(t, x) - H_b \left( t, x, V_b(t, x), \frac{\partial V_b}{\partial x}(t, x), \frac{\partial^2 V_b}{\partial x^2}(t, x) \right) = 0 , \quad (\text{II.13})$$

pour  $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^+$  et avec la condition terminale  $V_b(T, x) = g(x)$ .

**Remarque 2.2.3.** En supposant que  $V_b$  est suffisamment régulière, il vient

$$H_b \left( t, x, V_b(t, x), \frac{\partial V_b}{\partial x}(t, x), \frac{\partial^2 V_b}{\partial x^2}(t, x) \right) < \infty \quad \text{dans } [0, T) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 .$$

En effet, les fonctions  $A(x, \cdot)$  et  $B(x, \cdot)$  définies dans (II.4) sont continues et  $\mathbb{U} = [0, 1]$  est un compact alors le supremum est toujours atteint.

#### 2.2.4 Caractéristiques de la fonction de valeur

Comme mentionné dans la partie (1.3.2.2, l'analyse de la régularité de la fonction de valeur est primordiale pour vérifier qu'une fonction est solution de l'équation HJB, alors on se retrouve souvent contraint de se limiter à des suppositions très strictes puisque cette étape est fortement dépendante des hypothèses sur les paramètres du modèle.

Cette forte dépendance aux hypothèses du modèle a été discuté dans la deuxième section de Davis et Norman (1990) ainsi que dans Herdegen *et al.* (2021) concernant le problème de Merton avec une proportion investie dans l'actif risqué qui est bornée et  $\gamma < 0$  dans la fonction d'utilité. En effet, dans une grande partie de la littérature, le paramètre  $\gamma$  est souvent limité à l'intervalle (0,1) pour éviter les variations infinies de la fonction d'utilité pour un paramètre  $\gamma < 0$  et des valeurs proches de 0. Pour illustrer la différence par rapport au problème étudié dans cette partie, on représente ci-dessous l'utilité pour le cas « classique » de Merton ainsi que celle d'intérêt dans ce mémoire qui est dépendante d'une garantie  $G > 0$ .

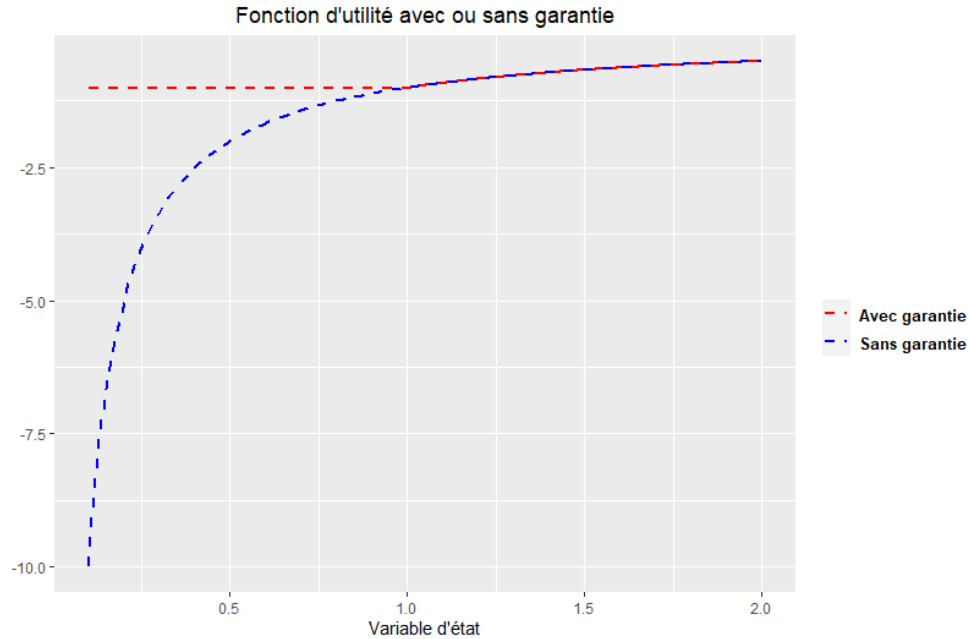


FIGURE 2.1: Fonction d'utilité « classique » pour  $G = 1$  et  $\gamma = -1$

Dans le cas avec garantie, en plus d'une possible continuité de la fonction de valeur, on peut garantir que les intégrales stochastiques utilisées pour aboutir à l'équation HJB soient des martingales en travaillant localement autour de  $x$  et ceci même pour des valeurs assez proches de 0.

Avant de traiter la continuité de la fonction de valeur  $V$  décrite dans (II.9), on vérifie les deux hypothèses  $(H_\mu)$  et  $(H_\sigma)$  de l'équation différentielle stochastique (II.5) ainsi que quelques propriétés de la fonction  $g$  définie dans (II.8).

**Proposition 2.2.1**

Soient  $A(\cdot, \cdot), B(\cdot, \cdot)$  définies dans (II.4) et la fonction  $g(\cdot)$  présentée à (II.8), alors  $\exists (L^A, L^B, L^g) \in (\mathbb{R}^{*+})^3$  telles que pour tout  $(x, y, \nu) \in (\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{U}$ ,

$$|A(x, \nu) - A(y, \nu)| \leq L^A |x - y| \quad (\text{II.14})$$

$$|B(x, \nu) - B(y, \nu)| \leq L^B |x - y| \quad (\text{II.15})$$

$$|g(x) - g(y)| \leq L^g |x - y| \quad (\text{II.16})$$

**Démonstration :**

On a

$$\begin{aligned} |A(x, \nu) - A(y, \nu)| &= |[(\alpha - c_s)\nu + r - c_F]x - [(\alpha - c_s)\nu + r - c_F]y| \\ &= |(\alpha - c_s)\nu + r - c_F| |x - y| \\ &\leq (\alpha - c_s + |r - c_F|) |x - y|, \end{aligned}$$

pour tout  $\nu \in \mathbb{U}$ . Ainsi  $\forall (x, y, \nu) \in (\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{U}$

$$|A(x, \nu) - A(y, \nu)| \leq L^A |x - y|,$$

où  $L^A = \alpha - c_s + |r - c_F|$ .

En utilisant la définition de la fonction  $B$  dans (II.4), on obtient

$$\begin{aligned} |B(x, \nu) - B(y, \nu)| &= |\sigma \nu| |x - y| \\ &\leq \sigma |x - y|. \end{aligned}$$

Alors  $\forall (x, y, \nu) \in (\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{U}$

$$|B(x, \nu) - B(y, \nu)| \leq L^B |x - y|,$$

où  $L^B = \sigma$ .

La fonction  $g$  telle que définie dans (II.8) pour  $\gamma < 1$  et  $\gamma \neq 0$  vérifie

$$g(x) = \begin{cases} \frac{G^\gamma}{\gamma} & \text{si } x < G \\ \frac{x^\gamma}{\gamma} & \text{si } x \geq G. \end{cases}$$

Comme  $\gamma < 1$  alors  $|g'(x)| \leq G^{\gamma-1}$  pour tout  $x$ . Ainsi la fonction  $g$  est continue avec une dérivée bornée alors elle lipschitzienne de paramètre  $G^{\gamma-1}$ . Autrement dit, pour  $L^g = G^{\gamma-1}$  on a

$$|g(x) - g(y)| \leq L^g |x - y|.$$

■

#### Remarque 2.2.4.

(i) Comme  $A(0, \nu) = B(0, \nu) = 0$  alors une conséquence immédiate des deux premières inégalités de la proposition 2.2.1 est

$$|A(x, \nu)|^2 \leq (L^A)^2 |x|^2 \quad \text{et} \quad |B(x, \nu)|^2 \leq (L^B)^2 |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(ii) D'après (II.8), on a  $g_b(x) = bg(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  alors la fonction  $g_b$  est lipschitzienne avec un paramètre  $bL^g$ .

(iii) On suppose aussi que la force de mortalité est bornée dans l'intervalle  $[0, T]$ . Autrement dit, il existe une constante  $L^\lambda$  (dépendante de  $T$ ) telle que

$$\lambda_{\kappa+s} \leq L^\lambda \quad \text{pour tout } s \in [0, T].$$

### 2.2.4.1 Continuité de la fonction de valeur

Dans cette partie, on procède à démontrer la continuité de la fonction de valeur  $V$  définie en (II.10) pour pouvoir appliquer la définition en (1.3.1). On traite séparément la continuité de  $V$  par rapport à ces deux paramètres  $t$  et  $x$  dans les deux propositions ci-dessous.

Pour alléger les notations dans cette partie et s'adapter à l'écriture du théorème (1.3.1), on dénote par  $F_{t,x}^\nu(\cdot)$  le processus du fonds distinct contrôlé par  $\nu \in \mathcal{U}(t, x)$ <sup>15</sup> et correspondant à l'état initial  $F_{t,x}^\nu(t) = x$  à l'instant  $t$ . On utilise aussi les fonctions  $f$  et  $\beta$  définies dans 2.2.2 pour faciliter les calculs.

#### Proposition 2.2.2

*La fonction  $V_b(t, \cdot)$  est lipschitzienne pour tout  $t \in [0, T]$*

#### Démonstration :

Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $y \in \mathbb{R}^+$  et  $t \in [0, T]$ , on a

$$\begin{aligned}
& |V_b(t, x) - V_b(t, y)| \\
&= \left| \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x)} \mathbb{E} \left[ \int_t^T \beta(t, s) f(s, F_{t,x}^\nu(s)) ds + \beta(t, T) g(F_{t,x}^\nu(T)) \mid \mathcal{F}_t^M \right] \right. \\
&\quad \left. - \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, y)} \mathbb{E} \left[ \int_t^T \beta(t, s) f(s, F_{t,y}^\nu(s)) ds + \beta(t, T) g(F_{t,y}^\nu(T)) \mid \mathcal{F}_t^M \right] \right| \\
&\leq \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x) \cup \mathcal{U}(t, y)} \left| \mathbb{E} \left[ \int_t^T \beta(t, s) f(s, F_{t,x}^\nu(s)) ds + \beta(t, T) g(F_{t,x}^\nu(T)) \mid \mathcal{F}_t^M \right] \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{E} \left[ \int_t^T \beta(t, s) f(s, F_{t,y}^\nu(s)) ds + \beta(t, T) g(F_{t,y}^\nu(T)) \mid \mathcal{F}_t^M \right] \right| \\
&\leq \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x) \cup \mathcal{U}(t, y)} \mathbb{E} \left[ \int_t^T \beta(t, s) \left| f(s, F_{t,x}^\nu(s)) - f(s, F_{t,y}^\nu(s)) \right| ds + \beta(t, T) \left| g(F_{t,x}^\nu(T)) - g(F_{t,y}^\nu(T)) \right| \mid \mathcal{F}_t^M \right].
\end{aligned}$$

Par la proposition 2.2.1 et la remarque 2.2.4 on a pour tout  $s \in [t, T]$ ,

$$\left| f(s, F_{t,x}^\nu(s)) - f(s, F_{t,y}^\nu(s)) \right| \leq L^\lambda L^g b \left| F_{t,x}^\nu(s) - F_{t,y}^\nu(s) \right| \quad \text{et} \quad \beta(t, s) \leq 1. \quad (\text{II.17})$$

Alors par l'indépendance du risque de marché et celui de mortalité, il vient

$$|V_b(t, x) - V_b(t, y)| \leq \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x) \cup \mathcal{U}(t, y)} \mathbb{E} \left[ L^\lambda L^g b \int_t^T \left| F_{t,x}^\nu(s) - F_{t,y}^\nu(s) \right| ds + L^g \left| F_{t,x}^\nu(T) - F_{t,y}^\nu(T) \right| \mid \mathcal{F}_t^M \right].$$

---

15.  $\mathcal{U}(t, x)$  est définie dans (II.9)

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la deuxième inégalité de (1.3.1), il vient pour tout  $\nu$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |F_{t,x}^\nu(T) - F_{t,y}^\nu(T)| \right] &\leq \sqrt{\mathbb{E} \left[ |F_{t,x}^\nu(T) - F_{t,y}^\nu(T)|^2 \right]} \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E} \left[ \sup_{l \in [t,T]} |F_{t,x}^\nu(l) - F_{t,y}^\nu(l)|^2 \right]} \\ &\leq \sqrt{C} |x - y| . \end{aligned}$$

Par une analyse similaire et en utilisant le résultat de Fubini (Voir le théorème 9.4.1 dans Rosenthal (2006)), on parvient à

$$\mathbb{E} \left[ \int_t^T |F_{t,x}^\nu(s) - F_{t,y}^\nu(s)| \, ds \right] \leq T\sqrt{C} |x - y| .$$

Ainsi,

$$|V_b(t, x) - V_b(t, y)| \leq L^g \sqrt{C} (1 + L^\lambda b) |x - y| \quad \text{pour tout } t \in [0, T] .$$

■

### Proposition 2.2.3

La fonction  $V_b(\cdot, x)$  est  $\frac{1}{2}$ -höldérienne pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .

### Démonstration :

Fixons  $x \in \mathbb{R}^+$  et supposons sans perdre de généralités que  $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ , alors en utilisant le principe de programmation dynamique établi en (II.10) on obtient

$$\begin{aligned} &|V_b(t_1, x) - V_b(t_2, x)| \\ &= \left| \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t_1, x)} \mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \beta(t_1, s) f(s, F_{t_1, x}^\nu(s)) \, ds + \beta(t_1, t_2) V_b(t_2, F_{t_1, x}^\nu(t_2)) \mid \mathcal{F}_{t_1}^M \right] - V_b(t_2, x) \right| \\ &\leq \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t_1, x)} \left| \mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \beta(t_1, s) f(s, F_{t_1, x}^\nu(s)) \, ds \mid \mathcal{F}_{t_1}^M \right] + \mathbb{E} \left[ \beta(t_1, t_2) V_b(t_2, F_{t_1, x}^\nu(t_2)) - V_b(t_2, x) \mid \mathcal{F}_{t_1}^M \right] \right| \\ &\leq \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t_1, x)} \left\{ \mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \beta(t_1, s) |f(s, F_{t_1, x}^\nu(s))| \, ds \mid \mathcal{F}_{t_1}^M \right] + \mathbb{E} \left[ |\beta(t_1, t_2) V_b(t_2, F_{t_1, x}^\nu(t_2)) - V_b(t_2, x)| \mid \mathcal{F}_{t_1}^M \right] \right\} . \end{aligned}$$

→ Comme  $f(s, 0) = \lambda_{\kappa+s} b \frac{G^\gamma}{\gamma}$  alors par (II.17) et (1.3.1), on obtient en utilisant le théorème de Fubini et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \beta(t_1, s) \left| f(s, F_{t_1, x}^\nu(s)) \right| ds \mid \mathcal{F}_{t_1}^M \right]^2 \\
& \leq \mathbb{E} \left[ \left( \int_{t_1}^{t_2} \beta(t_1, s) \left| f(s, F_{t_1, x}^\nu(s)) \right| ds \right)^2 \mid \mathcal{F}_{t_1}^M \right] \\
& \leq T \mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \beta(t_1, s)^2 \left| f(s, F_{t_1, x}^\nu(s)) \right|^2 ds \mid \mathcal{F}_{t_1}^M \right] \\
& \leq T \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{E} \left[ \left| f(s, F_{t_1, x}^\nu(s)) \right|^2 \right] ds \\
& \leq 2T \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{E} \left[ \left| f(s, F_{t_1, x}^\nu(s)) - f(s, 0) \right|^2 + |f(s, 0)|^2 \right] ds \\
& \leq 2T \int_{t_1}^{t_2} \left\{ (L^\lambda L^g b)^2 \mathbb{E} \left[ \left| F_{t_1, x}^\nu(s) \right|^2 \right] + (L^\lambda b)^2 \frac{G^{2\gamma}}{\gamma^2} \right\} ds \\
& \leq 2T \left\{ (L^\lambda L^g b)^2 \mathbb{E} \left[ \sup_{l \in [t_1, T]} \left| F_{t_1, x}^\nu(l) \right|^2 \right] + (L^\lambda b)^2 \frac{G^{2\gamma}}{\gamma^2} \right\} (t_2 - t_1) \\
& \leq 2T \left\{ (L^\lambda L^g b)^2 C(1 + |x|^2) + (L^\lambda b)^2 \frac{G^{2\gamma}}{\gamma^2} \right\} (t_2 - t_1) \\
& \leq 2T (L^\lambda b)^2 \left\{ C (L^g)^2 + \frac{G^{2\gamma}}{\gamma^2} \right\} (\sqrt{2} + |x|)^2 (t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \beta(t_1, s) \left| f(s, F_{t_1, x}^\nu(s)) \right| ds \mid \mathcal{F}_{t_1}^M \right] \leq \hat{C}_1 (\sqrt{2} + |x|)(t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}},$$

avec  $\hat{C}_1 = \sqrt{2T} L^\lambda b \left\{ C (L^g)^2 + \frac{G^{2\gamma}}{\gamma^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$

Alors par la propriété lipschitzienne de la fonction  $V(t_2, \cdot)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& |V_b(t_1, x) - V_b(t_2, x)| \\
& \leq \hat{C}_1 (\sqrt{2} + |x|)(t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}} + L^g \sqrt{C} (1 + L^\lambda b) \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t_1, x)} \mathbb{E} \left[ \left| F_{t_1, x}^\nu(t_2) - x \right| \right].
\end{aligned} \tag{II.18}$$

En utilisant la dynamique du fonds distinct (II.5), on a

$$F_{t_1, \nu}^\nu(t_2) - x = \int_{t_1}^{t_2} A(F_{t_1, \nu}^\nu(s), \nu) ds + \int_{t_1}^{t_2} B(F_{t_1, \nu}^\nu(s), \nu) dW_s.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \left| F_{t_1,x}^\nu(t_2) - x \right|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left| \int_{t_1}^{t_2} A(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) ds + \int_{t_1}^{t_2} B(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) dW_s \right|^2 \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[ \left| \int_{t_1}^{t_2} A(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) ds + \int_{t_1}^{t_2} B(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) dW_s \right|^2 \right] \\
&\leq 2\mathbb{E} \left[ \left| \int_{t_1}^{t_2} A(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) ds \right|^2 + \left| \int_{t_1}^{t_2} B(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) dW_s \right|^2 \right].
\end{aligned} \tag{II.19}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \left| \int_{t_1}^{t_2} A(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) ds \right|^2 \right] &\leq (t_2 - t_1) \mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \left| A(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) \right|^2 ds \right] \\
&\leq T \mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \left| A(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) \right|^2 ds \right]
\end{aligned} \tag{II.20}$$

et en utilisant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy<sup>16</sup>, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \left| \int_{t_1}^{t_2} B(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) dW_s \right|^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[ \sup_{l \in [t_1, t_2]} \left| \int_{t_1}^l B(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) dW_s \right|^2 \right] \\
&\leq K_1 \mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \left| B(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) \right|^2 ds \right].
\end{aligned} \tag{II.21}$$

En se basant sur la remarque 2.2.4 et le théorème 1.3.1, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \left| A(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) \right|^2 ds \right] &\leq (L^A)^2 \mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \left| F_{t_1,x}^\nu(s) \right|^2 ds \right] \\
&\leq (L^A)^2 (t_2 - t_1) \mathbb{E} \left[ \sup_{s \in [t_1, t_2]} \left| F_{t_1,x}^\nu(s) \right|^2 \right] \\
&\leq (L^A)^2 C (1 + |x|^2) (t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

Et de même on arrive au résultat

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \left| B(F_{t_1,x}^\nu(s), \nu) \right|^2 ds \right] &\leq (L^B)^2 \mathbb{E} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \left| F_{t_1,x}^\nu(s) \right|^2 ds \right] \\
&\leq (L^B)^2 (t_2 - t_1) \mathbb{E} \left[ \sup_{s \in [t_1, t_2]} \left| F_{t_1,x}^\nu(s) \right|^2 \right] \\
&\leq (L^B)^2 C (1 + |x|^2) (t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

---

16. Présentée au lemme 2 en annexe A.



Alors en remplaçant dans (II.19),(II.20) et (II.21), on conclut que

$$\mathbb{E} \left[ \left| F_{t_1,x}^\nu(t_2) - x \right|^2 \right] \leq \hat{C}_2 (1 + |x|^2) (t_2 - t_1),$$

où  $\hat{C}_2 = 2 C \{T(L^A)^2 + K_1(L^B)^2\}$ .

Ainsi, la propriété  $\frac{1}{2}$ -höldérienne de la fonction de valeur  $V_b$  découle de (II.18), c'est-à-dire que

$$|V_b(t_1, x) - V_b(t_2, x)| \leq \Gamma (\sqrt{2} + |x|) |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}},$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  où  $\Gamma = \hat{C}_1 + L^g \sqrt{C} (1 + L^\lambda b) \sqrt{\hat{C}_2}$ . ■

Les deux propositions (2.2.2) et (2.2.3) permettent de démontrer la continuité uniforme de la fonction de valeur  $V_b$  par rapport à la variable d'état, ainsi que sa continuité dans le temps.

#### **Proposition 2.2.4**

*La fonction de valeur  $V_b$  vérifie*

$$|V_b(t, x)| \leq C(1 + x) \tag{II.22}$$

$$|V_b(t, x) - V_b(s, y)| \leq \tilde{C} \left( |x - y| + (\sqrt{2} + x \vee y) |t - s|^{\frac{1}{2}} \right) \tag{II.23}$$

*pour  $(t, s, x, y) \in [0, T]^2 \times (\mathbb{R}^+)^2$  avec des constantes  $C > 0$  et  $\tilde{C} > 0$ .*

**Remarque 2.2.5.** *La première inégalité peut être considérée comme cas particulier de la proposition 2.2.2 et donc se démontre d'une façon similaire.*

*On aboutit au deuxième résultat en utilisant l'inégalité triangulaire ainsi que les propriétés lipschitziennes et  $\frac{1}{2}$ -höldériennes de la fonction de valeur  $V_b$ .*

#### 2.2.5 Existence et unicité de la solution de viscosité de (II.13)

Le principal objectif de cette section est de caractériser la fonction de valeur  $V_b$  définie dans (II.9) comme étant la solution de viscosité unique de l'équation HJB (II.13). On commence par prouver que  $V_b$  est une sur-solution et sous-solution de viscosité, ensuite on se base sur un résultat de comparaison qui permet d'établir l'unicité de la solution. Les démonstrations

de cette section s'inspirent en partie des méthodes présentées dans le chapitre 7 de Touzi (2012). Dénotons par  $\mathcal{Q} = [0, T) \times \mathbb{R}^+$  le domaine de validité de l'équation (II.13).

### 2.2.5.1 Existence d'une solution de viscosité

#### **Lemme 2.2.1**

*La fonction de valeur  $V_b$  définie en (II.9) est une sur-solution de viscosité continue de l'équation (II.13) sur  $\mathcal{Q}$ .*

#### **Démonstration :**

Soit  $\varphi \in C^{1,2}(\mathcal{Q})$  telle que  $(V_b - \varphi)$  admet un minimum en  $(t_0, x_0)$ .

Supposons sans perte de généralité que  $(V_b - \varphi)(t_0, x_0) = 0$ , alors dans ce cas on a

$V_b(t, x) \geq \varphi(t, x)$  pour tout  $(t, x) \in \mathcal{Q}$ . On considère le processus  $\{F_s^\nu\}_{t_0 \leq s \leq T}$  avec une valeur initiale de  $x_0$  à l'instant  $t = t_0$  et un contrôle  $\nu \in \mathcal{U}(t_0, x_0)$ .

Fixons  $\delta > 0$ ,  $h \in (0, T - t_0)$  et dénotons par  $\tau_h$  le temps d'arrêt donné par

$$\tau_h = \inf\{s \geq t_0 : |F_s^\nu - x_0| \geq \delta\} \wedge (t_0 + h).$$

En appliquant le lemme d'Itô à  $\phi_b(s, F_s^\nu) = e^{-\rho(s-t_0)} {}_{s-t_0}p_{\kappa+t_0} \varphi(s, F_s^\nu)$  dans l'intervalle  $[t_0, \tau_h]$ , il vient

$$\begin{aligned} & e^{-\rho(\tau_h - t_0)} {}_{\tau_h - t_0}p_{\kappa+t_0} \varphi(\tau_h, F_{\tau_h}^\nu) - \varphi(t_0, x_0) \\ &= \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} {}_{s-t_0}p_{\kappa+t_0} \left[ -\rho V_b(s, F_s^\nu) - \lambda_{\kappa+s} \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) \right] ds \\ &+ \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} {}_{s-t_0}p_{\kappa+t_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) dF^\nu + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} {}_{s-t_0}p_{\kappa+t_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) d\langle F^\nu \rangle_s \\ &= \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} {}_{s-t_0}p_{\kappa+t_0} \left[ -\rho \varphi(s, F_s^\nu) - \lambda_{\kappa+s} \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) \right] ds + \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} {}_{s-t_0}p_{\kappa+t_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s, \end{aligned}$$

où les fonctions  $A$  et  $B$  sont définies dans (II.4) et  ${}_{s-t_0}p_{\kappa+t_0} = \exp \left\{ - \int_{t_0}^s \lambda_{\kappa+r} dr \right\}$ .

Or, puisque  $\varphi(\tau_h, F_{\tau_h}^\nu) \leq V_b(\tau_h, F_{\tau_h}^\nu)$  et  $\varphi(t_0, x_0) = V_b(t_0, x_0)$  alors

$$\begin{aligned} & e^{-\rho(\tau_h - t_0)} \int_{t_0}^{\tau_h} p_{\kappa+t_0} V_b(\tau_h, F_{\tau_h}^\nu) - V_b(t_0, x_0) \\ & \geq \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} p_{\kappa+t_0} \left[ -\rho\varphi(s, F_s^\nu) - \lambda_{\kappa+s}\varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu)A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu)B^2(F_s^\nu, \nu_s) \right] ds + \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} p_{\kappa+t_0} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu)B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s, \end{aligned}$$

donc on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} p_{\kappa+t_0} \lambda_{\kappa+s} ds + e^{-\rho(\tau_h-t_0)} p_{\kappa+t_0} V_b(\tau_h, F_{\tau_h}^\nu) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right\} - V_b(t_0, x_0) \\ & \geq \mathbb{E} \left\{ \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} p_{\kappa+t_0} \left[ -\rho\varphi(s, F_s^\nu) - \lambda_{\kappa+s}\varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu)A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu)B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa+s} g_b(F_s^\nu) \right] ds \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right\} \\ & + \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} p_{\kappa+t_0} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu)B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right]. \end{aligned}$$

Le processus  $F^\nu$  est borné sur l'intervalle  $[t_0, \tau_h]$ , alors par la continuité de  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$  et de  $B$ , il vient que l'intégrande de l'intégrale stochastique est bornée. En appliquant le théorème (1.2.4), on démontre que  $\int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} p_{\kappa+t_0} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu)B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s$  est une martingale et donc

$$\mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} p_{\kappa+t_0} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu)B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right] = 0.$$

Par le principe de programmation dynamique (II.10), on a

$$\mathbb{E} \left\{ \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} p_{\kappa+t_0} \lambda_{\kappa+s} ds + e^{-\rho(\tau_h-t_0)} p_{\kappa+t_0} V_b(\tau_h, F_{\tau_h}^\nu) \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right\} - V_b(t_0, x_0) \leq 0.$$

Ainsi on obtient pour tout  $h \in (0, T - t_0)$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} p_{\kappa+t_0} \left[ -\rho\varphi(s, F_s^\nu) - \lambda_{\kappa+s}\varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu)A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu)B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa+s} g_b(F_s^\nu) \right] ds \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right\} \leq 0 \\ \Rightarrow & \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{h} \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} p_{\kappa+t_0} \left[ -\rho\varphi(s, F_s^\nu) - \lambda_{\kappa+s}\varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu)A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu)B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa+s} g_b(F_s^\nu) \right] ds \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right\} \leq 0. \end{aligned}$$

Par définition de  $\tau_h$ ,  $F^\nu$  est uniformément dominé dans  $\mathcal{L}^1$  sur  $[t_0, \tau_h]$  et l'intégrale à l'intérieur de l'espérance est uniformément dominée sur  $[t_0, \tau_h]$  puisque les fonctions de l'intégrande sont continues.

Alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_{t_0}^{\tau_h} e^{-\rho(s-t_0)} {}_{s-t_0}p_{\kappa+t_0} \left[ -\rho\varphi(s, F_s^\nu) - \lambda_{\kappa+s}\varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu)A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu)B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa+s} g_b(F_s^\nu) \right] ds \end{aligned}$$

est uniformément intégrable.

En prenant la limite  $h \rightarrow 0$  et en appliquant le théorème de convergence dominée (Voir le théorème 9.1.6 de Rosenthal (2006)), il vient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t_0, x_0) + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t_0, x_0)B^2(x_0, \nu_t) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t_0, x_0)A(x_0, \nu_t) - (\rho + \lambda_{\kappa+t_0})\varphi(t_0, x_0) \right\} + \lambda_{\kappa+t_0} g_b(x_0) \leq 0.$$

Ainsi

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t_0, x_0) - H_b(t_0, x_0, \varphi(t_0, x_0), \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t_0, x_0), \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t_0, x_0)) \geq 0,$$

où  $H_b$  est définie dans (II.12).

Ce qui conclut la preuve du lemme. ■

### **Lemme 2.2.2**

*La fonction de valeur  $V_b$  définie en (II.9) est une sous-solution de viscosité continue de l'équation (II.13) sur  $\mathcal{Q}$ .*

**Démonstration :** Soit  $\varphi \in C^{1,2}(\mathcal{Q})$  telle que  $(V_b - \varphi)$  admet un maximum en  $(t_0, x_0)$ .

Supposons sans perte de généralité que  $(V_b - \varphi)(t_0, x_0) = 0$ , alors dans ce cas on a

$$V_b(t, x) < \varphi(t, x) \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathcal{Q} \setminus (t_0, x_0). \quad (1)$$

Notons  $G(t, x) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, x) + H_b(t, x, \varphi(t, x), \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, x), \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t, x))$ , alors il suffit d'avoir  $G(t_0, x_0) \geq 0$  pour que la fonction de valeur  $V_b$  soit une sous-solution de viscosité.

Supposons par l'absurde que  $G(t_0, x_0) < 0$ . En utilisant la remarque 2.2.3 et puisque  $\varphi \in C^{1,2}(\mathcal{Q})$  alors la fonction  $G$  est continue.

Ainsi

$$\exists r > 0, \forall (t, x) \in B_r(t_0, x_0); G(t, x) < 0, \quad (2)$$

où  $B_r(t_0, x_0)$  est la boule ouverte de centre  $(t_0, x_0)$  et de rayon  $r$ .

On considère le processus  $\{F_s^\nu\}_{t_0 \leq s \leq T}$  avec une valeur initiale de  $x_0$  à l'instant  $t = t_0$  et pour un contrôle  $\nu \in \mathcal{U}(t_0, x_0)$ .

Posons  $\tau$  le temps d'arrêt défini par

$$\tau = \inf\{s \geq t_0 : F_s^\nu \notin B_r(t_0, x_0)\}.$$

Soit  $\delta = -e^{-\rho(\tau-t_0)} \tau_{-t_0} p_{\kappa+t_0} \max_{\partial B_r(t_0, x_0)} (V_b - \varphi)$ , où  $\partial B_r(t_0, x_0)$  est la frontière de  $B_r(t_0, x_0)$ . Alors par (1), on obtient que  $\delta > 0$ .

**Remarque 2.2.6.** *Par la continuité des trajectoires du processus  $F^\nu$ , on constate que*

$$\mathbb{P}[(\tau, F_\tau^\nu) \in \partial B_r(t_0, x_0)] = 1.$$

Alors puisque  $\delta > 0$ , il vient<sup>17</sup>

$$\varphi(\tau, F_\tau^\nu) \geq \delta \frac{e^{\rho(\tau-t_0)}}{\tau_{-t_0} p_{\kappa+t_0}} + V_b(\tau, F_\tau^\nu) \quad (4)$$

En appliquant le lemme d'Itô à  $\phi_b(s, F_s^\nu) = e^{-\rho(s-t_0)} s_{-t_0} p_{\kappa+t_0} \varphi(s, F_s^\nu)$  dans l'intervalle  $[t_0, \tau]$ , on trouve

$$\begin{aligned} & e^{-\rho(\tau-t_0)} \tau_{-t_0} p_{\kappa+t_0} \varphi(\tau, F_\tau^\nu) - \varphi(t_0, x_0) \\ &= \int_{t_0}^{\tau} e^{-\rho(s-t_0)} s_{-t_0} p_{\kappa+t_0} \left[ -(\rho + \lambda_{\kappa+s}) \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) \right] ds + \int_{t_0}^{\tau} e^{-\rho(s-t_0)} s_{-t_0} p_{\kappa+t_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s. \end{aligned}$$

Donc par (4), on obtient

$$\begin{aligned} & \delta + e^{-\rho(\tau-t_0)} \tau_{-t_0} p_{\kappa+t_0} V_b(\tau, F_\tau^\nu) - V_b(t_0, x_0) \\ & \leq \int_{t_0}^{\tau} e^{-\rho(s-t_0)} s_{-t_0} p_{\kappa+t_0} \left[ -(\rho + \lambda_{\kappa+s}) \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) \right] ds + \int_{t_0}^{\tau} e^{-\rho(s-t_0)} s_{-t_0} p_{\kappa+t_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s. \end{aligned}$$

Ainsi, en isolant  $V_b(t_0, x_0)$  et en prenant l'espérance conditionnelle des deux côtés, on a

---

17. Cette inégalité est presque sûrement valide.

$$\begin{aligned}
V_b(t_0, x_0) &\geq \delta + \mathbb{E} \left\{ \int_{t_0}^{\tau} e^{-\rho(s-t_0)} g_b(F_s^\nu)_{s-t_0} p_{\kappa+t_0} \lambda_{\kappa+s} ds + e^{-\rho(\tau-t_0)}_{\tau-t_0} p_{\kappa+t_0} V_b(\tau, F_\tau^\nu) | \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right\} \\
&- \mathbb{E} \left\{ \int_{t_0}^{\tau} e^{-\rho(s-t_0)}_{s-t_0} p_{\kappa+t_0} \left[ -(\rho + \lambda_{\kappa+s}) \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa+s} g_b(F_s^\nu) \right] ds | \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right\} \\
&- \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^{\tau} e^{-\rho(s-t_0)}_{s-t_0} p_{\kappa+t_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s | \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right] .
\end{aligned}$$

Comme  $(s, F_s^\nu) \in B_r(t_0, x_0)$  pour tout  $s \in (t_0, \tau)$  alors par (2), on a

$$\begin{aligned}
&- \mathbb{E} \left\{ \int_{t_0}^{\tau} e^{-\rho(s-t_0)}_{s-t_0} p_{\kappa+t_0} \left[ -(\rho + \lambda_{\kappa+s}) \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa+s} g_b(F_s^\nu) \right] ds | \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right\} > 0 ,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
V_b(t_0, x_0) &> \delta + \mathbb{E} \left\{ \int_{t_0}^{\tau} e^{-\rho(s-t_0)} g_b(F_s^\nu)_{s-t_0} p_{\kappa+t_0} \lambda_{\kappa+s} ds + e^{-\rho(\tau-t_0)}_{\tau-t_0} p_{\kappa+t_0} V_b(\tau, F_\tau^\nu) | \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right\} \\
&- \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^{\tau} e^{-\rho(s-t_0)}_{s-t_0} p_{\kappa+t_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s | \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right] .
\end{aligned}$$

Par définition de  $\tau$ ,  $F^\nu$  est uniformément dominé dans  $\mathcal{L}^1$  sur  $[t_0, \tau]$  donc

$$\begin{aligned}
V_b(t_0, x_0) &> \delta + \mathbb{E} \left\{ \int_{t_0}^{\tau} e^{-\rho(s-t_0)} g_b(F_s^\nu)_{s-t_0} p_{\kappa+t_0} \lambda_{\kappa+s} ds \right. \\
&\quad \left. + e^{-\rho(\tau-t_0)}_{\tau-t_0} p_{\kappa+t_0} V_b(\tau, F_\tau^\nu) | \tilde{\mathcal{F}}_{t_0} \right\} .
\end{aligned} \tag{5}$$

Puisque  $\gamma$  ne dépend pas du contrôle et  $\nu$  est quelconque alors (5) contredit le principe de programmation dynamique établi en (II.10). Donc on doit avoir

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x_0) - H_b(t_0, x_0, \varphi(t_0, x_0), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_0, x_0), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_0, x_0)) \leq 0 ,$$

ce qui conclut la preuve du lemme. ■

En se basant sur les lemmes 2.2.1 et 2.2.2, on obtient le résultat principal de cette section.

### **Théorème 2.2.1**

*La fonction de valeur  $V_b$  est une solution de viscosité continue de l'équation (II.13) sur  $\mathcal{Q}$ .*

### 2.2.5.2 Unicité de la fonction de valeur

Afin de caractériser la fonction de valeur  $V$  par le biais de l'équation HJB comme présentée en (II.13), il faut compléter le Théorème 2.2.1 par un résultat d'unicité qui est généralement établi à partir d'un théorème de comparaison. Pour prouver l'unicité de la fonction de valeur dans cette section, on utilise les propriétés de  $V_b$  analysées dans 2.2.4.1.

Avant de traiter le cas général des solutions de viscosité, on présente une idée de démonstration de l'unicité pour des solutions au sens « classique » de (II.13) pour motiver le problème.

#### 2.2.5.2.1 Motivation du lemme de comparaison

Soit  $V_1 \in \mathbb{C}^{1,2}(\mathcal{Q})$  une sous-solution au sens « classique » de (II.13) et  $V_2 \in \mathbb{C}^{1,2}(\mathcal{Q})$  une sur-solution « classique » de (II.13). Alors on a pour tout  $(t, x) \in \mathcal{Q}$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_1}{\partial t}(t, x) - H_b\left(t, x, V_1(t, x), \frac{\partial V_1}{\partial x}(t, x), \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}(t, x)\right) &\leq 0 \quad \text{et} \\ -\frac{\partial V_2}{\partial t}(t, x) - H_b\left(t, x, V_2(t, x), \frac{\partial V_2}{\partial x}(t, x), \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}(t, x)\right) &\geq 0 \end{aligned}$$

On veut démontrer que si  $V_1(T, x) \leq V_2(T, x)$  pour  $x \in \mathbb{R}^+$  alors on obtient  $V_1(t, x) \leq V_2(t, x)$  sur  $\mathcal{Q}$ . On procède par l'absurde pour présenter l'idée de la démonstration de ce résultat.

Supposons qu'il existe  $(t, x) \in \mathcal{Q}$  avec  $V_1(t, x) > V_2(t, x)$ .

Puisque  $V_1(T, x) \leq V_2(T, x)$  alors  $\exists(\bar{t}, \bar{x}) \in [0, T) \times \mathbb{R}^+$  vérifiant  $(V_1 - V_2)(\bar{t}, \bar{x}) \geq (V_1 - V_2)(t, x)$  pour tout  $(t, x) \in \mathcal{Q}$  et  $(V_1 - V_2)(\bar{t}, \bar{x}) > 0$ . Ainsi, il vient

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}(\bar{t}, \bar{x}) = \frac{\partial V_2}{\partial t}(\bar{t}, \bar{x}), \quad \frac{\partial V_1}{\partial x}(\bar{t}, \bar{x}) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(\bar{t}, \bar{x}), \quad \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}(\bar{t}, \bar{x}) \leq \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}(\bar{t}, \bar{x}).$$

Pour alléger les notations, on pose

$$F\left(t, x, V_i(t, x), \left(\frac{\partial V_i}{\partial t}, \frac{\partial V_i}{\partial x}\right)(t, x), \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}(t, x)\right) = -\frac{\partial V_i}{\partial t}(t, x) - H_b\left(t, x, V_i(t, x), \frac{\partial V_i}{\partial x}(t, x), \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}(t, x)\right),$$

pour tout  $(t, x) \in \mathcal{Q}$  et  $i \in \{1, 2\}$ .

La fonction  $H_b$  vérifie les conditions présentées dans (I.12), donc en utilisant les relations ci-dessus on trouve

$$\begin{aligned} F\left(t, x, V_2(\bar{t}, \bar{x}), \left(\frac{\partial V_2}{\partial t}, \frac{\partial V_2}{\partial x}\right)(\bar{t}, \bar{x}), \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}(\bar{t}, \bar{x})\right) &\geq 0 \geq F\left(t, x, V_1(\bar{t}, \bar{x}), \left(\frac{\partial V_1}{\partial t}, \frac{\partial V_1}{\partial x}\right)(\bar{t}, \bar{x}), \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}(\bar{t}, \bar{x})\right) \\ &= F\left(t, x, V_1(\bar{t}, \bar{x}), \left(\frac{\partial V_2}{\partial t}, \frac{\partial V_2}{\partial x}\right)(\bar{t}, \bar{x}), \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}(\bar{t}, \bar{x})\right) \\ &\geq F\left(t, x, V_1(\bar{t}, \bar{x}), \left(\frac{\partial V_2}{\partial t}, \frac{\partial V_2}{\partial x}\right)(\bar{t}, \bar{x}), \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}(\bar{t}, \bar{x})\right). \end{aligned}$$

Par la condition de monotonie de  $F$  illustrée dans (I.10) et en utilisant le fait que  $V_1(\bar{t}, \bar{x}) > V_2(\bar{t}, \bar{x})$ , on constate que l'inégalité ci-dessus contredit la supposition de départ.

Finalement, on conclut que  $V_1(t, x) \leq V_2(t, x)$  sur  $\mathcal{Q}$ .

Cependant, les techniques utilisées dans la démonstration ci-dessus ne sont pas applicables pour des solutions de viscosité de (II.13).

Une manière de résoudre ce problème est d'utiliser l'idée de « dédoublement des variables » proposée par Crandall *et al.* (1992) qui consiste à utiliser au lieu de  $(V_1, V_2)$  la maximisation de  $(t, s, x, y) \mapsto V_1(t, x) - V_2(s, y)$ . Ensuite, on pénalise ce dédoublement pour porter le maximum vers la diagonale  $\{t = s, x = y\}$  de  $\mathcal{Q}^2$ . L'idée est de maximiser

$$\Phi_\alpha(t, s, x, y) = V_1(t, x) - V_2(s, y) - \frac{\alpha}{2} [(t - s)^2 + (x - y)^2]$$

et utiliser le problème à la limite pour  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Le résultat principal de cette partie est le théorème présenté ci-dessous.

**Lemme 2.2.3 (Lemme de comparaison « continue »)**

Soit  $V_1$  une sous-solution de viscosité continue de (II.13) sur  $\mathcal{Q}$  et  $V_2$  une sur-solution de viscosité continue de (II.13).

Si  $V_1(T, x) \leq V_2(T, x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  alors  $V_1 \leq V_2$  sur  $\mathcal{Q}$ .

**Remarque 2.2.7.** On cherche à démontrer l'unicité dans la classe des fonctions lipschitzienne par rapport à la variable  $x$ ,  $\frac{1}{2}$ -höldérienne en  $t$  et vérifiant les conditions décrites dans la proposition 2.2.4.



**Démonstration :** Supposons par l'absurde que  $M = \sup_{(t,x) \in \mathcal{Q}} (V_1(t, x) - V_2(t, x)) > 0$

Soit  $\alpha > 0$  et considérons la fonction auxiliaire  $\Phi_\alpha$  définie par

$$\Phi_\alpha(t, s, x, y) = V_1(t, x) - V_2(s, y) - \frac{\alpha}{2} \left[ (t - s)^2 + (x - y)^2 \right], \quad (\text{II.24})$$

pour tout  $(t, s, x, y) \in [0, T) \times [0, T) \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . On a

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(t, s, x, y) &= x^2 \left\{ \frac{V_1(t, x)}{x^2} - \frac{V_2(s, y)}{x^2} - \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{(t - s)^2}{x^2} + 1 + \frac{y^2 - 2xy}{x^2} \right] \right\} \\ &= y^2 \left\{ \frac{V_1(t, x)}{y^2} - \frac{V_2(s, y)}{y^2} - \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{(t - s)^2}{y^2} + 1 + \frac{x^2 - 2xy}{y^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Puisque les deux fonctions  $V_1$  et  $V_2$  vérifient la condition de la proposition 2.2.4 alors on obtient

$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_\alpha(t, s, x, y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \Phi_\alpha(t, s, x, y) = -\infty$ . Ainsi,  $\exists (a_x, a_y) \in (0, \infty)^2$  qui vérifient

$$\sup_{(t,s,x,y) \in [0,T)^2 \times [a_x, \infty) \times \mathbb{R}^+} \Phi_\alpha(t, s, x, y) \leq 0 \quad \text{et} \quad \sup_{(t,s,x,y) \in [0,T)^2 \times \mathbb{R}^+ \times [a_y, \infty)} \Phi_\alpha(t, s, x, y) \leq 0$$

Par conséquent, le supremum de  $\Phi_\alpha$  est nécessairement obtenu pour  $x \in [0, a_x]$  et  $y \in [0, a_y]$ .

Dans ce qui suit, on considère l'ensemble borné

$$\mathcal{A} = \{(t, s, x, y) : (t, s) \in [0, T)^2, 0 \leq x \leq y \leq \ell\} \quad (\text{II.25})$$

où  $\ell = a_x \wedge a_y$ .

Notons  $M_\alpha = \max_{(t,s,x,y) \in \mathcal{A}} \Phi_\alpha(t, s, x, y)$  et  $(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha, y_\alpha) = \arg \max_{\mathcal{A}} \Phi_\alpha(t, s, x, y)$ , il s'ensuit que

$$V_1(t, x) - V_2(s, y) - h_\alpha(t, s, x, y) \leq V_1(t_\alpha, x_\alpha) - V_2(s_\alpha, y_\alpha) - h_\alpha(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha, y_\alpha), \quad (\text{II.26})$$

pour  $(t, s, x, y) \in \mathcal{A}$  et  $h_\alpha(t, s, x, y) = \frac{\alpha}{2} [(t - s)^2 + (x - y)^2]$ .

Considérons les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} \phi(s, y) &= V_2(s_\alpha, y_\alpha) - h_\alpha(t_\alpha, s, x_\alpha, y) + h_\alpha(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha, y_\alpha), \\ \psi(t, x) &= V_1(t_\alpha, x_\alpha) + h_\alpha(t, s_\alpha, x, y_\alpha) - h_\alpha(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha, y_\alpha). \end{aligned}$$

En se basant sur (II.26), on peut directement s'apercevoir que  $\phi$  est une fonction de test pour la sur-solution  $V_2$  et qu'on peut considérer  $\psi$  comme fonction de test pour la sous-solution de viscosité  $V_1$ . Il s'avère alors que

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial\psi}{\partial t}(t_\alpha, x_\alpha) - H_b\left(t_\alpha, x_\alpha, V_1(t_\alpha, x_\alpha), \frac{\partial\psi}{\partial x}(t_\alpha, x_\alpha), \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(t_\alpha, x_\alpha)\right) \leq 0 \quad \text{et} \\
& -\frac{\partial\phi}{\partial s}(s_\alpha, y_\alpha) - H_b\left(s_\alpha, y_\alpha, V_2(s_\alpha, y_\alpha), \frac{\partial\phi}{\partial y}(s_\alpha, y_\alpha), \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(s_\alpha, y_\alpha)\right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Par un calcul direct des dérivées, on obtient

$$0 \geq H_b(s_\alpha, y_\alpha, V_2(s_\alpha, y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), \alpha) - H_b(t_\alpha, x_\alpha, V_1(t_\alpha, x_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), \alpha),$$

ou sous une formulation équivalente,

$$\begin{aligned}
0 \geq & (\rho + \lambda_{\kappa+t_\alpha}) V_1(t_\alpha, x_\alpha) - (\rho + \lambda_{\kappa+s_\alpha}) V_2(s_\alpha, y_\alpha) + \lambda_{\kappa+s_\alpha} g_b(y_\alpha) - \lambda_{\kappa+t_\alpha} g_b(x_\alpha) \\
& + \tilde{H}(s_\alpha, y_\alpha, \alpha(x_\alpha - y_\alpha), \alpha) - \tilde{H}(t_\alpha, x_\alpha, \alpha(x_\alpha - y_\alpha), \alpha),
\end{aligned} \tag{II.27}$$

avec  $\tilde{H}(t, x, p, q) = \sup_{\nu} \left\{ pA(x, \nu_t) + \frac{1}{2}qB^2(x, \nu_t) \right\}$  pour tout  $(t, x, p, q) \in [0, T) \times [0, \ell] \times \mathbb{R}^2$ .

Comme  $(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$  est l'argument qui maximise la fonction  $\Phi_\alpha$  dans  $\mathcal{A}$ , alors on a

$$\Phi_\alpha(t_\alpha, t_\alpha, x_\alpha, x_\alpha) + \Phi_\alpha(s_\alpha, s_\alpha, y_\alpha, y_\alpha) \leq 2\Phi_\alpha(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha, y_\alpha).$$

En remplaçant la valeur de la fonction  $\Phi$ , il vient

$$\alpha \left[ (t_\alpha - s_\alpha)^2 + (x_\alpha - y_\alpha)^2 \right] \leq [V_1(t_\alpha, x_\alpha) - V_1(s_\alpha, y_\alpha)] + [V_2(t_\alpha, x_\alpha) - V_2(s_\alpha, y_\alpha)],$$

donc en se basant sur (II.23) et le fait que  $(x, y) \in [0, \ell]^2$ , il existe  $C' > 0$  vérifiant

$$\|(t_\alpha, x_\alpha) - (s_\alpha, y_\alpha)\|_2 \leq \frac{C'}{\sqrt{\alpha}}. \tag{II.28}$$

Par (II.28) on déduit que la suite  $\{(t_\alpha, s_\alpha, x_\alpha, y_\alpha); \alpha > 0\}$  est bornée dans  $\mathcal{A}$ , alors en se basant sur le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe  $(t_0, s_0, x_0, y_0) \in \mathcal{A}$  et une sous-suite  $\{(t_{\alpha_n}, s_{\alpha_n}, x_{\alpha_n}, y_{\alpha_n}); n \geq 1\}$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_{\alpha_n}, s_{\alpha_n}, x_{\alpha_n}, y_{\alpha_n}) = (t_0, s_0, x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \alpha_n \rightarrow \infty.$$

Ainsi, l'équation (II.28) nous permet d'avoir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(t_{\alpha_n}, x_{\alpha_n}) - (s_{\alpha_n}, y_{\alpha_n})\|_2 = 0$ .

Par conséquent, on a  $t_0 = s_0$  et  $x_0 = y_0$ . Notons pour la suite  $\bar{t} = t_0 = s_0$  et  $\bar{x} = x_0 = y_0$ . En remplaçant  $\alpha$  par  $\alpha_n$  dans (II.27), on parvient à obtenir que

$$\begin{aligned}
& (\rho + \lambda_{\kappa+t_{\alpha_n}}) V_1(t_{\alpha_n}, x_{\alpha_n}) - (\rho + \lambda_{\kappa+s_{\alpha_n}}) V_2(s_{\alpha_n}, y_{\alpha_n}) \\
& \leq \tilde{H}(t_{\alpha_n}, x_{\alpha_n}, \alpha(x_{\alpha_n} - y_{\alpha_n}), \alpha_n) - \tilde{H}(s_{\alpha_n}, y_{\alpha_n}, \alpha_n(x_{\alpha_n} - y_{\alpha_n}), \alpha_n) + \lambda_{\kappa+t_{\alpha_n}} g_b(x_{\alpha_n}) - \lambda_{\kappa+s_{\alpha_n}} g_b(y_{\alpha_n}),
\end{aligned}$$

donc en se basant sur la proposition 2.2.1 et la remarque 2.2.4, il vient

$$\begin{aligned}
& (\rho + \lambda_{\kappa+t_{\alpha_n}}) V_1(t_{\alpha_n}, x_{\alpha_n}) - (\rho + \lambda_{\kappa+s_{\alpha_n}}) V_2(s_{\alpha_n}, y_{\alpha_n}) \\
& \leq \sup_{\nu} \left| \alpha_n(x_{\alpha_n} - y_{\alpha_n}) [A(x_{\alpha_n}, \nu) - A(y_{\alpha_n}, \nu)] + \frac{1}{2} \alpha_n [B^2(x_{\alpha_n}, \nu) - B^2(y_{\alpha_n}, \nu)] \right| \\
& + \lambda_{\kappa+t_{\alpha_n}} g_b(x_{\alpha_n}) - \lambda_{\kappa+s_{\alpha_n}} g_b(y_{\alpha_n}) \\
& \leq \sup_{\nu} \left| L^A \alpha_n(x_{\alpha_n} - y_{\alpha_n})^2 + \frac{1}{2} (L^B)^2 \nu^2 \sigma^2 \alpha_n(x_{\alpha_n}^2 - y_{\alpha_n}^2) \right| + \lambda_{\kappa+t_{\alpha_n}} g_b(x_{\alpha_n}) - \lambda_{\kappa+s_{\alpha_n}} g_b(y_{\alpha_n}) \\
& \leq L^A \alpha_n \{(t_{\alpha_n} - s_{\alpha_n})^2 + (x_{\alpha_n} - y_{\alpha_n})^2\} + \frac{1}{2} (L^B)^2 \sigma^2 \alpha_n \{(t_{\alpha_n} - s_{\alpha_n})^2 + (x_{\alpha_n} - y_{\alpha_n})^2\} \\
& + \lambda_{\kappa+t_{\alpha_n}} g_b(x_{\alpha_n}) - \lambda_{\kappa+s_{\alpha_n}} g_b(y_{\alpha_n}),
\end{aligned} \tag{II.29}$$

où la dernière inégalité provient du fait que  $\nu \in \mathbb{U}$  et  $(t_{\alpha_n}, s_{\alpha_n}, x_{\alpha_n}, y_{\alpha_n}) \in \mathcal{A}$ .

Comme  $V_1(\bar{t}, \bar{x}) - V_2(\bar{t}, \bar{x}) = \Phi_{\alpha_n}(\bar{t}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{x}) \leq \Phi_{\alpha_n}(t_{\alpha_n}, s_{\alpha_n}, x_{\alpha_n}, y_{\alpha_n}) \leq V_1(t_{\alpha_n}, x_{\alpha_n}) - V_2(s_{\alpha_n}, y_{\alpha_n})$  alors par la continuité de  $V_1$  et  $V_2$ , on conclut que  $\Phi_{\alpha_n}(t_{\alpha_n}, s_{\alpha_n}, x_{\alpha_n}, y_{\alpha_n}) \rightarrow V_1(\bar{t}, \bar{x}) - V_2(\bar{t}, \bar{x})$  et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n [(t_{\alpha_n} - s_{\alpha_n})^2 + (x_{\alpha_n} - y_{\alpha_n})^2] = 0$ . En plus, on a  $M \leq M_{\alpha}$  pour tout  $\alpha$ , donc en passant à la limite dans (II.29), on trouve que  $(\rho + \lambda_{\kappa+\bar{t}})M \leq 0$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $M = \sup_{(t,x) \in \mathcal{Q}} (V_1(t, x) - V_2(t, x)) > 0$ . ■

À partir du lemme de comparaison 2.2.3, on peut directement conclure que la fonction de valeur  $V_b$  est la seule solution de viscosité de (II.13) avec une condition terminale

$V_b(T, x) = g(x)$  et appartenant à la classe de fonctions de la remarque 2.2.7.

En effet, si on suppose qu'il existe une autre solution  $\tilde{V}_b$  vérifiant ces conditions, alors la condition terminale nous permet d'avoir  $V_b(T, x) = \tilde{V}_b(T, x) = g(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ . Ainsi, on conclut en se basant sur le lemme 2.2.3 que

$$V_b(t, x) \leq \tilde{V}_b(t, x) \quad \text{et} \quad \tilde{V}_b(t, x) \leq V_b(t, x) \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathcal{Q},$$

d'où  $V_b = \tilde{V}_b$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$ .

## 2.3 Problème de contrôle stochastique appliqué au fonds distinct avec une utilité « S-shaped »

À la section précédente, on a supposé que l'assuré évalue ses choix selon une utilité « classique » concave. Autrement dit, il est toujours averse au risque et évalue de la même manière l'utilité des différentes valeurs possibles que peut atteindre sa richesse. Cette approche a plusieurs limitations et incohérences comme mentionné dans Kahneman et Tversky (1979) (Voir la section 1.1.4 pour plus de détails). Dans cette partie, on suppose que l'assuré évalue sa richesse par rapport à un seuil<sup>18</sup>  $\theta$  pour différencier ses gains de ses pertes. Alors pour un détenteur d'un fonds distinct contenant une garantie à l'échéance en cas de survie et un legs en cas de décès, on modélise l'utilité de sa richesse par une fonction concave pour les valeurs au-dessus de  $\theta$  et une autre convexe pour celles au-dessous du seuil.

### 2.3.1 Éléments du modèle

Dans ce deuxième problème de contrôle, on conserve toutes les hypothèses de la section 2.2 sauf pour les préférences de l'assuré qu'on modélise par une fonction d'utilité définie comme suit

$$U(w) = \begin{cases} -U_2(\theta - w) & \text{si } 0 \leq w < \theta \\ U_1(w - \theta) & \text{si } w \geq \theta, \end{cases}$$

où  $U_1$  et  $U_2$  sont des fonctions d'utilité isoélastiques présentées dans la définition 1.2 et vérifiant  $U_1(0) = -U_2(0)$ . Les propriétés analytiques de la fonction  $\tilde{U}$  sont citées à la section 1.1.4. On considère pour la suite de cette partie

$$U_i(x) = \frac{x^{\gamma_i}}{\gamma_i}, \quad \gamma_i \in (0, 1), \quad (\text{II.30})$$

pour tout  $i \in \{1, 2\}$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ .

---

18. Comme mentionné dans MacKay et Ocejo (2022), ce seuil peut représenter le rendement minimum attendu d'un investissement de la prime initiale dans un fonds distinct.

Pour un détenteur d'un fonds distinct avec une garantie  $G$ , l'utilité de son « *payoff* » est  $g_S(x) = U(\max(x, G))$  alors on peut distinguer deux cas pour caractériser sa fonction d'utilité.

**Cas A)**  $0 \leq \theta \leq G$ . Dans ce cas, l'assuré reçoit toujours la garantie pour les valeurs appartenant à son domaine de perte. Ainsi sa fonction d'utilité a une allure concave et elle s'écrit

$$g_S(x) = \begin{cases} U_1(G - \theta) & \text{si } 0 \leq x \leq G, \\ U_1(x - \theta) & \text{si } x > G. \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

**Cas B)**  $\theta > G$ . Dans ce cas, le seuil de sécurité financière considéré par l'assuré est plus grand que la garantie offerte par le fonds distinct et donc il perçoit une valeur du fond au dessous de  $\theta$  comme perte. Alors, sa fonction d'utilité est de la forme

$$g_S(x) = \begin{cases} -U_2(\theta - G) & \text{si } 0 \leq x \leq G, \\ -U_2(\theta - x) & \text{si } G < x \leq \theta, \\ U_1(x - \theta) & \text{si } x > \theta. \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

On suppose pour la suite que l'assuré évalue son legs avec une fonction d'utilité  $g_b$  définie par  $g_b(x) = b g_S(x)$  avec  $b \geq 0$ . Par une analyse similaire à celle menée en (II.8), on obtient une fonction de gain donnée par

$$J_S(t, x, \nu) = \mathbb{E} \left\{ \int_t^T e^{-\rho(s-t)} {}_{s-t}p_{\kappa+t} \lambda_{\kappa+s} g_b(F_s^\nu) ds + e^{-\rho(T-t)} {}_{T-t}p_{\kappa+t} g_S(F_T^\nu) \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right\} \quad (\text{II.33})$$

On dénote par  $V_S(t, x)$  la fonction de valeur qui maximise  $J_S(t, x, \nu)$  sur l'ensemble des stratégies d'investissements admissibles  $\mathcal{U}(t, x)$ , donc

$$V_S(t, x) = \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x)} J_S(t, x, \nu). \quad (\text{II.34})$$

### 2.3.2 Principe de programmation dynamique

Les expressions de  $J_S(t, x, \nu)$  et  $V_S(t, x)$  établies ci-dessus présentent des cas particuliers de la forme décrite à la section 1.3.2. En effet, on récupère l'écriture générale dans (I.6) en posant  $g \equiv g_S$ ,

$$f(s, x) = \lambda_{\kappa+s} g_b(x) \quad \text{et} \quad \beta(t, s) = e^{-\rho(s-t)} {}_{s-t}p_{\kappa+t}, \quad (\text{II.35})$$

pour  $0 \leq t \leq s \leq T$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Par  ${}_{T-t}p_{\kappa+t} = {}_{s-t}p_{\kappa+t} {}_{T-s}p_{\kappa+s}$ , on a que  $\beta(t, T) = \beta(t, s) \beta(s, T)$ . Ainsi, en appliquant la proposition (1.3.1), on obtient le principe de programmation dynamique du problème considéré dans cette partie, donné par

$$V_S(t, x) = \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x)} \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau e^{-\rho(s-t)} g_b(F_s^\nu) {}_{s-t}p_{\kappa+t} \lambda_{\kappa+s} ds \right. \\ \left. + e^{-\rho(\tau-t)} {}_{\tau-t}p_{\kappa+t} V_S(\tau, F_\tau^\nu) | \tilde{\mathcal{F}}_t \right], \quad (\text{II.36})$$

pour tout  $0 \leq t \leq \tau \leq T$ .

### 2.3.3 L'équation HJB

Par une analyse similaire à celle utilisée dans la partie 2.2.3, on parvient à l'équation HJB correspondante au problème étudié ci-dessus

$$-\frac{\partial V_S}{\partial t}(t, x) - H_S \left( t, x, V_S(t, x), \frac{\partial V_S}{\partial x}(t, x), \frac{\partial^2 V_S}{\partial x^2}(t, x) \right) = 0, \quad (\text{II.37})$$

pour  $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^+$  avec

$$H_S(t, x, r, q, m) = \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x)} \left\{ \frac{1}{2} m B^2(x, \nu_t) + q A(x, \nu_t) - r(\rho + \lambda_{\kappa+t}) \right\} + \lambda_{\kappa+t} g_b(x).$$

Avant de s'intéresser à l'existence et l'unicité d'une solution pour l'équation (II.37), on analyse quelques propriétés de la fonction de valeur  $V_S$ .

### 2.3.4 Caractéristiques de la fonction de valeur $V_S$

On commence cette partie par une étude de la fonction d'utilité  $g_S$  dans différents cas, ensuite on essaye de démontrer que la fonction de valeur  $V_S$  est localement bornée.

Pour les illustrations numériques ci-dessous, on suppose que le seuil  $\theta$  est dépendant de la garantie  $G$  (égale à l'investissement initial dans notre étude) et on considère les valeurs suivantes présentées dans le tableau 2.1 , où  $\theta_1 = 0.95 G$ ,  $\theta_2 = 1.05 G$  et  $\theta_3 = 1.2 G$ .

$\gamma_1$	$\gamma_2$	$G$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
0.2	0.4	1	0.95	1.05	1.2

Tableau 2.1 : Valeurs des paramètres utilisés dans l'analyse de  $g_S$

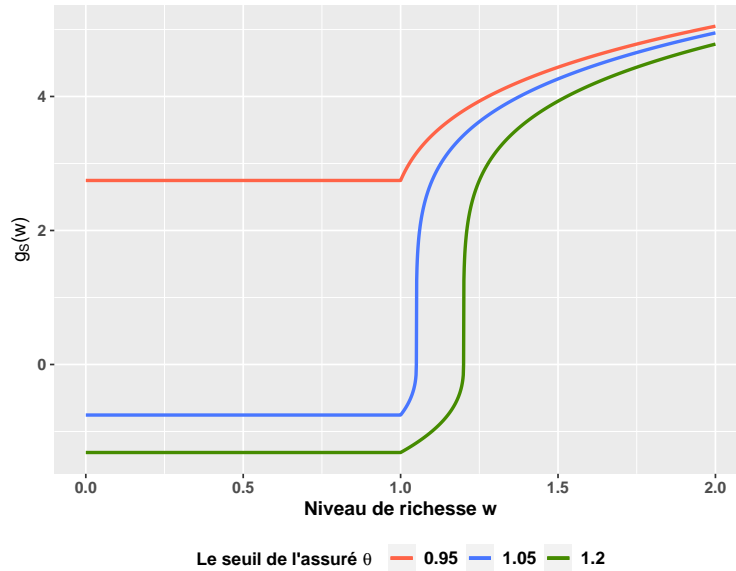


FIGURE 2.2: Fonction d'utilité pour différentes valeurs du seuil  $\theta$

Ainsi, comme mentionné auparavant, l'assuré admet des pertes pour des seuils plus grands que la garantie. Pour analyser les variations de la fonction d'utilité  $g_S$ , on étudie les propriétés de sa première dérivée en utilisant les paramètres  $\gamma_1 = 0.2$  et  $\gamma_2 = 0.4$  présentés ci-dessus dans le tableau 2.1 .

D'après la figure 2.3, on remarque d'abord que lorsque le seuil  $\theta$  est plus petit que la garantie  $G$ , il n'y a pas un changement dans la régularité de  $g_S$  et on peut déduire la continuité de la fonction de valeur  $V_S$  définie dans (II.34) en adoptant une approche similaire à celle utilisée

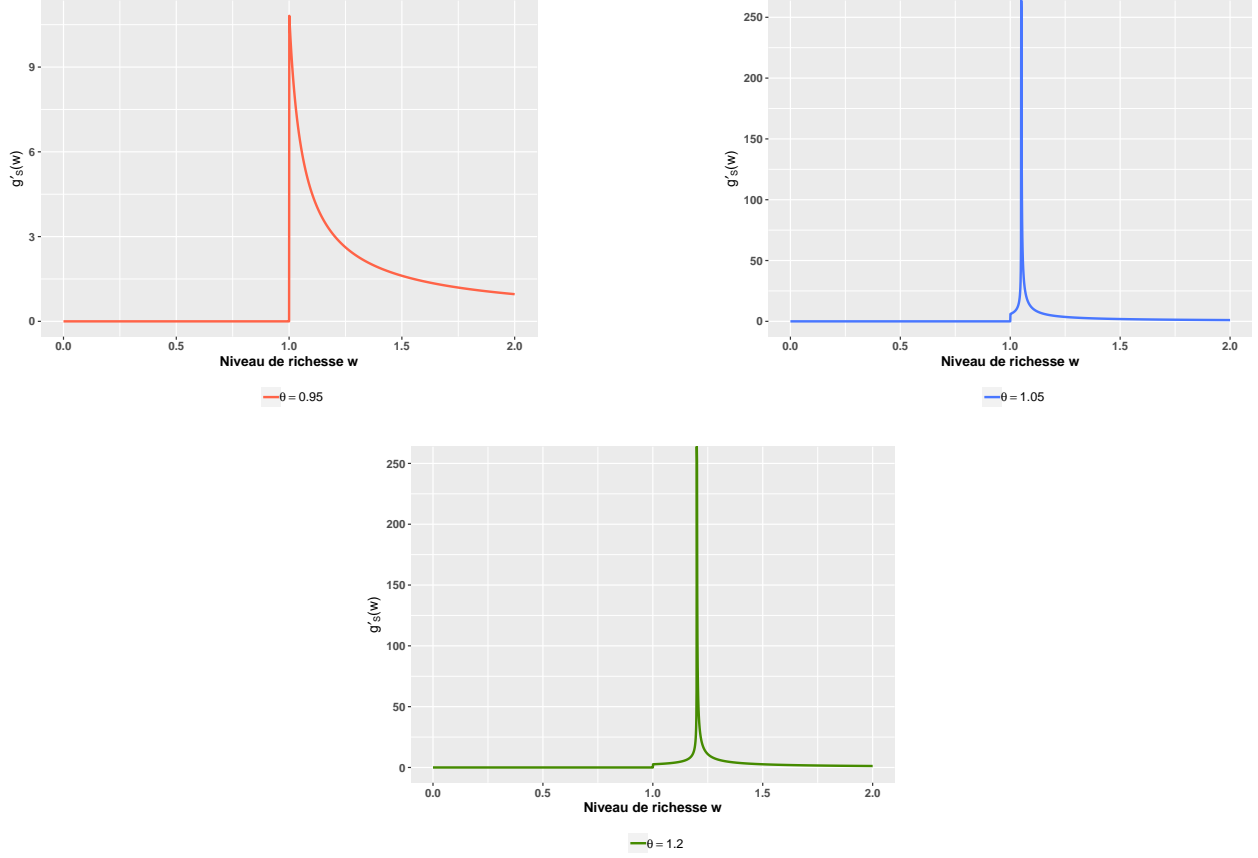


FIGURE 2.3: Dérivée première de la fonction d'utilité pour des paramètres  $\gamma_1 = 0.2$  et  $\gamma_2 = 0.4$

dans la section 2.2.4.1. Dans le cas où  $\theta > G$ , la fonction d'utilité  $g_S$  admet des valeurs infinies pour des montants  $x$  très proches du seuil  $\theta$ , alors c'est possible de démontrer que la fonction d'utilité perd la propriété de continuité uniforme et par conséquent n'est plus lipschitzienne. Ainsi, l'évaluation de la continuité de la fonction de valeur  $V_S$  ne peut pas se faire d'une façon similaire à celle menée dans 2.2.4.1.

Cependant, une condition nécessaire pour appliquer les éléments de la théorie de viscosité cités dans 1.3.2.3 est que la fonction de valeur  $V_S$  doit être localement bornée comme mentionné dans la définition 1.3.3.

On vérifie cette propriété<sup>19</sup> dans la proposition 2.3.1 présentée ci-dessous.

19. On dit qu'une fonction  $f : x \mapsto f(x)$  est localement bornée si  $\forall x, \exists V(x), \forall y \in V(x) |f(y)| \leq C_x$  où  $V(x)$  est un voisinage de  $x$  et  $C_x > 0$  est une constante dépendante de  $x$ .



### Proposition 2.3.1

*La fonction de valeur  $V_S$  définie par (II.34) est localement bornée dans  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$ .*

#### Démonstration :

**Cas A)** Pour  $0 \leq \theta \leq G$  :

Dans ce cas, on a  $|g'_S(x)| \leq (G - \theta)^{\gamma_1 - 1}$  pour tout  $x$  alors la fonction  $g_S$  est lipschitzienne de paramètre  $(G - \theta)^{\gamma_1 - 1}$ . En suivant une démarche similaire à celle utilisée dans 2.2.4.1, on peut démontrer que la fonction de valeur  $V_S$  est continue et donc elle est localement bornée.

**Cas B)** Pour  $\theta > G$  : Fixons  $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$  et notons  $r_{x_0} = \frac{|x_0 - \theta|}{2}$ .

→ Considérons  $(t, x) \in [0, T] \times (x_0 - r_{x_0}, x_0 + r_{x_0})$  et  $s \in [t, T]$ , alors en utilisant (1.3.1)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ |g_S(F_s^\nu)| \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right] &\leq 2 U_2 (\theta - G) + \mathbb{E} \left[ U_1 (|F_s^\nu - \theta|) \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right] \\ &\leq 2 U_2 (\theta - G) + U_1 \left( \mathbb{E} \left[ |F_s^\nu| \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right] + \theta \right) \\ &\leq 2 U_2 (\theta - G) + U_1 \left( \mathbb{E} \left[ \sup_{s \in [t, T]} |F_s^\nu|^2 \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right]^{\frac{1}{2}} + \theta \right) \\ &\leq 2 U_2 (\theta - G) + U_1 \left( \sqrt{C}(1 + |x|) + \theta \right) \\ &\leq 2 U_2 (\theta - G) + U_1 \left( \theta + \sqrt{C}(1 + x_0 + r_{x_0}) \right), \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité découle de l'inégalité de Jensen puisque  $U_1$  est concave.

Notons  $L_{x_0} = 2 U_2 (\theta - G) + U_1 \left( \theta + \sqrt{C}(1 + x_0 + r_{x_0}) \right)$  donc en utilisant (II.33) et la remarque 2.2.4, on obtient pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times (x_0 - r_{x_0}, x_0 + r_{x_0})$

$$\begin{aligned} |V_S(t, x)| &\leq \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x)} \left\{ L^\lambda \int_t^T \mathbb{E} \left[ |g_S(F_s^\nu)| \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right] ds + \mathbb{E} \left[ |g_S(F_T^\nu)| \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right] \right\} \\ &\leq L_{x_0} (1 + L^\lambda T). \end{aligned}$$

Ainsi, en combinant les deux cas (A et B), on conclut que la fonction de valeur  $V_S(\cdot, \cdot)$  est bornée dans tout voisinage  $(0, T) \times (x_0 - r_{x_0}, x_0 + r_{x_0})$  de  $(t_0, x_0)$ .

Par conséquent, la fonction de valeur  $V_S$  est localement bornée dans  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$ . ■

Une autre caractéristique de la fonction de valeur est sa propriété de croissance « lente »<sup>20</sup> qu'on présente ci-dessous dans la proposition 2.3.2.

**Proposition 2.3.2**

*La fonction de valeur  $V_S$  définie dans (II.34) vérifie*

$$|V_S(t, x)| \leq C(1 + x)$$

*pour  $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^+$  et une constante  $C > 0$ .*

En effet, la fonction  $V_S$  hérite principalement cette propriété de la fonction d'utilité  $g_S$  définie dans (II.31) et (II.32).

**Démonstration :** On suppose que  $0 \leq \theta \leq G$  puisque la démonstration se fait d'une manière similaire pour  $\theta > G$ . Comme  $|U_1(x - \theta)| + |U_1(G - \theta)| = \frac{1}{\gamma_1}|x - \theta|^{\gamma_1} + U_1(G - \theta)$ , alors

$$\begin{aligned} |g_S(x)| &\leq \frac{1}{\gamma_1}|x - \theta|^{\gamma_1} + U_1(G - \theta) \\ &\leq \frac{1}{\gamma_1}(1 + x + \theta)^{\gamma_1} + U_1(G - \theta) \\ &\leq \frac{1}{\gamma_1}(1 + x + \theta) + U_1(G - \theta) \\ &\leq C_{g_S}(1 + x), \end{aligned} \tag{II.38}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  et avec  $C_{g_S} = U_1(G - \theta) + \frac{\theta+1}{\gamma_1} > 0$ .

En se basant sur les notations de (II.35), on a

$$\begin{aligned} |V_S(t, x)| &= \left| \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x)} \mathbb{E} \left[ \int_t^T \beta(t, s) f(s, F_{t,x}^\nu(s)) ds + \beta(t, T) g_S(F_{t,x}^\nu(T)) \mid \mathcal{F}_t^M \right] \right| \\ &\leq \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x)} \left| \mathbb{E} \left[ \int_t^T \beta(t, s) f(s, F_{t,x}^\nu(s)) ds + \beta(t, T) g_S(F_{t,x}^\nu(T)) \mid \mathcal{F}_t^M \right] \right| \\ &\leq \sup_{\nu \in \mathcal{U}(t, x)} \mathbb{E} \left[ \int_t^T \beta(t, s) |f(s, F_{t,x}^\nu(s))| ds + \beta(t, T) |g_S(F_{t,x}^\nu(T))| \mid \mathcal{F}_t^M \right], \end{aligned}$$

alors l'inégalité (II.38) nous permet d'aboutir au résultat demandé en se basant sur la même démarche utilisée dans la démonstration de la proposition 2.2.2. ■

---

20. C'est-à-dire que la fonction est en tout point majorée par un polynôme donné.

### 2.3.5 Existence et unicité de la solution de viscosité de (II.37)

L'étude menée ici diffère légèrement de celle utilisée en 2.2.5 dans le sens où la fonction de valeur  $V_S$  n'est plus supposée continue et donc on se base sur les enveloppes semi-continues inférieure  $V_*$  et supérieure  $V^*$  de  $V_S$  (voir la définition 1.3.2) pour établir les différents résultats dans cette partie. Dénotons par  $\mathcal{Q} = [0, T] \times \mathbb{R}^+$  le domaine de validité de l'équation (II.37).

#### **Lemme 2.3.1**

*La fonction de valeur  $V_S$  définie par (II.34) est une sur-solution de viscosité de l'équation (II.37) sur  $\mathcal{Q}$ .*

#### **Démonstration :**

Soit  $\varphi \in C^{1,2}(\mathcal{Q})$  telle que  $(V_* - \varphi)$  admet un minimum en  $(t_0, x_0)$ .

Supposons sans perte de généralité que  $(V_* - \varphi)(t_0, x_0) = 0$ , alors dans ce cas on a

$V_S(t, x) \geq V_*(t, x) \geq \varphi(t, x)$  pour tout  $(t, x) \in \mathcal{Q}$ .

Puisque la fonction  $V_S$  est localement bornée alors par définition de  $V_*(t_0, x_0)$ , il existe une suite  $(t_n, x_n)_n$  dans  $\mathcal{Q}^\mathbb{N}$  telle que  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0)$  et  $V_S(t_n, x_n) \rightarrow V_*(t_0, x_0)$ .

Posons  $\beta_n = V_S(t_n, x_n) - \varphi(t_n, x_n)$ , donc par la continuité de  $\varphi$  on obtient  $\beta_n \rightarrow 0$ .

On considère le processus  $\{F_s^\nu\}_{t_n \leq s \leq T}$  avec une valeur initiale de  $x_n$  à l'instant  $t_n$  et un contrôle  $\nu \in \mathcal{U}(t_n, x_n)$ . Fixons  $\delta > 0$  et dénotons par  $\tau_n$  le temps d'arrêt donné par

$$\tau_n = \inf\{s \geq t_n : |F_s^\nu - x_n| \geq \delta\} \wedge (t_n + h_n),$$

où  $h_n$  est une suite strictement positive vérifiant  $h_n \rightarrow 0$  et  $\frac{\beta_n}{h_n} \rightarrow 0$ .

**Remarque 2.3.1.** *Puisque le processus  $F^\nu$  a des trajectoires presque sûrement continues et que  $h_n \rightarrow 0$  alors pour  $n$  suffisamment grand, on a  $\mathbb{P}(\tau_n = t_n + h_n) = 1$*

En appliquant le lemme d'Itô à  $\phi_n(s, F_s^\nu) = e^{-\rho(s-t_n)} {}_{s-t_n}p_{\kappa+t_n} \varphi(s, F_s^\nu)$  dans l'intervalle  $[t_n, \tau_n]$ , il vient

$$\begin{aligned} & e^{-\rho(\tau_n-t_n)} {}_{\tau_n-t_n}p_{\kappa+t_n} \varphi(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu) - \varphi(t_n, x_n) \\ &= \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s-t_n)} {}_{s-t_n}p_{\kappa+t_n} \left[ -\rho\varphi(s, F_s^\nu) - \lambda_{\kappa+s}\varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu)A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu)B^2(F_s^\nu, \nu_s) \right] ds + \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s-t_n)} {}_{s-t_n}p_{\kappa+t_n} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu)B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s. \end{aligned}$$

Comme  $\varphi(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu) \leq V_*(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu) \leq V_S(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu)$  et  $\varphi(t_n, x_n) = V_S(t_n, x_n) - \beta_n$ , alors

$$\begin{aligned} & e^{-\rho(\tau_n - t_n)} \int_{t_n}^{\tau_n} p_{\kappa+t_n} V_S(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu) - V_S(t_n, x_n) + \beta_n \\ & \geq \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s-t_n)} p_{\kappa+t_n} \left[ -(\rho + \lambda_{\kappa+s}) \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) \right] ds + \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s-t_n)} p_{\kappa+t_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s-t_n)} p_{\kappa+t_n} \lambda_{\kappa+s} ds + e^{-\rho(\tau_n - t_n)} p_{\kappa+t_n} V_S(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_n} \right\} - V_S(t_n, x_n) \\ & \geq -\beta_n + \mathbb{E} \left\{ \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s-t_n)} p_{\kappa+t_n} \left[ -(\rho + \lambda_{\kappa+s}) \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa+s} g_b(F_s^\nu) \right] ds \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_n} \right\} \\ & + \mathbb{E} \left[ \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s-t_n)} p_{\kappa+t_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_n} \right]. \end{aligned}$$

Par des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du lemme 2.2.1 et en appliquant le principe de programmation dynamique (II.36), on obtient

$$\begin{aligned} & -\beta_n + \mathbb{E} \left\{ \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s-t_n)} p_{\kappa+t_n} \left[ -(\rho + \lambda_{\kappa+s}) \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa+s} g_b(F_s^\nu) \right] ds \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_n} \right\} \leq 0 \\ & \Rightarrow -\frac{\beta_n}{h_n} + \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s-t_n)} p_{\kappa+t_n} \left[ -(\rho + \lambda_{\kappa+s}) \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa+s} g_b(F_s^\nu) \right] ds \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_n} \right\} \leq 0. \end{aligned}$$

En prenant la limite  $n \rightarrow \infty$  et en appliquant le théorème de convergence dominée, il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x_0) + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_0, x_0) B^2(x_0, \nu_t) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_0, x_0) A(x_0, \nu_t) - (\rho + \lambda_{\kappa+t_0}) \varphi(t_0, x_0) \right\} + \lambda_{\kappa+t_0} g_b(x_0) \leq 0.$$

Ainsi

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x_0) - H_S(t_0, x_0, \varphi(t_0, x_0), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_0, x_0), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_0, x_0)) \geq 0. \quad \blacksquare$$

### Lemme 2.3.2

La fonction de valeur  $V_S$  définie par (II.34) est une sous-solution de viscosité de l'équation (II.37) sur  $\mathcal{Q}$ .

#### Démonstration :

Soit  $\varphi \in C^{1,2}(\mathcal{Q})$  telle que  $(V^* - \varphi)$  admet un maximum en  $(t_0, x_0)$ .

Supposons sans perte de généralité que  $(V^* - \varphi)(t_0, x_0) = 0$ , alors dans ce cas on a

$$V_S(t, x) \leq V^*(t, x) < \varphi(t, x) \quad \text{pour tout } (t, x) \in \mathcal{Q} \setminus (t_0, x_0). \quad (1)$$

Dénotons  $G(t, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) + H_S(t, x, \varphi(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x))$  et supposons par l'absurde que  $G(t_0, x_0) < 0$ . En utilisant la remarque 2.2.3 et puisque  $\varphi \in C^{1,2}(\mathcal{Q})$  alors la fonction  $G$  est continue. Ainsi,

$$\exists r > 0, \forall (t, x) \in B_r(t_0, x_0), G(t, x) < 0. \quad (2)$$

Puisque la fonction  $V_S$  est localement bornée alors par définition de  $V^*(t_0, x_0)$ , il existe une suite  $(t_n, x_n)_n$  dans  $\mathcal{Q}^{\mathbb{N}}$  telle que  $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0)$  et  $V_S(t_n, x_n) \rightarrow V^*(t_0, x_0)$ .

Posons  $\beta_n = V_S(t_n, x_n) - \varphi(t_n, x_n)$ . Par la continuité de  $\varphi$  on obtient  $\beta_n \rightarrow 0$  alors  $\forall \epsilon > 0$

$$\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon; |\beta_n| = (\varphi - V_S)(t_n, x_n) \leq \epsilon. \quad (3)$$

Soit  $n \geq N_\gamma$  et considérons le processus  $\{F_s^\nu\}_{t_n \leq s \leq T}$  avec une valeur initiale de  $x_n$  à l'instant  $t = t_n$  et un contrôle  $\nu \in \mathcal{U}(t_n, x_n)$ .

Posons  $\tau_n$  le temps d'arrêt défini par

$$\tau_n = \inf\{s \geq t_n : F_s^\nu \notin B_r(t_n, x_n)\}.$$

Soit  $\delta = -\frac{e^{-\rho(\tau_n - t_n)} \tau_n - t_n p_{\kappa + t_n}}{2} \max_{\partial B_r(t_n, x_n)} (V_S - \varphi)$  alors par (1) on a  $\delta > 0$ .

Alors puisque  $\delta > 0$ , il vient

$$\begin{aligned} \varphi(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu) &\geq 2\delta \frac{e^{\rho(\tau - t_n)}}{\tau - t_n p_{\kappa + t_n}} + V^*(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu) \\ &\geq 2\delta \frac{e^{\rho(\tau - t_n)}}{\tau - t_n p_{\kappa + t_n}} + V_S(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu). \end{aligned} \quad (4)$$

En appliquant le lemme d'Itô à  $\phi_b(s, F_s^\nu) = e^{-\rho(s - t_n)}_{s - t_n p_{\kappa + t_n}} \varphi(s, F_s^\nu)$  dans

l'intervalle  $[t_n, \tau_n]$ , on trouve

$$\begin{aligned}
& e^{-\rho(\tau_n - t_n)} \tau_n - t_n p_{\kappa + t_n} \varphi(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu) - \varphi(t_n, x_n) \\
&= \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s - t_n)} s - t_n p_{\kappa + t_n} \left[ -(\rho + \lambda_{\kappa + s}) \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) \right] ds + \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s - t_n)} s - t_n p_{\kappa + t_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s.
\end{aligned}$$

Alors par (3) et (4), on a

$$\begin{aligned}
& e^{-\rho(\tau_n - t_n)} \tau_n - t_n p_{\kappa + t_n} V_S(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu) - V_S(t_n, x_n) \\
& \leq -\delta + \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s - t_n)} s - t_n p_{\kappa + t_n} \left[ -(\rho + \lambda_{\kappa + s}) \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) \right] ds + \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s - t_n)} s - t_n p_{\kappa + t_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
V_S(t_n, x_n) & \geq \delta + \mathbb{E} \left\{ \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s - t_n)} g_b(F_s^\nu) s - t_n p_{\kappa + t_n} \lambda_{\kappa + s} ds + e^{-\rho(\tau_n - t_n)} \tau_n - t_n p_{\kappa + t_n} V_S(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_n} \right\} \\
& - \mathbb{E} \left\{ \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s - t_n)} s - t_n p_{\kappa + t_n} \left[ -(\rho + \lambda_{\kappa + s}) \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa + s} g_b(F_s^\nu) \right] ds \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_n} \right\} \\
& - \mathbb{E} \left[ \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s - t_n)} s - t_n p_{\kappa + t_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) B(F_s^\nu, \nu_s) dW_s \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_n} \right].
\end{aligned}$$

Comme  $(s, F_s^\nu) \in B_r(t_n, x_n)$  pour tout  $s \in (t_n, \tau_n)$  alors par (2), on a

$$\begin{aligned}
& - \mathbb{E} \left\{ \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s - t_n)} s - t_n p_{\kappa + t_n} \left[ -(\rho + \lambda_{\kappa + s}) \varphi(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, F_s^\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, F_s^\nu) A(F_s^\nu, \nu_s) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, F_s^\nu) B^2(F_s^\nu, \nu_s) + \lambda_{\kappa + s} g_b(F_s^\nu) \right] ds \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_n} \right\} > 0.
\end{aligned}$$

Donc par les arguments de bornitude usuelles, il en découle que

$$\begin{aligned}
V_S(t_n, x_n) & > \delta + \mathbb{E} \left\{ \int_{t_n}^{\tau_n} e^{-\rho(s - t_n)} g_b(F_s^\nu) s - t_n p_{\kappa + t_n} \lambda_{\kappa + s} ds \right. \\
& \quad \left. + e^{-\rho(\tau_n - t_n)} \tau_n - t_n p_{\kappa + t_n} V_S(\tau_n, F_{\tau_n}^\nu) \mid \tilde{\mathcal{F}}_{t_n} \right\}.
\end{aligned} \tag{II.39}$$

Puisque  $\delta$  ne dépend pas du contrôle et  $\nu$  est quelconque alors (II.39) contredit le principe de

programmation dynamique établit en (II.36). Donc on doit avoir

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x_0) - H_S(t_0, x_0, \varphi(t_0, x_0), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_0, x_0), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_0, x_0)) \geq 0,$$

ce qui conclut la preuve du lemme. ■

**Lemme 2.3.3 (*Lemme de comparaison*)**

Soit  $V_1$  (resp  $V_2$ ) une sous-solution (resp sur-solution) semi-continue supérieure (resp inférieure) de (II.37) dans  $\mathcal{Q}$ . Si  $V_1(T, x) \leq V_2(T, x)$  pour tout  $x$  alors  $V_1 \leq V_2$  sur  $\mathcal{Q}$ .

**Remarque 2.3.2.** On cherche à démontrer l'unicité dans la classe des fonctions localement bornées et vérifiant la condition de croissance « lente » décrite dans la proposition 2.3.2.

**Démonstration :**

On omet la preuve de ce lemme pour éviter une redondance d'idées dans les démonstrations des deux lemmes de comparaison. L'idée générale consiste à

- (i) utiliser la condition de croissance « lente » afin de se limiter à l'ensemble  $\mathcal{A}$  caractérisé par (II.25) pour chercher le supremum de la fonction  $\Phi_\alpha$  présentée en (II.24),
- (ii) exploiter le fait que les fonctions sont bornées sur  $\mathcal{A}$  (puisqu'elles sont localement bornées sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$ ) pour aboutir à une inégalité équivalente de (II.28)
- (iii) et conclure avec une contradiction en se basant sur la propriété semi-continue supérieure (respectivement inférieure) de  $V_1$  (respectivement  $V_2$ ). ■

Le lemme de comparaison 2.3.3 nous permet de conclure que la fonction de valeur  $V_S$  est la seule solution de viscosité de (II.37) avec une condition terminale  $V_S(T, x) = g_S(x)$  et appartenant à la classe de fonctions de la remarque 2.3.2.

En effet, si on suppose qu'il existe une autre solution  $\tilde{V}_S$  vérifiant ces conditions, alors la condition terminale et la continuité de la fonction  $g_S$  nous permet d'obtenir

$(V_S)^*(T, x) = (V_S)_*(T, x) = (\tilde{V}_S)^*(T, x) = (\tilde{V}_S)_*(T, x) = g_S(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ . En se basant sur les deux lemmes 2.3.1-2.3.2 et le lemme de comparaison présenté ci-dessus, on trouve donc que  $(V_S)^*(t, x) \leq (\tilde{V}_S)_*(t, x)$  et  $(\tilde{V}_S)^*(t, x) \leq (V_S)_*(t, x)$  pour tout  $(t, x) \in \mathcal{Q}$ .

Ainsi, on conclut que  $V_S = \tilde{V}_S$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$ .

## CHAPITRE III

### RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

Il est rare d'avoir des équations HJB résultant des problèmes de contrôles stochastiques qui admettent des solutions analytiques et on recourt souvent aux méthodes numériques pour résoudre ces équations. On se restreint dans ce mémoire à un espace d'état de dimension 1, donc on se base sur les méthodes « classiques » des *différences finies* pour la discrétisation des équations HJB présentées dans (II.13)-(II.37).

Une brève introduction sur les bases de ces méthodes est présentée en Annexe C, le lecteur peut se référer au chapitre 2 de Duffy (2014) pour une étude plus approfondie des principes fondamentaux. Pour le calcul des dérivées partielles de premier ordre et de deuxième ordre des équations différentielles non linéaires concernées, on utilise les différences centrées et en avant ou en arrière. On consacre ainsi la première partie à la formulation du problème discrétisé et on s'intéresse ensuite aux résultats numériques correspondants à plusieurs valeurs des différents paramètres du modèle permettant d'interpréter les stratégies optimales d'investissement pour un assuré admettant des fonctions d'utilité « classique » ou « S-shaped ».



### 3.1 Discrétisation du problème d'optimisation

Cette section se base principalement sur les méthodes et résultats développés dans Forsyth et Labahn (2007). À des fins d'approximation de la fonction de valeur, on suppose que les valeurs que prend le fonds distinct sont dans une grille fixée d'avance et on traite les deux valeurs extrêmes de cet intervalle dans la deuxième partie de cette section.

#### 3.1.1 Formulation discrète des équations HJB

Avant d'entamer la discrétisation du problème, rappelons les équations HJB vérifiées par les fonctions de valeur  $V_b$  et  $V_S$  définies dans (II.9) et (II.34). Pour tout  $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial V_b}{\partial t}(t, x) - \sup_{\nu} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_b}{\partial x^2}(t, x) B^2(x, \nu_t) + \frac{\partial V_b}{\partial x}(t, x) A(x, \nu_t) - (\rho + \lambda_{\kappa+t}) V_b(t, x) \right\} \\ & - b \lambda_{\kappa+t} g(x) = 0, \quad \text{et} \\ & -\frac{\partial V_S}{\partial t}(t, x) - \sup_{\nu} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_S}{\partial x^2}(t, x) B^2(x, \nu_t) + \frac{\partial V_S}{\partial x}(t, x) A(x, \nu_t) - (\rho + \lambda_{\kappa+t}) V_S(t, x) \right\} \\ & - b \lambda_{\kappa+t} g_S(x) = 0 \end{aligned}$$

avec les conditions terminales  $V_b(T, x) = g(x)$  et  $V_S(T, x) = g_S(x)$ .

La première équation représente la dynamique se basant sur une utilité « classique » et la deuxième caractérise le cas d'une utilité « S-shaped ».

Pour simplifier les notations dans cette partie et unifier l'approche de discrétisation pour les deux équations, on pose

$$V \equiv \begin{cases} V_b & \text{pour une utilité « classique »} \\ V_S & \text{pour une utilité « S-shaped »} \end{cases}$$

et

$$\tilde{h} \equiv \begin{cases} g & \text{pour une utilité « classique »} \\ g_S & \text{pour une utilité « S-shaped »} \end{cases}$$

Ainsi, le problème étudié dans cette partie est caractérisé par l'équation générale suivante

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) - \sup_{\nu} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, x) B^2(x, \nu_t) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) A(x, \nu_t) - (\rho + \lambda_{\kappa+t}) V(t, x) \right\} \\ \quad - b \lambda_{\kappa+t} \tilde{h}(x) = 0, \\ V(T, x) = \tilde{h}(x). \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Puisque la fonction de valeur  $V(t, x)$  est connue à  $t = T$  pour tout  $x$  alors on résout l'équation (III.1) à l'envers dans le temps, c'est-à-dire de l'instant  $t = T$  à  $t = 0$ .

Soit  $\tau = T - t$  la durée actuelle jusqu'à l'échéance et  $\tilde{V}(\tau, x)$  la fonction de valeur dépendant de  $(\tau, x)$ , donc on a l'identité suivante :

$$\tilde{V}(\tau, x) = V(T - \tau, x) = V(t, x).$$

Ainsi l'équation HJB (II.13) peut s'écrire de façon équivalente

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tau}(\tau, x) - \sup_{\nu \in \mathcal{U}} \left\{ A(x, \nu) \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}(\tau, x) + \frac{1}{2} B(x, \nu)^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2}(\tau, x) - (\rho + \lambda_{\kappa+\tau}) \tilde{V}(\tau, x) \right\} - b \lambda_{\kappa+\tau} \tilde{h}(x) = 0, \\ \tilde{V}(0, x) = \tilde{h}(x). \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Soit  $F := \{F_i\}_{i=0}^m$  une partition de l'intervalle  $[F_0, F_m]$  représentant des valeurs possibles du fonds et posons  $\tau := \{\tau_j\}_{j=0}^n$  la partition uniforme de l'intervalle de temps  $[0, T]$ .

Dans la suite de ce chapitre, on note  $\mathcal{Q}_m^n = \llbracket 0, m \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$ .<sup>21</sup>

Pour tout  $(i, j) \in \mathcal{Q}_m^n$ , on confond la fonction de valeur  $\tilde{V}(\tau_j, F_i)$  (correspondante au temps  $\tau_j$  et à une valeur  $F_i$  du fonds) avec  $\tilde{V}_i^j$  et on note le contrôle relatif à  $\tau_j$  et  $F_i$  par  $\nu_i^j$ .

Posons  $\lambda_j = \lambda_{\kappa+\tau_j}$  et  $c_j = \rho + \lambda_j$  pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$  alors en appliquant l'équation (III.2) à un ensemble fini de points  $(\tau_j, F_i) \in \{\tau_j\}_{j=0}^n \times \{F_i\}_{i=0}^m$ , on aboutit à la version discrétisée suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{V}_i^j = \sup_{\nu_i^j \in \mathcal{U}} \left\{ A(F_i, \nu_i^j) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{V}_i^j + \frac{1}{2} B(F_i, \nu_i^j)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{V}_i^j - c_j \tilde{V}_i^j \right\} + b \lambda_j \tilde{h}(F_i), \\ \tilde{V}_i^0 = \tilde{h}(F_i). \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

---

21. où  $\llbracket 0, m \rrbracket$  est l'intervalle des nombres entiers entre 0 et  $m$ .

Si on suppose une discrétisation du fonds constante dans le temps alors la grille représentant la dynamique du fonds est de la forme

$$F = \begin{pmatrix} F_0 & F_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & F_0 \\ F_1 & F_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & F_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ F_m & F_m & \dots & \dots & \dots & & \dots & F_m \end{pmatrix}$$

On mène notre analyse numérique en utilisant le schéma entièrement implicite présenté en Annexe C et on écrit ci-dessous l'équation discrétisée correspondante à (III.3)

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{V}_i^{j+1} - \tilde{V}_i^j}{\Delta\tau} = & \sup_{\nu^{j+1}} \left\{ \alpha_i^{j+1} \tilde{V}_{i-1}^{j+1} + \beta_i^{j+1} \tilde{V}_{i+1}^{j+1} - (\alpha_i^{j+1} + \beta_i^{j+1} + c_{j+1}) \tilde{V}_i^{j+1} \right\} \\ & + b \lambda_{j+1} \tilde{h}(F_i), \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

où  $\Delta\tau$  est le pas de la partition uniforme du temps et les paramètres  $(\alpha, \beta)$  vérifient :

→ Pour une différence centrée

$$\begin{aligned} \alpha_{i,centr}^j &= \frac{B^2(F_i, \nu_i^j)}{(F_i - F_{i-1})(F_{i+1} - F_{i-1})} - \frac{A(F_i, \nu_i^j)(F_{i+1} - F_i)}{(F_i - F_{i-1})(F_{i+1} - F_{i-1})}, \\ \beta_{i,centr}^j &= \frac{B^2(F_i, \nu_i^j)}{(F_{i+1} - F_i)(F_{i+1} - F_{i-1})} + \frac{A(F_i, \nu_i^j)(F_i - F_{i-1})}{(F_{i+1} - F_i)(F_{i+1} - F_{i-1})}. \end{aligned}$$

→ Pour une différence en avant

$$\begin{aligned} \alpha_{i,av}^j &= \frac{B^2(F_i, \nu_i^j)}{(F_i - F_{i-1})(F_{i+1} - F_{i-1})}, \\ \beta_{i,av}^j &= \frac{B^2(F_i, \nu_i^j)}{(F_{i+1} - F_i)(F_{i+1} - F_{i-1})} + \frac{A(F_i, \nu_i^j)}{(F_{i+1} - F_i)}. \end{aligned}$$

→ Pour une différence en arrière :

$$\alpha_{i,arr}^j = \frac{B^2(F_i, \nu_i^j)}{(F_i - F_{i-1})(F_{i+1} - F_{i-1})} - \frac{A(F_i, \nu_i^j)}{(F_i - F_{i-1})},$$

$$\beta_{i,arr}^j = \frac{B^2(F_i, \nu_i^j)}{(F_{i+1} - F_i)(F_{i+1} - F_{i-1})}.$$

Pour chaque nœud  $(i, j) \in \mathcal{Q}_m^n$ , il faut choisir la méthode qui garantit la positivité des coefficients ( $\alpha_i^j \geq 0$  et  $\beta_i^j \geq 0$ ) en accordant la priorité à la méthode de différence centrée tel que présenté dans Wang et Forsyth (2008). En effet, cette étape est primordiale pour s'assurer de la convergence de la solution numérique vers l'unique solution de viscosité du problème (voir le théorème 5.1 dans Forsyth et Labahn (2007)).

Afin d'optimiser les calculs numériques et alléger les notations, on opte pour une forme matricielle de l'équation (III.4). Notons :

- $\nu^j = (\nu_0^j, \nu_1^j, \dots, \nu_m^j)^\top$  le vecteur des contrôles au temps  $\tau_j$ .
- $\tilde{V}^j = (\tilde{V}_0^j, \tilde{V}_1^j, \dots, \tilde{V}_m^j)^\top$  le vecteur des valeurs de la fonction de valeur au temps  $\tau_j$ .
- $\tilde{H}^j = (b \lambda_j \tilde{h}(F_0), b \lambda_j \tilde{h}(F_1), \dots, b \lambda_j \tilde{h}(F_m))^\top$  le vecteur des valeurs de la fonction  $x \mapsto b \lambda_{\kappa+\tau} \tilde{h}(x)$  au temps  $\tau_j$  et dans l'intervalle  $[F_0, F_m]$ .

La formulation matricielle de (III.4) est

$$[\mathcal{I} - \Delta\tau \mathcal{M}^{j+1}(\hat{\nu}^{j+1})]\tilde{V}^{j+1} = \tilde{V}^j + \Delta\tau \tilde{H}^{j+1} \quad \forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad (\text{III.5})$$

où  $\mathcal{I}$  est la matrice identité et  $\hat{\nu}^{j+1}$  le vecteur des contrôles optimaux à l'instant  $\tau_{j+1}$ .

$\mathcal{M}^{j+1} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$  est la matrice définie par :

$$\mathcal{M}^j(\nu^j) = \begin{pmatrix} \Theta^j & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_1^j & -(\alpha_1^j + \beta_1^j + c_j) & \beta_1^j & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^j & -(\alpha_2^j + \beta_2^j + c_j) & \beta_2^j & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{m-1}^j & -(\alpha_{m-1}^j + \beta_{m-1}^j + c_j) & \beta_{m-1}^j \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \Xi^j \end{pmatrix}$$

où  $\Theta$  et  $\Xi$  servent à assurer les conditions de la fonction de valeur aux deux bornes  $F_0$  et  $F_m$ . En effet, on s'attend souvent à ce que les erreurs découlant de la condition limite en  $F_m$  soient moindres dans les régions d'intérêts si la valeur  $F_m$  est assez grande. On aborde une approximation de ces conditions dans la section suivante en se basant sur les formules fermées relatives aux contrôles constants présentés en Annexe B, ce qui nous permet d'obtenir une expression pour la fonction de valeur aux deux extrémités  $F_0$  et  $F_m$ .

### 3.1.2 Conditions limites

L'objectif principal de cette partie est la détermination de  $\Theta$  et  $\Xi$  en se basant sur des contrôles constants. Pour approximer la fonction de valeur aux bornes, on suppose que  $F_0 \ll G$  et  $F_m \gg G$ .

#### 3.1.2.1 La détermination de $F_0$ et $F_m$ approximatifs

D'après l'annexe B, pour des stratégies constantes  $\nu = \{\nu_c, t \in [0, T]\}$ , la valeur du fonds est représentée par la dynamique (B.1) qui décrit un brownien géométrique. Alors pour  $F_0^{\nu_c} = x$ , on a

$$F_t^{\nu_c} = x \exp \left\{ \left[ (\alpha - c_s)\nu_c + r - c_F - \frac{\nu_c^2 \sigma^2}{2} \right] t + \nu_c \sigma W_t \right\}.$$

Notons  $\hat{\mu} = (\alpha - c_s)\nu_c + r - c_F - \frac{\nu_c^2 \sigma^2}{2}$ ,  $\hat{\sigma} = \nu_c \sigma$  et posons deux premiers temps de passages  $\tau_{x:G}^{\nu_c}$  et  $\tau_{x:G}^{\nu_c*}$  définis par

$$\tau_{x:G}^{\nu_c} = \inf\{t > 0 : F_t^{\nu_c} \geq G\} \quad \text{et} \quad \tau_{x:G}^{\nu_c*} = \inf\{t > 0 : F_t^{\nu_c} \leq G\}.$$

En utilisant les propriétés des temps de premier passages<sup>22</sup> pour les browniens géométriques et en notant  $\Phi$  la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, il vient

**Cas A)** Si  $x < G$  alors on a

$$\mathbb{P}(\tau_{x:G}^{\nu_c} \leq T) = \Phi\left(\frac{\ln(\frac{x}{G}) + \hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{x}{G}\right)^{-\frac{2\hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2}} \Phi\left(\frac{\ln(\frac{x}{G}) - \hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right).$$

---

22. Le lecteur peut consulter le cas du mouvement brownien dans Borodin et Salminen (2002)

**Cas B)** Si  $x > G$  alors on obtient

$$\mathbb{P}(\tau_{x:G}^{\nu_c} \leq T) = \Phi\left(\frac{\ln(\frac{G}{x}) - \hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{G}{x}\right)^{\frac{2\hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2}} \Phi\left(\frac{\ln(\frac{G}{x}) + \hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right).$$

Ainsi on déduit la probabilité que le processus  $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ , admettant comme valeurs initiales  $F_0$  ou  $F_m$  à  $t = 0$ , atteigne la barrière  $G$  (la garantie du fonds) avant l'échéance  $T$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_{F_0:G}^{\nu_c} \leq T) &= \Phi\left(\frac{\ln(\frac{F_0}{G}) + \hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{F_0}{G}\right)^{-\frac{2\hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2}} \Phi\left(\frac{\ln(\frac{F_0}{G}) - \hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right) \quad \text{et} \\ \mathbb{P}(\tau_{F_m:G}^{\nu_c} \leq T) &= \Phi\left(\frac{\ln(\frac{G}{F_m}) - \hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{G}{F_m}\right)^{\frac{2\hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2}} \Phi\left(\frac{\ln(\frac{G}{F_m}) + \hat{\mu}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}\right). \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

**Remarque 3.1.1.** On présente ci-dessous quelques remarques pertinentes permettant de clarifier l'analyse suivie dans cette partie.

- i) On étudie le cas particulier du premier temps de passage dans l'intervalle  $[0, T]$  puisqu'il n'est en aucun cas contraignant. En effet, en supposant que le fonds débute à une valeur  $x$  à un instant  $t > 0$ , alors le fait d'atteindre la barrière  $G$  dans l'intervalle  $[t, T]$  est moins probable que de l'atteindre dans  $[0, T]$  si le même processus a débuté par une valeur  $x$  à  $t = 0$ .
- ii) On sait que le processus  $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$  atteint la barrière  $G$  dans un temps fini presque sûrement. Cependant, pour une échéance  $T < \infty$ , les deux probabilités décrites dans (III.6) sont strictement inférieures à 1 et croissantes par rapport à  $T$ . De plus, en fixant d'avance l'échéance  $T$ , on peut atteindre des probabilités de premier passages proche de 0 en choisissant des valeurs de  $F_0$  ( $F_m$ ) suffisamment petites (suffisamment grandes) par rapport à la garantie  $G$ .
- iii) Pour des valeurs  $F_0 < G$  et  $F_m > G$  fixées d'avance, les deux probabilités présentées dans (III.6) sont croissantes par rapport aux contrôles constants  $\nu_c \in \mathbb{U}$ . En effet, plus on investit dans l'actif risqué et plus on augmente la volatilité du fonds distinct, alors on accroit nos chances d'atteindre la barrière  $G$  avant l'échéance  $T$ .
- iv) Par les mêmes argument explicités dans iii), on peut déduire que les deux probabilités de premier passages sont croissantes par rapport à la volatilité  $\sigma$  de l'actif risqué.

D'après *iii*) dans la remarque 3.1.1, on constate que les probabilités de premier passages sont maximales pour des stratégies constantes qui investissent le tout dans l'actif risqué (i.e  $\nu_c = 1$ ). Ainsi, on a pour tout contrôle constant  $\nu_c \in \mathbb{U}$ ,

$$\mathbb{P}\left(\tau_{F_0:G}^{\nu_c} \leq T\right) \leq \mathbb{P}\left(\tau_{F_0:G}^1 \leq T\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\tau_{F_m:G}^{\nu_c*} \leq T\right) \leq \mathbb{P}\left(\tau_{F_m:G}^{1*} \leq T\right). \quad (\text{III.7})$$

Pour illustrer quelques valeurs plausibles de  $F_0$  et  $F_m$  qui permettent d'atteindre des valeurs de  $\mathbb{P}\left(\tau_{F_0:G}^1 \leq T\right)$  et  $\mathbb{P}\left(\tau_{F_m:G}^{1*} \leq T\right)$  proches de 0, on opte pour un choix de paramètres utilisés par MacKay et Ocejo (2022) dans leur étude numérique et qu'on résume dans le tableau ci-dessous.

$\mu$	$r$	$\sigma$	$G$	$T$	$c_s$
0.04	0.02	0.2	1	10	0.0175

Tableau 3.1 : Valeurs des paramètres du modèle

Dans le cas où  $\nu_c = 1$ , MacKay et Ocejo (2022) utilisent des frais équitables  $(c_s, c_F)$  vérifiant la condition  $c_s + c_F = 0.02448$ , donc on obtient  $c_F = 0.00698$ . On a  $\mathbb{P}\left(\tau_{F_0:G}^1 \leq T\right) = 10^{-6}$  et  $\mathbb{P}\left(\tau_{F_m:G}^{1*} \leq T\right) = 10^{-4}$  pour  $F_0 = 0.01$  et  $F_m = 40$ . Ainsi, on parvient à obtenir des probabilités vérifiant  $\mathbb{P}\left(\tau_{F_0:G}^1 \leq T\right) \leq 10^{-6}$  et  $\mathbb{P}\left(\tau_{F_m:G}^{1*} \leq T\right) \leq 10^{-4}$  pour des valeurs de  $F_0$  et  $F_m$  telles que  $(F_0, F_m) \in ]0, 0.01] \times [40, \infty[$ .

**Remarque 3.1.2.** *On rappelle que  $(c_s, c_F)$  doivent vérifier  $c_s < \mu - r$  et  $c_F < r$  donc on obtient que  $c_s \in ]0.00448, 0.02[$ . Aussi, en investissant le tout dans l'actif risqué et en considérant des frais équitables  $(c_s, c_F)$ , le paramètre  $\hat{\mu}$  reste invariant et donc les frais  $c_s$  n'ont aucune incidence sur les deux probabilités  $\mathbb{P}\left(\tau_{F_0:G}^1 \leq T\right)$  et  $\mathbb{P}\left(\tau_{F_m:G}^{1*} \leq T\right)$ .*

L'analyse suivie dans cette partie s'est basée principalement sur des contrôles constants afin d'approximer des valeurs de  $F_0$  et  $F_m$  qui font en sorte que la probabilité d'atteindre la garantie  $G$  avant l'échéance soit proche de 0. Cependant, dans le cadre de notre étude dans ce mémoire, on travaille avec un fonds distinct représenté par une dynamique plus générale décrite dans (II.5) où les stratégies d'investissement ne sont pas constantes.

On définit ci-dessous les premiers temps de passages caractérisés cette fois par des contrôles  $\nu^t := \{s \in [t, T] : \nu_s\} \in \mathcal{A}(t, x) \cap \mathbb{U}^{23}$  qui varient dans le temps pour tout  $t \in [0, T]$ .

---

23.  $\mathcal{A}(t, x) \cap \mathbb{U}$  est l'ensemble des contrôles admissibles présenté dans (II.6).

On a

$$\tau_{x:G}^{\nu^t} = \inf\{s > t : F_s^{\nu^s} \geq G\} \quad \text{et} \quad \tau_{x:G}^{\nu^{t*}} = \inf\{s > t : F_s^{\nu^s} \leq G\},$$

où  $F_s^{\nu^s} = x$  pour  $s = t$ .

Par les mêmes arguments explicités à *i*) dans la remarque 3.1.1, on s'intéresse surtout aux deux premiers temps de passages  $\tau_{F_0:G}^{\nu^0}$  et  $\tau_{F_m:G}^{\nu^0*}$ . Autrement dit, on étudie le temps nécessaire pour le processus  $\{F_s^{\nu^s} : s \in [0, T]\}$  débutant de  $F_0$  (ou  $F_m$ ) à l'instant  $s = 0$  avant d'atteindre la garantie  $G$ . On utilise les valeurs de  $F_0$  et  $F_m$ , déduites de l'analyse ci-dessus, dans le cas général de contrôles variant dans le temps pour avoir des probabilités  $\mathbb{P}(\tau_{F_0:G}^{\nu^0} \leq T)$  et  $\mathbb{P}(\tau_{F_m:G}^{\nu^0*} \leq T)$  proches de 0. Ainsi, on pose le postulat suivant qui nous permettra de déterminer les deux paramètres  $\Theta$  et  $\Xi$ .

### Postulat 3.1.1

Pour tout  $\nu^0 \in \mathcal{A}(0, x) \cap \mathbb{U}$ , on a

$$\mathbb{P}(\tau_{F_0:G}^{\nu^0} \leq T) \leq \mathbb{P}(\tau_{F_0:G}^1 \leq T) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tau_{F_m:G}^{\nu^0*} \leq T) \leq \mathbb{P}(\tau_{F_m:G}^{1*} \leq T)$$

En d'autres termes, on suppose que même dans le cas général où les contrôles varient dans le temps, c'est le plus souvent la stratégie constante contenant le plus de risque qui permet d'atteindre la garantie  $G$  avant l'échéance  $T$ .

Soit  $\nu_b^{t*}(x)$  et  $\nu_S^{t*}(x)$  les contrôles admissibles optimaux vérifiant pour tout  $t \in [0, T]$

$$V_b(t, x) = J_b(t, x, \nu_b^{t*}(x)) \quad \text{et} \quad V_S(t, x) = J_S(t, x, \nu_S^{t*}(x)),$$

où les fonctions  $V_b$  ( $J_b$ ) et  $V_S$  ( $J_S$ ) sont définies dans II.9 et II.34 respectivement.

Donc en s'appuyant sur le postulat 3.1.1, on a

$$\mathbb{P}(\tau_{F_0:G}^{\nu_b^{0*}(F_0)} \leq T) \leq \mathbb{P}(\tau_{F_0:G}^1 \leq T) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tau_{F_m:G}^{\nu_b^{0*}(F_m)*} \leq T) \leq \mathbb{P}(\tau_{F_m:G}^{1*} \leq T),$$

et

$$\mathbb{P}(\tau_{F_0:G}^{\nu_S^{0*}(F_0)} \leq T) \leq \mathbb{P}(\tau_{F_0:G}^1 \leq T) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tau_{F_m:G}^{\nu_S^{0*}(F_m)*} \leq T) \leq \mathbb{P}(\tau_{F_m:G}^{1*} \leq T).$$

(III.8)



Ainsi, en utilisant les mêmes paramètres du tableau 3.1 pour des valeurs de  $F_0$  et  $F_m$  telles que  $(F_0, F_m) \in ]0, 0.01] \times [40, \infty[$ , on obtient des probabilités vérifiant

$$\mathbb{P}\left(\tau_{F_0:G}^{\nu_b^{0*}(F_0)} \leq T\right) < 10^{-6} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\tau_{F_m:G}^{\nu_b^{0*}(F_m)^*} \leq T\right) < 10^{-4},$$

et

$$\mathbb{P}\left(\tau_{F_0:G}^{\nu_S^{0*}(F_0)} \leq T\right) < 10^{-6} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\tau_{F_m:G}^{\nu_S^{0*}(F_m)^*} \leq T\right) < 10^{-4}.$$

### 3.1.2.2 La détermination de $\Theta^j$ et $\Xi^j$

On se base dans cette partie sur l'étude menée ci-dessus pour déterminer les deux paramètres  $\Theta$  et  $\Xi$  constituant la première ligne et la dernière ligne de la matrice  $\mathcal{M}^j(\nu^j)$  pour  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  fixé. Ainsi, on travaille avec des valeurs de fonds  $F_0 \ll G$  et  $F_m \gg G$  permettant d'obtenir des probabilités de premier passages avant l'échéance  $T$  très proches de 0. Autrement dit, pour un processus  $\{F_t^{\nu_t} : t \in [0, T)\}$  débutant à  $F_0$  ou  $F_m$ , les deux problèmes d'optimisation étudiés dans ce mémoire à savoir les cas traités dans II.9 et II.34 peuvent être approximés en exploitant presque toujours la garantie pour  $F_0 \ll G$  et en négligeant l'effet de la garantie  $G$  (qui n'est presque jamais franchie par le processus des valeurs du fonds) pour  $F_m \gg G$ .

#### 3.1.2.2.1 Une approximation de $\Theta^j$

Le processus  $\{F_t^{\nu_t} : t \in [0, T)\}$ , avec une valeur initiale de  $F_0$  (décrite précédemment), ne dépasse presque jamais la garantie  $G$  avant l'échéance  $T$ . Donc un assuré averse au risque, détenant un fonds distinct et recevant dans la majorité des cas la garantie  $G$ , va opter pour la stratégie d'investissement constante la plus risquée ( $\nu_c = 1$ ) pour maximiser sa fonction de gain définie dans (II.8).

Si l'assuré est averse aux pertes basées sur un seuil de référence  $0 \leq \theta \leq G$ , alors son utilité est presque toujours évaluée à partir d'une richesse  $G - \theta$ . Donc le contrôle optimal dans ce cas est  $\nu_c = 1$  puisque la quasi-totalité du risque est transférable vers l'assureur.

Dans le cas où  $\theta > G$ , l'assuré évalue presque toujours son capital avec  $-U_2(\theta - G)$ <sup>24</sup>, donc la stratégie qui permet au détenant du fonds de minimiser ses pertes est celle augmentant la probabilité du processus  $\{F_t^{\nu_t} : t \in [0, T)\}$  débutant de  $F_0$  à franchir la garantie  $G$ . Alors en se basant sur les relations discutées dans (III.7)-(III.8), on conclut que la politique optimale est la stratégie constante  $\nu_c = 1$ .

D'après l'étude menée ci-dessus et en s'appuyant sur la formulation (III.5), on déduit que

$$\Theta^1 = \frac{1}{\Delta\tau} \left[ 1 - \frac{(1 + \Delta\tau b \lambda_1) \tilde{h}(F_0)}{J_c(\tau_1, F_0, 1)} \right] \quad \text{et} \quad \Theta^{j+1} = \frac{1}{\Delta\tau} \left[ 1 - \frac{J_c(\tau_j, F_0, 1) + \Delta\tau b \lambda_{j+1} \tilde{h}(F_0)}{J_c(\tau_{j+1}, F_0, 1)} \right]. \quad (\text{III.9})$$

Où  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $J_c(t, x, \nu)$  caractérise la fonction de gain correspondante aux contrôles constants qui est définie par (B.3) en Annexe B.

### 3.1.2.2.2 Une approximation de $\Xi^j$

Le processus  $\{F_t^{\nu_t} : t \in [0, T)\}$  débutant d'une valeur initiale  $F_m \gg G$  (décrite précédemment) ne franchit presque jamais la barrière  $G$  d'en haut. Ainsi, on considère dans cette partie un modèle qui ne prend pas en compte la garantie  $G$  du fonds afin d'approximer  $\Xi^j$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Dans le cas d'un assuré averse au risque, on se base sur les résultats « classiques » explicités dans Merton (1969) et Merton (1971) ainsi que sur la remarque 2.1.1 pour déduire que la stratégie optimale qu'on note  $\nu_M^*$  est la politique constante définie par

$$\nu_M^* = \frac{\tilde{\mu} - \tilde{r}}{(1 - \gamma) \sigma^2} = \frac{\mu - r - c_s}{(1 - \gamma) \sigma^2}. \quad (\text{III.10})$$

Concernant le cas où les préférences du détenteur d'un tel fonds distinct sont caractérisées par une fonction d'utilité « S-shaped » de la forme (II.31) ou (II.32), on se base sur les résultats analytiques du théorème 4.1. dans MacKay et Oejo (2022) afin de déduire la stratégie optimale lorsqu'on néglige la garantie. Donc le contrôle constant qu'on note  $\nu_S^*$  est définie comme suit

$$\nu_S^* = \frac{\mu - r - c_s}{(1 - \gamma_1) \sigma^2}. \quad (\text{III.11})$$

Considérons le cas d'un assuré d'âge  $\kappa$  ans à l'instant  $t = 0$  avec une force de mortalité

---

24. La fonction d'utilité  $U_2$  est définie dans (II.30).

selon le modèle de Gompertz-Makeham définie dans 1.4.2.2. Pour vérifier numériquement ces résultats, on représente dans la figure 3.1 les fonctions de gains correspondantes à l'instant  $t = 0$  en se basant sur les paramètres du tableau 3.1 et les valeurs<sup>25</sup> présentées dans le tableau 3.2 .

$\kappa$	$A_1$	$A_2$	$C$	$\rho$	$\gamma$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	$b$
50	0.0001	0.00035	1.075	0.02	-2	0.2	0.4	0.95	1.05	1

Tableau 3.2 : Paramètres caractérisant la mortalité et les préférences de l'assuré

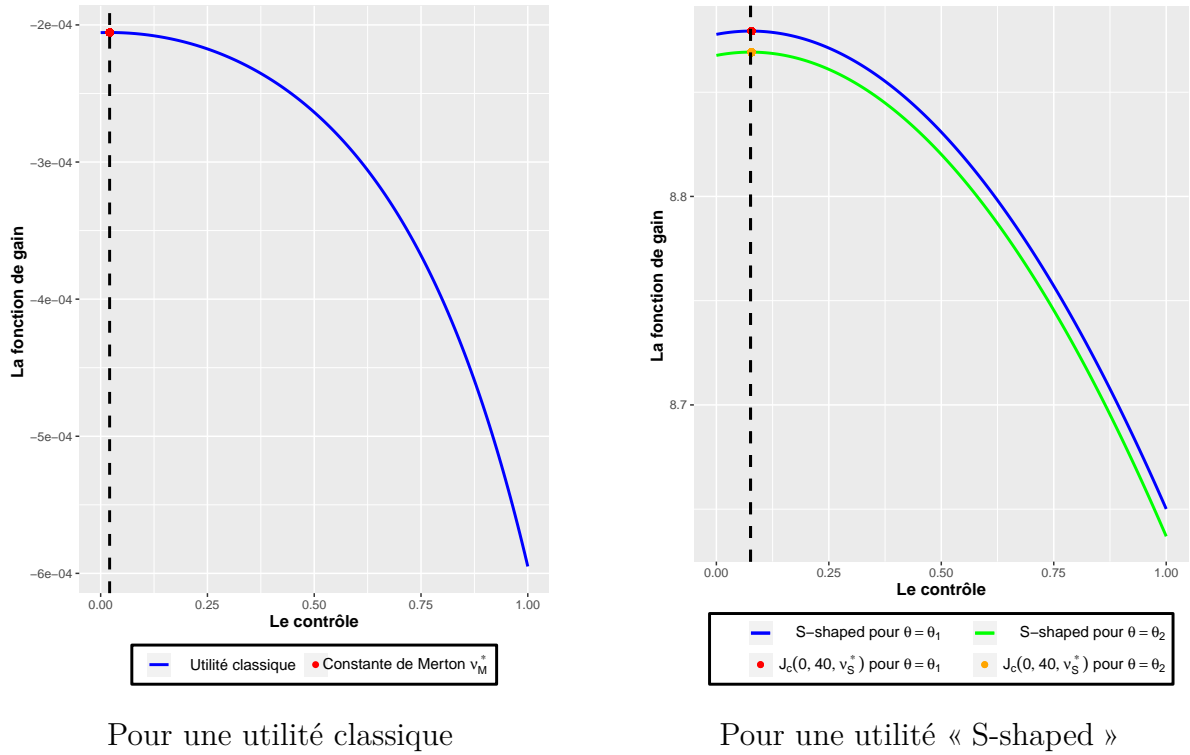


FIGURE 3.1: Fonctions de gain

Dans la figure 3.1, les lignes verticales représentent les valeurs des contrôles qui maximisent les fonctions de gains correspondantes. Ainsi, le paramètre  $\Xi^j$  est défini pour tout  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  par

$$\Xi^1 = \frac{1}{\Delta\tau} \left[ 1 - \frac{(1 + \Delta\tau b \lambda_1) \tilde{h}(F_m)}{J_c(\tau_1, F_m, \nu^*)} \right] \quad \text{et} \quad \Xi^{j+1} = \frac{1}{\Delta\tau} \left[ 1 - \frac{J_c(\tau_j, F_m, \nu^*) + \Delta\tau b \lambda_{j+1} \tilde{h}(F_m)}{J_c(\tau_{j+1}, F_m, \nu^*)} \right], \quad (\text{III.12})$$

<sup>25</sup>. Une valeur de  $b = 1$  signifie que l'assuré accorde autant d'importance à son legs en cas de décès qu'à sa richesse finale en cas de survie.

où  $\nu^* = \nu_M^*$  pour une utilité « classique » et  $\nu^* = \nu_S^*$  si l'assuré est averse aux pertes.

### 3.2 Étude numérique de la fonction de valeur et des stratégies optimales sans effet de la mortalité

Dans cette partie, on présente les résultats numériques des deux problèmes considérés dans ce travail à savoir les deux cas d'un assuré possédant une fonction d'utilité « classique » ou « S-shaped ». Cependant, pour motiver l'analyse numérique des deux problèmes généraux de ce mémoire présentés dans 3.3 , on néglige l'effet de la mortalité dans cette section en considérant les conditions de la remarque 2.2.1. On compare ensuite les résultats présentés durant cette partie avec des travaux se focalisant sur les contrôles non bornés<sup>26</sup> comme le mémoire de Bélanger (2021) concernant le cas « classique » et celui de MacKay et Ocejo (2022) pour un assuré averse à la perte.

#### 3.2.1 Le cas d'une utilité « classique »

Dans l'analyse numérique menée ci-dessous, on se base sur les paramètres du tableau 3.1 dans les calculs de base sauf dans le cas où il est spécifié autrement. On s'intéresse tout d'abord dans cette partie à la stratégie optimale du problème décrit dans (II.9) sans tenir en compte l'effet de la mortalité pour différents niveaux d'aversion au risque.

##### 3.2.1.1 Stratégie optimale et fonction de valeur pour des frais vérifiant $c_s + c_F = 0.02448$

D'après les contrôles représentés dans les figures 3.2- 3.3, on remarque que l'assuré adopte la stratégie la plus risquée à savoir  $\nu_t \equiv 1$  jusqu'à ce que le fonds atteigne une valeur critique qu'on note  $F_{c_s}$  et qu'ensuite les contrôles sont décroissants par rapport à la valeur du fonds. Aussi, on constate que la stratégie optimale et l'emplacement de  $F_{c_s}$  dépendent des frais  $c_s$  et du niveau d'aversion de l'assuré (définie par  $1 - \gamma$  dans (I.2)). En effet, pour une valeur fixe du fonds, le contrôle décroît quand les frais augmentent et le seuil  $F_{c_s}$  se rapproche de la garantie  $G$  pour un assuré plus averse au risque et pour des frais  $c_s$  plus grands.

---

26. C'est le cas général des stratégies qui peuvent être en dehors de l'intervalle  $[0, 1]$  .

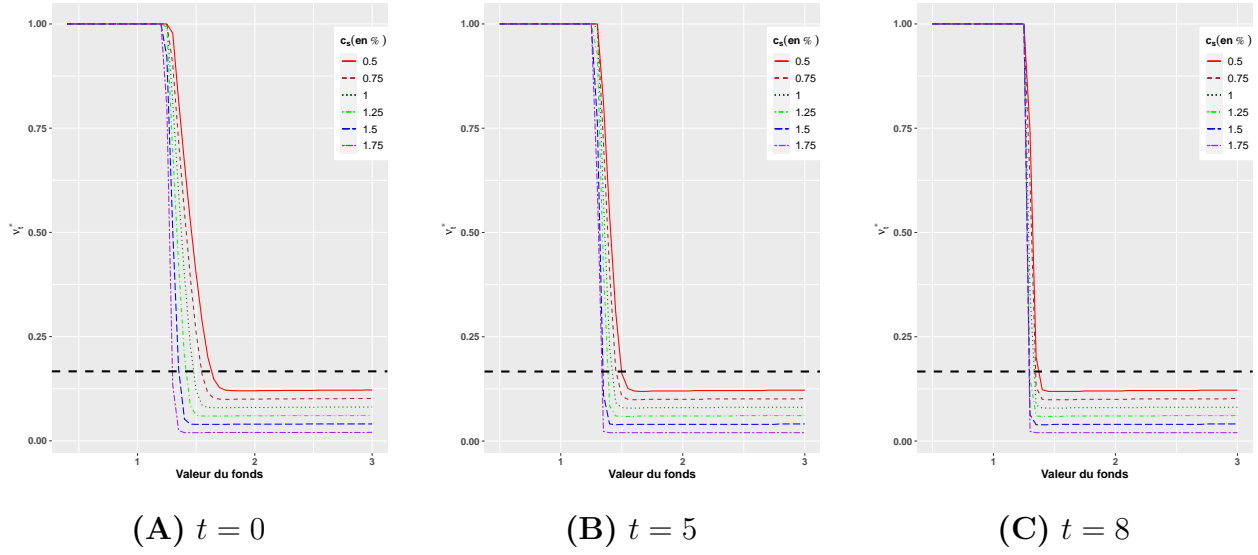


FIGURE 3.2: Stratégie optimale pour  $\gamma = -2$  avec  $c_F = 0.02448 - c_s$

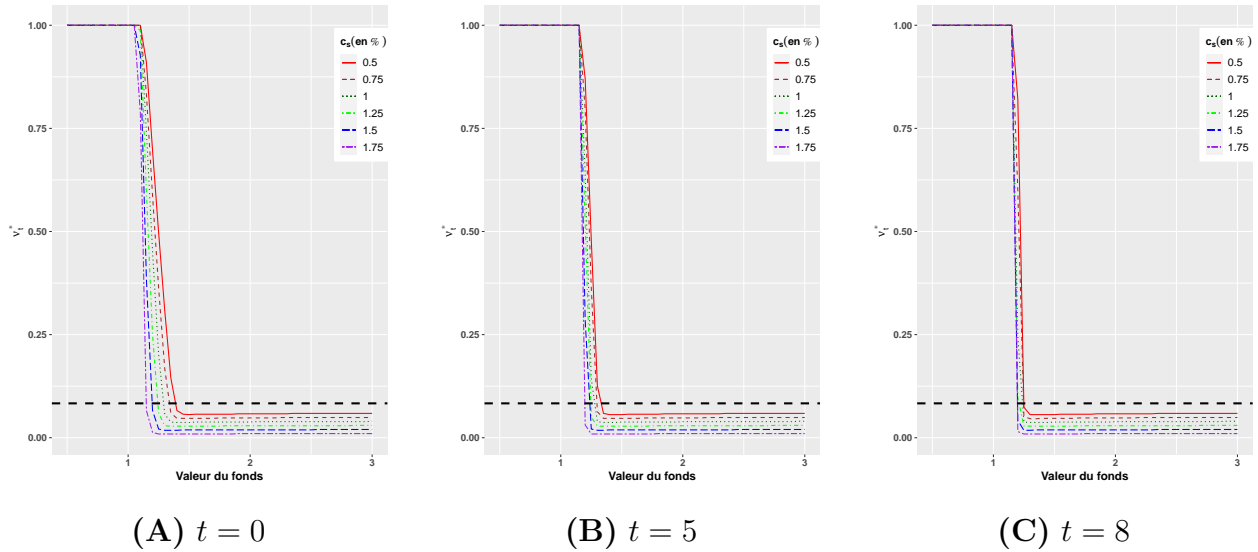


FIGURE 3.3: Stratégie optimale pour  $\gamma = -5$  avec  $c_F = 0.02448 - c_s$

La ligne horizontale dans la figure ci-dessus représente la situation sans garantie et sans frais.

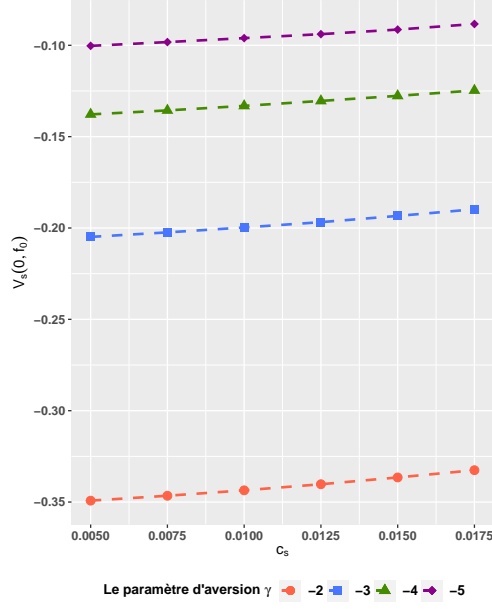
Dans ce cas, la stratégie optimale correspond à la constante de Merton définie par

$$\nu_t = \frac{\mu - r}{(1 - \gamma) \sigma^2} \quad \text{pour tout } t \in [0, T).$$

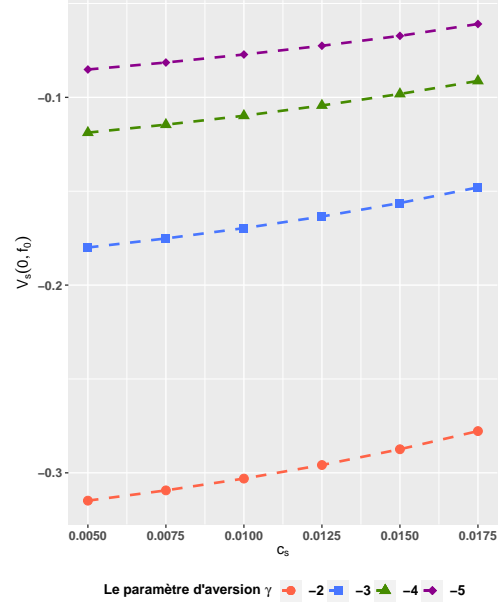
Pour des contrôles non contraints d'être dans  $[0, 1]$  et de très petites valeurs du fonds, l'assuré va toujours utiliser l'effet de levier<sup>27</sup> lorsqu'il est proche de l'échéance. C'est pourquoi dans notre étude, la stratégie optimale correspondante à des petites valeurs du fonds distinct ne change pas même lorsqu'on se rapproche de l'échéance. Dans le cadre de notre étude, l'assureur peut analyser la sensibilité de l'utilité espérée du détenteur du fonds par rapport aux paramètres qui affectent le plus le contrôle  $\nu_t$  de l'assuré notamment les frais  $(c_s, c_F)$  et le profil d'aversion au risque de l'individu. Ainsi, la figure 3.4 représente l'utilité espérée à l'instant  $t = 0$  correspondante à une valeur initiale du fonds  $f_0 = 1$  pour deux échéances  $T = 10$  et  $T = 20$ . On peut remarquer tout d'abord que la fonction de valeur est croissante par rapport aux frais appliqués à l'actif risqué et dépend négativement du paramètre d'aversion  $\gamma$ . En effet, contrairement au cas considéré par Bélanger (2021) et qu'on représente dans la figure 3.5 où le détenteur du fonds peut préférer des bas frais pour augmenter son utilité espérée, les stratégies optimales dans notre étude sont contraintes d'être dans  $[0, 1]$  donc l'assuré ne peut pas profiter de l'effet de levier pour des petites valeurs de frais. Cependant, on peut aussi constater que la fonction de valeur est plus sensible aux frais dans le cas des contrôles contraints à l'intervalle  $[0, 1]$  que dans celui de la figure 3.5, ce qui peut être expliquée par le fait que la contrainte limite l'investissement dans l'actif risqué et ne permet pas à un assuré désirant avoir des rendements plus hauts d'investir de façon plus risquée. Ainsi, d'après les deux figures, un détenteur du fonds suivant une politique conservatrice avec un paramètre d'aversion  $\gamma = -5$  et pouvant utiliser un effet de levier a la possibilité de s'approcher de la même utilité espérée qu'un assuré adoptant des stratégies dans  $[0, 1]$  et un profil de risque caractérisé par  $\gamma = -4$ . De plus, on voit aux deux graphiques que l'utilité espérée croît en fonction de l'échéance, ce qui vient confirmer les résultats utilisés dans l'annexe B et la partie 3.1.2 concernant les contrôles constants, puisque même pour les stratégies optimales on trouve que la probabilité d'exercer la garantie diminue pour les échéances éloignées du fonds distinct. Enfin, la plus grande sensibilité de la fonction de valeur par rapport aux frais pour des échéances plus lointaines peut être expliquée par le fait que l'actif risqué admet dans ce cas de plus fortes fluctuations.

---

27. Pour  $\nu_t > 1$  ou lorsqu'on emprunte de l'actif sans risque pour investir une plus grande valeur dans l'actif risqué.

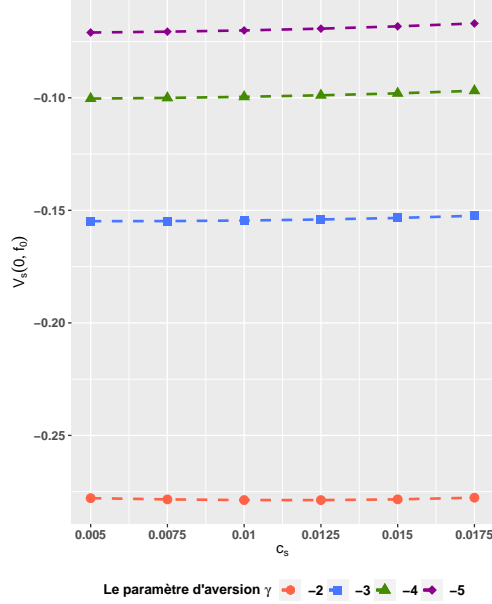


$T = 10$

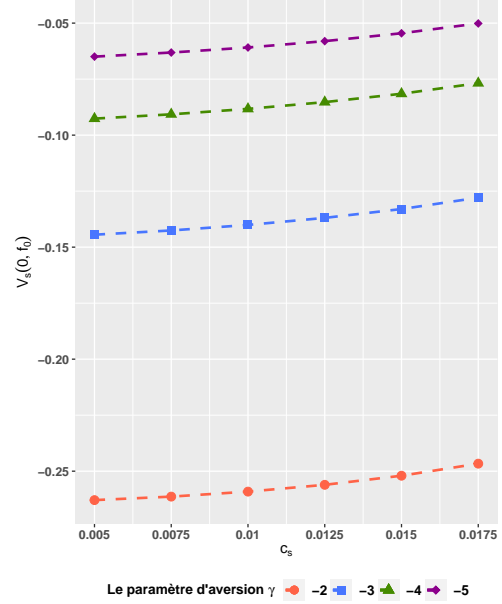


$T = 20$

FIGURE 3.4: Fonction de valeur dans le cas d'une utilité « classique » pour différents niveaux d'aversion  $\gamma$  avec  $c_F = 0.02448 - c_s$  et  $\nu_t \in [0, 1]$



$T = 10$



$T = 20$

FIGURE 3.5: Fonction de valeur dans le cas d'une utilité « classique » pour différents niveaux d'aversion  $\gamma$  avec  $c_F = 0.02448 - c_s$  et  $\nu_t \in [0, 8]$

### 3.2.1.2 Stratégie optimale et fonction de valeur pour une combinaison générale des frais $(c_s, c_F)$

L'analyse menée ci-dessus repose sur la condition  $c_s + c_F = 0.02448$  qui caractérise les paires des frais équitables<sup>28</sup> appliqués au fonds lorsque l'assuré suit la stratégie la plus risquée dans notre cas à savoir  $\nu_t \equiv 1$  pour tout  $t \in [0, T)$ . Cependant, comme mentionné par Bélanger (2021) dans la figure 4.5b, la tarification du contrat n'est plus équitable dans le sens où il est soit<sup>29</sup> sous-évalué ou sur-évalué pour des frais vérifiant la condition citée précédemment et des contrôles dans  $[0, 1]$ . Maintenant, on étudie plus particulièrement la sensibilité des contrôles à une variation de la combinaison des frais  $(c_s, c_F)$  pour deux profils d'aversion au risque  $\gamma = -2$  et  $\gamma = -5$ , et deux temps distincts  $t = 2$  et  $t = 8$ .

On se contente d'analyser les stratégies optimales lorsque le fonds dépasse de peu la garantie et on opte pour  $F_t^\nu = 1.2$  puisque les deux autres cas dépendent soit d'un seul paramètre ou d'aucun des deux. En effet, les résultats obtenus sont similaires à ceux de 3.2- 3.3, à savoir que la politique la plus risquée est toujours optimale pour des valeurs inférieures à  $G$  indépendamment de  $(c_s, c_F)$  alors que le contrôle dépend seulement des frais s'appliquant à l'actif risqué lorsque le fonds atteint des valeurs très élevées relativement à la garantie.

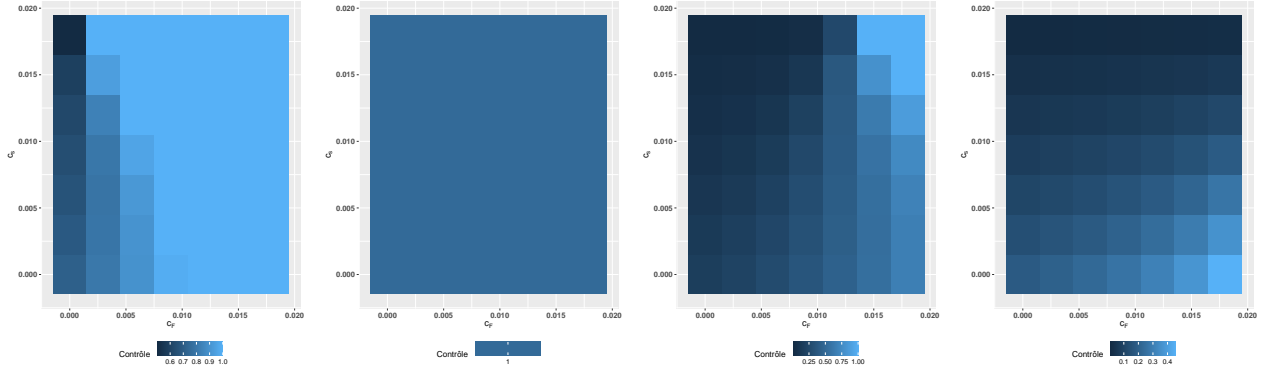
D'après les figures 3.6 (A)-(C), on constate qu'au temps  $t = 2$  (c'est-à-dire huit ans avant l'échéance du contrat) la stratégie optimale adoptée par l'assuré dépend surtout des frais appliqués à la totalité du fonds. En effet, pour des petites valeurs de  $c_F$  et un paramètre d'aversion  $\gamma = -2$ , le contrôle diminue en fonction de  $c_s$  puisque l'individu préfère plus investir dans l'actif risqué alors que pour un assuré plus averse au risque caractérisé par  $\gamma = -5$ , la politique optimale est indépendante de la variation des frais  $c_s$ . Cependant, si les frais appliqués à l'ensemble du fonds sont élevés alors la stratégie suivie est plus risquée et croît en fonction de  $c_s$  puisque dans ce cas l'assuré cherche à augmenter la probabilité de compenser les pertes subies à cause des frais déduits par les gains du fonds.

---

28. Pour lesquelles l'espérance, sous une mesure neutre au risque, de la valeur actualisée du « payoff » de l'assuré est égale au montant initial investi dans le fonds distinct.

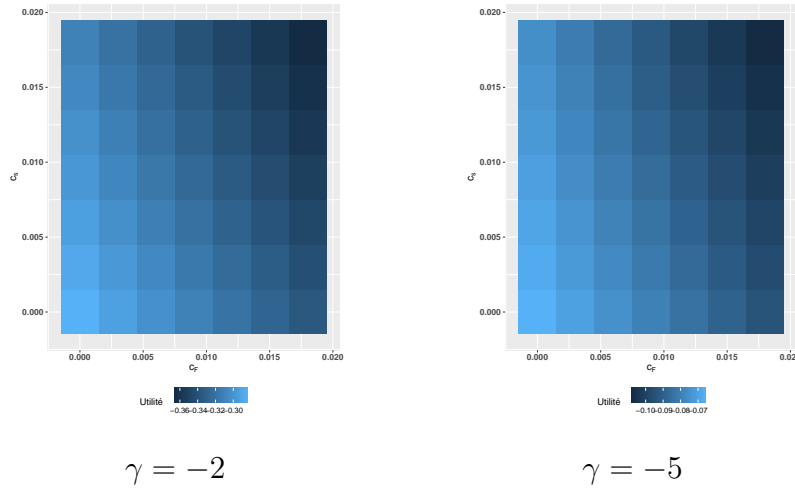
29. On suppose que les stratégies optimales  $[0, 1]$  citées dans Bélanger (2021) sont assez proches des nôtres pour que la remarque concernant les frais équitables soit aussi vérifiée dans notre cas.





(A)  $t = 2, \gamma = -2$     (B)  $t = 8, \gamma = -2$     (C)  $t = 2, \gamma = -5$     (D)  $t = 8, \gamma = -5$

FIGURE 3.6: Sensibilité de la stratégie optimale à une combinaison générale de frais dans le cas d'une utilité « classique » et une valeur du fonds  $F_t^\nu = 1.2$



$\gamma = -2$

$\gamma = -5$

FIGURE 3.7: Sensibilité de la fonction de valeur à une combinaison générale de frais dans le cas d'une utilité « classique »

Par contre, on constate en se basant sur les figures 3.6 (B)-(D) qu'un individu avec des préférences caractérisées par un paramètre  $\gamma = -2$  investit tout dans l'actif risqué lorsque le fonds dépasse de peu la garantie  $G$  et qu'on s'approche de l'échéance  $T$ .

On remarque aussi que les choix d'un assuré plus averse au risque sont plus impactés par les frais  $c_s$  puisqu'il diminue sa proportion investie dans l'actif risqué lorsque ces frais collectés par l'assureur sont élevés.

Cela dit, concernant les utilités espérées représentées dans la figure 3.7, on voit que les plus grandes valeurs sont obtenues pour de bas frais  $c_F$ . En plus, la fonction de valeur est toujours

plus sensibles aux frais appliqués à la totalité du fonds qu'à ceux relatifs à l'actif risqué dans les profils d'aversion au risque considérés soit  $\gamma = -2$  et  $\gamma = -5$ .

### 3.2.2 Le cas d'une utilité « S-shaped »

Dans cette partie, on traite le cas d'un assuré averse à la perte dont les préférences sont modélisées par une fonction d'utilité « S-shaped » définie dans la section 2.3.1. Les paramètres de base sont fixés selon les tableaux 3.1 -3.2 de façon à correspondre avec ceux de MacKay et Ocejo (2022) et on se place dans les conditions de la remarque 2.2.1 afin de négliger l'effet de la mortalité du détenteur du fonds distinct dans cette analyse.

On commence l'étude menée ci-dessous en s'intéressant tout d'abord aux stratégies optimales pour différents seuils d'aversion à la perte et par rapport à des frais  $(c_s, c_F)$  vérifiant

$$c_s + c_F = 0.02448.$$

#### 3.2.2.1 Stratégie optimale et fonction de valeur pour des frais vérifiant $c_s + c_F = 0.02448$

D'après les figures 3.8- 3.9, on peut constater tout d'abord que la stratégie optimale adoptée est plus risquée lorsque  $\theta < G$ . En effet, l'assuré considère plus d'investissement dans l'actif risqué pour maximiser son utilité puisque la garantie  $G > \theta = 0.95G$  signifie qu'il n'est jamais exposé à ce qu'il considère comme une perte.

Cependant, pour un détenteur de fonds distinct avec des préférences caractérisées par un seuil  $\theta = 1.05G$ , la politique optimale consiste à investir le tout dans l'actif risqué jusqu'à ce que le fonds atteigne une valeur  $F_c$  inférieure à la garantie au début du contrat et qui augmente en fonction de  $t$  lorsqu'on s'approche de l'échéance. En fait, l'assuré assume des pertes lorsque la valeur du fonds est inférieure à  $\theta$ , ce qui le pousse à un investissement plus risquée pour de très petites valeurs du fonds et à une diminution de sa proportion  $\nu_t$  lorsqu'on s'approche du seuil  $\theta = 1.05G$  ou qu'on le dépasse de peu afin de chercher des gains positifs sans risquer de grosses pertes. En se basant sur la figure 3 dans MacKay et Ocejo (2022) représentant le cas des contrôles non bornés, on remarque que l'assuré choisit une stratégie utilisant l'effet de levier pour des valeurs du fonds très basses alors qu'il emprunte de l'actif risqué pour investir dans l'actif sans risque lorsque le fonds atteint de très grandes valeurs.

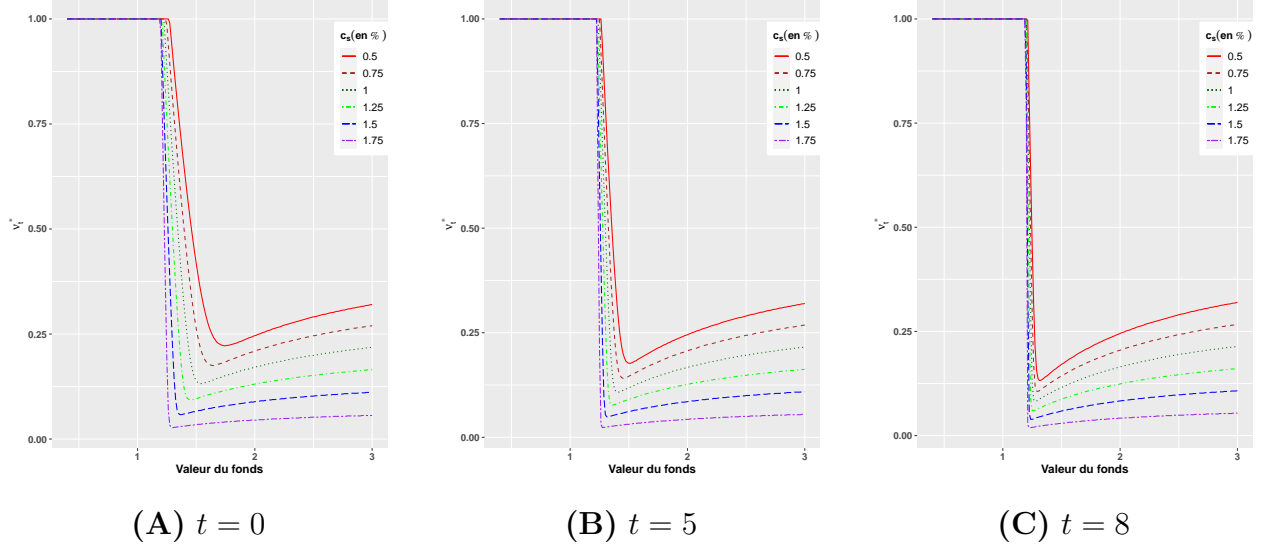


FIGURE 3.8: Stratégie optimale pour  $\theta = 0.95$  avec  $c_F = 0.02448 - c_s$

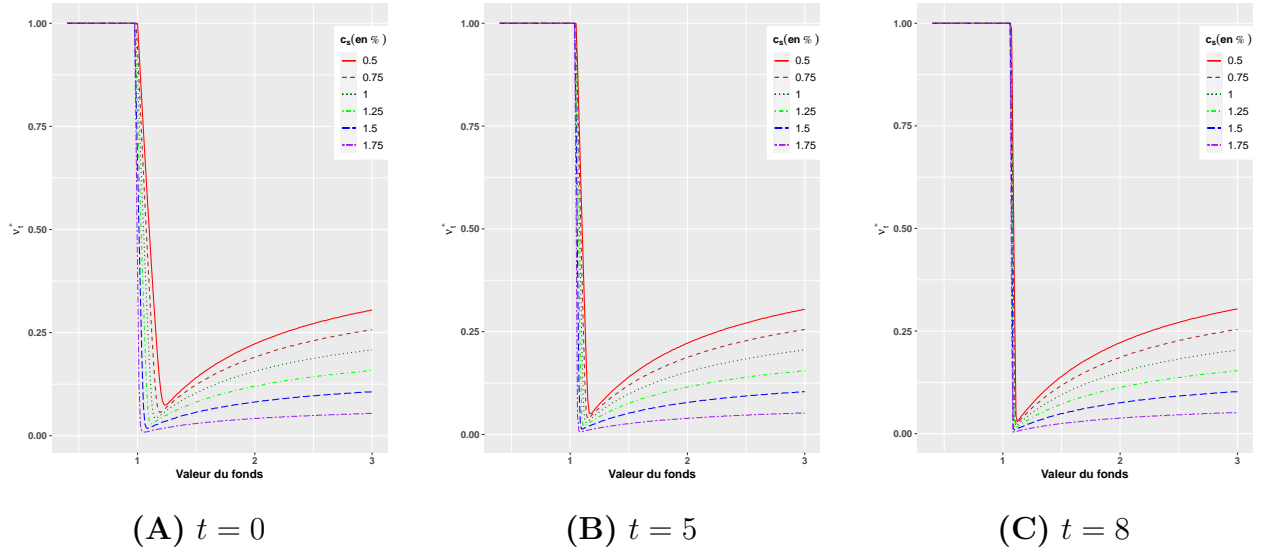


FIGURE 3.9: Stratégie optimale pour  $\theta = 1.05$  avec  $c_F = 0.02448 - c_s$

Cependant, la restriction aux contrôles dans  $[0,1]$  fait en sorte que les politiques d'investissement sont plafonnées par 1 pour de très petites valeurs du fonds distinct et diminue en fonction des frais  $c_s$  lorsque la valeur du fonds augmente.

Concernant l'utilité espérée de l'assuré, on voit dans la figure 3.10 que la fonction de valeur est décroissante par rapport au seuil  $\theta$ . En effet, le détenteur du fonds n'admet plus aucun gain pour des valeurs inférieures à la garantie lorsque  $\theta = G = 1$  et ses bénéfices diminuent si le fonds atteint des valeurs supérieures à  $G$ . Le cas où  $\theta > G$  caractérise un individu qui s'attend à un rendement sur son investissement et considère tout montant inférieur à ce seuil comme perte. Un profil d'assuré similaire va donc opter pour une stratégie optimale plus conservatrice qui diminue son utilité mais lui permet de limiter ses futures pertes attendues. On peut aussi remarquer que l'utilité espérée augmente en fonction de  $c_s$  et qu'elle est plus sensible par rapport aux frais appliqués à l'actif risqué pour un détenteur d'un fonds distinct avec un seuil  $\theta \geq G$ .

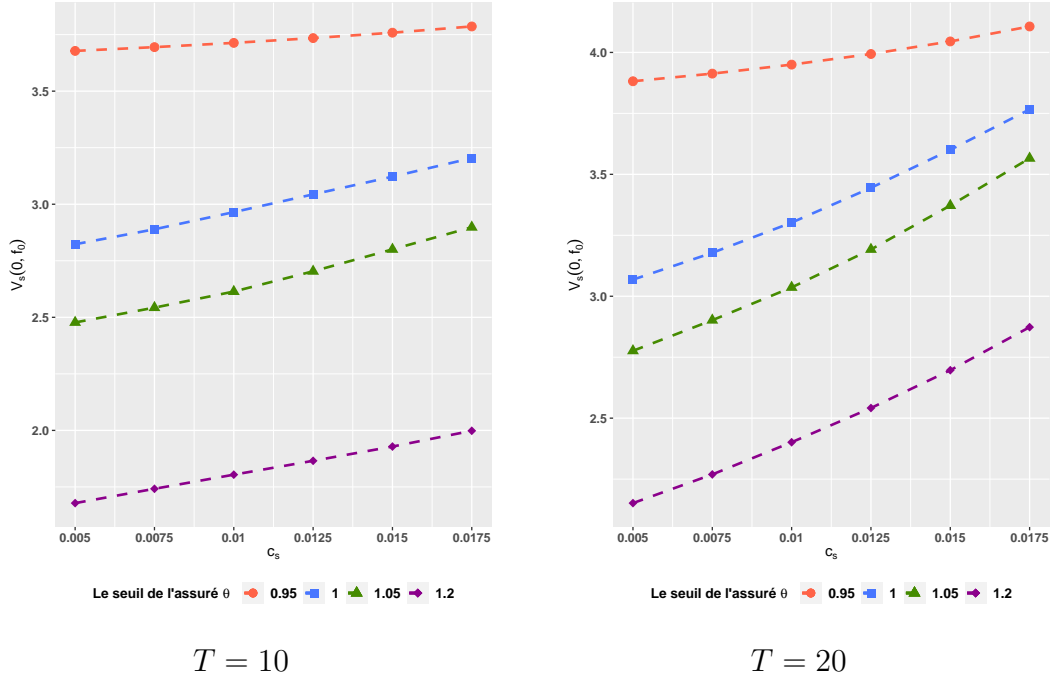


FIGURE 3.10: Fonction de valeur dans le cas d'une utilité « S-shaped » pour différents seuils  $\theta$  avec  $c_F = 0.02448 - c_s$  et  $\nu_t \in [0, 1]$

Pour essayer de comprendre la variation et la sensibilité de l'utilité espérée par rapport aux frais collectés par l'assureur, on étudie dans la section suivante l'impact d'une variation de la combinaison de frais  $c_s$  et  $c_F$ .

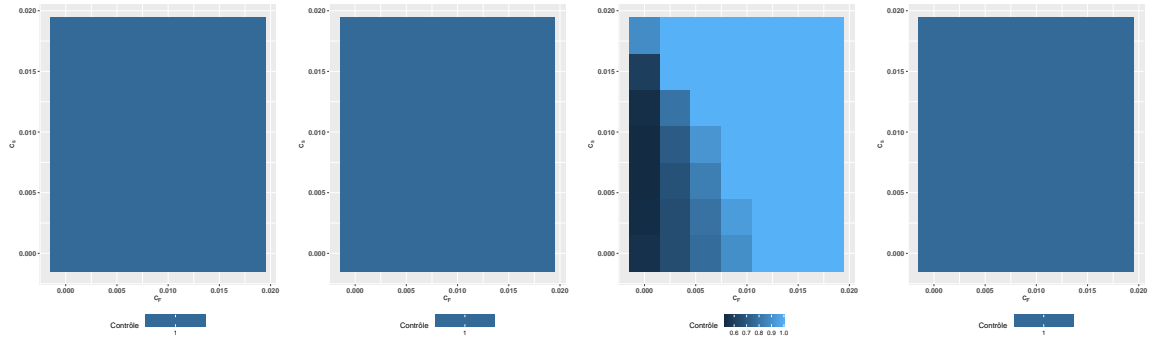
### 3.2.2.2 Stratégie optimale et fonction de valeur pour une combinaison générale des frais $(c_s, c_F)$

On commence cette partie par une analyse de la sensibilité de l'utilité espérée par rapport à une variation de la combinaison des frais appliqués à l'actif risqué et la totalité du fonds pour deux profils d'aversion à la perte  $\theta = 0.95$  ( $\theta = 1.05$ ). On observe que les utilités représentées dans la figure 3.13 diminuent en fonction du seuil  $\theta$  pour toutes les combinaisons des taux  $(c_s, c_F)$ , chose qui confirme les résultats résumés dans le graphique 3.10.

Néanmoins, on s'aperçoit que ce sont les frais appliqués à la totalité du fonds qui affectent le plus les niveaux d'utilité de l'assuré. Autrement dit, la baisse de l'utilité générée par une augmentation des frais  $c_s$  pour une valeur fixe de  $c_F$  est moindre relativement à celle caractérisée par une augmentation de  $c_F$  en fixant les frais appliqués à l'actif risqué. Ainsi, on constate que l'allure croissante de la fonction de valeur dans la figure 3.10 est dû principalement à la diminution des taux  $c_F$  qui sont décroissants en fonction de  $c_s$  dans l'équation  $c_s + c_F = 0.02448$  tandis que l'augmentation de la sensibilité du gain optimal à  $c_F$  en fonction du seuil  $\theta$  peut être expliquée par le fait que le détenteur du fonds prends moins de risque pour des valeurs élevées de  $\theta$ . En effet, les figures 3.11(A)-(B) et 3.12(A)-(B) explicitent des stratégies optimales semblables à celles d'un assuré averse au risque avec une fonction d'utilité concave ( $0 \leq \theta \leq G$ ) adoptant une politique d'investissement moins risquée que celle d'un détenteur du fonds avec un paramètre d'aversion  $\gamma = -2$  et plus risquée que les stratégies présentées dans 3.6(C)-(D) pour  $\gamma = -5$ .

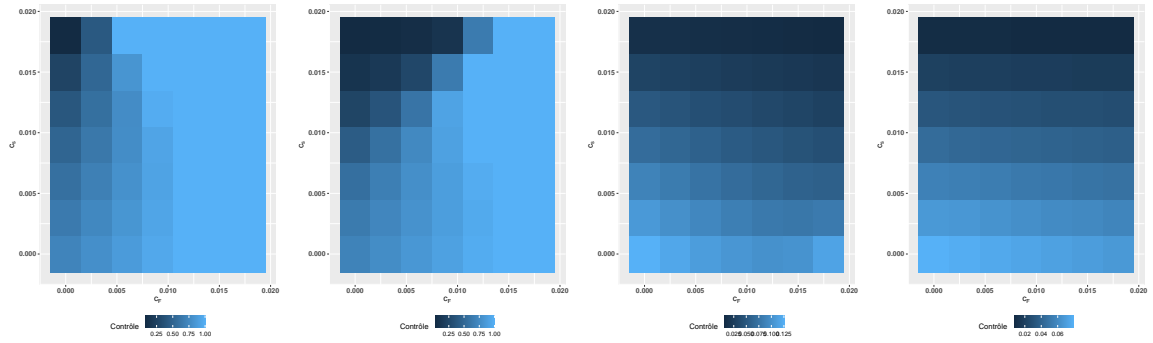
Cependant, on remarque à partir de 3.11(C)-(D) et 3.12(C)-(D) que si l'individu s'attend à un rendement sur son investissement initial ( $\theta > G$ ) alors il adopte des stratégies très conservatrices lorsque le fonds atteint des valeurs assez élevées.

De surcroît, un assuré caractérisé par un seuil  $\theta = 0.95$  investit le tout dans l'actif risqué pour des frais  $c_f$  élevées et suit des stratégies qui dépendent des frais  $c_s$  pour des petites valeurs de  $c_F$  tandis que les contrôles relatifs à un détenteur de fonds distinct avec  $\theta = 1.05$  sont toujours très sensibles aux frais  $c_s$  lorsque le fonds est supérieur à la garantie  $G$ .



(A)  $t = 2, \theta = 0.95$  (B)  $t = 8, \theta = 0.95$  (C)  $t = 2, \theta = 1.05$  (D)  $t = 8, \theta = 1.05$

FIGURE 3.11: Sensibilité de la stratégie optimale à une combinaison générale de frais dans le cas d'une utilité « S-shaped » et une valeur du fonds  $F_t^\nu = 0.9$



(A)  $t = 2, \theta = 0.95$  (B)  $t = 8, \theta = 0.95$  (C)  $t = 2, \theta = 1.05$  (D)  $t = 8, \theta = 1.05$

FIGURE 3.12: Sensibilité de la stratégie optimale à une combinaison générale de frais dans le cas d'une utilité « S-shaped » et une valeur du fonds  $F_t^\nu = 1.2$

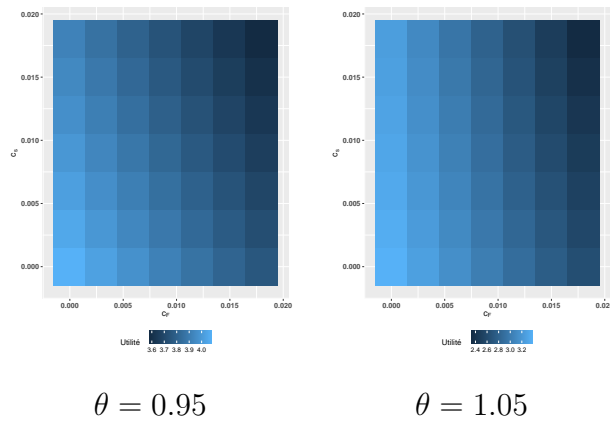


FIGURE 3.13: Sensibilité de la fonction de valeur à une combinaison générale de frais dans le cas d'une utilité « S-shaped »

### 3.3 Étude numérique de la fonction de valeur et des stratégies optimales avec effet de la mortalité

En pratique, les garanties en cas de survie (GMMB) et en cas de décès (GMDB) sont souvent proposées ensemble aux assurés. Ainsi, on présente dans cette partie l'étude d'un fonds distinct hybride combinant les deux garanties en analysant la sensibilité des contrôles et de la fonction de valeur par rapport aux paramètres caractérisant la mortalité et les frais  $(c_s, c_F)$ . On se base sur les valeurs considérées par Gao et Ulm (2015) afin de modéliser le legs de l'assuré  $b \in (0, 1]$ <sup>30</sup> et on suppose similairement au travail de Huang et Milevsky (2008) que l'assuré actualise ses flux avec le taux de l'actif sans risque  $\rho = r$ .

On représente ci-dessous la force de mortalité du détenteur du fonds distinct et sa probabilité de survie jusqu'à l'échéance  $T = 10$  en se basant sur les paramètres utilisés dans MacKay *et al.* (2017).

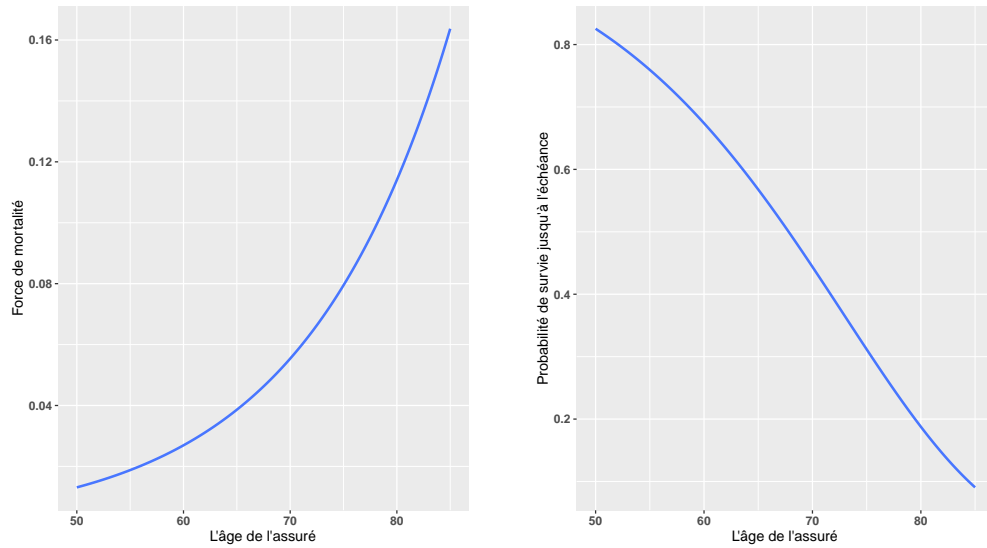


FIGURE 3.14: Variation de la force de mortalité de l'assuré et sa probabilité de survie jusqu'à l'échéance  $T$  par âge

---

30. Le cas  $b = 0$  est celui traité dans la section 3.2.

### 3.3.1 Le cas d'une utilité « classique »

L'étude menée dans cette partie concerne le cas d'un assuré avec une utilité « classique » caractérisée par un paramètre d'aversion au risque  $\gamma = -2$  et on traite la sensibilité du gain optimal et des contrôles en fonction des paramètres du modèle.

On commence notre analyse en s'intéressant aux variations de la fonction de valeur définie dans (II.9) par rapport à l'âge de l'assuré et son legs pour différentes combinaisons des frais  $(c_s, c_F)$ .

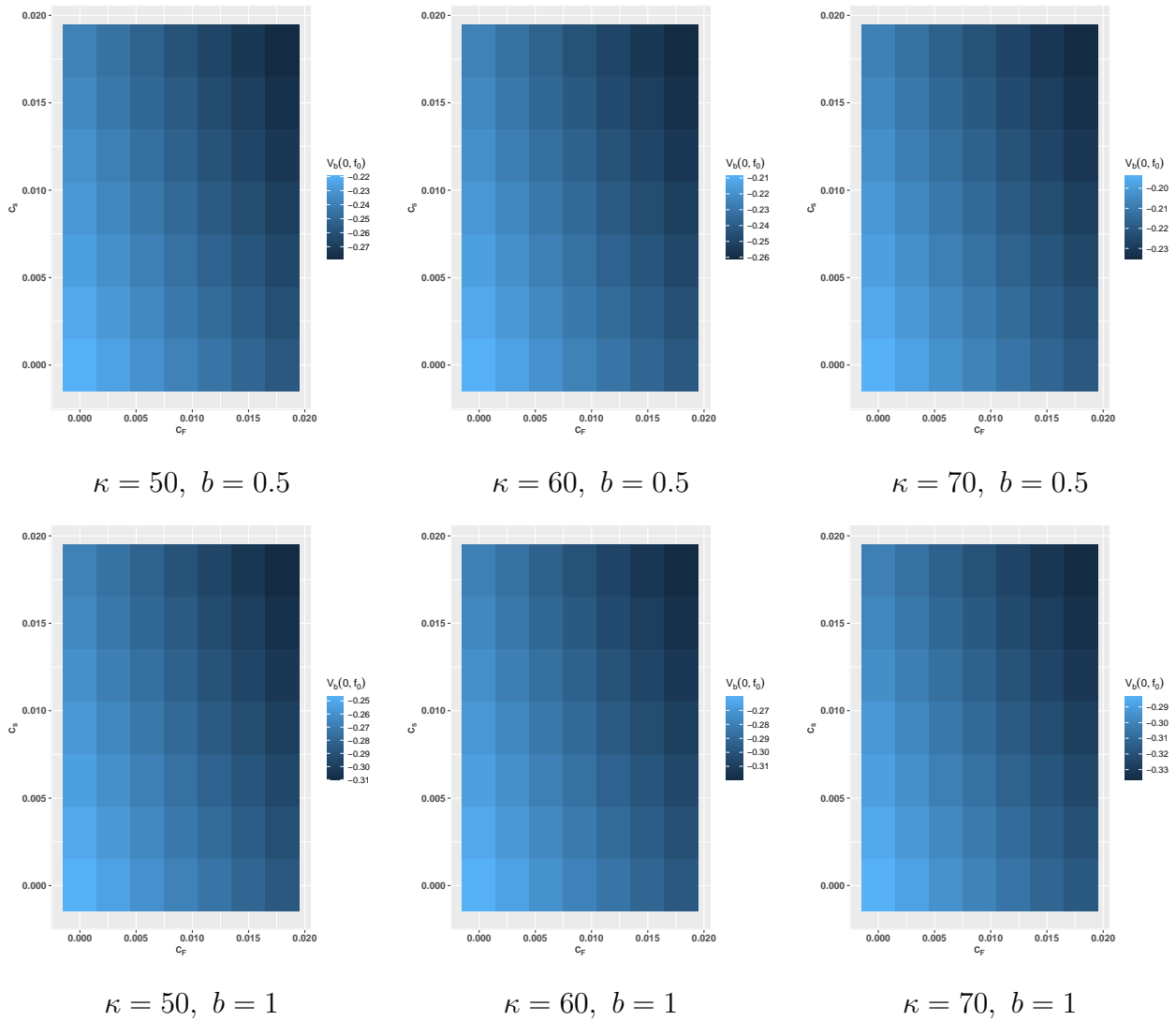


FIGURE 3.15: Fonction de valeur dans le cas d'une utilité « classique » avec effet de la mortalité et  $\gamma = -2$



D'après la figure 3.15, on remarque tout d'abord que l'ajout de la mortalité n'a pas d'effet sur la sensibilité de la fonction de valeur aux frais  $(c_s, c_F)$ . En effet, de manière similaire au cas sans mortalité présenté à la figure 3.7, on trouve que la fonction de valeur est plus sensible par rapport aux variations dans le taux appliqué à la totalité du fonds  $c_F$ . On peut aussi s'apercevoir que le gain optimal est croissant en fonction de l'âge de l'assuré si ce dernier n'accorde pas assez d'importance<sup>31</sup> à l'utilité perçue par ses bénéficiaires lorsqu'ils reçoivent le montant maximum entre la valeur du fonds et la garantie  $G$  au moment de son décès et que la fonction de valeur est décroissante par rapport à  $\kappa$  pour  $b = 1$ .

En fait, le poids du legs dans le gain optimal augmente en fonction de l'âge de l'assuré puisque sa probabilité d'atteindre le paiement à l'échéance diminue (Voir la figure 3.14). Ainsi, étant donné un paramètre d'aversion  $\gamma = -2$  ou des valeurs d'utilité négatives, une augmentation de  $b$  signifie que le détenteur du fonds donne plus d'importance à l'utilité en cas de décès et donc les variations de la fonction de valeur sont moins affectées par l'utilité à l'échéance en cas de survie qui est croissante en fonction de l'âge.

Concernant les stratégies optimales au temps  $t = 2$  pour une valeur du fonds  $F_t^\nu = 1.2$ , on remarque tout d'abord en se basant sur la figure 3.16 que l'assuré suit des politiques d'investissement plus risquées que celles caractérisant le cas sans effet de la mortalité et représentées dans la figure 3.6-(A) pour toutes combinaisons de frais  $(c_s, c_F)$ .

Aussi, on constate que la prise de risque du détenteur du fonds distinct augmente avec son âge ainsi que son legs  $b$ . Cette caractérisation relativement à l'âge  $\kappa$  est due à l'augmentation de la probabilité du décès de l'assuré qui préfère ainsi les rendements immédiats plus élevés de l'actif risqué plutôt qu'un actif générant des flux moins risqués et plus stables jusqu'à l'échéance  $T$ . En outre, une augmentation du legs affecte à la hausse la valorisation que l'assuré fait par rapport au « payoff » que ses bénéficiaires vont recevoir, c'est comme s'il évalue son utilité en se basant sur une échéance plus proche de sa date de décès probable que de l'échéance réelle du contrat.

---

31. Dans ce travail, on suppose que le paramètre  $b$  décrit parfaitement le niveau du legs de l'assuré pour simplifier les calculs. L'auteur peut consulter une paramétrisation plus précise dans Kraft *et al.* (2022) où les auteurs argumentent qu'une telle modélisation peut parfois conduire à de fausses conclusions.

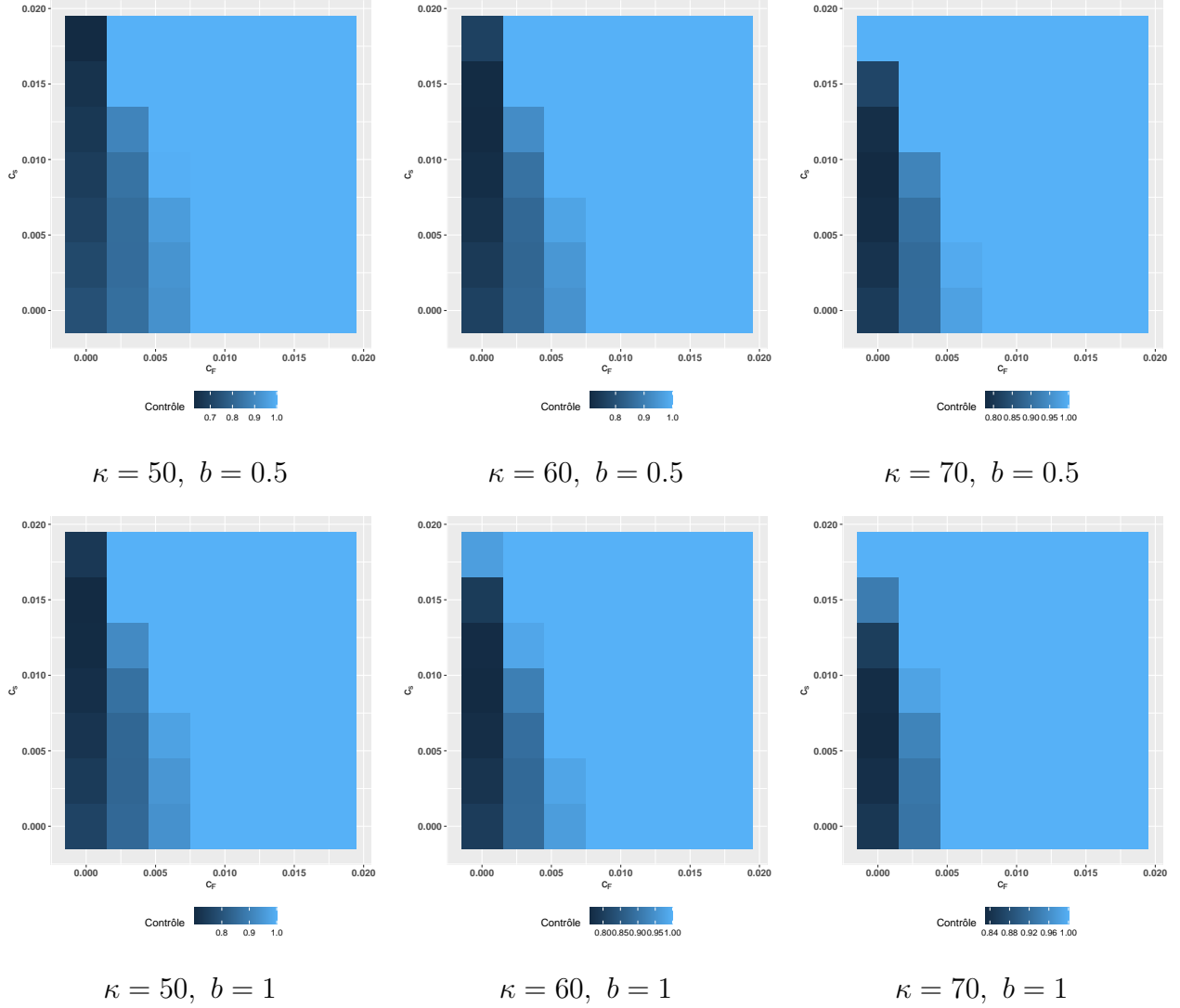


FIGURE 3.16: Stratégies optimales dans le cas d'une utilité « classique » avec effet de la mortalité pour  $\gamma = -2$ ,  $t = 2$  et  $F_t^\nu = 1.2$

Autrement dit, comme mentionné ci-dessus, le poids de l'utilité du legs dans la composition du gain optimal augmente en fonction de l'âge et de  $b$ , ce qui fait en sorte que l'assuré est de moins en moins averse au risque et favorise ainsi les rendement plus élevés de l'actif risqué.

### 3.3.2 Le cas d'une utilité « S-shaped »

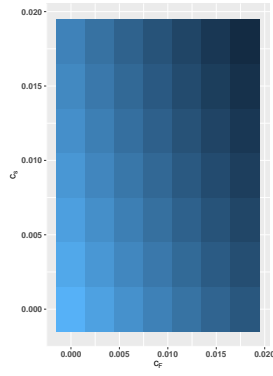
Dans cette section, on considère un détenteur de fonds distinct averse à la perte dont la fonction d'utilité est sous la forme définie dans 2.3.1 et avec une mortalité selon le modèle de Gompertz-Makeham comme cité dans 1.4.2.2. Les paramètres de base s'appuient sur les valeurs choisies dans les tableaux 3.1 -3.2 sauf dans les cas où c'est spécifié autrement. La figure 3.17 représente les variations de la fonction de valeur pour différentes combinaisons des frais  $(c_s, c_F)$  en fonction de l'âge de l'assuré  $\kappa \in \{50, 60, 70\}$  et son legs  $b \in \{0.5, 1\}$  pour deux seuils d'aversion à la perte  $\theta = 0.95$  et  $\theta = 1.05$ .

On peut tout d'abord constater que le gain optimal est toujours décroissant en fonction de l'âge lorsque le legs a une valeur  $b = 0.5$ . En fait, dans ce cas-ci où l'utilité de l'assuré est positive alors une valeur du legs assez basse signifie que le détenteur du fonds accorde plus d'importance au gain à l'échéance en cas de survie qui est décroissant en fonction de  $\kappa$ . Cependant, on remarque que la variation du gain optimal dépend du niveau d'aversion à la perte ( $\theta \leq G$  ou  $\theta > G$ ) et des combinaisons des frais  $(c_s, c_F)$  lorsque l'assuré accorde autant d'importance au montant reçu par ses bénéficiaires au moment de son décès. En effet, on s'aperçoit que lorsque  $\theta = 0.95$  alors un assuré d'âge 60 ans voit son utilité augmenter tandis qu'un détenteur du fonds distinct s'attendant à un retour sur son investissement initiale ( $\theta = 1.05$ ) obtient une utilité plus élevée pour  $\kappa = 60$  et un gain optimal moins élevé s'il est âgé de 50 ans.<sup>32</sup>

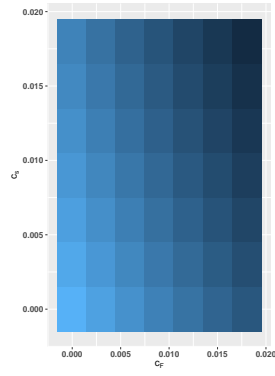
Concernant les stratégies optimales suivies par l'assuré et contrairement au cas représenté dans le graphique 3.16 où les préférences sont caractérisées par une fonction d'utilité « classique », on observe sur la figure 3.18 que la proportion investie dans l'actif risqué diminue en fonction de l'âge de l'assuré pour  $\theta = 0.95$  si le fonds dépasse de peu la garantie  $G$  à l'instant  $t = 2$ . Cependant, la variation des contrôles en fonction de l'âge pour des seuils  $\theta > G$  dépend surtout des frais  $c_s$  puisque dans ce cas l'assuré est davantage averse à la perte ce qui augmente l'influence des frais appliqués à l'actif risqué sur la composition de son portefeuille.

---

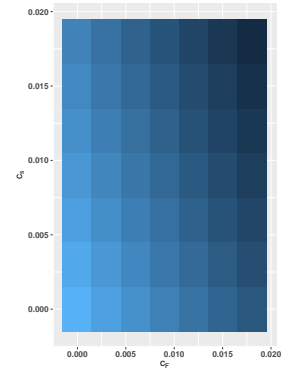
32. Une caractérisation de la relation entre  $\kappa$  et le niveau d'aversion à la perte est requise pour une explication plus approfondie. L'auteur peut consulter Blake *et al.* (2021) pour une quantification de  $\theta$  à partir de différents caractéristiques d'individus.



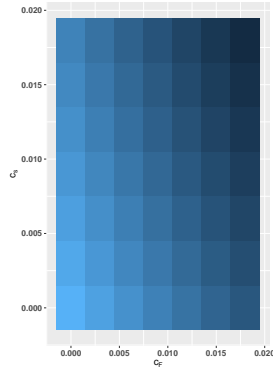
$$(\theta, \kappa, b) = (0.95, 50, 0.5)$$



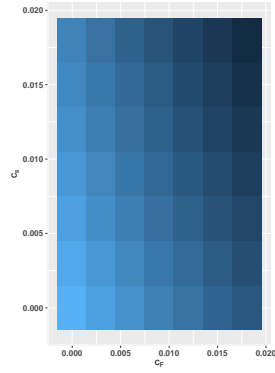
$$(\theta, \kappa, b) = (0.95, 60, 0.5)$$



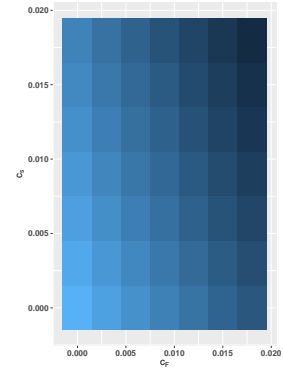
$$(\theta, \kappa, b) = (0.95, 70, 0.5)$$



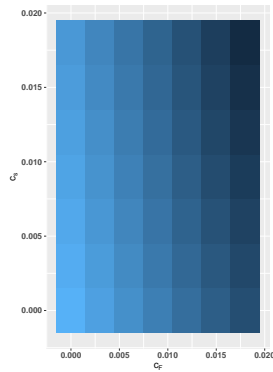
$$(\theta, \kappa, b) = (0.95, 50, 1)$$



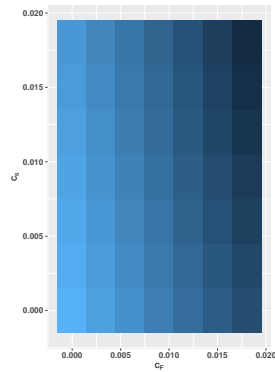
$$(\theta, \kappa, b) = (0.95, 60, 1)$$



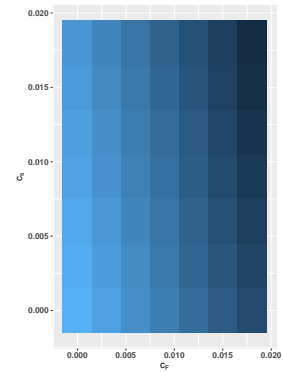
$$(\theta, \kappa, b) = (0.95, 70, 1)$$



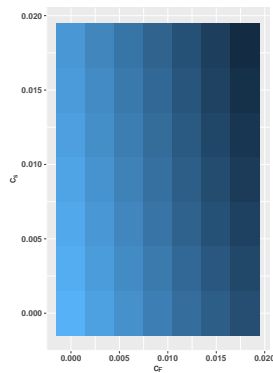
$$(\theta, \kappa, b) = (1.05, 50, 0.5)$$



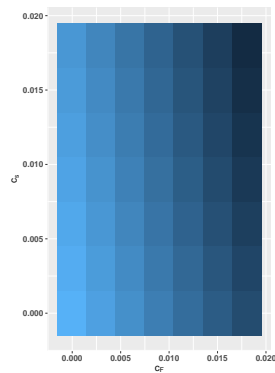
$$(\theta, \kappa, b) = (1.05, 60, 0.5)$$



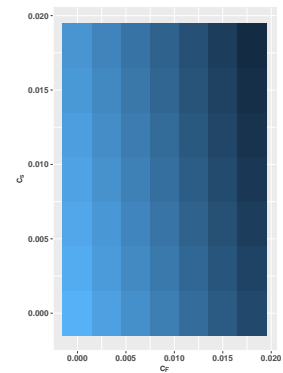
$$(\theta, \kappa, b) = (1.05, 70, 0.5)$$



$$(\theta, \kappa, b) = (1.05, 50, 1)$$

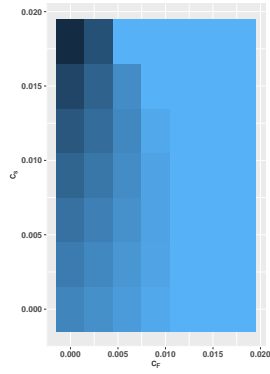


$$(\theta, \kappa, b) = (1.05, 60, 1)$$

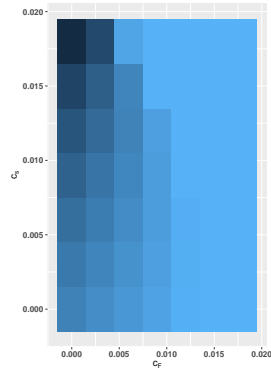


$$(\theta, \kappa, b) = (1.05, 70, 1)$$

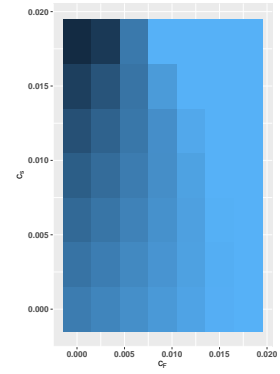
FIGURE 3.17: Gain optimal dans le cas d'une utilité « S-shaped » avec effet de la mortalité



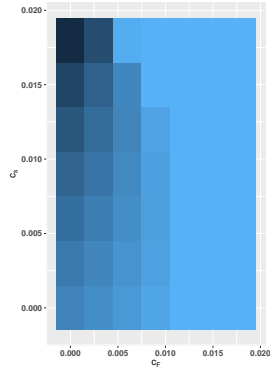
$$(\theta, \kappa, b) = (0.95, 50, 0.5)$$



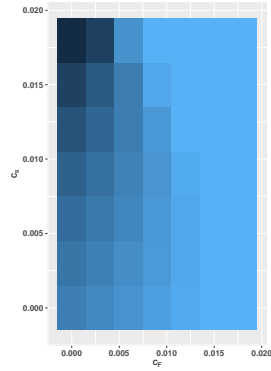
$$(\theta, \kappa, b) = (0.95, 60, 0.5)$$



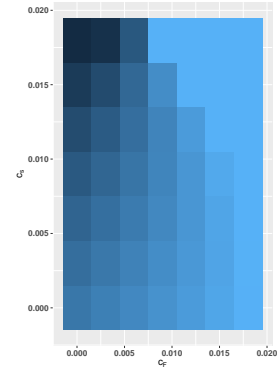
$$(\theta, \kappa, b) = (0.95, 70, 0.5)$$



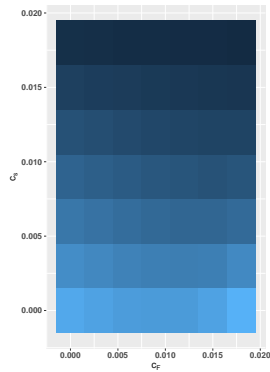
$$(\theta, \kappa, b) = (0.95, 50, 1)$$



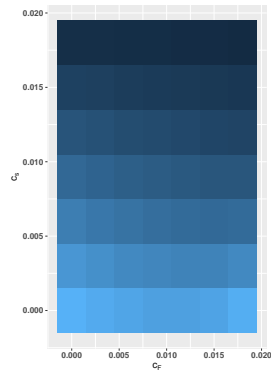
$$(\theta, \kappa, b) = (0.95, 60, 1)$$



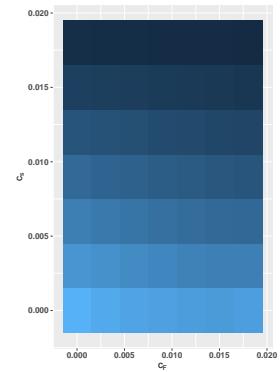
$$(\theta, \kappa, b) = (0.95, 70, 1)$$



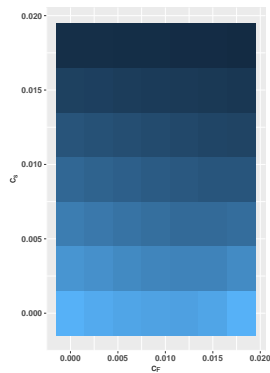
$$(\theta, \kappa, b) = (1.05, 50, 0.5)$$



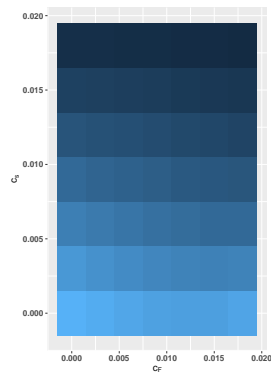
$$(\theta, \kappa, b) = (1.05, 60, 0.5)$$



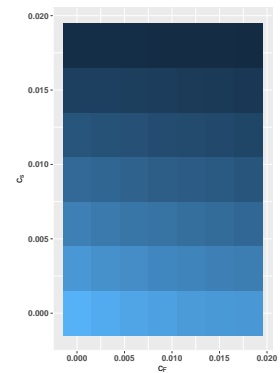
$$(\theta, \kappa, b) = (1.05, 70, 0.5)$$



$$(\theta, \kappa, b) = (1.05, 50, 1)$$



$$(\theta, \kappa, b) = (1.05, 60, 1)$$



$$(\theta, \kappa, b) = (1.05, 70, 1)$$

FIGURE 3.18: Stratégie optimale dans le cas d'une utilité « S-shaped » avec effet de la mortalité pour  $t = 2$  et  $F_t^\nu = 1.2$

## CONCLUSION

Dans ce mémoire, on s'intéresse à un problème de contrôle stochastique axé sur la maximisation de l'utilité espérée d'un assuré, détenant un fond distinct avec une garantie  $G$  exercée au moment du décès ou à l'échéance en cas de survie, par rapport à la proportion investie dans l'actif risqué et qui est contrainte d'être dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

L'étude théorique menée dans ce travail se focalise sur deux types d'assurés avec des préférences distinctes. En fait, la section 2.2 traite le cas d'un détenteur du fonds avec une fonction d'utilité « classique » et un paramètre d'aversion au risque  $\gamma$  tandis que l'étude suivie dans la partie 2.3 concerne un individu averse à la perte avec un seuil  $\theta$ . L'analyse de l'existence et l'unicité des solutions aux deux problèmes considérés s'appuie principalement sur des outils de la théorie des solutions de viscosité introduite dans 1.3.2.3. Au chapitre III, on présente tout d'abord une version discrétisée qui nous permet de résoudre numériquement les problèmes présentés dans les parties précédentes. Ensuite, pour motiver l'analyse numérique, on se penche premièrement sur le cas d'un assuré détenant seulement une garantie à l'échéance en négligeant l'effet de la mortalité. Dans ce cas, on trouve tout d'abord que le gain optimal d'un assuré avec une utilité « classique » augmente en fonction de son niveau d'aversion au risque alors que son utilité espérée est décroissante par rapport au seuil  $\theta$  caractérisant les préférences de cet individu s'il est averse à la perte. Ainsi, il s'avère qu'il est préférable pour l'assuré que l'assureur considère une valeur d'aversion supérieure à son niveau d'aversion au risque réelle et un seuil  $\theta$  inférieur à la valeur caractérisant effectivement l'aversion à la perte de l'assuré lorsque les frais collectés  $(c_s, c_F)$  ne dépendent pas des préférences du détenteur du fonds distinct. De plus, on constate que la fonction de valeur est plus sensible aux variations des frais  $(c_s, c_F)$  ayant pour somme 2.448% lorsqu'on interdit l'utilisation de l'effet de levier en se limitant à des contrôles dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Par contre, la sensibilité des stratégies optimales augmente par rapport aux frais  $c_s$  pour des valeurs assez élevées du fonds lorsque

l'assuré est plus averse au risque ou qu'il admet un seuil  $\theta$  plus grand, tandis que les contrôles sont plus dépendants des frais  $c_F$  pour des petites valeurs du fonds si l'assuré est moins averse au risque ou à la perte.

Concernant le cas d'un assuré détenant en plus une garantie en cas de décès avec un legs  $b$ , on s'aperçoit que pour un assuré averse au risque avec un paramètre  $\gamma = -2$ , le gain optimal est croissant en fonction de l'âge  $\kappa$  de l'assuré lorsque ce dernier ne donne pas assez d'importance à son legs alors qu'il devient décroissant si le détenteur du fonds donne autant d'importance au legs reçu par ses bénéficiaires relativement au montant qu'il reçoit à l'échéance en cas de survie. En outre, la prise de risque du détenteur du fonds distinct dans ce cas augmente en fonction de l'âge  $\kappa$  et du legs  $b$ . Cependant, pour un détenteur de fonds distinct averse à la perte, on remarque que la fonction de valeur est toujours décroissante par rapport à l'âge de l'assuré pour  $b = 0.5$  tandis que sa variation dépend du seuil  $\theta$  et de la combinaison des frais  $(c_s, c_F)$  lorsque  $b = 1$ . Enfin, on trouve dans ce cas que la proportion investie dans l'actif risqué diminue en fonction de l'âge de l'assuré lorsqu'il est prêt à perdre une partie de son investissement initial alors que la variation du contrôle par rapport aux différents paramètres dépend surtout des frais  $c_s$  lorsque  $\theta > G$ .

L'analyse menée dans ce mémoire suppose que toutes les paires de frais  $(c_s, c_F)$  sont admises du point de vue de l'assureur et de l'assuré alors que ce dernier ne peut pas acheter un contrat sur-évalué et la compagnie d'assurance ne peut pas se permettre de subir des pertes en commercialisant un fonds distinct sous-évalué. Ainsi, une première généralisation du problème étudié peut consister à ajouter une contrainte de tarification équitable du contrat tout en incluant une possibilité de rachat par l'assuré avant l'échéance.

Bien qu'il existe plusieurs directions potentielles permettant d'étendre le travail mené dans ce mémoire, on présente ci-dessous quelques axes de recherches pertinentes :

- On peut considérer des paramètres d'aversion au risque ou à la perte variables dans le temps et qui dépendent de la valeur du fonds à tout instant  $t \in [0, T]$ .
- Le facteur d'actualisation déterministe  $\rho$  utilisé dans ce travail représente le cas d'un assuré évaluant de la même manière la valeur temporelle de sa richesse. On propose donc de suivre l'analyse menée dans Weitzman (2001) en utilisant un facteur d'actualisation

de forme général  $\hat{\rho} \sim \Gamma(k, \beta)$  qui<sup>33</sup> caractérise la fonction d' « actualisation-gamma »  $h$  définie comme

$$h(t) = \mathbb{E} \left[ e^{-\hat{\rho}t} \right] = \int_0^\infty e^{-xt} f(x, k, \beta) dx = (1 + \beta t)^{-k}$$

pour  $t \in [0, T]$  et

$$f(x, k, \beta) = \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)\beta^k} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad \text{avec} \quad \Gamma(k) = \int_0^\infty z^{k-1} e^{-z} dz$$

- Il est aussi intéressant de considérer une autre dynamique des frais permettant de réduire ces taux tout en respectant la tarification équitable. En effet, selon Bernard et Moenig (2019), la structure des frais collectés est l'une des principales causes derrière la baisse de ventes des fonds distincts ces dernières années. Ainsi, on propose la dynamique des frais suivante

$$dC_t = c_s \mathbb{1}_{\{F_t \geq \alpha_1\}} \nu_t F_t dt + c_F \mathbb{1}_{\{F_t \leq \alpha_2\}} F_t dt$$

où les seuils  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  dépendent de  $t$  et des préférences d'aversion temporelle de l'assuré.

Il faut noter que l'approche utilisée dans ce travail à savoir le principe d'optimalité de Bellman (Voir chapitre 3 de Bellman (1957)) n'est plus valide dans ces cas<sup>34</sup>. Une solution envisageable pour y remédier consiste à adopter l'approche de la théorie des jeux développée dans Bjork et Murgoci (2010).

---

33.  $\Gamma(k, \beta)$  est la distribution gamma avec des paramètre  $k, \beta$  représentant la forme et l'échelle respectivement.

34. En effet, une stratégie optimale à partir d'un point de départ spécifique dans le temps et l'espace peut s'avérer non optimale lorsqu'elle est envisagée à une date ultérieure et dans un état différent.



## ANNEXE A

### DÉMONSTRATION DU THÉORÈME (1.3.1)

Pour le cas  $p = 2$ , il faut démontrer que

$$\mathbb{E}[\sup_{l \in [t, T]} |X_{t,x}^u(l)|^2] \leq C|1 + |x|^2|$$

On rappelle ci-dessous deux résultats intermédiaires qui vont nous permettre d'analyser cette inégalité.

#### **Lemme 1** (*Lemme de Gronwall*)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue satisfaisant

$$f(s) \leq \alpha + \beta \int_a^s f(r) dr, \quad \forall s \in [a, b]$$

pour des constantes positives  $\alpha$  et  $\beta$ . Alors

$$f(s) \leq \alpha e^{\beta(s-a)}$$

On présente ci-dessous l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy décrite dans le théorème 5.4 de Yong et Zhou (1999).

**Lemme 2 (*L'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy*)**

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré et  $W := \{W_t, 0 \leq t \leq T\}$  un mouvement brownien standard. Si  $\sigma(\cdot) \in \mathcal{L}_{loc}^2[0, T]$  alors  $\forall r > 0, \exists K_r > 0$ , pour tout temps d'arrêt  $\tau$

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_r} \mathbb{E} \left\{ \int_0^\tau |\sigma(s)|^2 ds \right\}^r &\leq \mathbb{E} \left\{ \sup_{t \in [0, \tau]} \left| \int_0^t \sigma(s) dW_s \right|^{2r} \right\} \\ &\leq K_r \mathbb{E} \left\{ \int_0^\tau |\sigma(s)|^2 ds \right\}^r \end{aligned}$$

Dans la suite de cette partie, on dénote ce lemme par l'inégalité « BDG ».

**Remarque 1**

$\mathcal{L}_{loc}^2[0, T]$  est l'ensemble des processus adaptés  $X := \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$  tels que

$$\mathbb{P} \left( \int_0^T X_s^2 ds < \infty \right) = 1$$

Fixons  $l \in [t, T]$  alors on a

$$|X_{t,x}^u(l)| = \left| x + \int_t^l \mu(X_{t,x}^u(s), u(s)) ds + \int_t^l \sigma(X_{t,x}^u(s), u(s)) dW(s) \right|$$

Ainsi par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|X_{t,x}^u(l)|^2 \leq 3 \left( |x|^2 + \left| \int_t^l \mu(X_{t,x}^u(s), u(s)) ds \right|^2 + \left| \int_t^l \sigma(X_{t,x}^u(s), u(s)) dW(s) \right|^2 \right)$$

Comme

$$\begin{aligned} \left| \int_t^l \mu(X_{t,x}^u(s), u(s)) ds \right|^2 &\leq (l-t) \int_t^l |\mu(X_{t,x}^u(s), u(s))|^2 ds \\ &\leq (T-t) \int_t^T |\mu(X_{t,x}^u(s), u(s))|^2 ds \end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{E}[\sup_{l \in [t, T]} |X_{t,x}^u(l)|^2] \leq 3 \left\{ |x|^2 + (T-t) \mathbb{E}[\int_t^T |\mu(X_{t,x}^u(s), u(s))|^2 ds] + \mathbb{E}[\sup_{l \in [t, T]} |\int_t^l \sigma(X_{t,x}^u(s), u(s)) dW(s)|^2] \right\}$$

Par l'inégalité « BDG », on a

$$\mathbb{E}[\sup_{l \in [t, T]} |\int_t^l \sigma(X_{t,x}^u(s), u(s)) dW(s)|^2] \leq K_1 \mathbb{E}[\int_t^T |\sigma(X_{t,x}^u(s), u(s))|^2 ds]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\sup_{l \in [t, T]} |X_{t,x}^u(l)|^2] \leq 3 \left\{ |x|^2 + (T-t) \mathbb{E}[\int_t^T |\mu(X_{t,x}^u(s), u(s))|^2 ds] + K_1 \mathbb{E}[\int_t^T |\sigma(X_{t,x}^u(s), u(s))|^2 ds] \right\}$$

Notons  $C_\mu = (1 + L_\mu^2)$  et  $C_\sigma = (1 + L_\sigma^2)$  donc en utilisant la propriété lipschitzienne de  $\mu(\cdot, u)$  (resp  $\sigma(\cdot, u)$ ) dans  $H_\mu$  (resp  $H_\sigma$ ), on remarque que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_t^T |\mu(X_{t,x}^u(s), u(s))|^2 ds \right] &\leq C_\mu \mathbb{E} \left[ \int_t^T (|\mu(0, u(s))|^2 + |X_{t,x}^u(s)|^2) ds \right] \\ \mathbb{E} \left[ \int_t^T |\sigma(X_{t,x}^u(s), u(s))|^2 ds \right] &\leq C_\sigma \mathbb{E} \left[ \int_t^T (|\sigma(0, u(s))|^2 + |X_{t,x}^u(s)|^2) ds \right] \end{aligned}$$

Ainsi en posant

$$\begin{aligned} \alpha(t, T, L_\mu, L_\sigma) &= 1 + (T-t)C_\mu \mathbb{E}[\int_t^T |\mu(0, u(s))|^2 ds] + K_1 C_\sigma \mathbb{E}[\int_t^T |\sigma(0, u(s))|^2 ds] \\ \beta(t, T, L_\mu, L_\sigma) &= \frac{(T-t)C_\mu + K_1 C_\sigma}{\alpha(t, T, L_\mu, L_\sigma)} \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_{l \in [t, T]} |X_{t,x}^u(l)|^2] &\leq 3 \alpha(t, T, L_\mu, L_\sigma) \left\{ 1 + |x|^2 + \beta(t, T, L_\mu, L_\sigma) \mathbb{E}[\int_t^T |X_{t,x}^u(s)|^2 ds] \right\} \\ &\leq 3 \alpha(t, T, L_\mu, L_\sigma) \left\{ 1 + |x|^2 + \beta(t, T, L_\mu, L_\sigma) \int_t^T \mathbb{E}[\sup_{l \in [t, s]} |X_{t,x}^u(l)|^2] ds \right\} \end{aligned}$$

Alors par le Lemme de Gronwall, on conclut que

$$\mathbb{E}[\sup_{l \in [t, T]} |X_{t,x}^u(l)|^2] \leq C|1 + |x|^2|$$

## ANNEXE B

### ANALYSE DES STRATÉGIES CONSTANTES

#### B.1 Approche générale

On étudie les deux problèmes (II.9) et (II.34) pour des contrôles constants. Autrement dit, la proportion du fonds investie dans l'actif risqué est constante dans le temps.

Notons le contrôle constant par  $\nu_c$  et rappelons la dynamique du fonds

$$dF_t^{\nu_c} = [(\alpha - c_s)\nu_c + r - c_F]F_t^{\nu_c}dt + \nu_c\sigma F_t^{\nu_c}dW_t \quad (\text{B.1})$$

Pour caractériser la mortalité, on considère le modèle de survie de Gompertz-Makeham (Voir la partie 1.4.2 pour plus de détails) utilisé dans la totalité de la partie numérique. Ainsi, pour un individu d'âge  $\kappa$  à  $t = 0$ , la force de mortalité et la probabilité de survie sont donnés par

$$\begin{aligned} \lambda_{\kappa+s} &= A_1 + A_2c^\kappa c^s \quad \text{et} \\ {}_{s-t}p_{\kappa+t} &= \exp \left\{ - \int_t^s \lambda_{\kappa+u} du \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{A_2c^\kappa}{\ln(c)}(c^t - c^s) - A_1(s - t) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Avec  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$ ,  $c > 1$ ,  $t \in (0, T)$  et  $s \in [t, T]$ .

Pour le reste de cette section, on considère la fonction  $\tilde{g}(x) = \tilde{U}[\max(G, x)]$  où  $G$  est la garantie du fonds distinct et  $\tilde{U}$ <sup>35</sup> une fonction d'utilité.

En se basant sur (II.8) ou (II.33) alors pour un assuré d'âge  $\kappa$  à  $t = 0$  qui est toujours en

---

35. La fonction d'utilité utilisée dans cet annexe peut être de forme « classique » ou « S-shaped » .

vie à l'instant  $t \in (0, T)$ , les fonctions de gain et de valeur correspondante sont

$$\left\{ \begin{array}{l} J_c(t, x, \nu_c) = \mathbb{E} \left\{ b \int_t^T e^{-\rho(s-t)} {}_{s-t}p_{\kappa+t} \lambda_{\kappa+s} \tilde{g}(F_s^{\nu_c}) ds + e^{-\rho(T-t)} {}_{T-t}p_{\kappa+t} \tilde{g}(F_T^{\nu_c}) \mid \tilde{\mathcal{F}}_t \right\} \\ V_c(t, x) = \sup_{\nu_c} J_c(t, x, \nu_c) \end{array} \right.$$

Alors en utilisant (B.2) et le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} J_c(t, x, \nu_c) &= \mathbb{E} \left\{ b \int_t^T \exp \left( \frac{A_2 c^\kappa}{\ln(c)} (c^t - c^s) - (A_1 + \rho)(s - t) \right) (A_1 + A_2 c^{\kappa+s}) \tilde{g}(F_s^{\nu_c}) ds \right. \\ &\quad \left. + \exp \left( \frac{A_2 c^\kappa}{\ln(c)} (c^t - c^T) - (A_1 + \rho)(T - t) \right) \tilde{g}(F_T^{\nu_c}) \mid F_t^{\nu_c} = x \right\} \\ &= b \int_t^T \exp \left( \frac{A_2 c^\kappa}{\ln(c)} (c^t - c^s) - (A_1 + \rho)(s - t) \right) (A_1 + A_2 c^{\kappa+s}) \mathbb{E} [\tilde{g}(F_s^{\nu_c}) \mid F_t^{\nu_c} = x] ds \\ &\quad + \exp \left( \frac{A_2 c^\kappa}{\ln(c)} (c^t - c^T) - (A_1 + \rho)(T - t) \right) \mathbb{E} [\tilde{g}(F_T^{\nu_c}) \mid F_t^{\nu_c} = x] \end{aligned}$$

Soit  $s \in (t, T]$  et notons

$$\beta(t, s) = \exp \left( \frac{A_2 c^\kappa}{\ln(c)} (c^t - c^s) - (A_1 + \rho)(s - t) \right) \text{ et } \zeta(t, s, x, \nu_c) = \mathbb{E} [\tilde{g}(F_s^{\nu_c}) \mid F_t^{\nu_c} = x]$$

Alors  $J_c(t, x, \nu_c)$  s'écrit

$$J_c(t, x, \nu_c) = b \int_t^T \beta(t, s) (A_1 + A_2 c^{\kappa+s}) \zeta(t, s, x, \nu_c) ds + \beta(t, T) \zeta(t, T, x, \nu_c) \quad (\text{B.3})$$

Ainsi, une forme explicite ou numérique de  $\zeta(t, s, x, \nu_c)$  est suffisante pour le calcul de la fonction de gain  $J_c(t, x, \nu_c)$  et donc de la fonction de valeur  $V_c(t, x)$ .

Dans le cas des contrôles constants, la valeur du fonds débutant de  $x$  à l'instant  $t$  suit une loi log-normale. On a donc pour tout  $s \in (t, T]$

$$F_s^{\nu_c} = x \exp \left\{ \left[ (\alpha - c_s) \nu_c + r - c_F - \frac{\nu_c^2 \sigma^2}{2} \right] s + \nu_c \sigma W_s \right\}$$

B.2  $\tilde{U}$  est une fonction d'utilité « classique »

Dans ce cas, l'étude suit les notations et les éléments de la partie 2.2.1 donc  $\tilde{g} \equiv g$ .

Par la mesurabilité de  $g$  et l'indépendance des incréments du mouvement brownien, on obtient pour tout  $s \in (t, T]$

$$\begin{aligned}
\zeta(t, s, x, \nu_c) &= \mathbb{E} \left[ g \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \right) | F_t^{\nu_c} = x \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ g \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ U \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} > \frac{G}{x} \right\}} \right] + U(G) \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\left\{ \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \leq \frac{G}{x} \right\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ U \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} > \frac{G}{x} \right\}} \right] + U(G) \mathbb{P} \left( \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \leq \frac{G}{x} \right)
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} > \frac{G}{x} \iff \frac{\ln(\frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}}) - \xi_s}{\sqrt{\hat{\xi}_s}} > \frac{\ln(\frac{G}{x}) - \xi_s}{\sqrt{\hat{\xi}_s}}$$

Avec  $\xi_s = [(\alpha - c_s)\nu_c + r - c_F - \frac{\nu_c^2 \sigma^2}{2}](s - t)$  ;  $\hat{\xi}_s = \nu_c^2 \sigma^2 (s - t)$  et notons  $k_{x,s} = \frac{\ln(\frac{G}{x}) - \xi_s}{\sqrt{\hat{\xi}_s}}$ .

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ U \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} > \frac{G}{x} \right\}} \right] &= \int_{k_{x,s}}^{+\infty} U \left( x \exp\{\xi_s + \sqrt{\hat{\xi}_s} z\} \right) \frac{\exp(-\frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \frac{x^\gamma}{\gamma} \int_{k_{x,s}}^{+\infty} \exp(\gamma \xi_s + \gamma \sqrt{\hat{\xi}_s} z) \frac{\exp(-\frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \frac{x^\gamma}{\gamma} \int_{k_{x,s}}^{+\infty} \frac{\exp(\gamma \xi_s + \gamma \sqrt{\hat{\xi}_s} z - \frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \frac{x^\gamma \exp(\gamma \xi_s + \frac{1}{2} \gamma^2 \hat{\xi}_s)}{\gamma} \int_{k_{x,s}}^{+\infty} \frac{\exp(-\frac{1}{2}(z - \gamma \sqrt{\hat{\xi}_s})^2)}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \frac{x^\gamma \exp(\gamma \xi_s + \frac{1}{2} \gamma^2 \hat{\xi}_s)}{\gamma} \int_{k_{x,s} - \gamma \sqrt{\hat{\xi}_s}}^{+\infty} \frac{\exp(-\frac{1}{2} z^2)}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \frac{x^\gamma \exp(\gamma \xi_s + \frac{1}{2} \gamma^2 \hat{\xi}_s)}{\gamma} \Phi(\gamma \sqrt{\hat{\xi}_s} - k_{x,s})
\end{aligned}$$

Où  $\Phi$  est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. Ainsi pour tout  $s \in (t, T]$

$$\begin{aligned}
\zeta(t, s, x, \nu_c) &= \frac{x^\gamma \exp(\gamma \xi_s + \frac{1}{2} \gamma^2 \hat{\xi}_s)}{\gamma} \Phi(\gamma \sqrt{\hat{\xi}_s} - k_{x,s}) + \frac{G^\gamma}{\gamma} \Phi(k_{x,s}) \\
&= \frac{x^\gamma}{\gamma} \exp \left\{ \gamma \left[ (\alpha - c_s) \nu_c + r - c_F - \frac{\nu_c^2 \sigma^2}{2} \right] (s - t) + \frac{1}{2} \gamma^2 \nu_c^2 \sigma^2 (s - t) \right\} \\
&\cdot \Phi \left\{ \gamma \nu_c \sigma \sqrt{s - t} - \frac{\ln(\frac{G}{x}) - \left[ (\alpha - c_s) \nu_c + r - c_F - \frac{\nu_c^2 \sigma^2}{2} \right] (s - t)}{\nu_c \sigma \sqrt{s - t}} \right\} \\
&+ \frac{G^\gamma}{\gamma} \Phi \left\{ \frac{\ln(\frac{G}{x}) - \left[ (\alpha - c_s) \nu_c + r - c_F - \frac{\nu_c^2 \sigma^2}{2} \right] (s - t)}{\nu_c \sigma \sqrt{s - t}} \right\}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Donc une formulation de  $J_c(t, x, \nu_c)$  découle de (B.3) et de l'expression explicite de  $\zeta(t, s, x, \nu_c)$  dans (B.4). Par la définition de la fonction de valeur, on obtient

$$V_c(t, x) = J_c(t, x, \nu_c^*)$$

Avec  $\nu_c^*$  la stratégie d'investissement optimale qu'on peut résoudre numériquement en optimisant  $J_c(t, x, \nu_c)$ .

### B.3 $\tilde{U}$ est une fonction d'utilité « S-shaped »

Pour analyser les contrôles constants dans le cas d'une fonction d'utilité convexe pour les pertes et concave pour les gains, on se base sur la formulation et les éléments de la partie 2.3.1. Alors dans ce cas, une formulation équivalente de la fonction  $\zeta(t, s, x, \nu_c)$  utilisée dans (B.3) est

$$\zeta(t, s, x, \nu_c) = \mathbb{E} [g_S(F_s^{\nu_c}) | F_t^{\nu_c} = x]$$

Où  $g_S$  est telle que définie dans 2.3.1.

Comme mentionné dans la section 2.3, l'assuré se réfère à un seuil personnel  $\theta$  pour différencier ses gains de ses pertes. Ainsi, on se base sur les valeurs que prend le seuil  $\theta$  par rapport à la garantie  $G$  du fonds distinct afin d'étudier les stratégies constantes dans le cas d'une utilité « S-shaped ».

### B.3.1 Le cas $0 \leq \theta \leq G$

Dans ce cas, la garantie du fonds  $G$  couvre toutes les pertes que peut subir l'assuré relativement au seuil  $\theta$  alors la fonction  $g_S$  est donnée par

$$g_S(w) = \begin{cases} U_1(G - \theta) & \text{si } w \leq G \\ U_1(w - \theta) & \text{si } w > G \end{cases}$$

Ainsi, la fonction  $\zeta$  définie dans (B.3) s'écrit de la forme

$$\begin{aligned} \zeta(t, s, x, \nu_c) &= \mathbb{E} \left[ g_S \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \right) \middle| F_t^{\nu_c} = x \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ g_S \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ U_1 \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} - \theta \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} > \frac{G}{x} \right\}} \right] + U_1(G - \theta) \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\left\{ \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \leq \frac{G}{x} \right\}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ U_1 \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} - \theta \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} > \frac{G}{x} \right\}} \right] + U_1(G - \theta) \mathbb{P} \left( \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \leq \frac{G}{x} \right) \end{aligned}$$

En adoptant les notations de la section précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \zeta(t, s, x, \nu_c) &= \mathbb{E} \left[ U_1 \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} - \theta \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} > \frac{G}{x} \right\}} \right] + U_1(G - \theta) \Phi(k_{x,s}) \\ &= \mathbb{I}_1^\theta(t, s, x, \nu_c) + U_1(G - \theta) \Phi(k_{x,s}) \end{aligned} \tag{B.5}$$

Avec

$$\mathbb{I}_1^\theta(t, s, x, \nu_c) = \int_{k_{x,s}}^{+\infty} U_1 \left( x \exp\{\xi_s + \sqrt{\hat{\xi}_s} z\} - \theta \right) \frac{\exp(-\frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz$$

et  $\Phi$  représentant la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

On adopte une résolution numérique afin de résoudre  $\zeta(t, s, x, \nu_c)$  puisque l'intégrale  $\mathbb{I}_1^\theta(t, s, x, \nu_c)$  n'admet pas d'expression explicite.

#### 2.3.1.1 Une approximation numérique de $\mathbb{I}_1^\theta(t, s, x, \nu_c)$

Pour utiliser la formule développée dans le cas « classique » du (B.4), on développe les termes de cet intégrale en sommes plus simples à approximer.



Par le théorème généralisé du binôme de Newton et en supposant que les fonctions utilisées sont intégrables et sommables, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_1^\theta(t, s, x, \nu_c) &= \frac{1}{\gamma_1} \int_{k_{x,s}}^{+\infty} \left( x \exp\{\xi_s + \sqrt{\hat{\xi}_s} z\} - \theta \right)^{\gamma_1} \frac{\exp(-\frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \frac{1}{\gamma_1} \int_{k_{x,s}}^{+\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\gamma_1}{i} (-1)^i \theta^i x^{\gamma_1-i} \exp\{(\gamma_1-i)\xi_s + (\gamma_1-i)\sqrt{\hat{\xi}_s} z\} \frac{\exp(-\frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \frac{1}{\gamma_1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\gamma_1}{i} (-1)^i \theta^i x^{\gamma_1-i} \int_{k_{x,s}}^{+\infty} \exp\{(\gamma_1-i)\xi_s + (\gamma_1-i)\sqrt{\hat{\xi}_s} z\} \frac{\exp(-\frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \frac{1}{\gamma_1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\gamma_1}{i} (-1)^i \theta^i x^{\gamma_1-i} \exp\{(\gamma_1-i)\xi_s + \frac{1}{2}(\gamma_1-i)^2 \hat{\xi}_s\} \Phi\left((\gamma_1-i)\sqrt{\hat{\xi}_s} - k_{x,s}\right)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Où la dernière ligne découle du développement suivi dans (B.4) et  $\binom{\gamma_1}{i}$  est définie par

$$\binom{\gamma_1}{i} = \frac{\gamma_1 (\gamma_1 - 1) \dots (\gamma_1 - i + 1)}{i!}$$

pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$  avec une valeur initiale  $\binom{\gamma_1}{0} = 1$

On obtient donc une formulation de  $J_c(t, x, \nu_c)$  en remplaçant la valeur obtenue de  $\zeta(t, s, x, \nu_c)$  dans l'équation (B.3).

### B.3.2 Le cas $\theta > G$

Dans ce cas, l'assuré considère un seuil de sécurité financière  $\theta$  plus grand que la garantie offerte par le fonds distinct. Donc, le détenteur du fonds peut subir des pertes et sa fonction d'utilité  $g_S$  est donnée par

$$g_S(w) = \begin{cases} -U_2(\theta - G) & \text{si } w \leq G \\ -U_2(\theta - w) & \text{si } G < w \leq \theta \\ U_1(w - \theta) & \text{si } w > \theta \end{cases}$$

Ainsi, la fonction  $\zeta$  est de la forme

$$\begin{aligned}
\zeta(t, s, x, \nu_c) &= \mathbb{E} \left[ g_S \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \right) | F_t^{\nu_c} = x \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ g_S \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ U_1 \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} - \theta \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} > \frac{\theta}{x} \right\}} \right] - \mathbb{E} \left[ U_2 \left( \theta - x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{G}{x} < \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \leq \frac{\theta}{x} \right\}} \right] - U_2(\theta - G) \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\left\{ \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \leq \frac{G}{x} \right\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ U_1 \left( x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} - \theta \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} > \frac{\theta}{x} \right\}} \right] - \mathbb{E} \left[ U_2 \left( \theta - x \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \right) \mathbb{1}_{\left\{ \frac{G}{x} < \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \leq \frac{\theta}{x} \right\}} \right] - U_2(\theta - G) \mathbb{P} \left( \frac{F_s^{\nu_c}}{F_t^{\nu_c}} \leq \frac{G}{x} \right)
\end{aligned}$$

En utilisant les notations précédemment définies et en posant  $k_{x,s}^\theta = \frac{\ln(\frac{\theta}{x}) - \xi_s}{\sqrt{\xi_s}}$ , on obtient

$$\zeta(t, s, x, \nu_c) = \mathbb{I}_2^\theta(t, s, x, \nu_c) - \mathbb{I}_3^\theta(t, s, x, \nu_c) - U_2(\theta - G) \Phi(k_{x,s}) \quad (\text{B.7})$$

Où

$$\mathbb{I}_2^\theta(t, s, x, \nu_c) = \int_{k_{x,s}^\theta}^{+\infty} U_1 \left( x \exp\{\xi_s + \sqrt{\hat{\xi}_s} z\} - \theta \right) \frac{\exp(-\frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz \quad \text{et}$$

$$\mathbb{I}_3^\theta(t, s, x, \nu_c) = \int_{k_{x,s}^\theta}^{k_{x,s}^\theta} U_2 \left( \theta - x \exp\{\xi_s + \sqrt{\hat{\xi}_s} z\} \right) \frac{\exp(-\frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz$$

### 2.3.2.1 Une approximation numérique de $\mathbb{I}_2^\theta(t, s, x, \nu_c)$ et $\mathbb{I}_3^\theta(t, s, x, \nu_c)$

L'intégrale  $\mathbb{I}_2^\theta(t, s, x, \nu_c)$  découle de l'expression de  $\mathbb{I}_1^\theta(t, s, x, \nu_c)$  en remplaçant la variable  $k_{x,s}$  par  $k_{x,s}^\theta$  dans l'équation (B.6). Donc on obtient

$$\mathbb{I}_2^\theta(t, s, x, \nu_c) = \frac{1}{\gamma_1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\gamma_1}{i} (-1)^i \theta^i x^{\gamma_1-i} \exp\{(\gamma_1-i)\xi_s + \frac{1}{2}(\gamma_1-i)^2 \hat{\xi}_s\} \Phi \left( (\gamma_1-i) \sqrt{\hat{\xi}_s} - k_{x,s}^\theta \right) \quad (\text{B.8})$$

Pour approximer l'intégrale  $\mathbb{I}_3^\theta(t, s, x, \nu_c)$ , on se base sur le développement utilisé dans (B.4).

En suivant une approche semblable à celle de (B.6), il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_3^\theta(t, s, x, \nu_c) &= \frac{1}{\gamma_2} \int_{k_{x,s}}^{k_{x,s}^\theta} \left( \theta - x \exp\{\xi_s + \sqrt{\hat{\xi}_s} z\} \right)^{\gamma_2} \frac{\exp(-\frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \frac{1}{\gamma_2} \int_{k_{x,s}}^{k_{x,s}^\theta} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\gamma_2}{i} (-1)^i \theta^{\gamma_2-i} x^i \exp\{i \xi_s + i \sqrt{\hat{\xi}_s} z\} \frac{\exp(-\frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \frac{1}{\gamma_2} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\gamma_2}{i} (-1)^i \theta^{\gamma_2-i} x^i \int_{k_{x,s}}^{k_{x,s}^\theta} \exp\{i \xi_s + i \sqrt{\hat{\xi}_s} z\} \frac{\exp(-\frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz \\
&= \frac{1}{\gamma_2} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\gamma_2}{i} (-1)^i \theta^{\gamma_2-i} x^i \exp\{i \xi_s + \frac{1}{2} i^2 \hat{\xi}_s\} \left[ \Phi \left( k_{x,s}^\theta - i \sqrt{\hat{\xi}_s} \right) - \Phi \left( k_{x,s} - i \sqrt{\hat{\xi}_s} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Ainsi, on déduit une formulation équivalente de  $J_c(t, x, \nu_c)$  en remplaçant la valeur obtenue de  $\zeta(t, s, x, \nu_c)$  dans l'équation (B.3).

## ANNEXE C

### MÉTHODES DES DIFFÉRENCES FINIES

En analyse numérique, les méthodes des différences finies sont une classe de techniques numériques qui permettent de résoudre les équations différentielles en approximant les dérivées successives de fonctions n'admettant pas de forme explicite ou dans les cas où c'est impossible de calculer les dérivées analytiquement.

#### C.1 Approximation des dérivées de premier et second ordre

Dans cette section, on rappelle quelques approximations souvent utilisées pour le calcul des dérivées d'une fonction dans les équations différentielles<sup>36</sup>. Soit  $f : x \mapsto f(x)$  une fonction bien définie sur un intervalle  $[a, b]$  avec  $a < b$  et  $\{x_i\}_{i=0}^m$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  vérifiant  $x_0 = a$ ,  $x_m = b$  et  $x_i < x_{i+1}$  pour tout  $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$  où  $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ . Alors on obtient les approximations suivantes pour les dérivées de premier ordre pour tout  $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ .

$$\begin{aligned} f'(x_i) &\approx \frac{h_i^2 f(x_{i+1}) - h_{i+1}^2 f(x_{i-1}) + (h_{i+1}^2 - h_i^2) f(x_i)}{h_i h_{i+1} (h_i + h_{i+1})} && \text{pour une différence centrée} \\ f'(x_i) &\approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} && \text{pour une différence en avant} \\ f'(x_i) &\approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i} && \text{pour une différence en arrière} \end{aligned} \tag{C.1}$$

Où  $h_i = x_i - x_{i-1}$ .

---

<sup>36</sup>. Le lecteur peut consulter le chapitre 6 de Duffy (2014) pour une présentation plus détaillée de ces approximations.

Pour le calcul des dérivées de second ordre, on se limite à l'utilisation de la formule s'appuyant sur la différence centrée qu'on présente ci-dessous

$$f''(x_i) \approx \frac{2 \{h_{i+1} f(x_{i-1}) + h_i f(x_{i+1}) - (h_{i+1} + h_i) f(x_i)\}}{h_{i+1} h_i (h_{i+1} + h_i)} \quad (\text{C.2})$$

Pour les problèmes de contrôle stochastique caractérisés par un horizon de temps fini  $T < \infty$ , on travaille souvent avec des fonctions qui dépendent d'une variable d'état  $x \in \mathbb{R}$  ainsi que d'une variable de temps  $t \in [0, T]$ . On applique donc les formules explicitées ci-dessus sur les équations différentielles non linéaires découlant des problèmes étudiés dans ce mémoire.

## C.2 Une application à l'équation différentielle III.3

Dans cette partie, on présente les développement concernant le cas s'appuyant sur une *différentiation centrée* dans la variable d'état et on omet les deux autres cas (en avant et en arrière) puisqu'on les résout d'une manière similaire. En appliquant (C.1)-(C.2) aux dérivées partielles de  $\tilde{V}$ , on obtient pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket \times \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{V}_i^j &= \frac{F_i - F_{i-1}}{(F_{i+1} - F_i)(F_{i+1} - F_{i-1})} \tilde{V}_{i+1}^j - \frac{F_{i+1} - F_i}{(F_i - F_{i-1})(F_{i+1} - F_{i-1})} \tilde{V}_{i-1}^j \\ &\quad + \frac{F_{i+1} + F_{i-1} - 2F_i}{(F_{i+1} - F_i)(F_i - F_{i-1})} \tilde{V}_i^j \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{V}_i^j &= \frac{2}{(F_{i+1} - F_i)(F_{i+1} - F_{i-1})} \tilde{V}_{i+1}^j + \frac{2}{(F_i - F_{i-1})(F_{i+1} - F_{i-1})} \tilde{V}_{i-1}^j \\ &\quad - \frac{2}{(F_{i+1} - F_i)(F_i - F_{i-1})} \tilde{V}_i^j \end{aligned}$$

Ainsi, on aboutit au résultat suivant

$$A(F_i, \nu_i^j) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{V}_i^j + \frac{1}{2} B(F_i, \nu_i^j)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{V}_i^j = \alpha_{i,central}^j \tilde{V}_{i-1}^j + \beta_{i,central}^j \tilde{V}_{i+1}^j - (\alpha_{i,central}^j + \beta_{i,central}^j) \tilde{V}_i^j$$

Où les fonction  $A(.,.)$ ,  $B(.,.)$  sont définies dans (II.4) et  $(\alpha_{i,central}^j, \beta_{i,central}^j)$  sont caractérisées comme suit

$$\alpha_{i,central}^j = \frac{B^2(F_i, \nu_i^j)}{(F_i - F_{i-1})(F_{i+1} - F_{i-1})} - \frac{A(F_i, \nu_i^j) (F_{i+1} - F_i)}{(F_i - F_{i-1})(F_{i+1} - F_{i-1})}$$

$$\beta_{i,central}^j = \frac{B^2(F_i, \nu_i^j)}{(F_{i+1} - F_i)(F_{i+1} - F_{i-1})} + \frac{A(F_i, \nu_i^j) (F_i - F_{i-1})}{(F_{i+1} - F_i)(F_{i+1} - F_{i-1})}$$

Pour discrétiser une équation différentielle de type (III.3), on utilise souvent *la méthode explicite*, le schéma *implicite d'Euler* ou la méthode de *Crank-Nicolson*. L'équation équivalente ci-dessous résume les trois méthodes pouvant être utilisées dans la discrétisation.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{V}_i^{j+1} - \tilde{V}_i^j}{\Delta\tau} &= (1 - \ell) \sup_{\nu^{j+1}} \left\{ \alpha_{i,central}^{j+1} \tilde{V}_{i-1}^{j+1} + \beta_{i,central}^{j+1} \tilde{V}_{i+1}^{j+1} - (\alpha_{i,central}^{j+1} + \beta_{i,central}^{j+1} + c_{j+1}) \tilde{V}_i^{j+1} \right\} \\ &+ \ell \sup_{\nu^j} \left\{ \alpha_{i,central}^j \tilde{V}_{i-1}^j + \beta_{i,central}^j \tilde{V}_{i+1}^j - (\alpha_{i,central}^j + \beta_{i,central}^j + c_j) \tilde{V}_i^j \right\} \\ &+ (1 - \ell) b \lambda_{j+1} \tilde{h}(F_i) + \ell b \lambda_j \tilde{h}(F_i), \end{aligned}$$

où  $\ell \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  et caractérise la technique utilisée comme suit

- $\ell = 1$  pour la méthode d'Euler explicite,
- $\ell = 0$  pour le schéma d'Euler implicite,
- $\ell = \frac{1}{2}$  pour la méthode de Crank-Nicolson.

Généralement dans des problèmes du type (III.3), on évite le schéma explicite puisqu'il est le moins stable des trois méthodes malgré sa rapidité de convergence. Ainsi, les valeurs plausibles et souvent utilisées dans le cas ci-dessus sont  $\ell = 0$  et  $\ell = \frac{1}{2}$ . Dans notre étude, on se base sur la méthode d'Euler implicite qui est aussi stable que celle de Crank-Nicolson, plus rapide que cette dernière et donne des résultats similaires.

Ainsi, dans l'analyse numérique menée au chapitre III, on travaille avec la discrétisation suivante de l'équation (III.3)

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{V}_i^{j+1} - \tilde{V}_i^j}{\Delta\tau} &= \sup_{\nu^{j+1}} \left\{ \alpha_{i,central}^{j+1} \tilde{V}_{i-1}^{j+1} + \beta_{i,central}^{j+1} \tilde{V}_{i+1}^{j+1} - (\alpha_{i,central}^{j+1} + \beta_{i,central}^{j+1} + c_{j+1}) \tilde{V}_i^{j+1} \right\} \\ &+ b \lambda_{j+1} \tilde{h}(F_i) \end{aligned}$$

Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket \times \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

## Bibliographie

- Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press.
- Bernard, C., Hardy, M. et Mackay, A. (2014). State-dependent fees for variable annuity guarantees. *ASTIN Bulletin*, 44, 559–585.
- Bernard, C. et Moenig, T. (2019). Where less is more : Reducing variable annuity fees to benefit policyholder and insurer. *Journal of Risk and Insurance*, 86(3), 761–782.
- Bernoulli, D. (1954). Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk. *Econometrica*, 22, 23.
- Bjork, T. et Murgoci, A. (2010). A General Theory of Markovian Time Inconsistent Stochastic Control Problems. *SSRN Electronic Journal*.
- Blake, D., Cannon, E. et Wright, D. (2021). Quantifying loss aversion : evidence from a UK population survey. *Journal of Risk and Uncertainty*, 63(1), 27–57.
- Bélanger, J. (2021). Optimisation de portefeuille appliquée aux fonds distincts. *Mémoires de l'Université du Québec à Montréal*.
- Borodin, A. N. et Salminen, P. (2002). *Geometric Brownian Motion*, Dans *Handbook of Brownian Motion — Facts and Formulae*. Birkhäuser Basel : Basel.
- Cox, J. C. et Huang, C. (1989). Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory*, 49(1), 33–83.
- Crandall, M. G., Ishii, H. et Lions, P.-L. (1992). User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27, 1–67.
- Davis, M. H. A. et Norman, A. R. (1990). Portfolio selection with transaction costs. *Mathematics of Operations Research*, 15(4), 676–713.

- Dickson, D. C. M., Hardy, M. R. et Waters, H. R. (2009). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*, Dans *Survival models*, (p. 17–40). International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press
- Duffy, D. J. (2014). *Finite difference methods in financial engineering : a partial differential equation approach*. Hoboken, N.J. : Wiley.
- El Karoui, N. et Jeanblanc Picque, M. (1988). Contrôle de processus de Markov. *Séminaire de probabilités de Strasbourg*, 22, 508–541.
- Forsyth, P. et Labahn, G. (2007). Numerical methods for controlled Hamilton-Jacobi-Bellman PDEs in finance. *The Journal of Computational Finance*, 11(2), 1–43.
- Gao, J. et Ulm, E. R. (2015). Optimal allocation and consumption with guaranteed minimum death benefits, external income and term life insurance. *Insurance : Mathematics and Economics*, 61, 87–98.
- Hardy, M. (2003). *Investment guarantees : modeling and risk management for equity-linked life insurance*. John Wiley & Sons.
- Herdegen, M., Hobson, D. et Jerome, J. (2021). An elementary approach to the Merton problem.
- Huang, H. et Milevsky, M. A. (2008). Portfolio choice and mortality-contingent claims : The general HARA case. *Journal of Banking & Finance*, 32(11), 2444–2452.
- Inada, K.-i. (1963). On a Two-Sector Model of Economic Growth : Comments and a Generalization1. *The Review of Economic Studies*, 30(2), 119–127.
- Ingersoll, J. E. (1987). *Theory of Financial Decision Making* (first éd.). Rowman & Littlefield Publishers, Inc.
- Kahneman, D. et Tversky, A. (1979). Prospect theory : An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47(2), 263–291.
- Karatzas, I., Lehoczky, J. P. et Shreve, S. E. (1987). Optimal portfolio and consumption decisions for a “small investor” on a finite horizon. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25(6), 1557–1586.
- Kraft, H., Munk, C. et Weiss, F. (2022). Bequest motives in consumption-portfolio decisions with recursive utility. *Journal of Banking and Finance*, 138, 106428.



- MacKay, A., Augustyniak, M., Bernard, C. et Hardy, M. R. (2017). Risk management of policyholder behavior in equity-linked life insurance. *Journal of Risk and Insurance*, 84(2), 661–690.
- MacKay, A. et Ocejo, A. (2022). Portfolio optimization with a guaranteed minimum maturity benefit and risk-adjusted fees. *Methodology and Computing in Applied Probability*.
- Makeham, W. M. (1860). On the law of mortality and the construction of annuity tables. *The Assurance Magazine, and Journal of the Institute of Actuaries*, 8(6), 301–310.
- Merton, R. C. (1969). Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty : The Continuous-Time Case. *The Review of Economics and Statistics*, 51(3), 247.
- Merton, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory*, 3(4), 373–413.
- Pennacchi, G. (2008). *Theory of asset pricing*. Addison-Wesley.
- Pham, H. (2009). *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, volume 61 de *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg.
- Pliska, S. R. (1986). A stochastic calculus model of continuous trading : Optimal portfolios. *JSTOR*, 11(2), 371–382.
- Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory*. World Scientific.
- Steele, J. M. (2001). *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer.
- Touzi, N. (2012). *Optimal stochastic control, stochastic target problems, and backward SDE*. Springer.
- Wang, G. et Zou, B. (2021). Optimal fee structure of variable annuities. *Insurance : Mathematics and Economics*, 101, 587–601.
- Wang, J. et Forsyth, P. A. (2008). Maximal Use of Central Differencing for Hamilton–Jacobi–Bellman PDEs in Finance. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(3), 1580–1601.
- Weitzman, M. L. (2001). Gamma discounting. *American Economic Review*, 91(1), 260–271.
- Yong, J. et Zhou, X. Y. (1999). *Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations*. Springer.