

Projet de Fin d'Etudes

Sujet : Dette souveraine au Maroc. Modélisation de la courbe des taux d'intérêt par la méthode de Nelson-Siegel dynamique.

Préparé par : M. *BAKRAOUI AYOUB*

Sous la direction de : M. MUSTAPHA BERROUYNE (INSEA)
M. TAHAR ZERRARI (SOGECAPITAL GESTION)

Soutenu publiquement comme exigence partielle en vue de l'obtention du

Diplôme d'Ingénieur d'Etat

Filière : Actuariat-Finance

Devant le jury composé de :

M. MUSTAPHA BERROUYNE (INSEA)
Mme. FATIMA BAKASS (INSEA)
M. TAHAR ZERRARI (SOGECAPITAL GESTION)

Juin 2018 / PFE N° 04

Résumé

La dette souveraine représente une part importante du marché de taux et les OPCVM obligataire occupent une place prépondérante parmi les détenteurs des bons du Trésor sur le marché marocain, d'où leur rôle important dans le financement de l'économie.

Les performances de ces fonds reposent sur une bonne maîtrise des fluctuations des taux d'intérêt et ainsi nécessitent une stratégie solide d'anticipation de la courbe des taux.

Pour un meilleur rendement, il est crucial d'analyser les différentes parties de la courbe pour une gestion active de positions.

Pour ce faire, ce mémoire consiste dans un premier lieu à capter la dynamique des taux d'intérêt en se basant sur le modèle de Nelson-Siegel dynamique. Ensuite, nous adoptons une approche vectoriel à correction d'erreur pour prévoir les valeurs des taux à travers les paramètres du modèle.

Les résultats de cette étude nous renseigne sur la qualité d'ajustement du modèle aux différentes parties de la courbe et sur son pouvoir prédictif pour plusieurs maturités.

Les données utilisées dans le cadre de cet analyse sont des données journalières s'étalant entre septembre 2010 et octobre 2018.

Mots clés

Courbe des taux, Nelson-Siegel, VECM, prévision, OPCVM.

Dédicace

À mes très chers parents

Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer la profondeur des sentiments d'affection, d'estime et de respect que je vous porte, pour l'amour dont vous m'avez toujours comblé.

À mes sœurs et mon frère

Je vous remercie pour vos encouragements et votre présence à mes côtés à chaque étape de ma vie.

Je vous dédie ce travail

À mes amis

Je vous remercie pour vos conseils et votre soutien

Remerciements

Ce mémoire est le couronnement de plusieurs années d'étude et constitue pour moi une occasion en or de remercier plusieurs personnes qui ont contribué à mon succès.

Tout d'abord, je tiens à remercier mon encadrant académique, Monsieur **MUSTAPHA BERROUYNE**, pour son encadrement et ses précieux conseils ainsi que Mme **FATIMA BAKASS** pour sa contribution à l'avancement de ce rapport.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude envers mon tuteur de stage, Monsieur **TAHAR ZERRARI**, gérant de portefeuille sénior, pour sa gentillesse, sa disponibilité et ses précieuses directives.

Un grand merci à toute l'équipe de Sogécapital gestion pour leur soutien durant toute cette période de stage.

Finalement, mes remerciements les plus chaleureux vont à ma famille. Merci à mes parents, mon frère et mes sœurs qui ont eu confiance en moi et ont fait plusieurs sacrifices pour me fournir le meilleur environnement de travail qui soit.

À tous, merci beaucoup.

À vous ce modeste travail

Table des matières

Résumé	3
Dédicace	4
Remerciements	5
Liste des abréviations	10
Table des figures	11
Liste des tableaux	13
Introduction générale	16
I Marchés financiers et notions de taux	18
I.1 Généralités sur les marchés financiers	19
I.1.1 Les acteurs du marché financier au Maroc	20
1) La bourse des valeurs de casablanca	20
2) Les sociétés de bourse	21
3) L'Autorité Marocaine du Marché des Capitaux (AMMC ex- CDVM)	21

4)	Les banques	21
5)	Maroclear	21
6)	Bank Al Maghrib	22
7)	Les OPCVM	22
I.1.2	Typologie des marchés financiers	24
1)	Marché actions	24
2)	Marché monétaire	25
3)	Marché obligataire	25
I.2	Notions de taux d'intérêt et courbe des taux	29
I.2.1	Notions de taux d'intérêt	29
1)	Taux nominal et taux réel	29
2)	Taux court et Taux long	30
3)	Taux directeur	30
4)	Taux actuariel	30
5)	Taux zéro-coupon	31
6)	Taux Forward	31
I.2.2	Courbe des taux	32
1)	Définition	32
2)	La courbe des taux actuariels	32
3)	La courbe des taux zéro-coupon	34
4)	Théories économiques explicatives des taux d'intérêt	36
I.3	Le marché de la dette souveraine au Maroc	39
1)	Structure de la dette souveraine	39
2)	Bons de Trésor	40
3)	Place des OPCVM	41

II	Données et méthodologie	45
II.1	Base de données utilisées	46
II.2	Méthodologie	49
II.2.1	Approche par des modèles stochastique	49
1)	Modèles d'équilibre	50
2)	Modèles de non arbitrage	51
II.2.2	Approche par des modèles statistiques	51
1)	Splines	52
2)	Modèles parcimonieux à forme fonctionnelle	52
II.2.3	Choix du modèle	53
1)	Valorisation des actifs financiers	53
2)	Gestion de portefeuille	54
II.2.4	Analyse de la structure des taux	55
1)	Analyse en composantes principales :Application	56
2)	Inter-relations entre les taux	58
II.2.5	Le modèle de Nelson-Siegel	61
1)	Modèle original	61
2)	L'approche de Diebold et Li	62
III	Modélisation de la courbe des taux et évaluation des performances	68
III.1	Modélisation de la courbe des taux	69
III.1.1	Estimation des paramètres du modèle de Nelson-Siegel	70
1)	Détermination du λ	70
2)	Estimation des trois paramètres β_{1t}, β_{2t} et β_{3t}	72
3)	Caractéristiques des estimateurs des paramètres	74
III.1.2	Estimation et validation du modèle VECM	79

1)	Nombre de retards optimal	80
2)	Relations de cointégration	81
3)	Estimation des paramètres	82
4)	Validation du modèle	83
III.2	Évaluation des performances	85
III.2.1	Ajustement du modèle	85
III.2.2	Performances de prévision	88
1)	Comparaison entre le modèle VECM et VAR	88
2)	Pouvoir prédictif du modèle VECM	91
Conclusion		100
Bibliographie		101
Webographie		103
Annexe 1 : Corrélogrammes des taux et des paramètres de Nelson-Siegel		105
Annexe 2 : Stationnarité des taux et des paramètres de Nelson-Siegel		108
Annexe 3 : Méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno(BFGS)		118
Annexe 4 : Modèle à correction d'erreur VECM		120
Annexe 5 : Résultat de l'estimation du modèle VECM		124
Annexe 6 :Ajustement du modèle aux taux de maturités 13 semaines, 3 ans, 10 ans et 20 ans		128

Liste des abréviations

ACP	: Analyse en composante principale
ADF	: Augmented Dickey-Fuller
AIC	: Akaike Information Criterion
AMMC	: Autorité Marocaine du Marché des Capitaux
AR	: Autoregressive model
BAM	: Bank Al Maghrib
BDT	: Bons du Trésor
BFGS	: Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
DNS	: Dynamic Nelson-siegel
OPCVM	: Organismes de Placement Collectif en Valeurs Mobilières
RW	: Random Walk
SCR	: Somme des carrés des résidus
VAR	: Vector Autoregressive
VECM	: Vector Error Correction Model

Table des figures

1	Organisation du marché financier	20
2	Intervenants du marché obligataire	28
3	La méthode du BootStrap	35
4	Répartition de l'encours de la dette du Trésor	39
5	Détenteurs des BDT émis par adjudication	41
6	Organigramme de SogéCapital Gestion	42
7	Évolution des taux zéro-coupon	58
8	Vitesse de convergence du facteur de pente pour différentes valeurs de λ	64
9	Maximum du facteur de courbure pour différentes valeurs de λ . . .	65
10	La corrélation entre les deux facteurs de pente et de courbure . . .	71
11	Statistiques descriptives de la série beta1	75
12	Statistiques descriptives de la série beta2	76
13	Statistiques descriptives de la série beta1+beta2	76
14	Statistiques descriptives de la série beta3	77
15	Évolution des paramètres	78
16	Stabilité du modèle	84
17	Variation de l'ajustement du modèle :	87

18	Variation de la performance des modèles DNS et RW dans l'échantillon pour un horizon d'un mois :	94
19	Variation de la performance des modèles DNS et RW dans l'échantillon pour un horizon de 3 mois :	95
20	Variation de la performance des modèles DNS et RW hors échantillon pour un horizon d'un mois :	98
21	Variation de la performance des modèles DNS et RW hors échantillon pour un horizon d'un mois :	99
22	Paramètres du modèle VECM	125
23	Taux 13 semaines observés et estimés	129
24	Taux 3 ans observés et estimés	129
25	Taux 10 ans observés et estimés	130
26	Taux 20 ans observés et estimés	130

Liste des tableaux

1	Courbe des taux du 31/05/2018	48
2	La variance expliquée par les composantes principales	56
3	Poids relatifs à chaque composante PC_i	57
4	Corrélation entre les taux	59
5	Nombre de retards optimal	80
6	Nombre de relations de cointégration	81
7	Relations de cointégration	82
8	Test de White pour l'hétéroscédasticité des erreurs	83
9	Ajustement du modèle	86
10	performance du modèle VAR pour les bêtas dans l'échantillon . . .	89
11	performance du modèle VECM pour les bêtas dans l'échantillon . .	89
12	performance du modèle VAR pour les bêtas dans l'échantillon . . .	90
13	performance du modèle VECM pour les bêtas dans l'échantillon . .	90
14	SCR pour un horizon d'un mois dans l'échantillon d'apprentissage	92
15	SCR pour un horizon de trois mois dans l'échantillon d'apprentissage	93
16	SCR pour un horizon d'un mois dans l'échantillon de test	96
17	SCR pour un horizon de trois mois dans l'échantillon de test . . .	97
18	Corrélogramme du taux 13 semaines	105
19	Corrélogramme du taux 3 ans	105

20	Corrélogramme du taux 10 ans	105
21	Corrélogramme du taux 20 ans	105
22	Corrélogramme de β_1	106
23	corrélogramme de β_2	106
24	corrélogramme de β_3	106
25	Test de Dickey-Fuller augmenté pour le taux 13 semaines	108
26	Test de Dickey-Fuller augmenté pour le taux 3 ans	109
27	Test de Dickey-Fuller augmenté pour le taux 10 ans	110
28	Test de Dickey-Fuller augmenté pour le taux 20 ans	111
29	Test de Dickey-Fuller augmenté pour le paramètre β_{1t}	112
30	Test de Dickey-Fuller augmenté pour le paramètre β_{2t}	113
31	Test de Dickey-Fuller augmenté pour le paramètre β_{3t}	114
32	Test de Dickey-Fuller augmenté pour le paramètre β_{1t} en différence première	115
33	Test de Dickey-Fuller augmenté pour le paramètre β_{2t} en différence première	116
34	Test de Dickey-Fuller augmenté pour le paramètre β_{3t} en différence première	117

*«La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi.
Ici, nous avons réuni théorie et pratique :
rien ne fonctionne... et personne ne sait pourquoi!»*

Albert Einstein

Introduction générale

Le marché obligataire, composante fondamentale du marché financier marocain, constitue un outil de financement de poids pour l'État ainsi que pour les entreprises. Cependant, les fluctuations des rendements des bons du Trésor affectent les performances des gestionnaires de produits de taux. Dans ce sens, plusieurs modèles de la structure par terme des taux d'intérêt ont été développés afin de capter la dynamique des rendements et répondre aux besoins des intermédiaires financiers surtout pour les gérants d'actifs à revenu fixe qui ajustent leurs portefeuilles en fonction des caractéristiques des titres qui les composent.

Pour cela, le but de ce travail est d'analyser les différentes composantes(la partie court terme, moyen terme et long terme) de la courbe des taux et modéliser leurs évolutions dans le temps en se basant sur un modèle adéquat, qui permettra au gérant, au sein de SogéCapital Gestion de choisir les titres susceptibles de réaliser des performances au dessus de la moyenne sur le marché.

Pour répondre à cette problématique, nous allons commencer par définir des notions de base relatives aux marchés financiers en général et à celui de la dette souveraine en particulier ainsi que les théories économiques qui expliquent les différentes formes que peuvent prendre les courbes de taux.

Ensuite, dans le deuxième chapitre nous effectuons une analyse comparative entre les différentes méthodes permettant la modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt pour choisir le modèle adapté à la structure des taux présents dans notre base de données.

Enfin, nous évaluons la qualité du modèle choisi en terme d'ajustement aux taux de différentes maturités ainsi que son pouvoir prédictif et ce dans un échantillon d'apprentissage ainsi que dans un autre dédié au test.

Chapitre I

Marchés financiers et notions de taux

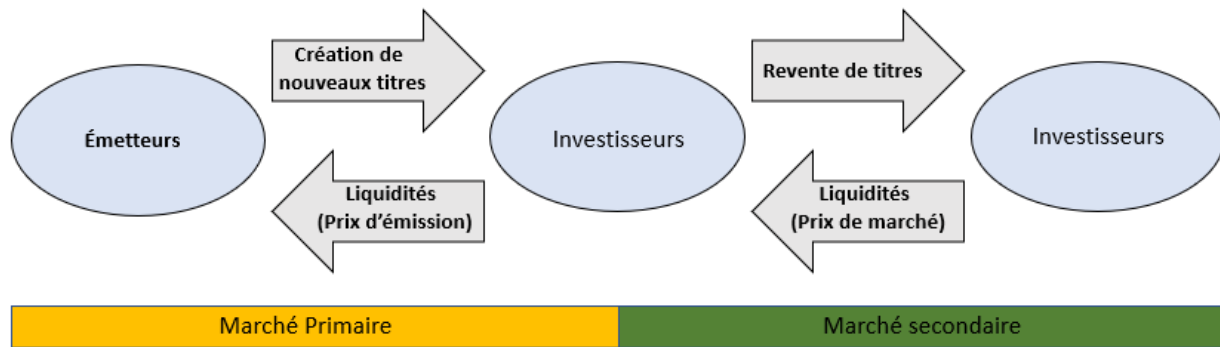
Les marchés financiers sont des lieux où les acteurs du marché (acheteurs et vendeurs) se rencontrent pour négocier des instruments financiers. L'enjeu est de financer l'économie et faire fructifier l'épargne des investisseurs. Dans ce chapitre, nous présentons des notions de base relatives aux acteurs opérant dans les différents marchés financiers ainsi que des concepts de taux d'intérêt permettant d'assimiler les courbes des taux et les théories économiques qui expliquent les différentes formes qu'elles peuvent prendre.

I.1 Généralités sur les marchés financiers¹

Pour satisfaire leurs besoins de financement, les entreprises, l'État et les collectivités publiques procèdent à des émissions d'actions et d'obligations. L'émission de ces titres se fait sur un marché dit «primaire» (Exemples : introduction en bourse, augmentation de capital, émissions d'obligations). Une fois l'émission terminée, ces mêmes titres seront négociés sur un marché dit «secondaire» qui peut être réglementé ou non.

1. Omar A., 2016-2017.

FIGURE 1 – Organisation du marché financier



Source : Réalisée par l'auteur

I.1.1 Les acteurs du marché financier au Maroc

1) La bourse des valeurs de casablanca

La bourse de Casablanca est une société anonyme en charge de l'organisation et de la gestion du marché boursier.

Elle assure le «**financement de l'économie**» par «**l'appel public à l'épargne**» en organisant la «**négociation**» de titres de propriété (actions) et de titre de dettes (obligations).

Le capital de la société gestionnaire de la bourse est souscrit dans son intégralité par les sociétés de bourse agréées, il est détenu à tout moment à parts égales par l'ensemble des sociétés de bourse.

Sa mission s'articule autour des points suivants :

- Prononcer l'introduction des valeurs mobilières à la cote de la Bourse des valeurs et leur radiation.
- Organiser les séances de cotation à travers un système électronique.
- Veiller à la conformité des opérations effectuées par les Sociétés de Bourse.
- Porter à la connaissance de l'Autorité Marocaine du Marché des Capitaux (AMMC ex-CDVM) toute infraction qu'elle aura relevée dans l'exercice de sa mission.

2) Les sociétés de bourse

Elles sont les seules habilitées à exercer directement le métier d'intermédiation et de négociation en bourse. Les sociétés de bourse bénéficient d'un monopole de négociation des valeurs mobilières inscrites à la bourse des valeurs. Elles ont pour rôle :

- D'exécuter les opérations de bourse.
- De placer les titres émis par des personnes morales faisant appel public à l'épargne.
- D'assurer la garde des titres.

3) L'Autorité Marocaine du Marché des Capitaux (AMMC ex-CDVM)

L'Autorité Marocaine du Marché des Capitaux est un établissement public de surveillance et de contrôle des opérateurs de bourse. Il a pour missions principales de :

- S'assurer de la protection de l'épargne investie en instruments financiers.
- Veiller au respect de la loi par les intermédiaires financiers (sociétés de bourse, banques et OPCVM).
- Informer les investisseurs par la délivrance d'un visa aux notes d'information qui sont mises à la disposition du public.
- Instruire les demandes d'agrément des SICAV et des FCP.

4) Les banques

Les banques ne bénéficient pas d'un accès direct au marché boursier. Elles conservent les valeurs mobilières, collectent les ordres des clients pour les transmettre aux sociétés de bourse.

5) Maroclear

C'est le dépositaire central et est chargé de :

- Réaliser tout acte de conservation adapté à la nature des titres qui lui sont confiés.
- Administrer les comptes courants de valeurs mobilières ouverts au nom de ses affiliés.

6) Bank Al Maghrib²

Bank Al Maghrib, la banque centrale du Maroc, est un établissement public doté de la personnalité morale et de l'autonomie financière. Il a pour mission :

- D'émettre les billets de banque et les pièces de monnaie.
- De mettre en œuvre les instruments de la politique monétaire pour assurer la stabilité des prix.
- De veiller au bon fonctionnement du marché monétaire et assurer son contrôle.
- De s'assurer du bon fonctionnement du système bancaire.
- D'assurer le rôle d'agent financier du Trésor.

7) Les OPCVM³

les organismes de placement en valeurs mobilières(OPCVM) sont des organismes financiers qui collectent l'épargne auprès des investisseurs pour les placer dans des valeurs mobilières selon des critères d'investissements bien définies. Ils permettent donc à tout investisseur de constituer un portefeuille optimal de valeurs mobilières. Les OPCVM peuvent être classés par statut juridique ou par nature de gestion.

- ✓ SICAV : Une société d'investissement à capital variable est une société anonyme qui a pour objet exclusif la gestion d'un portefeuille de valeurs mobilières et de liquidités. Elle émet des actions à tout moment à la demande de tout souscripteur ou actionnaire.
- ✓ FCP : Un fonds commun de placement est une copropriété de valeurs mobilières qui n'a pas de personnalité morale et qui émet des parts à tout moment à la demande de tout souscripteur ou porteur de parts. Sa gestion est assurée par un établissement de gestion de FCP agissant au nom des porteurs.

2. Site de Bank Al Maghrib, <http://www.bkam.ma/A-propos/Statut-et-missions>

3. AMMC, 2010.

Les OPCVM peuvent être classés selon la nature de leur gestion, la politique d'investissement adoptée et la tolérance de l'investisseur au risque en cinq catégories :

- ✓ OPCVM actions : Ils sont constitués majoritairement d'actions de sociétés cotées en bourse et en permanence investi à hauteur de 60% au moins de ses actifs, hors titre d'OPCVM « actions » et liquidités, en actions, certificats d'investissement et droits d'attribution ou de souscription.
- ✓ OPCVM obligataires : On distingue deux types dans cette catégorie, chacun avec un profil de risque différent.
 - OPCVM «Obligations court terme» : Ils sont investis à hauteur de 90% au moins de ses actifs, hors titres d'OPCVM « obligations court terme », créances représentatives des opérations de pension qu'il effectue en tant que cessionnaire et liquidités, en titres de créances.
 - OPCVM «Obligations moyen long terme» : Ils sont investis à hauteur de 90% au moins de ses actifs, hors titres d'OPCVM « Obligations moyen et long terme», créances représentatives des opérations de pension qu'il effectue en tant que cessionnaire et liquidités, en titres de créances.
- ✓ OPCVM monétaires : Ils sont constitués essentiellement d'instruments du marché monétaire et sont en permanence investis en titres de créances ou en liquidités.
- ✓ OPCVM diversifiés : Ils sont constitués d'actions(ou équivalent) et de titres de créances et ne doivent appartenir à aucune des catégories citées ci-dessus. Un OPCVM « diversifié » ne peut à aucun moment être investi à hauteur de plus de 60% en actions, ni à hauteur de plus de 90% en titres de créances.

- ✓ OPCVM contractuels : Ils sont des OPCVM dont l'engagement de l'établissement de gestion du fonds commun de placement ou de la société d'investissement à capital variable, selon le cas, porte contractuellement sur un résultat concret exprimé en termes de performance et/ou de garantie en montant investi par le souscripteur. En contrepartie de cette garantie, l'établissement de gestion du fonds commun de placement ou la société d'investissement à capital variable peut exiger du souscripteur, des engagements portant sur le montant investi et/ou la durée de détention des titres de l'OPCVM par ce dernier.

I.1.2 Typologie des marchés financiers

1) Marché actions⁴

Les actions sont des titres de propriétés représentant une fraction du capital d'une entreprise donnant droit à des dividendes⁵ et à d'autres droits.

Le marché des actions est un marché où sont vendues et achetées des actions de différents types d'entreprises. Il est composé d'actions cotées et d'actions non cotées. Les actions cotées peuvent être vendues ou achetées en bourse alors que celles non cotées peuvent être achetées et vendues de gré à gré⁶. En bourse, il existe trois types de marchés actions :

- Le marché principal : C'est le compartiment du marché actions où sont échangées les actions des grandes entreprises.
- Le marché développement : C'est le compartiment où sont échangées les actions des entreprises de taille moyenne à fort potentiel.
- Le marché croissance : C'est le compartiment réservé aux entreprises à forte croissance avec un portefeuille de projets à financer.

4. Site de l'AMMC, <http://www.ammc.ma/fr/espace-epargnants/marche-actions>.

5. Revenu annuel des actionnaires. Ils sont issus des bénéfices de l'entreprise, qui rémunère ses actionnaires en distribuant une partie de ses bénéfices.

6. L'acheteur et le vendeur sont en relation directe : Ils négocient et traitent eux-mêmes la transaction.

2) **Marché monétaire**⁷

C'est un marché où s'échangent des titres de courte durée contre des liquidités. On va y retrouver Bank Al Maghrib (BAM), les banques, les entreprises et les sociétés de financement. Il est organisé en un marché interbancaire réservé aux banques et un marché de titres de créances réservés aux investisseurs.

- **Marché interbancaire** : Il permet aux banques de prêter et d'emprunter des liquidités à très court terme et ainsi d'échanger leurs excédants et leurs déficits dans la monnaie nationale. La durée la plus fréquente est le jour le jour.
- **Marché des TCN** : C'est un marché où les établissements de crédit empruntent par la création de Certificats de Dépôt ou bons des sociétés de financement, et les entreprises par la création de Billet de Trésorerie.

3) **Marché obligataire**

Les obligations⁸ sont des titres de créances négociables que l'acheteur détient en prêtant à l'émetteur une somme d'argent en échange d'une séquence de paiements.

Le marché obligataire est un marché financier où l'État et les entreprises peuvent emprunter des liquidités par création de titres de créances connus sous le terme obligations.

Il est constitué d'un marché primaire où sont émises ces titres et d'un autre secondaire où ils sont échangés entre différents investisseurs.

7. Site de l'AMMC, <http://www.ammc.ma/fr/espace-epargnants/marche-monetaire>.

8. Cairns, 2004.

1. Types d'obligations⁹

- Les obligations subordonnées

Une obligation subordonnée est une obligation remboursée en dernier lieu en cas de liquidation de la société après le remboursement de tous les créanciers privilégiés et les détenteurs des obligations ordinaires.

- Les obligations convertibles en actions

Ils donnent à son détenteur la possibilité, mais non l'obligation, de convertir ses créances en actions.

- Les obligations remboursables en actions

A leurs échéances, il seront obligatoirement(ou facultativement) remboursées en actions de la société émettrice.

- Les obligations zéro-coupon

Les obligations à coupon zéro sont des obligations qui ne paient pas d'intérêt durant toute leur durée de vie et qui sont remboursées in fine¹⁰.

- Les obligations à taux fixe

Dans ce genre d'obligations, la base (le taux facial) sur laquelle sont calculés les coupons est fixe pendant toute la durée de l'emprunt.

- Les obligations à taux variable

Elles sont caractérisées par des coupons (montants des intérêts) qui ne sont pas connues au moment de l'émission. L'entreprise qui émet l'obligation fixe juste le mode de calcul par rapport à un taux de référence.

9. AMMC (ex-CDVM), 2010.

10. in fine : La séquence des flux n'est faite que du paiement des intérêts, sauf la dernière, à laquelle se rajoute le remboursement du capital.

2. Intervenants sur le marché obligataire

Le marché obligataire fait intervenir certains acteurs qui contribuent à sa dynamique.

a) Émetteurs

- ✓ **L'État et les collectivités :** La politique budgétaire suivie par l'État l'oblige parfois à procéder à des émissions dans le but de financer ses insuffisances budgétaires. Ces titres émis sont appelés des bons du Trésor.
- ✓ **Les établissements de crédit :** Ce sont les banques et les entreprises financières qui recourent aux marchés financiers en vue du financement de leurs besoins économiques.
- ✓ **Les entreprises :** Les entreprises ont recours au marché obligataire pour financer leurs investissements dans la perspective d'une croissance continue et stable.

b) Investisseurs

- ✓ **Les banques :** Les banques occupent le rôle d'intermédiaire entre les acheteurs et les vendeurs de titres. Par ailleurs, elles peuvent constituer leurs propres portefeuilles obligataires pour développer leur situation financière.
- ✓ **Les institutionnels**¹¹ : Ces institutions ont un rôle très important sur le marché obligataire. Cette catégorie d'investisseurs est constituée de sociétés d'assurance, des caisses de retraite et aussi les OPCVM notamment les FCP.
- ✓ **Les institutions non financières et les particuliers :** Ce sont les établissements autres que financiers et toute personne morale ou physique, pouvant aussi investir dans les titres obligataires.

11. Site de L'AMMC, <http://www.ammc.ma/investisseurs-institutionnels>

FIGURE 2 – Intervenants du marché obligataire



Source : Réalisée par l'auteur

I.2 Notions de taux d'intérêt et courbe des taux

L'intérêt représente le coût d'emprunt d'argent sur une certaine durée, c'est le prix que les prêteurs demandent aux emprunteurs pour l'usage de l'argent qu'ils mettent à leur disposition.

I.2.1 Notions de taux d'intérêt ¹²

On présentera dans ce qui suit les notions suivantes :taux nominal et taux réel, taux court et taux long, taux directeur, taux de rendement actuariel, taux zéro-coupon et taux forward.

1) Taux nominal et taux réel

Le taux d'intérêt nominal est celui déclaré d'une obligation ou d'un prêt donné. C'est sur la base de ce taux que se calculent les paiements qu'un emprunteur doit régler au prêteur. La valeur réel de ces paiements varient en fonction des mouvements inflationnistes et déflationnistes dans l'économie. Contrairement au taux nominal, le taux d'intérêt réel tiens compte de l'inflation.

Par exemple, si on place une unité monétaire d'un instrument financier(de maturité une année) durant une année avec un taux nominal r , alors on récupère à l'échéance le montant $1+r$ unités monétaires.

Soit i le taux d'inflation pendant la durée de détention de l'instrument.

Le taux de rendement réel du placement est : $R = \frac{1+r}{1+i} - 1$ Pour des taux qui ne sont pas très élevés, elle peut être approximé par $R=r-i$ (relation de Fisher).

Ainsi, le taux d'intérêt réel est le taux d'intérêt nominal après élimination des effets de l'inflation.

12. Site de l'AMMC, <http://www.ammc.ma/fr/espace-epargnants/risque-et-rentabilite>

2) Taux court et Taux long

Le taux d'intérêt d'un instrument financier à revenu fixe est fonction de sa maturité, il est d'usage d'appeler :

- Taux court terme : Taux correspondant à des transactions sur des périodes allant jusqu'à 2 ans.
- Taux moyen terme : Taux correspondant à des transactions sur des périodes allant de 2 à 5 ans.
- Taux long terme : Taux correspondant à des transactions au-delà de 5 ans.

3) Taux directeur

C'est le taux d'intérêt au jour le jour fixé par la banque centrale pour le refinancement des banques. C'est le taux par lequel la banque centrale prête aux banques pour les alimenter en liquidités.

4) Taux actuariel

Prenons le cas d'une obligation caractérisée à un moment donné par un prix de marché, un taux d'intérêt nominal, un régime d'amortissement et une maturité.

Le taux de rendement actuariel est le taux d'actualisation permettant d'égaliser les flux générés par l'instrument pendant sa durée de vie résiduelle à son prix.

Notons P le prix de l'instrument financier, F_i le flux qu'il génère à l'instant i et n sa maturité résiduelle. Le taux de rendement actuariel r_a est solution de l'équation :

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1 + r_a)^i} \quad (\text{I.1})$$

5) Taux zéro-coupon

Le taux zéro coupon $y_t(\tau)$ est le taux de rendement actuariel correspondant à une obligation $P_t(\tau)$ ne donnant droit à aucun détachement de coupon avant la maturité ($T = t + \tau$) et avec une valeur nominal $F=1$.

$$y_t(\tau) = -\frac{\log(\frac{P_t(\tau)}{F})}{\tau} = -\frac{\log(P_t(\tau))}{\tau} \quad (\text{I.2})$$

En combinant plusieurs taux zéro-coupon avec plusieurs échéances, nous pouvons construire une courbe des taux zéro-coupon.

6) Taux Forward¹³

Le taux forward est le taux de rendement actuariel d'un prêt sur une période futur. Le taux d'intérêt forward continu à l'instant t , $f_t(\tau_1, \tau_2)$ qui s'applique entre deux période τ_1 et τ_2 est défini par :

$$f_t(\tau_1, \tau_2) = -\frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \log \frac{P_t(\tau_2)}{P_t(\tau_1)} \quad (\text{I.3})$$

Soit h la période séparant τ_1 et τ_2 ($\tau_2 = \tau_1 + h$), nous parlons de taux forward instantané $f_t(\tau_1)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} f_t(\tau) &= \lim_{h \rightarrow 0} f_t(\tau, \tau + h) \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log P_t(\tau + h) - \log P_t(\tau)}{h} \\ &= -\frac{\partial P_t(\tau)}{\partial \tau} \end{aligned}$$

Donc, le prix d'une obligation zéro-coupon à l'instant t de maturité $T = t + \tau$ est :

$$P_t(\tau) = e^{-\int_t^T f_t(u) du} \quad (\text{I.4})$$

13. Yassine EL QALLI, cours de l'INSEA, 3ème Année d'études, Année universitaire 2017-2018.

Ainsi, et d'après l'équation (I.2), il vient :

$$y_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_t^T f_t(u) du \quad (\text{I.5})$$

I.2.2 Courbe des taux¹⁴

1) Définition

La structure par terme des taux d'intérêt décrit à un instant donné la variation des taux par rapport aux différentes maturités. Elle représente un outil d'analyse et de valorisation primordiale pour le gestionnaire des produits de taux. La courbe des taux peut prendre généralement quatre formes :

- Normal : caractérisée par des rendements se situant à des niveaux moyens et s'incline progressivement vers le haut jusqu'à atteindre la maturité la plus longue.
- Inversée : Elle décrit la situation où les taux long terme sont plus bas que les taux courts.
- bosselée : caractérisée par des taux de rendement augmentant jusqu'à atteindre un pic en moyen terme et puis diminuant pour les longues maturités.
- plate : Elle n'est pas autant observée que les autres formes et décrit la situation où le niveau des taux court terme est le même que celui des taux long terme.

2) La courbe des taux actuariels

Elle résume les relations entre différents taux de rendement actuariels, solution de l'équation (I.1), des différentes maturités. Cependant, il faut distinguer deux parties majeures qui servent à la construction de toute la courbe, à savoir :

- Les taux de rendement à court terme ≤ 52 semaines qui résultent du marché monétaire.
- Les taux de rendement > 52 semaines qui résultent du marché obligataire.

14. FABOZZI, 2005, p.174.

Le calcul des taux d'intérêt s'appuie sur l'interpolation linéaire¹⁵ et la transformation des taux.

a) L'interpolation linéaire :

Elle permet de calculer les taux correspondants aux maturités manquantes dans la courbe des taux.

Notons $r_t(\tau_k)$ le taux d'actualisation qu'on cherche à avoir et qui correspond à la maturité $T_k = t + \tau_k$. Si elle ne coïncide avec aucune des maturités caractérisant la courbe publiée par BAM, alors on se base sur les deux échéances l'avoisinant pour calculer le taux correspondant.

Soit T_{k-1} , T_{k+1} les maturités délimitant T_k dans la courbe de BAM et $r_t(\tau_{k-1})$, $r_t(\tau_{k+1})$ les taux correspondants. Ainsi, $r_t(\tau_k)$ est donné par :

$$r_t(\tau_k) = r_t(\tau_{k-1}) + [r_t(\tau_{k+1}) - r_t(\tau_{k-1})] \cdot \frac{T_k - T_{k-1}}{T_{k+1} - T_{k-1}} \quad (\text{I.6})$$

Cependant, pour pouvoir interpoler entre différents points de la courbe, les taux doivent avoir la même base d'intérêt, d'où la nécessité de convertir les taux monétaires en actuariels pour trouver ceux supérieurs ou égal à 1 an et de convertir les taux actuariels en monétaires pour trouver ceux inférieurs à 1 an.

b) La conversion des taux :

Soit t_m le taux monétaire, t_a le taux actuariels et n le nombre de jours de placement.

➤ La conversion du taux monétaire en taux actuariel est donné comme suit :

$$t_a = \left(1 + \frac{t_m \cdot n}{360}\right)^{\frac{365}{n}} - 1 \quad (\text{I.7})$$

➤ La conversion du taux actuariel en taux monétaire se fait selon la formule suivante :

$$t_m = \left[(1 + t_a)^{\frac{n}{365}} - 1\right] \cdot \frac{360}{n} \quad (\text{I.8})$$

15. AMMC(ex-CDVM), 2004.

Aussi, la courbe est considérée plate de la maturité 0 jusqu'à la première maturité observée entre 8 et 13 semaines. Notons $r_t(\tau_0)$ le taux correspondant à la première échéance observée. Ainsi, on a la relation suivante :

$$\forall \tau \leq \tau_0; r_t(\tau) = r_t(\tau_0)$$

Le calcul du taux de rendement actuariel est fondé sur l'hypothèse que les flux futures perçues seront réinvestis avec le même taux, ce qui paraît peu réaliste vu l'évolution des taux sur le marché obligataire. Ainsi et pour y remédier, on utilise la courbe des taux zéro-coupon.

3) La courbe des taux zéro-coupon

C'est la courbe joignant les différents taux zéro-coupon de différentes maturités.

✓ La partie court terme de la courbe :

Pour la partie court terme de la courbe, inférieure à 1 an, on se base sur les mêmes techniques décrites précédemment pour les taux actuariels, à savoir l'interpolation linéaire et la transformation des taux :

- Pour les maturités inférieures ou égales à 52 semaines, les taux zéro-coupon sont les taux actuariels précédemment calculés actualisés par la relation (I.7)¹⁶.
- Pour les maturités de 1 an, le taux zéro-coupon est le même que le taux actuariel.

✓ La partie moyen long terme de la courbe :

Pour le calcul des taux correspondant à cette partie, on se base sur la méthode dite du «BootStrap» décrite ci-dessous.

→ **La méthode du BootStrap**¹⁷ :

Cette méthode consiste à reconstruire la courbe des taux zéro-coupon pas à pas, soit segment par segment. Le taux zéro-coupon correspondant à la maturité 1 an est le même que le taux

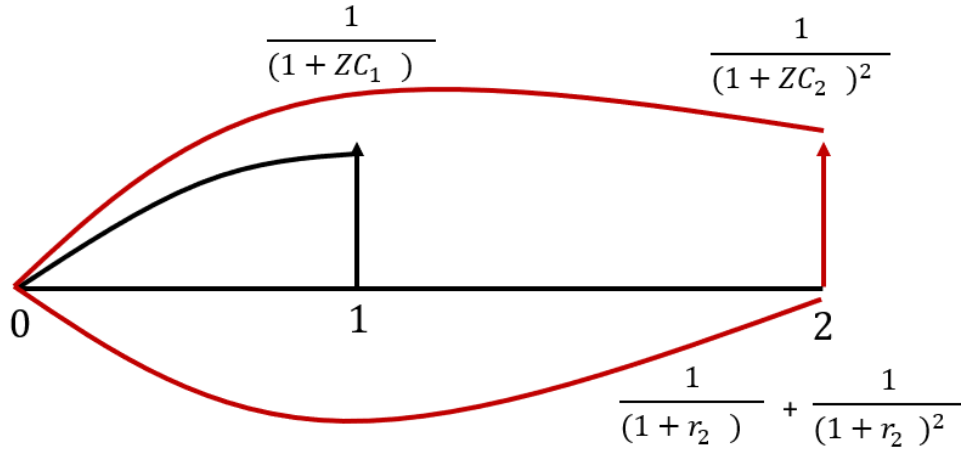
16. Pour la partie court terme de la courbe, les instruments ne donnent lieu à aucun paiement intermédiaire et le tout est payé à l'échéance.

17. FABOZZI, 2005, p.178.

actuariel.

Pour calculer le taux correspondant à la maturité 2 ans, on considère une obligation de maturité 2 ans versant deux flux.

FIGURE 3 – La méthode du BootStrap



Source : Réalisée par l'auteur

Le taux zéro-coupon deux ans ZC_2 sera solution de l'équation :

$$\frac{1}{(1+r_2)} + \frac{1}{(1+r_2)^2} = \frac{1}{(1+ZC_1)} + \frac{1}{(1+ZC_2)^2} \quad (\text{I.9})$$

Ainsi, on obtient

$$ZC_2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{(1+r_2)} + \frac{1}{(1+r_2)^2} - \frac{1}{(1+ZC_1)}} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (\text{I.10})$$

En procédant de la même manière, de proche en proche, pour les autres maturités, on obtient la relation suivante pour le taux zéro-coupon de maturité N :

$$ZC_N = \left(\frac{1}{\sum_{i=2}^{n-1} \left[\frac{1}{(1+r_N)^i} - \frac{1}{(1+ZC_i)^i} \right] + \frac{1}{(1+r_N)^N}} \right)^{\frac{1}{N}} - 1 \quad (\text{I.11})$$

4) Théories économiques explicatives des taux d'intérêt ¹⁸

a) La Théorie des anticipations

Selon cette théorie, les taux forward représentent les taux futurs espérés. Ainsi, la structure par terme des taux d'intérêt est déterminée par les anticipations des investisseurs sur l'évolution des taux futurs.

Cette théorie s'appuie sur une hypothèse fondamentale :

- Un investisseur n'a pas de préférence concernant la durée du placement, il ne s'intéresse donc qu'au rendement espéré. Ainsi, les obligations peuvent être considérées comme des substitues parfaits.

Les deux versions les plus connues de cette théorie sont :

→ La théorie des anticipations sans biais :

Les taux forward actuelles sont considérés comme des estimateurs sans biais des taux courts futurs. Soit $f_t(T, T + 1)$ le taux forward au temps t pour la période entre T et $T+1$, r_T le taux court au temps T , ainsi :

$$f_t(T, T + 1) = E_t(r_T)$$

Cette hypothèse a fait l'objet de nombreuses critiques, notamment par «*Rubinstein*»¹⁹ qui a indiqué que les taux courts futurs ne sont pas connus avec certitude, ce qui implique que les obligations court terme sont plus attractives pour les investisseurs pour deux raisons :

- Ils sont des instruments plus appropriés pour des besoins de couverture.

Dans un scénario où l'investisseur est exposé à une augmentation de taux d'intérêt à une période dans le futur, le prix des obligations long terme va diminuer.

18. FABOZZI et al., 2002, pp.75-85.

19. Ariel Rubinstein, 1998.

C'est une perte pour les détenteurs de tels types d'obligations alors que les détenteurs d'obligations court terme pourront réinvestir à ces nouveaux taux.

- Ce sont des instruments plus liquides, puisqu'ils peuvent être converties plus facilement en argent que ceux de long terme.

→ La théorie des anticipations locale :

Dans cette hypothèse, les obligations de différentes maturités sont censés avoir le même rendement espéré si détenues pendant une courte durée. Ainsi :

$$\frac{E_t(P(t+1,T))}{P(t,T)} = 1 + r_t$$

Donc, une obligation de 6 mois et une autre de 20 ans auront en moyenne le même rendement espéré si détenues pendant une courte durée fixée.

Ceci dit, Pour des investisseurs averse au risque, ils exigent des rendements plus élevés pour des obligations avec de longues maturités pour compenser le risque lié à un tel placement.

Alors, pour mieux expliquer les inter-relations entre les taux de différentes maturités, il faut considérer deux aspects qui ont été négligés jusqu'ici : Il s'agit des notions de risque et de liquidité.

b) La Théorie de préférence pour la liquidité

Intuitivement, les investissements de longue maturité sont plus risqués, donc normalement les taux d'intérêt long terme doivent être supérieurs. Cette théorie tente d'expliquer les courbes de taux ascendantes. En effet, les emprunteurs ont généralement tendance à préférer le long terme contrairement aux prêteurs qui préfèrent plutôt le court terme. Ainsi, un prêteur requiert une prime de risque pour compenser la perte de liquidité engendrée par un investissement sur des maturités lointaines. Donc, la prime augmente le long de la courbe et les investissements de long terme auront toujours un

rendement plus élevé. Alors selon cette théorie, la courbe des taux sera toujours de forme ascendante.

Elle a été critiquée pour deux aspects :

- Cette théorie n'explique pas les courbes inversées.
- selon cette théorie, tous les investisseurs préfèrent les obligations de court terme.

c) La théorie de la segmentation des marchés :

Les marchés financiers sont composés d'un grand nombre d'intervenants, chacun ayant des préférences différentes. Certaines classes d'investisseurs préfèrent opérer sur la partie courte de la courbe alors que d'autres se concentrent plutôt sur la partie longue. Cette théorie suggère que l'activité est concentrée dans certaines zones spécifiques du marché et qu'il n'y a pas d'interrelations entre ces différentes parties.

Donc, il existe un marché différent pour des maturités spécifiques le long de la courbe. Ainsi, les taux d'intérêt pour ces maturités sont déterminés par l'offre et la demande et un investisseur opérant sur le court terme ne pourra jamais investir sur le moyen ou long terme, ce qui n'est pas toujours le cas.

Une version modifiée et plus flexible de cette théorie qui permet de prendre en compte le comportement de certains investisseurs est celle de l'habitat préféré.

d) La théorie de l'habitat préféré :

Introduite pour la première fois par Modigliani et Sutch(1966), elle stipule que les investisseurs ont des maturités spécifiques préférées mais qu'ils peuvent opérer à l'extérieur de ce segment en exigeant une prime de risque additionnelle. Elle peut expliquer la forme bosselée des courbe de taux. Selon cette théorie, chaque intervenant porte un intérêt particulier pour un segment spécifique de la courbe mais peut être amené à détenir des obligations avec des maturités qui diffèrent de son horizon d'investissement habituel s'il est assez rémunéré.

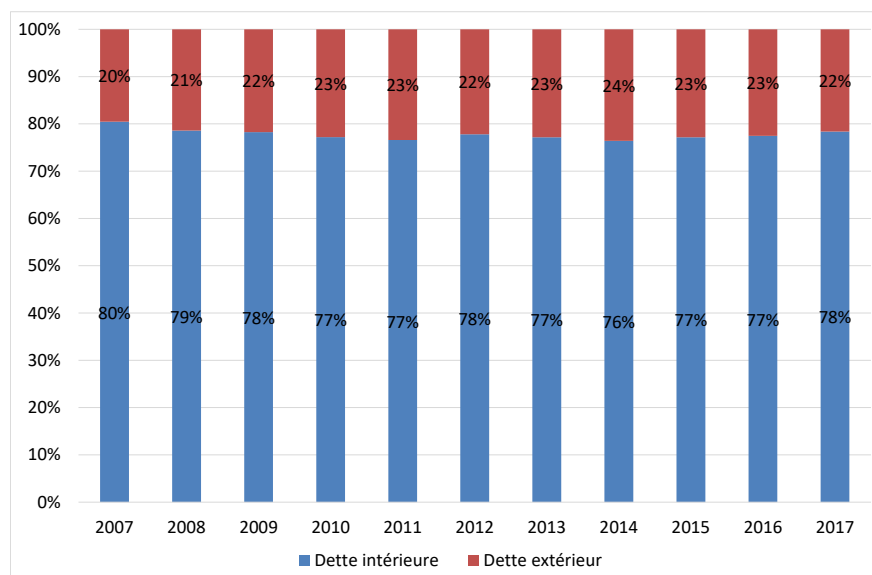
I.3 Le marché de la dette souveraine au Maroc

La dette souveraine correspond à la dette de l'État (ou du gouvernement central). Si l'on y rajoute les dettes sociales, des collectivités locales (régions, départements, communes, ...) on obtient alors la dette publique²⁰.

1) Structure de la dette souveraine²¹

La dernière décennie a été marquée par le recours important du Trésor au marché domestique pour couvrir ses besoins de financement. En effet, l'endettement interne du Trésor a représenté, en moyenne, 78% de l'encours global durant la période 2007-2017. Ainsi, une analyse approfondie de ce marché paraît primordiale autant pour l'État que pour les investisseurs.

FIGURE 4 – Répartition de l'encours de la dette du Trésor



Source : Réalisée par l'auteur, Données du Ministère des Finances, 2007-2017.

20. Berrada, 2016.

21. Site du ministère de l'Economie et des Finances, <https://www.finances.gov.ma/fr/Pages/Statistiques.aspx?Active=Dette&m=vous%20êtes?>.

2) Bons de Trésor

Les obligations d'État ou Bons du Trésor (BDT) ne sont pas cotées en bourse et leur placement se fait à travers des intermédiaires financiers.

Les taux de rendement qui permettent l'évaluation des prix de ces titres sont publiés²² quotidiennement par BAM.

Un emprunt obligataire à taux fixe est caractérisé par les éléments suivants :

- **La valeur nominale ou faciale** : C'est la fraction du montant de l'emprunt obligataire, elle sert de base pour le calcul des intérêts, c'est également la valeur à rembourser à l'échéance.
- **Taux nominal ou facial** : C'est le taux appliqué au nominal pour le calcul des intérêts ou coupons.
- **Date d'émission** : Il s'agit de la date effective de la souscription et de la libération du titre.
- **Date de jouissance** : C'est la date à partir de laquelle les intérêts commencent à courir.
- **Date d'échéance** : C'est la date où la dette prend fin avec le paiement du principal et des intérêts.
- **Date de valorisation** : C'est la date où l'on cherche à valoriser l'obligation.
- **Maturité** : C'est la période allant de la date d'émission jusqu'au dernier remboursement.

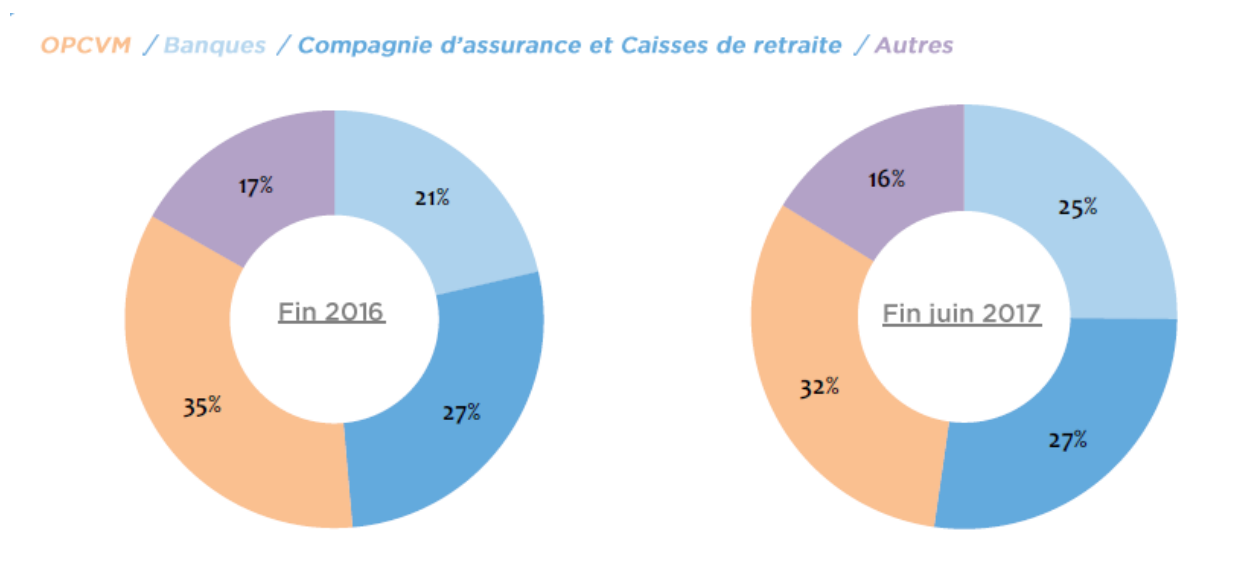
22. Site de BAM, <http://www.bkam.ma/Marches/Principaux-indicateurs/Marche-obligataire/Marche-des-bons-de-tresor/Marche-des-adjudications-des-bons-du-tresor/Resultats-des-emissions-de-bons-du-tresor>.

3) Place des OPCVM

Les OPCVM occupent une place majeure dans le marché des taux et sont parmi les acteurs principaux dans le marché de la dette. En effet, les principaux détenteurs des BDT émis par adjudication en fin 2016 et fin 2017 sont :

- Les OPCVM.
- Les compagnies d'assurances.
- Les caisses de retraites et les banques.

FIGURE 5 – Détenteurs des BDT émis par adjudication



Source : Ministère de l'Économie et des Finances, 2018

D'où l'importance d'une bonne analyse de la structure par terme des taux d'intérêt tant pour les performances des OPCVM que pour le marché de la dette.

L'une des principales sociétés de gestion d'actifs opérant dans ce marché est SogéCapital Gestion au sein de laquelle j'ai effectué mon stage.

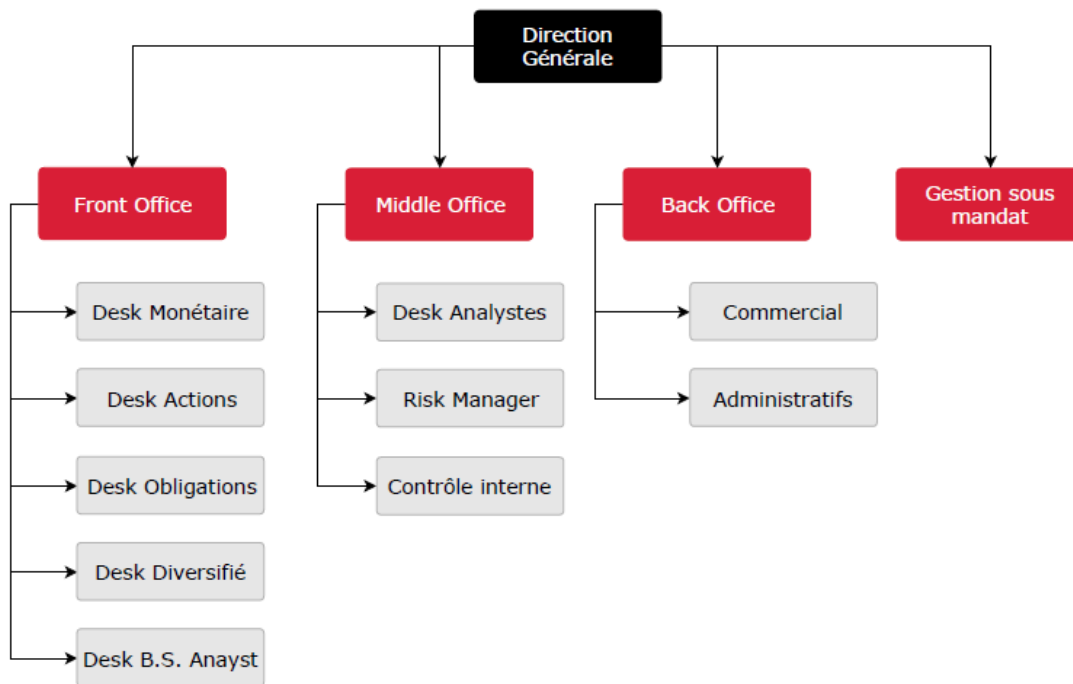
Présentation de SogéCapital Gestion :

SogéCapital gestion est la société de gestion d'actifs du Groupe Société Générale. Elle a été créée en 1995 et fait partie des premières sociétés de gestion créées au Maroc. Elle a comme activité la gestion de portefeuille de tiers à travers une gamme d'OPCVM diversifiée ainsi qu'une gestion sous mandat.

La société de gestion est organisée en trois pôles distincts à savoir le Front office qui est en charge des négociations avec le marché, le Middle office chargé de contrôler les risques et analyser les résultats, et le Back office, chargé des saisies, des contrôles comptables et du contrôle interne. Un autre pôle indépendant s'ajoute, à savoir celui de la gestion sous mandat.

L'organigramme de la société se présente ainsi :

FIGURE 6 – Organigramme de SogéCapital Gestion



Source : Réalisée par l'auteur

a) La direction générale

Le Directeur Général est le représentant de la société auprès des investisseurs et tout autre institution, il assure la définition de la stratégie de la société à court et moyen termes, il participe aux commissions d'investissement et autres.

b) Le front office

Le front office constitue littéralement l'interface de la société avec le marché. Il assure les négociations sur le marché monétaire, obligataire et boursier. Le front office de SogéCapital Gestion se compose de cinq desks :

✓ Desk monétaire

Il assure les activités de négociation avec les autres intervenants de ce marché, à savoir les banques et les autres sociétés de gestion, sur les produits monétaires ainsi que les prêts et placements de liquidité.

✓ Desk actions

Il assure le trading des actions sur le marché boursier marocain ainsi que les négociations avec les sociétés de bourse. Son objectif est la gestion des OPCVM action.

✓ Desk obligations

Il a comme responsabilité la gestion des OPCVM obligataires et ce en négociant ces obligations sur le marché obligataire marocain.

✓ Desk diversifié

Ce desk intervient sur les deux marchés obligataires et boursier afin de gérer les fonds diversifiés.

✓ Desk Buy Side Analyst

La mission de ce desk se résume en l'analyse financière des différentes sociétés

cotées afin d'aider les desks actions et diversifié lors des achats ou ventes des actions ainsi que la proposition des stratégies d'investissements.

c) Le middle office

Le middle office s'occupe de toutes les activités de contrôle et de suivi des opérations effectuées par le front office. Il effectue également les tâches de reporting et gère les relations avec l'AMMC ainsi que le dépositaire central MarocClear. Le middle office s'occupe également du contrôle interne qui a pour mission principale d'assurer la garantie du bon fonctionnement des procédures afin de limiter les risques inhérents aux activités de la société. Il assure aussi la gestion des risques à travers le desk Risk Management.

d) Le back office

Le back office assure les fonctions administratives tel que la gestion des projets et les tâches de comptabilisation. Le back office assure aussi les tâches de commercialisation des produits et de conseil des clients. Il s'agit de l'interface de la société avec les clients.

e) Gestion sous mandat

Contrairement à la gestion mutuelle, la direction gestion sous mandat assure la gestion des actifs pour des clients privés, donc elle n'est pas soumise à la même réglementation des OPCVM. La gestion concerne tous les actifs : actions, obligations et produits monétaires.

Chapitre II

Données et méthodologie

Pour procéder à la modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt, plusieurs choix s'imposent concernant le modèle adéquat, vu la panoplie de modèles existant dans la littérature, ainsi que la période considérée pour l'estimation des paramètres de ce modèle. Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord aborder les raisons et les techniques permettant le choix et l'élaboration de la base de données. Ensuite, nous allons exposer les différentes approches permettant la modélisation de la courbe des taux pour déterminer le modèle adéquat en analysant la structure des taux d'intérêt présents dans la base de données.

II.1 Base de données utilisées

Au Maroc BAM publie régulièrement une courbe des taux prenant en compte les opérations des marchés primaires et secondaires les plus récentes.

Pour chaque échéance, les taux publiés sont des taux moyens pondérés par les prix.

Dans ce mémoire, les taux utilisés sont issues des publications quotidiennes de BAM concernant les taux du marché secondaire des BDT. La période considérée est celle allant du 28/09/2010 au 19/04/2018 contenant 1878 courbes.

Cette période a été choisie pour deux raisons :²³

- Elle est suffisamment longue pour fournir les données suffisantes permettant d'utiliser les techniques de modélisation choisies.
- Elle est suffisamment courte pour s'assurer qu'il est éligible de supposer qu'il n'a pas eu de changements systématiques ou de choc pesant sur le plan économique.

On procède tout d'abord à l'élaboration de la courbe des taux actuariels pendant cette période et ce en se basant sur les techniques évoquées précédemment dans le chapitre I, à savoir l'interpolation linéaire et la conversion des taux. Pour cela, nous avons utilisé les maturités suivantes et qui constituent les ténors de la courbe : 13 semaines, 26 semaines, 1 an, 2 ans, 3 ans, 4 ans, 5 ans, 6 ans, 7 ans, 8 ans, 9 ans, 10 ans, 11 ans, 12 ans, 13 ans, 14 ans, 15 ans, 16 ans, 17 ans, 18 ans, 19 ans et 20 ans.

Ainsi notre base contient 22 maturités.

Pour expliciter la méthodologie suivie pour le calcul des taux correspondants à ces maturités, considérons l'exemple suivant de la courbe des taux du 31/05/2018.

Exemple de calcul :

Nous présentons dans la table 1 la courbe de BAM publiée le 31/05/2018.

23. BENNOUNA Hicham & BOUNADER Lahcen, 2018.

TABLE 1 – Courbe des taux du 31/05/2018

Date d'échéance	Transactions	TMP	Date de valeur	
25/06/2018	49,99	2,28%	01/06/2018	24
22/08/2018	74,97	2,25%	12/06/2018	71
19/11/2018	31,18	2,30%	11/06/2018	161
14/01/2019	91,36	2,29%	08/06/2018	220
18/05/2020	141,25	2,54%	13/06/2018	705
20/07/2020	48,83	2,55%	13/06/2018	768
17/06/2024	28,66	2,88%	13/06/2018	2196
15/06/2026	53,15	3,09%	06/06/2018	2931
19/06/2028	405,06	3,28%	12/06/2018	3660
18/07/2033	152,42	3,69%	18/06/2018	5509
04/12/2036	312,8	3,86%	01/06/2018	6761
19/02/2046	65,52	4,36%	31/05/2018	10126

Source : BAM publiée le 31/05/2018

Pour illustrer la méthode de calcul, considérons les deux maturités de 52 semaines et de 1 an(364 et 365 jours).

Les deux maturités résiduelles avoisinant ces deux maturités et considérées dans le calcul sont 220jours et 705jours qu'on note respectivement τ_1 , τ_2 ainsi que leurs taux correspondant $r_t(\tau_1) = 2.29\%$ et $r_t(\tau_2) = 2.54\%$.

- Calcul du taux de 52 semaines :On transforme $r_t(\tau_2)$ en un taux monétaire à partir de l'équation(I.8) et on procède avec une interpolation linéaire(I.6).
- Calcul du taux de 1 an :On actualise $r_t(\tau_1)$ à partir de l'équation (I.7) et on procède avec une interpolation linéaire.
- Aussi, le premier taux observé entre 8 et 13 semaines est : $r_t(\tau_0) = 2.25\%$ donc la courbe est plate jusqu'à ce point : $\forall \tau \leq \tau_0; r_t(\tau) = 2.25\%$

Ensuite, cette base sera converties par la méthode du «BootStrap» en une nouvelle base contenant les courbes des taux zéro-coupon durant toute la période considérée et qui sera celle utilisée dans le reste de cette étude.

Nous avons divisé cette nouvelle base de données en un échantillon d'apprentissage contenant les données du 28/09/2010 jusqu'au 13/10/2016 et un échantillon de test incluant la période du 14/10/2016 au 19/04/2018.

Dans tout le reste de ce mémoire, seul l'échantillon d'apprentissage est utilisé pour l'estimation des paramètres des modèles considérés et celui de test pour l'évaluation des performances des modèles.

II.2 Méthodologie

La modélisation de la structure par terme des taux d'intérêt constitue un élément primordial dans la théorie financière et a fait l'objet de plusieurs études. En effet, l'analyse quantitative des valeurs mobilières donnant lieu à des flux, dépendant de l'évolution des taux, requière de tels modèles pour le calcul de la valeur actuelle d'un paiement futur.

Dans la littérature, on peut distinguer deux approches permettant la modélisation des taux d'intérêt :

II.2.1 Approche par des modèles stochastiques

Les modèles²⁴ de cette approche se retrouvent soit dans la famille des modèles d'équilibre ou dans celle des modèles d'arbitrage. Ces modèles se basent sur des équations différentielles stochastiques pour la modélisation soit du taux court (concernant les modèles à un facteur) soit du taux court et long (concernant les modèles à deux facteurs). La littérature traitant ce types de modèles est assez abondante, nous représentons ci-après quelques exemples appartenant à cette approche.

24. FABOZZI et al., 2002, p.39-45.

1) Modèles d'équilibre

Nous pouvons distinguer parmi ces modèles celui de Vasicek²⁵ ainsi que celui de CIR(Cox Ingersoll Ross)²⁶

a) Modèle de Vasicek

Vasicek a développé un modèle à un facteur qui dépend d'une seule incertitude : le taux court, qui suit le processus stochastique suivant :

$$dr_t = \theta(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (\text{II.1})$$

où r_t correspond au taux court, θ , μ et σ sont des constantes et W_t un mouvement brownien.

- μ : Représente la moyenne à long terme du taux court.
- θ : Représente la vitesse d'ajustement du taux court actuel vers sa moyenne de long terme.
- σ : Représente la volatilité du taux court.

Cette modélisation permet de prendre en compte l'effet de retour à la moyenne constatées sur les taux d'intérêt. Toutefois, le caractère gaussien de ce modèle laisse paraître des fois des taux courts négatifs.

Pour y remédier, Cox, Ingersoll et Ross ont eu recours au processus «racine carré».

b) Modèle de CIR

Avec les mêmes notations qu'auparavant. Cox & Ingersoll & Ross ont proposé une extension du modèle de Vasicek en modélisant le taux court comme suit :

$$dr_t = \theta(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (\text{II.2})$$

25. Oldrich Vasicek, 1977, pp.177-188

26. John C. Cox & Jonathan E. Ingersoll & Stephen A. Ross, 1985, pp.385-407.

La différence entre ce modèle et celui de Vasicek réside dans le second terme (le terme de volatilité), ce qui empêche les taux d'avoir des valeurs négatives. Les auteurs de ce modèle avaient montré que si la condition $2\theta\mu \geq \sigma^2$ est vérifiée alors les taux courts seront toujours strictement positif.

2) Modèles de non arbitrage

Parmi ces modèles, on retrouve celui de Hull & White utilisé le plus souvent pour l'évaluation des dérivées de taux.

a) Modèle de Hull-White

J.Hull & A.White (1990) ont proposé dans leur article une extension aux deux modèles décrits précédemment, à savoir celui de Vasicek (II.1) et de CIR (II.2), qui tiens compte de la variation des paramètres dans le temps. Le modèle proposé pour le taux court est le suivant :

$$dr_t = [k_t + \theta_t(\mu - r_t)]dt + \sigma_t r_t^\beta dW_t \quad (\text{II.3})$$

L'équation (II.3) peut être réécrite sous la forme :

$$dr_t = \theta_t \left(\frac{k_t}{\theta_t} + \mu - r_t \right) dt + \sigma_t r_t^\beta dW_t$$

Pour le cas $\beta=0$, on retrouve une extension du modèle de Vasicek et pour $\beta=\frac{1}{2}$ une extension du modèle de CIR.

II.2.2 Approche par des modèles statistiques

Cette approche consiste à estimer la structure par terme à l'aide de techniques statistiques et n'est basée sur aucune théorie économique. Elle comprend principalement les modèles basés sur les splines et ceux basés sur une forme fonctionnelle parcimonieuse.

1) Splines

Les splines sont des polynômes par morceaux. Dans un spline de degré n , chaque segment est un polynôme de degré n . Bien qu'ils étaient déjà utilisés en mathématiques, on convient généralement que McCulloch(1971) est le fondateur des modèles de taux d'intérêt basés sur les splines. Il a en effet introduit l'utilisation des splines pour estimer la courbe des prix zéro-coupon(ZC).

La méthode des splines exponentiels développée par Fong et Vasicek (1982) se fonde sur l'hypothèse que la courbe des prix des obligations zéro-coupon a une forme exponentielle.

2) Modèles parcimonieux à forme fonctionnelle

Les modèles parcimonieux à forme fonctionnelle estiment la structure par terme à l'aide d'une fonction contenant un nombre limité de paramètres. La fonction cherche à reproduire le mieux possible l'allure de la courbe des taux tout en l'empêchant de prendre certaines formes indésirables. Les coefficients de la fonction sont déterminés par la minimisation d'une fonction objectif, qui tiens compte des erreurs quadratiques, de sorte que les prix estimés soit cohérents avec les prix des obligations observés sur le marché ou encore avec les taux.

On retrouve parmi ces modèles celui de Nelson & Siegel(1987) à 4 facteurs. Le modèle de Svensson(1994) vient augmenter la flexibilité du modèle en ajoutant deux paramètres, permettant ainsi à la courbe d'aborder un plus grand nombre de formes.

II.2.3 Choix du modèle²⁷

Pour choisir le modèle adéquat, il est primordial tout d'abord de distinguer deux motivations générales pour la modélisation des taux d'intérêt, puisque chacune des deux requiert une approche différente.

1) Valorisation des actifs financiers

La valeur $V_A(t)$ d'un actif A à un instant donné t peut être déterminée comme la valeur espérée d'un flux futur aléatoire $V_A(T)$ actualisé au présent :

$$V_A(t) = \frac{E_P(V_A(T))}{e^{\tau \cdot y_{req}}} \quad (\text{II.4})$$

avec τ représente la durée jusqu'à la maturité de l'instrument et p indique les prévisions sous la mesure de probabilité réelle. Cependant, il est difficile de modéliser y_{req} puisqu'il est par définition propre à chaque investisseur et dépend d'un instrument particulier, sa maturité, le temps et la situation du marché. De plus, la détermination de la valeur attendue $E_p(V_A(t))$ est également exigeante. C'est la raison pour laquelle une évaluation dite risque neutre a été développée. Cette approche est fondée sur l'hypothèse²⁸ selon laquelle le marché est sans arbitrage et complet, ce qui assure l'existence d'une mesure unique (neutre à l'égard du risque) équivalente à l'originale. En vertu de cette nouvelle mesure, le taux de rendement prévu de l'actif est égal au taux sans risque. Ainsi, au lieu d'exprimer la valeur future attendue sous la mesure de probabilité réelle P et un taux d'actualisation y_{req} ajusté en fonction du risque, la valeur de l'actif est obtenue en actualisant sa valeur prévue sous la nouvelle probabilité risque neutre avec un taux d'intérêt sans risque qui est supposé être égal au taux d'intérêt instantané r_t .

$$V_A(t) = \frac{E_Q(V_A(T))}{e^{\tau \cdot r_t}} \quad (\text{II.5})$$

27. FABOZZI et al, 2002, pp.27-38.

28. Yassine EL QALLI, cours de l'INSEA, 3^{ème} année d'études, Septembre 2017.

En supposant que le taux d'intérêt sans risque n'est pas fixe dans le temps, la relation (II.5) peut être généralisé sous la forme :

$$V_A(t) = E_Q \left[\frac{V_A(T)}{e^{\int_t^T r_s ds}} \right] \quad (\text{II.6})$$

Sous cette mesure risque neutre, les prix actualisés des actifs sont des martingales. Ainsi, la valeur actualisé attendue de l'instrument est égale à sa valeur actualisé actuelle (sous cette même mesure) :

$$\frac{V_A(t)}{e^{\int_0^t r_s ds}} = E_Q \left[\frac{V_A(T)}{e^{\int_t^T r_s ds}} \right] \quad (\text{II.7})$$

Pour une obligation, il est utile d'utiliser le fait que la valeur de n'importe quelle obligation à la maturité est égale au nominal ($V(T)=P(T)=1$ en terme d'un prix relatif). Notons $P_t(\tau)$ le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité $T = t + \tau$. L'équation (II.7) est simplifié de la sorte :

$$P_t(\tau) = E_Q \left[e^{-\int_t^{t+\tau} r_s ds} \right] \quad (\text{II.8})$$

Alors et d'après la relation (I.2), toute la structure par terme des taux d'intérêt découle des prix des obligations zéro-coupons.

2) Gestion de portefeuille

L'approche précédente se base sur la situation actuelle du marché pour modéliser la dynamique des taux d'intérêt (sous la mesure risque-neutre) et ainsi déterminer la valeur d'un produit dérivé, une obligation ou la structure par terme des taux d'intérêt.

Cependant, la modélisation des taux d'intérêt pour la gestion de portefeuille est basée sur une analyse du marché dans le contexte de son développement historique et propose une prévision pour son futur développement.

L'approche risque neutre considère le marché sans arbitrage tandis que l'approche du portefeuille se focalise sur les instruments financiers à inclure ou à exclure du portefeuille pour maximiser le profit ou minimiser la perte liée à la détention de quelques actifs. La gestion de portefeuille requiert une analyse des variables dans une mesure réelle de probabilité. Plutôt que de calibrer le modèle sur les données actuelles, une estimation des séries temporelles des paramètres en utilisant les vecteurs autoregressifs est une approche fréquente dans ce sens.

II.2.4 Analyse de la structure des taux

L'une des plus grandes difficultés concernant la modélisation et la prévision de la courbe des taux est le fait qu'il est nécessaire de capturer la dynamique d'un nombre important de maturités, ce qui pourrait s'avérer être une tâche assez compliquée vu la sur-paramétrisation qui en résulte. L'approche commune est de modéliser la dynamique de plusieurs facteurs latents (c'est à dire non observable) et d'en déduire les relations entre les rendements et ces facteurs. Puisque chaque partie de la courbe a une sensibilité différente par rapport aux changements des facteurs latents, il est nécessaire de permettre à plusieurs facteurs de risques d'entrer dans nos modèles.

D'après Litterman & Scheinkman²⁹, trois facteurs sont parfaitement en mesure d'expliquer la dynamique de toute la courbe. Les auteurs ont montré que ces facteurs, obtenus à l'aide d'une analyse en composantes principales expliquent plus de 98% de la variance total.

29. Robert Litterman & José Scheinkman, June 1991.

1) Analyse en composantes principales : Application

Il est nécessaire de tester tout d'abord, en utilisant l'analyse en composantes principal, si les taux utilisés dans ce mémoire peuvent être expliqué par un nombre limité de facteurs.

TABLE 2 – La variance expliquée par les composantes principales

Eigenvalues: (Sum = 22, Average = 1)					
Number	Value	Difference	Proportion	Cumulative Value	Cumulative Proportion
1	20.32401	19.15386	0.9238	20.32401	0.9238
2	1.170154	0.817507	0.0532	21.49417	0.9770
3	0.352647	0.302022	0.0160	21.84682	0.9930
4	0.050625	0.017825	0.0023	21.89744	0.9953
5	0.032800	0.013300	0.0015	21.93024	0.9968
6	0.019500	0.007058	0.0009	21.94974	0.9977
7	0.012442	0.003511	0.0006	21.96218	0.9983
8	0.008931	0.001472	0.0004	21.97111	0.9987
9	0.007458	0.002859	0.0003	21.97857	0.9990
10	0.004600	0.000933	0.0002	21.98317	0.9992
11	0.003667	0.000485	0.0002	21.98684	0.9994
12	0.003181	0.001027	0.0001	21.99002	0.9995
13	0.002154	0.000517	0.0001	21.99217	0.9996
14	0.001637	0.000262	0.0001	21.99381	0.9997
15	0.001375	7.74E-05	0.0001	21.99518	0.9998
16	0.001298	0.000303	0.0001	21.99648	0.9998
17	0.000995	0.000303	0.0000	21.99748	0.9999
18	0.000693	0.000129	0.0000	21.99817	0.9999
19	0.000564	5.16E-05	0.0000	21.99873	0.9999
20	0.000512	9.84E-05	0.0000	21.99925	1.0000

Source : Réalisée par l'auteur

Ainsi, nous remarque que les 3 premières composantes expliquent plus de 99% de la variance totale, ce qui est en concordance avec les résultats de Litterman & Scheinkman.

Les composantes principales sont obtenues par une transformation linéaire des taux utilisés dans notre étude et sont présentés comme suit :

TABLE 3 – Poids relatifs à chaque composante PCi

Eigenvectors (loadings):

Variable	PC 1	PC 2	PC 3
_10_ANS	0.219634	-0.041625	-0.174696
_11_ANS	0.219612	-0.013564	-0.212257
_12_ANS	0.219250	0.005464	-0.225396
_13_SEMAINES	0.205522	-0.220268	0.453678
_13_ANS	0.218287	0.038128	-0.261477
_14_ANS	0.217615	0.058669	-0.276710
_15_ANS	0.216014	0.103360	-0.291572
_16_ANS	0.216591	0.185291	0.000336
_17_ANS	0.211976	0.254717	0.035127
_18_ANS	0.205519	0.331926	0.137597
_19_ANS	0.196095	0.409214	0.177400
_1_AN	0.211257	-0.236664	0.265240
_20_ANS	0.171759	0.540734	0.334538
_26_SEMAINES	0.208690	-0.228340	0.372764
_2_ANS	0.214052	-0.223747	0.095477
_3_ANS	0.216703	-0.177439	0.094563
_4_ANS	0.217635	-0.164464	0.025615
_5_ANS	0.218776	-0.134022	0.008700
_6_ANS	0.219423	-0.116187	-0.053974
_7_ANS	0.220018	-0.088495	-0.081113
_8_ANS	0.219794	-0.075494	-0.117705
_9_ANS	0.220150	-0.054610	-0.151172

Source : Réalisée par l'auteur

On constate que la première composante a presque le même poids pour toutes les maturités, donc elle peut être interprétée comme le niveau de la courbe, c'est à dire qu'un changement dans cette composante induit un déplacement parallèle de la courbe.

Aussi, on remarque que les poids relatifs à la deuxième composante augmentent avec les maturités et ce à partir de la maturité 1 an. Ainsi, elle peut être considérée comme la pente de la courbe.

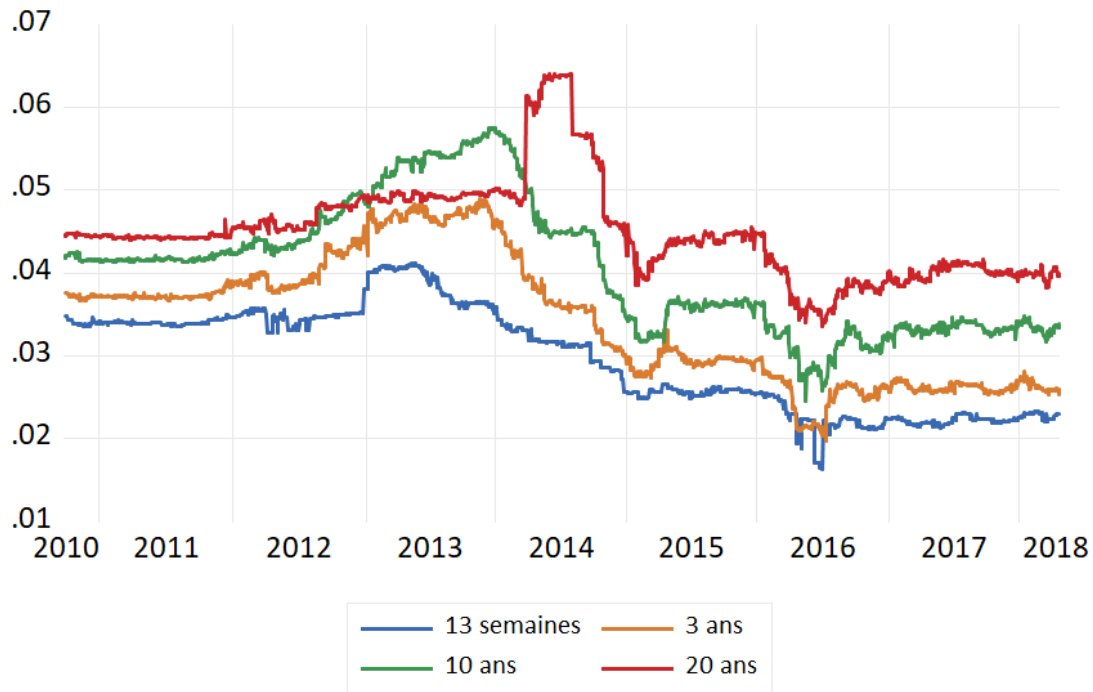
Alors que pour la troisième composante, elle peut caractériser la bosse dans la courbe. En effet, les poids correspondants diminuent puis augmentent en fonction des maturités.

2) Inter-relations entre les taux

Pour analyser la structure des taux présents dans la base de donnée et les inter-relations entre les différentes parties de la courbe, on considère les taux suivants comme référence :

- Le taux de 13 semaines pour faire référence à la partie court terme.
- Le taux de 3 ans pour faire référence à la partie moyen terme.
- Le taux de 10 ans et 20 ans pour faire référence au long terme.

FIGURE 7 – Évolution des taux zéro-coupon



Source : Réalisée par l'auteur

Pendant la période allant de l'année 2012 à 2014, le taux de 20 ans est inférieur à celui de 10 ans ce qui va à l'encontre de l'hypothèse qui stipule que chaque investisseur averse au risque demande un rendement additionnel pour investir plus loin dans la courbe. Toutefois, ce niveau bas du taux de 20 ans peut être expliqué par le manque de liquidité des titres de maturités 20 ans durant cette période et plus précisément du 30/10/2012 au 24/03/2014.

D'après le graphique, nous remarquons une non stationnarité des taux caractérisée par des coefficients d'autocorrélation de premier ordre proche de 1 et qui décroient lentement(Voir Annexe 1). Aussi,et d'après le test de stationnarité ADF, il paraît que effectivement les quatre séries des taux ne sont pas stationnaires(Voir Annexe 2). Pour évaluer les inter-relations entre les différentes parties de la courbe utilisée, nous nous sommes appuyés sur l'étude de la corrélation.

TABLE 4 – **Corrélation entre les taux**

Sample: 9/28/2010 4/19/2018
Included observations: 1878

Correlation	13 SEMAI...	3 ANS	10 ANS	20 ANS
_13_SEMAINES	1.000000			
_3_ANS	0.962216	1.000000		
_10_ANS	0.899124	0.968951	1.000000	
_20_ANS	0.626971	0.655694	0.725509	1.000000

Source : Réalisée par l'auteur

Les taux sont très corrélés entre eux avec une corrélation qui diminue pour différentes parties de la courbe.Les deux taux correspondants à la maturité la plus courte et la plus longue sont les moins corrélés avec une corrélation de l'ordre de 0.6 mais qui reste non négligeable. Cela prouve l'inter-dépendance entre les différentes parties de la courbe. Ainsi, pour la modélisation des taux présents dans notre base de donnée, on peut considérer un modèle à trois facteurs de risque influençant le niveau des taux et qui sont reliés entre eux. Comme le but de ce mémoire est de modéliser la dynamique réelle des taux d'intérêt plutôt que de calculer les prix des actifs financiers, l'approche sur laquelle nous allons nous appuyer est celle basée sur les modèles statistiques. Aussi, et comme mentionné par Duffee³⁰, les modèles affines produisent des prévisions moins pertinentes qu'en considérant un modèle de

30. Duffee,2002.

marche aléatoire pour les taux d'intérêt.

Pour cette raison, nous considérons la marche aléatoire comme benchmark puisqu'il dépasse de nombreux modèles en matière de performances de prévision malgré sa simplicité relative. De plus, un modèle ayant trois facteurs de risque est adéquat pour capter la dynamique des taux.

C'est pour cette raison que le modèle de Nelson-Siegel dynamique paraît un choix logique pour anticiper la courbe des taux.

La marche aléatoire

Pour être en mesure d'évaluer la performance de notre modèle, il est nécessaire d'introduire un modèle simple qui servira comme benchmark.

La marche aléatoire (sans constante) s'écrit de la forme :

$$y_t(\tau) = y_{t-1}(\tau) + \epsilon_{t,\tau} \quad (\text{II.9})$$

où $\epsilon_{t,\tau}$ est un bruit blanc :

$$\begin{aligned} E(\epsilon_{t,\tau}) &= 0 \\ \text{var}(\epsilon_{t,\tau}) &= \sigma_{\epsilon,\tau}^2 \\ \text{cov}(\epsilon_{t,\tau}, \epsilon_{s,\tau}) &\forall t \neq s \end{aligned}$$

Les prévisions résultant de la marche aléatoire sont très simple à obtenir, elles sont égales à la dernière observation :

$$E(y_t(\tau)) = E(y_{t-1}(\tau)) + E(\epsilon_{t,\tau}) = y_{t-1}(\tau) \quad (\text{II.10})$$

II.2.5 Le modèle de Nelson-Siegel

Dans cette partie, nous allons introduire le modèle original proposé par Nelson et Siegel et ensuite la version dynamique selon l'approche de Diebold et Li.

1) Modèle original³¹

Nelson et Siegel (1987) ont proposé une approche statistique pour la modélisation de la courbe des taux assez simple mais qui permet d'avoir plus de flexibilité dans la modélisation. Le modèle a été présenté pour les taux forward sous la forme :

$$f_t(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right) + \beta_3 \frac{\tau}{\lambda} \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right) \quad (\text{II.11})$$

Les taux zéro-coupon peuvent être dérivés à partir de l'équation précédente en utilisant la relation (I.5) pour ainsi obtenir la courbe des taux zéro-coupon.

$$\begin{aligned} y_t(\tau) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(u) du \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left(\beta_1 + \beta_2 \exp\left(-\frac{u}{\lambda}\right) + \beta_3 \frac{u}{\lambda} \exp\left(-\frac{u}{\lambda}\right) \right) du \\ &= \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right)}{\frac{\tau}{\lambda}} - \beta_3 \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour l'ajustement de la courbe des taux, le modèle de Nelson et Siegel proposé est le suivant :

$$y_t^{NS}(\tau) = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right)}{\frac{\tau}{\lambda}} - \beta_3 \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right) \quad (\text{II.12})$$

où $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et λ sont des paramètres à estimer et $\tau = T - t$ représente le temps jusqu'à la maturité.

Les trois paramètres bêtas sont d'un intérêt crucial³² puisqu'ils représentent les principales caractéristiques de la structure par terme des taux d'intérêt.

31. Charles R. Nelson & Andrew F. Siegel (1987).

32. Alors que λ est fixé de manière à assurer soit le meilleur ajustement à la courbe de rendement soit les meilleures caractéristiques des paramètres qui nous permettent d'avoir de bonnes prévisions.

- β_1 est commun pour toutes les maturités et ainsi peut être considéré comme représentant du niveau de la courbe (facteur de niveau).
- Le facteur de pondération de β_2 est décroissant avec la maturité (atteint 1 avec une maturité proche de 0 et converge vers 0 pour des maturités très grandes) en supposant que λ est positif. Un β_2 positif implique donc des taux court terme plus grand que les taux long terme et vice-versa. Ainsi, β_2 représente la pente de la courbe.
- Le facteur de pondération de β_3 est positif pour des λ positif et converge vers 0 pour les très courtes maturités (proche de 0) ainsi que pour les très longues maturités (proche de $+\infty$). La maturité pour laquelle ce facteur atteint son maximum dépend de la valeur de λ . Donc, ce facteur représente la courbure puisqu'il impacte la position d'une bosse dans la courbe.

Toutefois, même si le modèle peut incorporer plusieurs formes de la courbe des taux, il n'a servi au début qu'à l'ajustement de la structure par terme chaque jour pour obtenir les maturités manquantes.

C'est dans ce sens que Diebold et Li ont proposé que le même modèle soit utilisé pour prédire l'allure de la courbe en variant les trois paramètres(β_1 , β_2 et β_3), c'est à dire en se basant sur l'historique de leurs valeurs pour prédire leurs valeurs futurs.

2) L'approche de Diebold et Li ³³

La représentation de la courbe des taux en fonction de la maturité proposée par les auteurs est de la forme :

$$y_t^{NS}(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\left(\frac{1 - \exp(-\tau/\lambda)}{\tau/\lambda}\right) + \beta_{3t}\left(\frac{1 - \exp(-\tau/\lambda)}{\tau/\lambda} - \exp(-\tau/\lambda)\right) \quad (\text{II.13})$$

Ce qui permet l'usage du modèle original pour des fins de prévisions et d'anticipations.

33. Francis X. Diebold & Canlin Li, 2006.

a) Interprétation des trois paramètres

Les trois paramètres β_1 , β_2 et β_3 correspondants aux trois facteurs décrits précédemment représentent respectivement le paramètre de niveau, de pente et de courbure. Et chacun d'eux à une interprétation économique et financière précise.

✓ Le paramètre β_{1t} :

$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y_t^{NS}(\tau) = \beta_{1t}$ donc ce paramètre représente le taux long terme.

Aussi, une augmentation de β_{1t} induit une translation de la courbe en haut.

✓ Le paramètre β_{2t} :

$\lim_{\tau \rightarrow 0} y_t^{NS}(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}$ donc la somme des deux premier paramètres représente le taux court terme.

une augmentation de β_{2t} augmente les taux courts plus que ceux de longues maturités.

✓ Le paramètre β_{3t} :

Ce paramètre influence plutôt la courbure comme décrit précédemment.

Et une augmentation de β_{3t} augmente les taux moyen terme beaucoup plus que ceux court et long terme.

L'interprétation des paramètres est proche de celle des trois premières composantes principales de la courbe tel qu'expliqué dans II.2.3-partie 1.a.

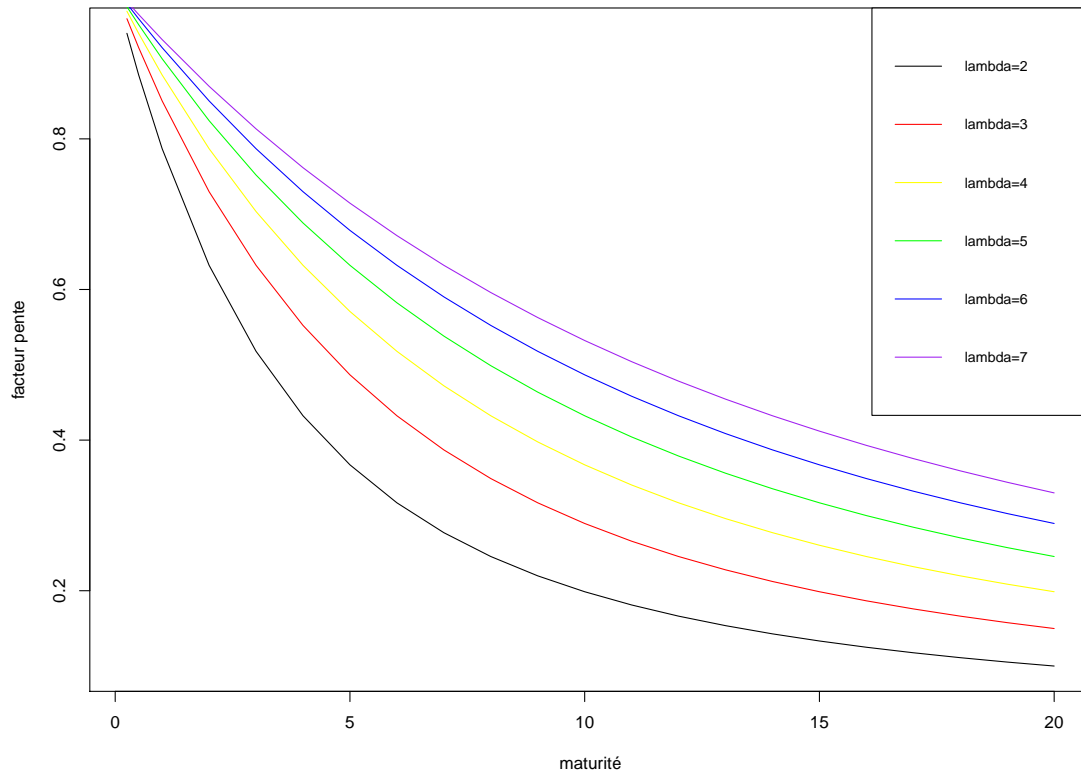
Lors de l'ajustement du modèle aux données observées, l'une des méthodes les plus fréquentes est d'estimer les paramètres séparément à l'aide des moindres carrés ordinaires en fixant la valeur du λ .

b) Le paramètre λ

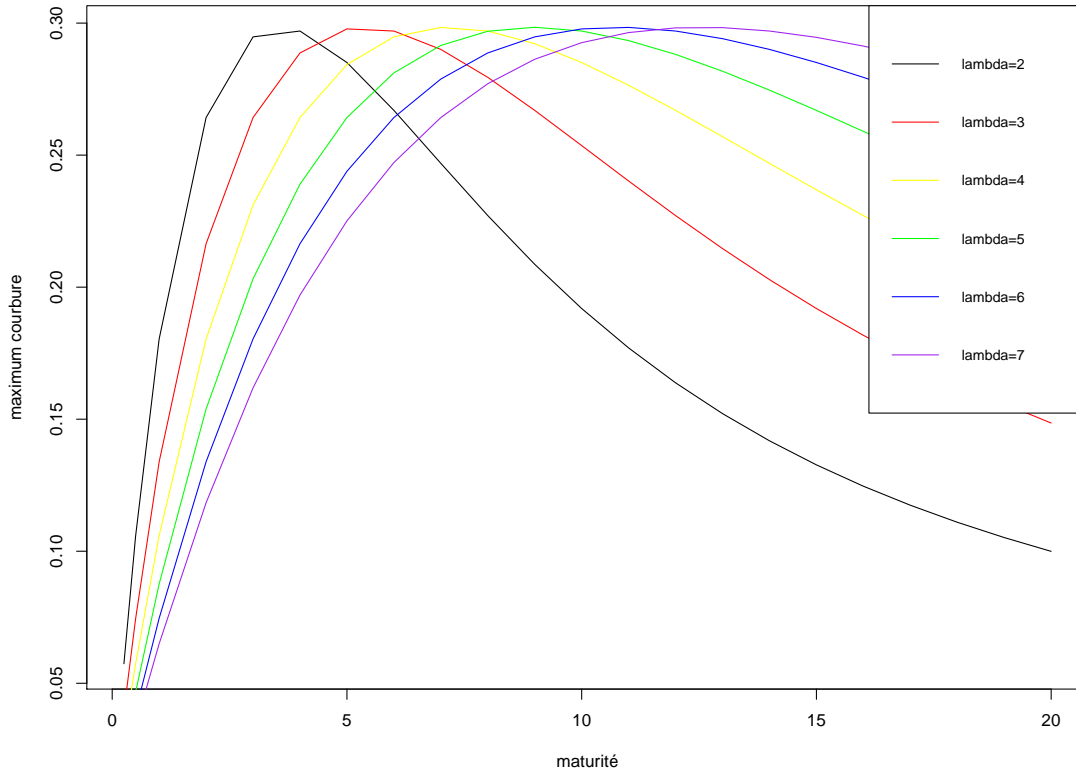
Le paramètre λ a un rôle important dans l'estimation ainsi que dans l'interprétation de la courbe. En effet, une grande valeur du λ implique une convergence lente du facteur de pente vers 0 donc une calibration de la partie longue de la courbe plus que

les autres. Il détermine aussi la maturité à laquelle le facteur de courbure atteint son maximum. Nous représentons ces deux résultats dans les deux courbes ci-dessous.

FIGURE 8 – **Vitesse de convergence du facteur de pente pour différentes valeurs de λ**



Source : Réalisée par l'auteur

FIGURE 9 – Maximum du facteur de courbure pour différentes valeurs de λ 

Source : Réalisée par l'auteur

c) La représentation état-espace

En considérant les trois paramètres décrits précédemment comme des variables latentes (non observables), les taux peuvent être déduits à partir de la dynamique qu'on spécifie pour ces variables (II.13). Parmi les modèles utilisés pour capter leur dynamique, on retrouve les modèles auto-régressifs simples AR et les vecteurs auto-régressifs VAR. Cependant, ces modèles reposent sur une hypothèse cruciale qui est celle de la stationnarité, ainsi et pour remédier à la non stationnarité des variables utilisées (Voir Annexe 2), nous proposons un modèle à correction d'erreur VECM (Voir Annexe 4) pour les paramètres de Nelson-Siegel.

La représentation état-espace est donnée comme suit :

$$y_t^{NS}(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left(\frac{1 - \exp(-\tau/\lambda)}{\tau/\lambda} \right) + \beta_{3t} \left(\frac{1 - \exp(-\tau/\lambda)}{\tau/\lambda} - \exp(-\tau/\lambda) \right) + \epsilon_{y,t}(\tau) \quad (\text{II.14})$$

$$\Delta\beta_t = M_0 + \Pi\beta_{t-1} + \Gamma_1\Delta\beta_{t-1} + \Gamma_2\Delta\beta_{t-2} + \dots + \Gamma_{p-1}\Delta\beta_{t-p+1} + \epsilon_{\beta,t} \quad (\text{II.15})$$

où $\beta_t = \begin{pmatrix} \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \\ \beta_{3t} \end{pmatrix}, M_0 = \begin{pmatrix} m_{0,1} \\ m_{0,2} \\ m_{0,3} \end{pmatrix}, \Pi$ contient les relations de cointégration et $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{p-1}$

contiennent des paramètres à estimer, $\epsilon_{y,t} = \begin{pmatrix} \epsilon_{y,t}(\tau_1) \\ \epsilon_{y,t}(\tau_2) \\ \epsilon_{y,t}(\tau_3) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \epsilon_t(\tau_K) \end{pmatrix}$ avec K (le nombre de maturités

τ présentes dans l'échantillon) et $\epsilon_{\beta,t}$ est un vecteur de dimension 3 relatif à l'erreur de calcul de (II.15).

d) La procédure d'estimation

Il ya deux approches permettant l'estimation des paramètres de Nelson-Siegel dans la représentation état-espace. Ces approches dépendent essentiellement de la manière d'estimer les paramètres des deux représentations (simultanément ou séparément) ainsi que sur l'hypothèse d'un facteur λ qui est fixe dans le temps ou qui varient dans la période d'estimation. L'une des approches utilisées est celle suivie par Diebold et Li qui consiste en deux étapes.

- En premier temps, on estime les paramètres de l'équation du modèle de Nelson-Siegel avec la méthode des moindres carrés ordinaires.
- Après avoir spécifié un modèle pour la dynamique de ces paramètres estimés en première étape, on calibre les variables de ce modèle.

Une autre approche utilisée consiste à estimer tous les paramètres des deux représentations état-espace en une seule étape. Cette approche utilise le filtre de KALMAN.

Dans le reste de cette thèse, on se base sur l'approche en deux étapes (pour pouvoir étudier l'évolution des séries des paramètres de Nelson-Siegel et choisir le modèle le plus adapté vis-à-vis des hypothèses) et avec un λ fixe pendant toute la période d'estimation.

Chapitre III

Modélisation de la courbe des taux et évaluation des performances

A l'issue du deuxième chapitre, nous avons trouvé que le modèle le plus adapté pour la modélisation de la courbe des taux, pour des fins de gestion de portefeuille, est celui de Nelson-Siegel dynamique proposé par Diebold & Li dont nous avons interprété les différents paramètres.

Dans cette partie, nous nous intéressons tout d'abord à l'estimation des paramètres de ce modèle en optant pour un λ fixe. Ensuite et pour évaluer ses performances en terme de prévision, nous avons choisi la marche aléatoire comme benchmark pour apprécier son pouvoir prédictif et ce dans l'échantillon d'apprentissage ainsi que celui consacré au test.

Pour mesurer la qualité de calibration et de prévision du modèle, nous avons considéré la somme des carrés des résidus comme métrique permettant d'évaluer l'adaptation du modèle à chacune des maturités présentes dans la base de données.

III.1 Modélisation de la courbe des taux

Pour modéliser la dynamique des taux d'intérêt, on commence par l'estimation des paramètres de Nelson-Siegel à partir de l'échantillon d'apprentissage allant du 28/09/2010 au 13/10/2016.

III.1.1 Estimation des paramètres du modèle de Nelson-Siegel

Le modèle, malgré sa simplicité relative, présente une calibration des paramètres assez compliquée du fait de son caractère non linéaire. Dans ce sens, Diebold et Li proposent de fixer le paramètre λ , ce qui simplifie l'estimation des trois paramètres de niveau, pente et courbure et permet de remédier aux problèmes liés aux valeurs initiales dans l'optimisation non linéaire et aux optimums locaux.

1) Détermination du λ

a) Approche de Diebold et Li

Diebold & Li interprètent le λ comme un paramètre qui détermine la maturité à laquelle le facteur de courbure atteint son maximum :

$$\lambda = \operatorname{argmax} \left[\frac{1 - \exp(-\tau/\lambda)}{\tau/\lambda} - \exp(-\tau/\lambda) \right] \quad (\text{III.1})$$

Les deux auteurs supposent que la courbe atteint son maximum à la maturité 2.5 ans et ainsi obtiennent le λ correspondant en annulant le terme

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{1 - \exp(-\tau/\lambda)}{\tau/\lambda} - \exp(-\tau/\lambda) \right].$$

b) Problème de colinéarité

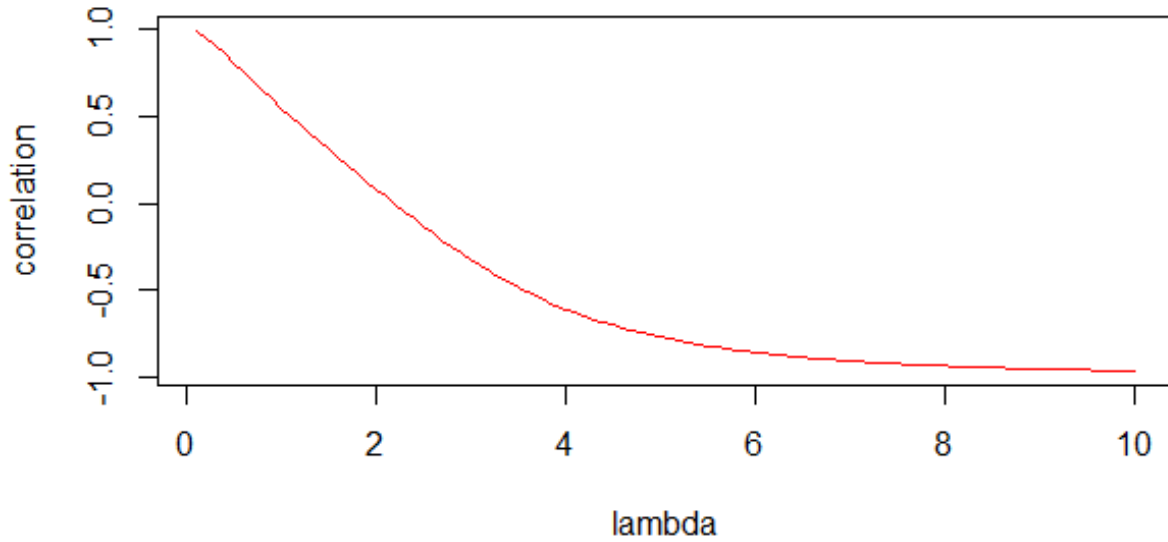
Pour certaines valeurs de λ , les facteurs de pente et de courbure deviennent trop corrélés, Cela peut causer un problème de colinéarité³⁴ au sein du modèle. Si notre but est d'approximer la courbe des taux pour des fins de valorisation d'actifs par exemple, une présence de la colinéarité n'affecte pas trop la robustesse du modèle. Même pour faire de la prévision, ce problème ne sera pas fatal puisque les régresseurs corrélés ne sont pas nécessairement un problème de prévision. Souvent, nous ne sommes pas intéressés à dissocier les effets de deux facteurs lorsque nous pouvons évaluer leur effet combiné.

34. Manfred Gilli & Stefan GroeBe & Enrico Schumann, 30 March 2010.

Cependant, si nous voulons prédire les coefficients de régression, la colinéarité peut fausser les valeurs prédites en augmentant la variance des estimateurs.

Ainsi, au lieu de s'intéresser au paramètre λ qui maximise la courbure, on le fixe plutôt pour minimiser la corrélation entre les deux facteurs de pente et de courbure.

FIGURE 10 – **La corrélation entre les deux facteurs de pente et de courbure**



Source : Réalisée par l'auteur

Notons $R_\lambda = \rho_{F_p, F_c}$ la corrélation entre F_p et F_c où :

- F_p est le facteur de pente et F_c est le facteur de courbure.

Pour trouver la valeur du paramètre λ , on procède avec une optimisation non linéaire en se basant sur les approches de quasi-Newton et précisément sur la méthode de Broyden Fletcher Goldfarb Shanno (BFGS) (annexe 3). Après optimisation, la valeur trouvée qui minimise R_λ^2 avec cette méthode sous R-studio est de 2.18.

Dans la suite de ce travail, nous considérons $\lambda=2.18$.

2) Estimation des trois paramètres β_{1t}, β_{2t} et β_{3t}

Pour l'estimation des trois paramètres β_1, β_2 et β_3 , généralement deux approches sont possibles :

- Soit en procédant par les prix, et ainsi obtenir les paramètres en minimisant l'écart entre les prix zéro-coupon calculés et ceux théoriques trouvés à partir du modèle de Nelson-Siegel.
- Soit en procédant par les taux et obtenir les trois paramètres en calibrant les taux de l'équation (II.13) avec ceux élaborés à partir de la méthode du BootStrap.

a) Approche par les prix³⁵

Cette approche peut être considérée comme la plus précise puisque les paramètres sont calibrés aux prix et ainsi ils sont bien adaptés à la situation actuelle du marché³⁶. Pour cette fin, un "pricer"³⁷ des obligations zéro-coupon a été réalisé sous VBA³⁸, ce qui a permis de calculer les prix zéro-coupon des obligations émises par le Trésor de différentes maturités. Ainsi, les paramètres sont ceux qui minimisent la somme $\sum_{i=1}^N (P_i^{Zero} - P_i^{NS})^2$ avec :

- N le nombre d'obligations à la date d'estimation.
- P_i^{Zero} le prix des obligations zéro-coupon calculés avec les taux obtenus à partir du BootStrap.
- P_i^{NS} les prix des obligations zéro-coupon calculés à partir des taux du modèle de Nelson-Siegel.

Toutefois, l'inconvénient majeur de cette approche est le nombre d'obligations toujours actives durant toute la période d'estimation. Comme on ne peut pas valoriser une obligation avant son émission ou après son échéance alors la fenêtre d'estimation qui

35. Robert Berec(2010) et F.Gbongue & F.Planchet(2015).

36. En l'absence de choc entre aujourd'hui et demain, les prix des obligations vont changer, mais c'est raisonnable d'assumer que la structure par terme de demain sera la même que celle d'aujourd'hui.

37. Une fonction automatisée sous un langage de programmation qui permet de calculer le prix d'un actif financier

38. Visual Basic for Applications.

peut nous permettre d'estimer les paramètres est la période comprise entre le maximum des dates d'émissions et le minimum des dates d'échéances d'obligations dont on dispose. C'est pour cette raison que nous avons été contraints de travailler avec les taux plutôt qu'avec les prix pour estimer nos modèles.

b) Approche par les taux³⁹

Dans cette approche, les paramètres sont obtenus en calibrant le modèle aux taux zéro-coupon.

Soit l'équation suivante :

$$y_t^{NS}(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\left(\frac{1-\exp(-\tau/\lambda)}{\tau/\lambda}\right) + \beta_{3t}\left(\frac{1-\exp(-\tau/\lambda)}{\tau/\lambda} - \exp(-\tau/\lambda)\right) + \epsilon_t(\tau).$$

où les paramètres sont les mêmes que dans le modèle (II.13).

$$\text{Notons } \beta_t = \begin{pmatrix} \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \\ \beta_{3t} \end{pmatrix}, Y_t = \begin{pmatrix} y_t^{NS}(\tau_1) \\ y_t^{NS}(\tau_2) \\ y_t^{NS}(\tau_3) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_t^{NS}(\tau_{22}) \end{pmatrix}, \epsilon_t = \begin{pmatrix} \epsilon_t(\tau_1) \\ \epsilon_t(\tau_2) \\ \epsilon_t(\tau_3) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \epsilon_t(\tau_{22}) \end{pmatrix}.$$

$$\text{et } X_t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\exp(-\tau_1/\lambda)}{\tau_1/\lambda} & \frac{1-\exp(-\tau_1/\lambda)}{\tau_1/\lambda} - \exp(-\tau_1/\lambda) \\ 1 & \frac{1-\exp(-\tau_2/\lambda)}{\tau_2/\lambda} & \frac{1-\exp(-\tau_2/\lambda)}{\tau_2/\lambda} - \exp(-\tau_2/\lambda) \\ 1 & \frac{1-\exp(-\tau_3/\lambda)}{\tau_3/\lambda} & \frac{1-\exp(-\tau_3/\lambda)}{\tau_3/\lambda} - \exp(-\tau_3/\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \frac{1-\exp(-\tau_{22}/\lambda)}{\tau_{22}/\lambda} & \frac{1-\exp(-\tau_{22}/\lambda)}{\tau_{22}/\lambda} - \exp(-\tau_{22}/\lambda) \end{pmatrix}$$

39. Diebold & Li (2006).

où : $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{22}]$ représente le panier de maturités utilisées dans cette étude (Chapitre II-partie 1).

Ainsi le modèle peut être réécrit de la façon suivante :

$$Y_t = X_t \beta_t + \epsilon_t. \quad (\text{III.2})$$

alors l'expression des estimateurs qui vérifient $\hat{\beta}_t = \text{argmin}_{\beta_t} \sum_{i=1}^{22} (y_t^{NS}(\tau_i) - y_t^{zero}(\tau_i))^2$ est donnée par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) de la forme :

$$\hat{\beta}_t = (X_t' X_t)^{-1} X_t' Y_t \text{ où } \hat{\beta}_t = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{1t} \\ \hat{\beta}_{2t} \\ \hat{\beta}_{3t} \end{pmatrix}.$$

3) Caractéristiques des estimateurs des paramètres

Le choix d'un modèle pour capter l'évolution des trois paramètres repose essentiellement sur la structure et la dynamique de ces variables.

Pour cela, nous nous sommes d'abord appuyés sur leurs statistiques descriptives pour évaluer la concordance des résultats obtenus avec leurs interprétations économiques.

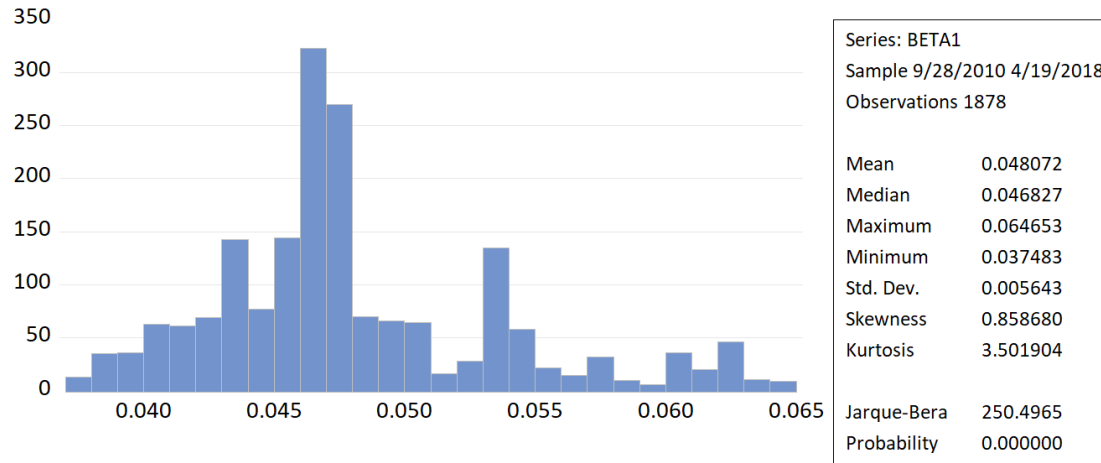
Ensuite, nous nous sommes intéressés à la stationnarité puisqu'elle constitue l'une des hypothèses importantes dans plusieurs modèles, à savoir les AR et les VAR.

a) Statistiques descriptives

Le paramètre β_{1t} :

Ce paramètre représente le taux long terme et sa dynamique pendant cette période est décrite comme suit :

FIGURE 11 – Statistiques descriptives de la série beta1



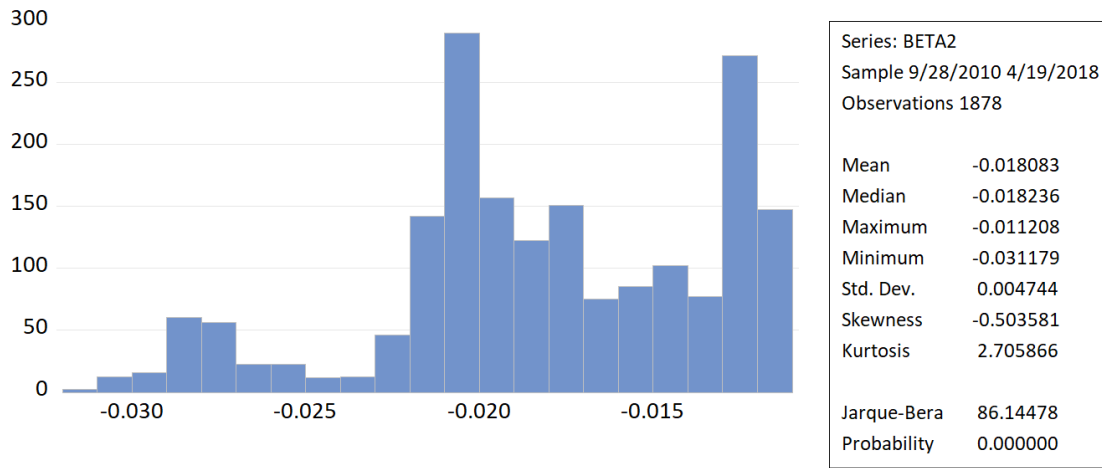
Source : Réalisée par l'auteur

Ce paramètre a atteint 3.7483% comme valeur minimale et 6.4653% comme valeur maximale. nous remarquons aussi que la distribution du premier paramètre n'est pas normale. nous remarquons aussi que la distribution du premier paramètre n'est pas normale au seuil de 5% d'après l'allure de l'histogramme et la p-value du test de Jarque-Bera. En effet, $p\text{-value}=0 < 0.05$ donc on rejette l'hypothèse nulle selon laquelle la variable est de distribution normale.

Le paramètre β_{2t} :

Ce paramètre représente la pente de la courbe et une valeur négative de cette variable caractérise une courbe de taux normale ou ascendante.

FIGURE 12 – Statistiques descriptives de la série beta2

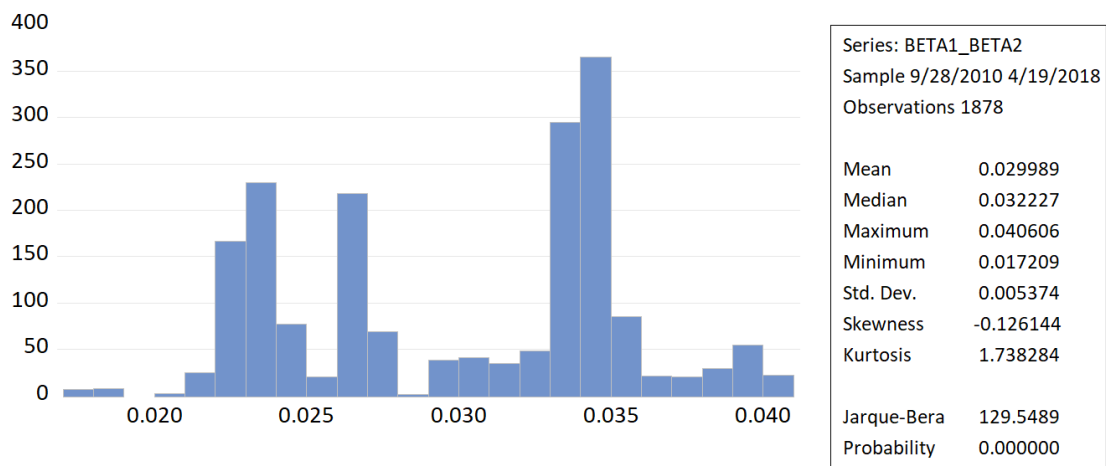


Source : Réalisée par l'auteur

Ce paramètre ne prend que des valeurs négatives durant toute la période d'estimation. ce qui confirme l'allure des courbe de taux pendant cette période qui est d'une forme ascendante. Pour analyser les valeurs représentantes du taux court terme, nous sommions les deux paramètres décrits auparavant.

Le taux court terme $\beta_{1t} + \beta_{2t}$:

FIGURE 13 – Statistiques descriptives de la série beta1+beta2

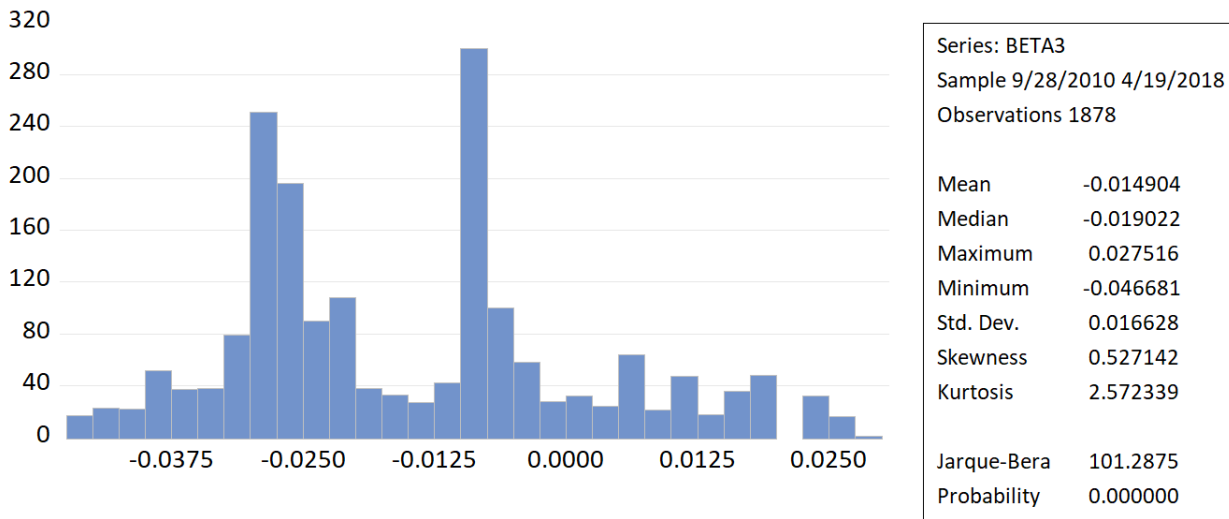


Source : Réalisée par l'auteur

Pendant la période allant du 28/09/2010 au 19/04/2018, le taux court terme prend 1.7209% comme valeur minimale et atteint 4.0606%.

Le paramètre β_{3t} :

FIGURE 14 – Statistiques descriptives de la série beta3



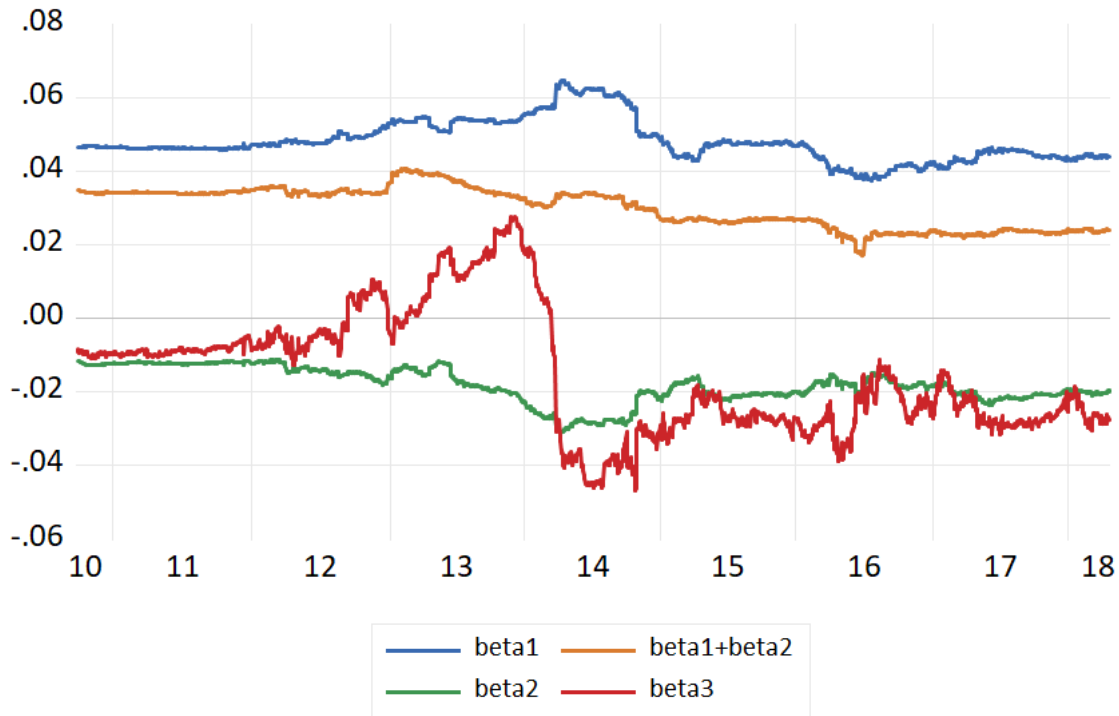
Source : Réalisée par l'auteur

On remarque que β_{3t} prend des valeurs positives et négatives, donc les courbes obtenues sont caractérisées par des bosses et des creux (que nous pouvons observer dans le cas des courbes où les taux commencent à diminuer dans la partie longue de la courbe).

b) Stationnarité

L'une des propriétés importantes dans la modélisation des séries chronologiques est la stationnarité. L'évolution des trois paramètres β_{1t} , β_{2t} et β_{3t} montre une non-stationnarité de ces variables dans la période allant du 28/09/2010 au 19/04/2018 (figure 15).

FIGURE 15 – Évolution des paramètres



Source : Réalisée par l'auteur

Pour tester la stationnarité de ces trois paramètres, nous nous sommes basés sur le test de Dickey-Fuller augmenté(annexe 4).

Les résultats de ce test ont montré une non-stationnarité des trois paramètres en niveau(annexe 2-(table 25,table 26 et table 27)) et une stationnarité pour ces variables en différence première(annexe 2-(table 28, table 29 et table 30)).

Ainsi, pour pouvoir capter la dynamique de ces variables et modéliser leur évolution dans le temps, nous avons considéré un vecteur auto-régressif à correction d'erreur (annexe 4) qui corrige ce problème de non stationnarité et permet d'intégrer des relations entre les trois paramètres β_{1t}, β_{2t} et β_{3t} dites relations de cointégration.

III.1.2 Estimation et validation du modèle VECM⁴⁰

Dans cette partie et comme décrit dans l'annexe 4, nous allons procéder selon la démarche suivante :

- **Étape 1** : Test de stationnarité sur les séries pour déterminer s'il ya possibilité de cointégration ou non.
- **Étape 2** : Si le test de stationnarité montre que les séries sont intégrées d'un même ordre, il y a alors risque de cointégration. Dans ce cas, on peut envisager l'estimation d'un modèle VECM. Pour cela, on commence par déterminer le nombre de retards p du modèle VAR(p) à l'aide du calcul de l'AIC.
- **Étape 3** : Mise en place du test de Johansen permettant de connaître le nombre de relations de cointégration.
- **Étape 4** : Identification des relations de cointégration.
- **Étape 5** : Estimation des paramètres et validation du modèle.

Comme tous les paramètres sont intégrés d'ordre 1 alors nous procédons au test de cointégration entre les variables. Pour cela, nous commençons par déterminer le nombre de retards optimal en se basant sur le modèle VAR.

40. Arthur Charpentier, Volume 2.

1) Nombre de retards optimal

Le choix du nombre de retard est primordial pour l'estimation ainsi que pour la détermination du nombre de relations de cointégration.

TABLE 5 – Nombre de retards optimal

VAR Lag Order Selection Criteria
Endogenous variables: BETA1 BETA2 BETA3
Exogenous variables: C
Date: 06/19/18 Time: 18:24
Sample: 9/28/2010 10/13/2016
Included observations: 1495

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	16022.53	NA	9.89e-14	-21.43080	-21.42015	-21.42683
1	28913.34	25712.65	3.24e-21	-38.66400	-38.62138*	-38.64812*
2	28926.95	27.09978	3.22e-21	-38.67017	-38.59558	-38.64238
3	28935.12	16.22530	3.23e-21	-38.66906	-38.56251	-38.62936
4	28959.04	47.42217	3.16e-21	-38.68902	-38.55050	-38.63740
5	28965.24	12.26386	3.18e-21	-38.68527	-38.51478	-38.62175
6	28982.72	34.52238*	3.14e-21*	-38.69662*	-38.49417	-38.62118
7	28987.99	10.38849	3.16e-21	-38.69163	-38.45721	-38.60429
8	28994.17	12.14148	3.17e-21	-38.68785	-38.42147	-38.58860

* indicates lag order selected by the criterion
LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)
FPE: Final prediction error
AIC: Akaike information criterion
SC: Schwarz information criterion
HQ: Hannan-Quinn information criterion

Source : Réalisée par l'auteur

Le nombre de décalage retenu est $p=6$ pour l'AIC et la plupart des critères.

2) Relations de cointégration

Nous nous sommes appuyé sur le test de cointégration de Johansen (annexe 4) qui permet l'estimation de toutes les relations de cointégration et construit une série de tests statistiques pour tester les hypothèses sur le nombre de vecteurs cointégrants existants et leur fonctionnement dans le système.

TABLE 6 – Nombre de relations de cointégration

Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)				
Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.015656	49.15307	29.79707	0.0001
At most 1 *	0.009992	19.61264	15.49471	0.0113
At most 2	0.000435	0.814376	3.841466	0.3668
Trace test indicates 2 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level				
* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level				
**Mackinnon-Haug-Michelis (1999) p-values				

Source : Réalisée par l'auteur

Alors d'après le test, il existe deux relations de cointégration entre les trois paramètres β_{1t}, β_{2t} et β_{3t} donc nous optons pour un modèle VECM et non un modèle VAR. Pour identifier ces relations, nous procédons à l'estimation des paramètres du modèle VECM.

3) Estimation des paramètres

Le modèle considéré est un vecteur autoregressif à correction d'erreur d'ordre $p=5$. Tout d'abord, nous nous intéressons aux relations de cointégration entre les variables.

TABLE 7 – Relations de cointégration

Sample (adjusted): 10/06/2010 10/13/2016
Included observations: 1497 after adjustments
Standard errors in () & t-statistics in []

Cointegrating Eq:	CointEq1	CointEq2
BETA1(-1)	1.000000	0.000000
BETA2(-1)	0.000000	1.000000
BETA3(-1)	-0.670792 (0.14843) [-4.51927]	0.004017 (0.05962) [0.06738]
C	-0.057471	0.017612

Source : Réalisée par l'auteur

Ainsi, les deux relations de cointégration CointEq1 et CointEq2 concernent respectivement les paramètres β_{1t}, β_{3t} et β_{2t}, β_{3t} . Ces relations représentent les termes d'erreur qui ajustent le modèle. Ces équations sont définies comme suit :

$$\text{CointEq1} = \beta_{1,t-1} - 0.670792 \beta_{3,t-1} - 0.057471$$

$$\text{CointEq2} = \beta_{2,t-1} + 0.004017 \beta_{3,t-1} + 0.017612$$

Comme la sortie l'indique en annexe, les coefficients correspondants à CointEq1 et CointEq2 sont tous significatifs au seuil de 5% (leurs statistiques sont supérieur en valeur absolue à 1.96) sauf le coefficient de CointEq2 dans l'équation de β_{2t} . Nous pouvons donc nous attendre à avoir une bonne adéquation du modèle.

4) Validation du modèle

Nous validons notre modèle en effectuant des tests sur l'hétéroscédasticité des résidus et sur la stabilité des coefficients du modèle.

- ✓ **Test d'hétéroscédasticité** : nous nous basons sur le test de White qui a pour hypothèse nulle l'absence d'hétéroscédasticité.

TABLE 8 – Test de White pour l'hétéroscédasticité des erreurs

Sample: 9/28/2010 10/13/2016
Included observations: 1497

Joint test:					
Chi-sq	df	Prob.			
205.6532	204	0.4544			
Individual components:					
Dependent	R-squared	F(34,1462)	Prob.	Chi-sq(34)	Prob.
res1*res1	0.021391	0.939914	0.5681	32.02215	0.5649
res2*res2	0.024690	1.088548	0.3343	36.96098	0.3338
res3*res3	0.022767	1.001796	0.4659	34.08243	0.4638
res2*res1	0.021635	0.950876	0.5498	32.38757	0.5467
res3*res1	0.021037	0.924045	0.5945	31.49291	0.5911
res3*res2	0.023398	1.030233	0.4208	35.02728	0.4191

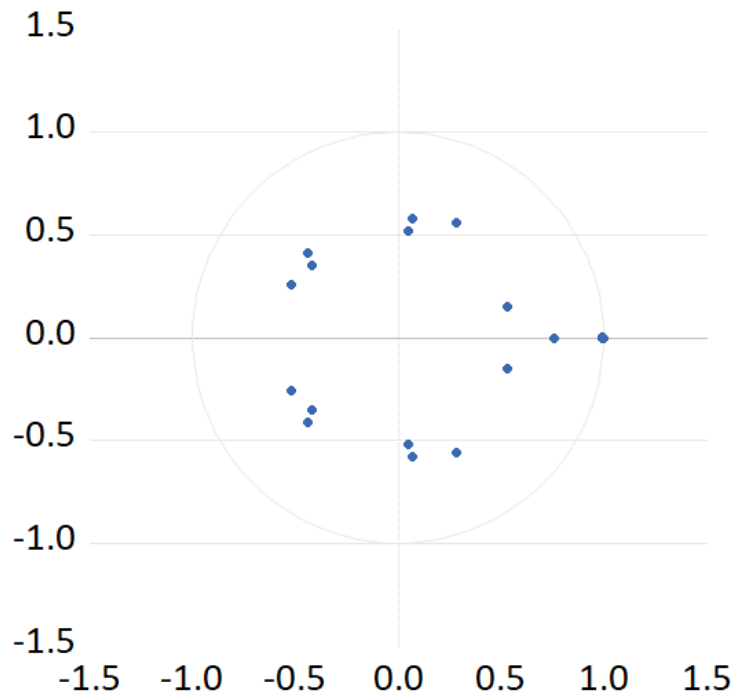
Source : Réalisée par l'auteur

La p-value du test(0.4544) est largement supérieur à 5% donc nous acceptons l'hypothèse nulle et le risque d'hétéroscédasticité est écarté.

✓ Stabilité du modèle :

FIGURE 16 – Stabilité du modèle

Inverse Roots of AR Characteristic Polynomial



Source : Réalisée par l'auteur

La représentation graphique de l'inverse des racines du polynôme caractéristique du modèle montre que les racines sont à l'intérieur du cercle unité donc le modèle satisfait la condition de stabilité.

III.2 Évaluation des performances

Dans cette partie, nous allons évaluer le modèle de Nelson-Siegel considéré.

Tout d'abord, nous allons nous intéresser à la mesure de la qualité d'ajustement du modèle, pour $\lambda=2.18$, aux différentes courbes de taux observées pendant la période du 28/09/2010 au 19/04/2018. Ensuite, nous allons apprécier le pouvoir de prévision du modèle dans les deux échantillons d'apprentissage et de test en le comparant aux réalisations du modèle naïve qui est celui de la marche aléatoire.

III.2.1 Ajustement du modèle

Pour évaluer la qualité d'ajustement du modèle, nous élaborons tout d'abord les écarts entre les taux observés(issus à partir de la méthode du BootStrap) et ceux estimés à partir du modèle de Nelson-Siegel. Après, nous allons effectuer une évaluation de son ajustement par période.

Pour ce faire, nous allons utiliser la somme des carrés des résidus entre les taux zéro-coupon réellement observés et ceux estimés. Cet écart sera divisé par 0.01% pour approcher son étendue en point de base⁴¹.

$$SCR(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^K (y_i^{Zero} - y_i^{NS})^2}{0.01\%} \quad (III.3)$$

avec $K=1878$ et τ correspond aux différentes maturités considérées dans la base de données (Chapitre II-partie 1).

41. Un point de base est définie comme 0.01%, c'est la mesure utilisée pour les taux d'intérêt.

Nous représentons ci-dessous les résultats obtenus sur toute la période considérée.

TABLE 9 – **Ajustement du modèle**

Maturité	SCR en pb
13 semaines	11.456249
26 semaines	3.718021
1 an	3.321220
2 ans	35.006875
3 ans	25.436020
4 ans	15.101564
5 ans	14.417633
6 ans	4.932321
7 ans	9.752891
8 ans	13.301985
9 ans	17.447781
10 ans	33.891518
11 ans	29.901402
12 ans	39.126266
13 ans	37.314345
14 ans	46.581264
15 ans	41.374428
16 ans	6.542536
17 ans	16.114754
18 ans	31.854359
19 ans	58.072120
20 ans	139.678306

Source : Réalisée par l'auteur à partir des sorties R-studio.

Ainsi, nous constatons que globalement le modèle réalise un bon ajustement aux taux zéro-coupon observés sauf pour celui de maturité 20 ans. En effet et Comme déjà mentionné dans le chapitre II, ce titre était illiquide durant cette période, ce qui a causé de fortes fluctuations dans son rendement (annexe 6).

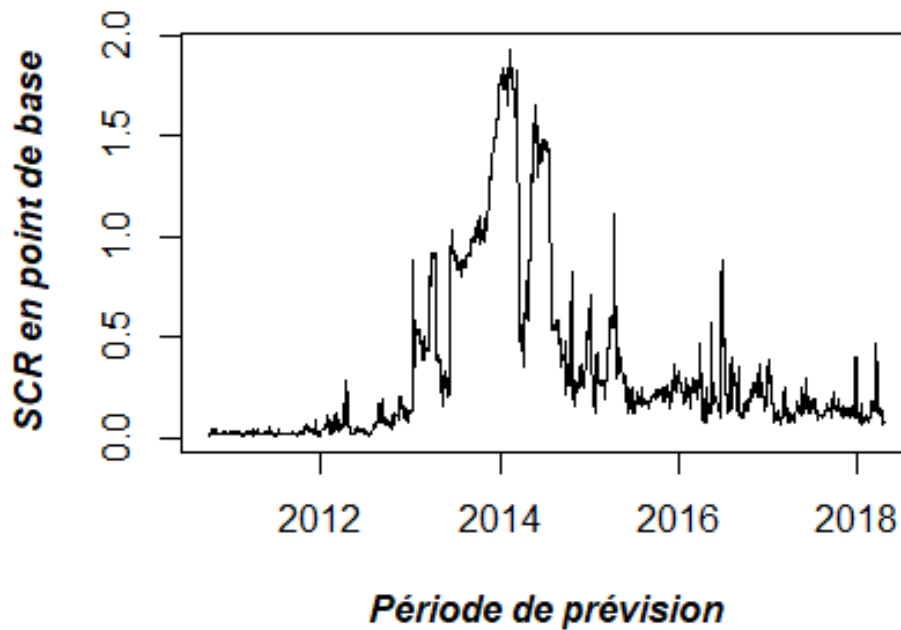
Toutefois, Pour évaluer l'ajustement du modèle aux courbes des taux observées durant la période du 28/09/2010 au 19/04/2018, nous nous basons sur l'évolution de la somme des

carrés des écarts des différentes maturités pour chaque date incluse dans la période décrite.

$$SCR_t = \frac{\sum_{i=1}^{22} (y_i^{Zero} - y_i^{NS})^2}{0.01\%}. \quad (III.4)$$

Nous représentons ci-dessous le graphique représentant l'évolution de la somme des carrés des résidus pendant cette période.

FIGURE 17 – **Variation de l'ajustement du modèle :**



Source : Réalisée par l'auteur à partir de R-studio

D'après le graphique, nous remarquons une hausse très significative des écarts durant la période qui précède l'année 2014. Cette augmentation est due principalement à la variation brusque à la hausse des taux d'intérêt. En effet ⁴², les taux des bons du Trésor ont affiché une tendance haussière malgré une politique monétaire accommodante.

42. Bennouna Hicham & Bounader Lahcen, 2018

III.2.2 Performances de prévision

Pour apprécier le pouvoir prédictif du modèle VECM soit dans l'échantillon d'apprentissage ou dans celui de test, nous nous sommes basés sur la somme des carrés d'écarts entre les taux zéro-coupon et ceux prédits à partir de ce modèle. Mais avant d'entamer cette analyse, nous avons jugé pertinent de comparer les performances en matière de prévision des paramètres β_{1t}, β_{2t} et β_{3t} du modèle VECM, qui tiens en compte la non stationnarité des variables, et VAR.

1) Comparaison entre le modèle VECM et VAR

Certains auteurs⁴³ définissent des dynamiques pour les trois paramètres de type AR et VAR sans effectuer des tests statistiques préalables pour détecter une possibilité de non-stationnarité concernant ces variables ou travaillent avec des paramètres en différence première⁴⁴ pour y remédier sans vérifier l'existence de cointégration entre ces variables. C'est dans ce sens que N.Gospodinov⁴⁵ et al ont montré que les pré-tests de stationnarité et de cointégration augmentent le pouvoir prédictif des modèles.

D'après table 9 et table 10, nous remarquons que pour l'échantillon d'apprentissage, le VECM prédit les valeurs des paramètres bêtas mieux que le modèle VAR d'après la racine de la moyenne des carrés d'écarts (RMSE).

Cependant, d'après table 11 et table 12, le modèle VECM perd en précision sauf pour le paramètre β_{2t} .

43. Diebold & Li(2006) et Michiel de Pooter(2007).

44. Thalia Petousis,2014.

45. Nikolay Gospodinov & Ana Maria Herrera & Elena Pesavento, February 2013.

TABLE 10 – performance du modèle VAR pour les bêtas dans l'échantillon

Sample: 9/28/2010 10/13/2016
Included observations: 1503

Variable	Inc. obs.	RMSE	MAE	MAPE	Theil
BETA1	1503	0.006354	0.004675	10.10098	0.065928
BETA2	1503	0.004975	0.003964	22.19526	0.138737
BETA3	1503	0.017544	0.013177	164.4723	0.450500

RMSE: Root Mean Square Error

MAE: Mean Absolute Error

MAPE: Mean Absolute Percentage Error

Theil: Theil inequality coefficient

Source : Réalisée par l'auteur

TABLE 11 – performance du modèle VECM pour les bêtas dans l'échantillon

Sample: 9/28/2010 10/13/2016
Included observations: 1503

Variable	Inc. obs.	RMSE	MAE	MAPE	Theil
BETA1	1503	0.006252	0.004585	9.891290	0.064903
BETA2	1503	0.004769	0.003788	20.93959	0.131931
BETA3	1503	0.017206	0.012687	174.4010	0.429547

RMSE: Root Mean Square Error

MAE: Mean Absolute Error

MAPE: Mean Absolute Percentage Error

Theil: Theil inequality coefficient

Source : Réalisée par l'auteur

TABLE 12 – performance du modèle VAR pour les bêtas dans l'échantillon

Sample: 10/14/2016 4/19/2018 Included observations: 375					
Variable	Inc. obs.	RMSE	MAE	MAPE	Theil
BETA1	375	0.003948	0.003425	8.599059	0.047027
BETA2	375	0.002567	0.002304	12.71240	0.066442
BETA3	375	0.005158	0.004154	14.45315	0.094437
RMSE: Root Mean Square Error MAE: Mean Absolute Error MAPE: Mean Absolute Percentage Error Theil: Theil inequality coefficient					

Source : Réalisée par l'auteur

TABLE 13 – performance du modèle VECM pour les bêtas dans l'échantillon

Sample: 10/14/2016 4/19/2018 Included observations: 375					
Variable	Inc. obs.	RMSE	MAE	MAPE	Theil
BETA1	375	0.004054	0.003504	8.833466	0.048334
BETA2	375	0.001700	0.001483	7.695378	0.042995
BETA3	375	0.006770	0.005819	18.73900	0.120018
RMSE: Root Mean Square Error MAE: Mean Absolute Error MAPE: Mean Absolute Percentage Error Theil: Theil inequality coefficient					

Source : Réalisée par l'auteur

2) Pouvoir prédictif du modèle VECM

Pour évaluer la qualité de prévision du modèle, nous le comparons aux réalisations du modèle de la marche aléatoire, qui malgré sa simplicité dépasse⁴⁶ le pouvoir prédictif de nombreux modèles beaucoup plus complexes.

Nous allons tout d’abord mesurer et comparer la somme des résidus entre les taux-zéro coupon réellement observés à ceux estimés pendant la période allant du 28/09/2010 au 13/10/2016 pour les deux modèles considérés. Ensuite nous allons tester le modèle dans l’échantillon test. Dans toute la suite de ce chapitre, DNS signifie le modèle de Nelson-Siegel dynamique et RW celui de la marche aléatoire.

46. Duffee, November 2002

a) Performances dans l'échantillon d'apprentissage

Nous avons considéré des horizons de prévision d'un mois et de trois mois pour comparer la performance des deux modèles durant cette période pour toutes les maturités concernées.

TABLE 14 – **SCR pour un horizon d'un mois dans l'échantillon d'apprentissage**

Maturité	SCR en pb DNS	SCR en pb RW
13 semaines	24.09034	30.45156
26 semaines	21.65390	31.59041
1 an	22.87806	31.42837
2 ans	58.29440	54.90338
3 ans	47.34094	49.09226
4 ans	42.80615	51.12003
5 ans	41.47760	49.84089
6 ans	28.79349	49.91497
7 ans	27.23143	47.81242
8 ans	27.94867	52.30979
9 ans	27.76287	49.07692
10 ans	41.99439	62.40396
11 ans	39.22610	54.41244
12 ans	45.77206	56.16301
13 ans	49.90870	62.87897
14 ans	57.32541	65.19308
15 ans	57.40078	73.53699
16 ans	25.51737	43.31040
17 ans	39.90436	47.93616
18 ans	56.66891	57.91308
19 ans	88.48434	66.37722
20 ans	187.30875	111.30864
Total	1059.789	1198.975

Source : Réalisée par l'auteur à partir des sorties R-studio

TABLE 15 – **SCR pour un horizon de trois mois dans l'échantillon d'apprentissage**

Maturité	SCR en pb DNS	SCR en pb RW
13 semaines	78.20362	100.5930
26 semaines	81.41617	119.1708
1 an	81.36553	130.7812
2 ans	144.45483	222.8362
3 ans	124.54562	193.5196
4 ans	128.11253	221.6274
5 ans	121.83602	209.5587
6 ans	118.00173	231.8355
7 ans	112.40727	220.9479
8 ans	120.21066	246.9577
9 ans	117.77901	241.2662
10 ans	143.31364	290.2744
11 ans	126.49603	258.8481
12 ans	136.39504	275.9281
13 ans	128.70977	258.5546
14 ans	135.97122	269.5111
15 ans	125.69421	248.7403
16 ans	88.98997	184.9860
17 ans	92.15915	176.1284
18 ans	109.61454	210.6776
19 ans	129.76348	218.9463
20 ans	233.18523	472.1319
Total	2678.625	5003.821

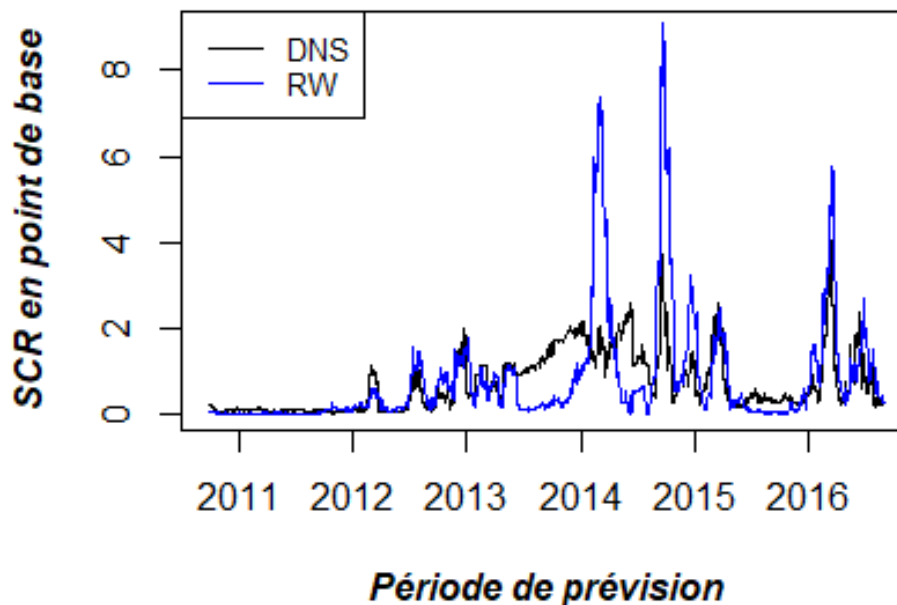
Source : **Réalisée par l'auteur à partir des sorties R-studio**

D'après la table 14, nous remarquons que, pour un horizon de prévision d'un mois, le modèle de Nelson-Siegel a globalement des performances meilleures que celles obtenues avec la marche aléatoire.

Pour les deux maturités 19 ans et 20 ans, la somme des écarts pour le modèle DNS dépasse largement celle du modèle RW, ce qui pourrait se justifier par une mal calibration des taux correspondants à ces deux maturités(table 9). Cependant, pour un horizon de prévision de trois mois(table 15), le modèle de Nelson-Siegel est plus performant que

le modèle naïve et ce pour toutes les maturités. Pour évaluer le pouvoir prédictif des deux modèles du 28/09/2010 au 13/10/2016, nous calculons le carré des écarts entre les différentes maturités constituant la courbe des taux à chaque moment donné.

FIGURE 18 – Variation de la performance des modèles DNS et RW dans l'échantillon pour un horizon d'un mois :

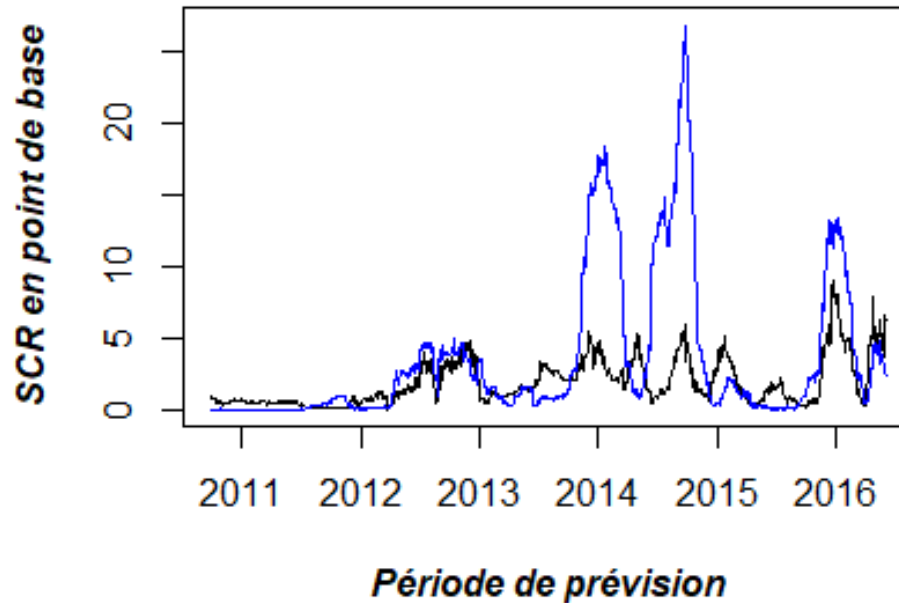


Source : Réalisée par l'auteur à partir de R-studio

Lors de la période de 2011 jusqu'à 2013, le niveau des taux d'intérêt était relativement stable, c'est pour cette raison que les prévisions du modèle RW étaient meilleure que celles du DNS puisque la marche aléatoire se base sur la dernière valeur observée. Cependant, lorsque les taux commencent à avoir une tendance baissière⁴⁷ de 2014 à 2015, le modèle RW a dépassé un écart de 8 points de base.

47. Bennouna Hicham & Bounader Lahcen, 2018.

FIGURE 19 – Variation de la performance des modèles DNS et RW dans l'échantillon pour un horizon de 3 mois :



Source : Réalisée par l'auteur à partir de R-studio

De même, nous remarquons que le modèle DNS obtient des performances assez satisfaisantes comparé au modèle RW qui atteint des écarts explosifs dépassant 25 points de base pendant la même période baissière des taux d'intérêt.

b) Performances dans l'échantillon de test

Pour s'assurer de la bonne adéquation du modèle à des périodes autre que celle dans laquelle il a été estimé, nous testons ses performances dans la période allant du 14/10/2016 au 19/04/2018 et ce pour deux horizons de prévision, à savoir un mois et 3 mois.

TABLE 16 – **SCR pour un horizon d'un mois dans l'échantillon de test**

Maturité	SCR en pb DNS	SCR en pb RW
13 semaines	2.032104	1.712207
26 semaines	1.470252	1.877892
1 an	5.263974	1.938373
2 ans	17.161222	2.535866
3 ans	12.347540	2.440713
4 ans	10.330954	3.699824
5 ans	4.950104	3.091903
6 ans	3.311822	3.284574
7 ans	2.156031	3.213423
8 ans	1.912059	3.397709
9 ans	1.699020	2.968792
10 ans	1.971363	3.308467
11 ans	1.806232	3.775758
12 ans	2.320693	4.793634
13 ans	2.319767	4.403756
14 ans	2.735040	4.246033
15 ans	2.787590	3.636148
16 ans	4.187700	3.356793
17 ans	5.496799	3.503848
18 ans	8.219185	2.941514
19 ans	9.683813	3.235608
20 ans	11.707460	2.494531
Total	115.8707	69.85737

Source : Réalisée par l'auteur à partir des sorties R-studio

Nous constatons d'après la table 16 que la marche aléatoire réalise globalement des performances meilleures que celles du modèle de Nelson-Siegel pour la plupart des maturités pour une durée de prévision d'un mois.

Pour un horizon de prévision de 3 mois dans cette période, les sommes des carrés des résidus du modèle DNS sont largement supérieures à celles du modèle de la marche aléatoire.

En effet, les rendements des bons du Trésor ont connu une tendance baissière en début d'année de 2016 du à la baisse du taux directeur.

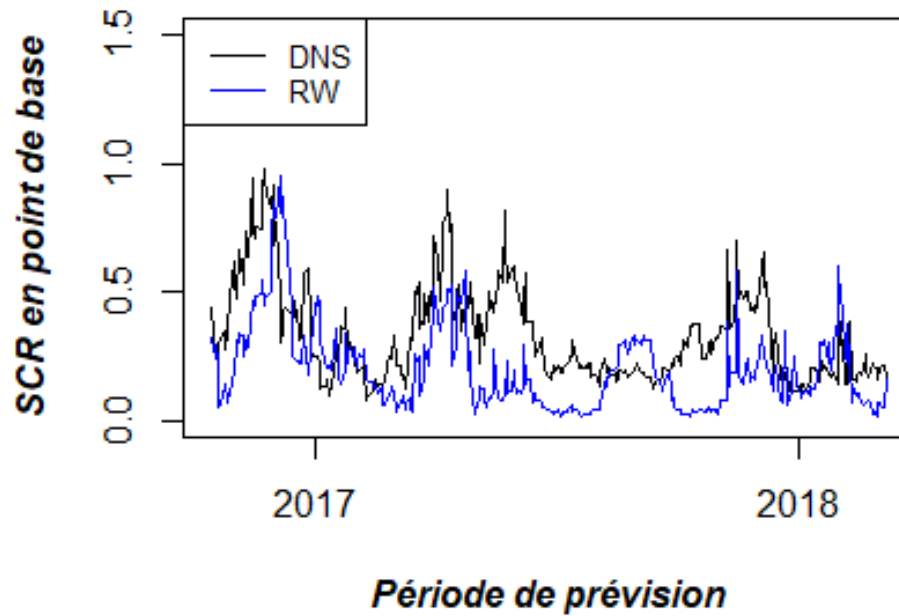
TABLE 17 – **SCR pour un horizon de trois mois dans l'échantillon de test**

Maturité	SCR en pb DNS	SCR en pb RW
13 semaines	2.162191	1.611700
26 semaines	5.336137	1.445220
1 an	15.818366	1.383008
2 ans	37.463038	1.572023
3 ans	33.110981	1.418388
4 ans	31.078223	1.999476
5 ans	21.200147	2.387855
6 ans	15.866897	2.361166
7 ans	10.634413	3.953052
8 ans	8.100591	2.665882
9 ans	6.665250	3.784741
10 ans	6.120129	3.668389
11 ans	7.402611	5.693187
12 ans	9.331301	6.789660
13 ans	12.065839	10.140141
14 ans	12.373786	7.243517
15 ans	14.415408	9.403080
16 ans	16.101698	6.651113
17 ans	20.156729	8.880096
18 ans	22.870070	5.777755
19 ans	26.337232	7.491665
20 ans	27.883348	5.242465
Total	362.4944	101.5636

Source : Réalisée par l'auteur à partir des sorties R-studio

Le modèle RW est plus performant que le modèle DNS en matière d'ajustement avec les courbes de taux observées pour chaque date durant la période 2016-2018 pour une prévision d'un mois (figure 20).

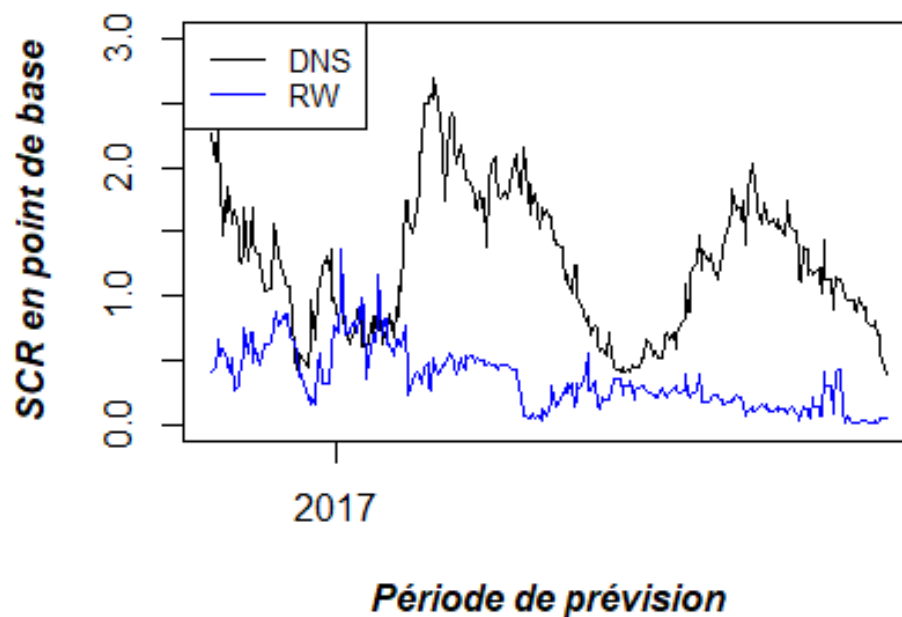
FIGURE 20 – Variation de la performance des modèles DNS et RW hors échantillon pour un horizon d'un mois :



Source : Réalisée par l'auteur à partir de R-studio

Pour un horizon de prévision de 3 mois, la marche aléatoire dépasse largement les performances du modèle de Nelson-Siegel durant toute la période de test et surtout à partir de l'année 2017 qui a été marquée par une stabilité des rendements et une synchronisation entre les taux souverains et le taux directeur. Cela favorise un modèle, qui considère que les taux futurs caractérisant les bons du Trésor ne sont d'autre que les derniers rendements de ces titres, tel que la marche aléatoire.

FIGURE 21 – Variation de la performance des modèles DNS et RW hors échantillon pour un horizon d'un mois :



Source : Réalisée par l'auteur à partir de R-studio

Conclusion

Ce travail est une étude portant sur la modélisation de la courbe des taux pour la période allant du 28/09/2010 au 19/04/2018. Une analyse en composantes principales de la structure des taux présents dans cette base nous a permis de conclure que plus de 99% de la variance totale est expliquée par trois facteurs, ce qui a prouvé l'adéquation du modèle de Nelson-Siegel dans notre cas. Pour estimer les paramètres, nous avons opté pour un λ fixe durant toute la période d'estimation et qui minimise la corrélation entre les deux facteurs de pente et de courbure pour pouvoir obtenir les trois paramètres du modèle par moindres carrés ordinaires. Nous avons choisi un modèle vectorielle à correction d'erreur vu la non stationnarité des trois variables en niveau, leurs stationnarité en différence première et aussi pour capter les inter-relations entre les trois paramètres.

A partir de cette approche, nous avons obtenu des résultats satisfaisants en terme de calibration aux taux zéro-coupon observés et en terme de prévision dans l'échantillon d'apprentissage, puisque les écarts obtenus à partir du modèle étaient largement inférieurs à ceux obtenus à partir de la marche aléatoire.

Cependant, pour l'échantillon de test, le modèle a perdu de la précision vu la tendance baissière des taux à partir de 2016 et la calibration du modèle pour une période avec des tendances haussières de taux d'intérêt. Pour améliorer les performances du modèle, nous proposons l'ajout d'agrégats macroéconomique dans le modèle ou estimer les paramètres par régime (tendance baissière ou haussière des taux) en se basant sur des chaînes de Markov.

Bibliographie

AMMC ex-CDVM, 2004, *Circulaire N 02/04*.

AMMC ex-CDVM, 2010, *Guide pratique des OPCVM*.

Bennouna & Bounader , 2018, *Analyse de la transmission de la politique monétaire vers les taux souverains*, Document de travail de Bank Al Maghrib.

Berec, 2010, *Extraction of Nelson-Siegel Factors From Bond Prices*.

Berrada A., 2016, *La dette publique au Maroc :Lecture critique d'articles académiques*.

Cairns, 2004, *Introduction to Bond Markets*, Princeton University Press.

Charpentier, Volume 2, *Modèles linéaires multivariés, VAR et cointégration*.

Cox & Ingersoll & Ross, 1985, *A theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica.

De Pooter, 2007, *Examining the Nelson-Siegel class of Term Structure Models*.

Diebold & Li, 2006, *Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields*, Journal of Econometrics.

Duffee, 2002, *Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models*, The Journal of The American Finance Association.

El Qalli, cours de l'INSEA, 3ème année d'études, Année universitaire 2017-2018, *Courbe des Taux et Produits à revenu Fixe*.

El Qalli, cours de l'INSEA, 3ème année d'études, Année universitaire 2017-2018, *Théorie des Options*.

Fabozzi et al, 2002, *Interest Rate-Term Structure and Valuation Modeling*, John Wiley & Sons.

Fabozzi, 2005, *The Handbook of Fixed Income Securities*, The McGraw-Hill Companies.

Gbongue & Planchet , 2015, *Analyse Comparative des modèles de construction d'une courbe des taux sans risque dans la zone CIPRES*, Bulletin Français d'Actuariat.

Gilli & Groebe & Schumann, 2010, *Calibrating the Nelson-Siegel-Svensson Model*, Comisef Working Papers Series.

Gospodinov & Herrera & Pesavento, 2013, *Unit Roots, Cointegration and Pre-Testing in VAR models*.

Hull & White, 1990, *Pricing Interest Rate Derivative Securities*, The Review of Financial Studies.

Litterman & Scheinkman, June 1991, *Common Factors Affecting Bond Returns*, The Journal of Fixed Income.

Modigliani & Sutch, 1966, *Innovations in Interest Rate Policy*, American Economic Review.

Nelson & Siegel, 1987, *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, The Journal of Business.

Omar A., cours de l'INSEA, 2ème année d'études, Année universitaire 2016-2017, *Réglementation des Marchés Financiers au Maroc*.

Petousis, 2014, *Nelson-Siegel Parametrisation of the South African Sovereign Yield Curve*.

Rubinstein, 1998, *Modeling Bounded Rationality*, MIT PRESS.

Vasicek, 1977, *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics.

Webographie

<http://www.ammc.ma/fr/espace-epargnants/marche-actions>

<http://www.ammc.ma/fr/espace-epargnants/marche-monetaire>

<http://www.ammc.ma/investisseurs-institutionnels>

<http://www.ammc.ma/fr/espace-epargnants/risque-et-rentabilite>

<http://www.bkam.ma/A-propos/Statut-et-missions>

<http://www.bkam.ma/Marches/Principaux-indicateurs/Marche-obligataire/Marche-des-bons-de-tresor/Marche-des-adjudications-des-bons-du-tresor/Resultats-des-emissions-de-bons-du-tresor>

<https://www.finances.gov.ma/fr/Pages/Statistiques.aspx?Active=Dettes&m=vous%20êtes?>

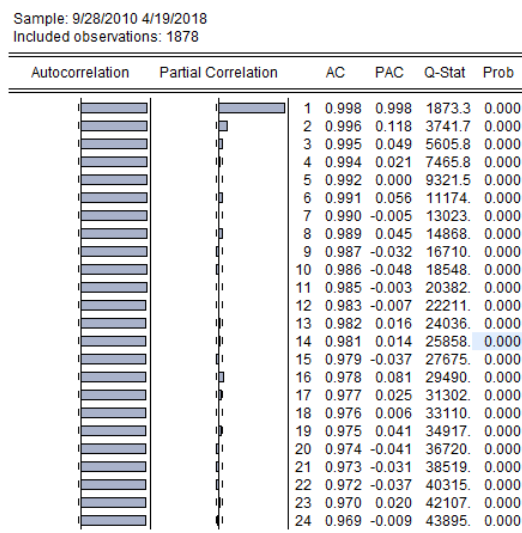
<http://www.objectifeco.com/economie/dettes/dettes-de-letat/dettes-publiques-dettes-souveraines-faites-vous-la-difference.html>

Annexe 1 : Corrélogrammes des taux et des paramètres de Nelson-Siegel

Annexe 1

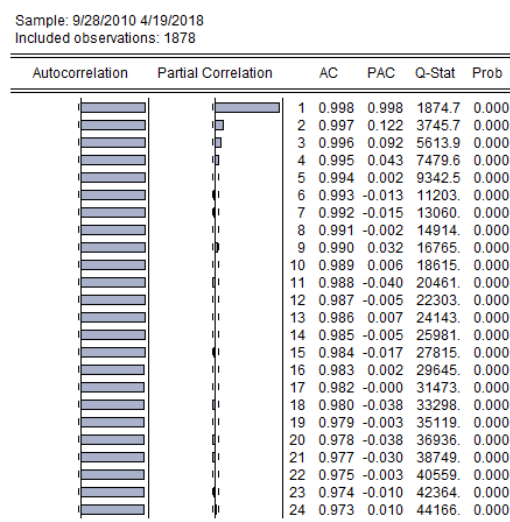
1) Les corrélogrammes des taux de rendements :

TABLE 18 – Corrélogramme du taux 13 semaines



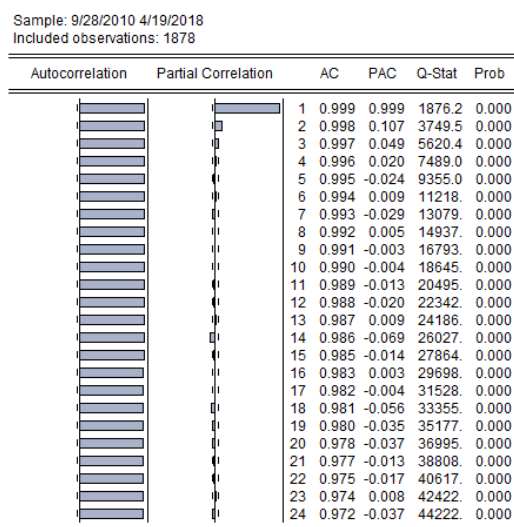
Source : Réalisée par l'auteur

TABLE 19 – Corrélogramme du taux 3 ans



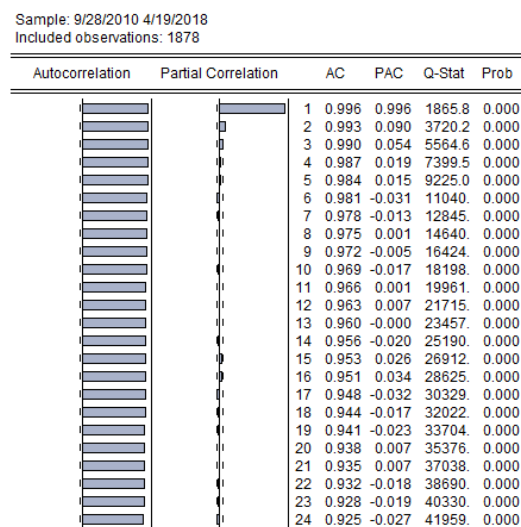
Source : Réalisée par l'auteur

TABLE 20 – Corrélogramme du taux 10 ans



Source : Réalisée par l'auteur

TABLE 21 – Corrélogramme du taux 20 ans



Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 1

2) Les corrélogrammes des paramètres de Nelson-Siegel :

TABLE 22 – Corrélogramme de β_1

Sample: 9/28/2010 4/19/2018
Included observations: 1878

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.998	0.998	1873.2	0.000
		2 0.996	0.036	3740.0	0.000
		3 0.994	0.029	5601.1	0.000
		4 0.992	0.034	7456.9	0.000
		5 0.991	0.011	9307.6	0.000
		6 0.989	-0.069	11152.0	0.000
		7 0.987	-0.002	12990.0	0.000
		8 0.985	-0.005	14822.0	0.000
		9 0.983	-0.063	16647.0	0.000
		10 0.981	-0.040	18465.0	0.000
		11 0.978	-0.058	20274.0	0.000
		12 0.976	-0.001	22074.0	0.000
		13 0.973	-0.018	23867.0	0.000
		14 0.970	-0.031	25651.0	0.000
		15 0.968	-0.004	27425.0	0.000
		16 0.965	-0.036	29191.0	0.000
		17 0.962	0.026	30947.0	0.000
		18 0.960	0.057	32696.0	0.000
		19 0.957	-0.016	34435.0	0.000
		20 0.954	-0.001	36166.0	0.000
		21 0.952	0.028	37889.0	0.000
		22 0.949	-0.015	39603.0	0.000
		23 0.947	-0.011	41308.0	0.000
		24 0.944	-0.022	43004.0	0.000

Source : Réalisée par l'auteur

TABLE 23 – corrélogramme de β_2

Sample: 9/28/2010 4/19/2018
Included observations: 1878

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.997	0.997	1869.6	0.000
		2 0.994	0.050	3729.9	0.000
		3 0.992	0.012	5581.3	0.000
		4 0.989	-0.004	7423.6	0.000
		5 0.986	0.000	9257.0	0.000
		6 0.983	-0.052	11080.0	0.000
		7 0.980	-0.000	12894.0	0.000
		8 0.977	-0.011	14697.0	0.000
		9 0.974	-0.048	16489.0	0.000
		10 0.970	-0.063	18269.0	0.000
		11 0.967	-0.040	20035.0	0.000
		12 0.963	-0.009	21789.0	0.000
		13 0.959	0.011	23530.0	0.000
		14 0.955	0.005	25258.0	0.000
		15 0.952	0.006	26974.0	0.000
		16 0.948	0.019	28678.0	0.000
		17 0.944	-0.000	30370.0	0.000
		18 0.941	0.010	32049.0	0.000
		19 0.937	-0.006	33716.0	0.000
		20 0.933	-0.025	35370.0	0.000
		21 0.929	0.023	37013.0	0.000
		22 0.926	0.005	38643.0	0.000
		23 0.922	-0.015	40261.0	0.000
		24 0.918	-0.002	41867.0	0.000

Source : Réalisée par l'auteur

TABLE 24 – corrélogramme de β_3

Sample: 9/28/2010 4/19/2018
Included observations: 1878

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.996	0.996	1867.7	0.000
		2 0.993	0.071	3724.9	0.000
		3 0.991	0.054	5573.2	0.000
		4 0.988	0.024	7412.9	0.000
		5 0.986	0.025	9244.6	0.000
		6 0.983	-0.032	11067.0	0.000
		7 0.980	-0.029	12880.0	0.000
		8 0.977	-0.012	14684.0	0.000
		9 0.974	-0.026	16477.0	0.000
		10 0.971	-0.042	18259.0	0.000
		11 0.968	0.004	20031.0	0.000
		12 0.965	-0.011	21791.0	0.000
		13 0.961	-0.024	23541.0	0.000
		14 0.958	-0.026	25278.0	0.000
		15 0.954	-0.017	27004.0	0.000
		16 0.950	-0.033	28716.0	0.000
		17 0.947	-0.020	30416.0	0.000
		18 0.943	0.052	32104.0	0.000
		19 0.940	0.005	33781.0	0.000
		20 0.936	-0.008	35446.0	0.000
		21 0.932	0.007	37099.0	0.000
		22 0.929	-0.005	38740.0	0.000
		23 0.925	0.018	40369.0	0.000
		24 0.922	-0.030	41987.0	0.000

Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 2 : Stationnarité des taux et des paramètres de Nelson-Siegel

Annexe 2

1) Test de Dickey-Fuller augmenté pour les taux :

TABLE 25 – Test de Dickey-Fuller augmenté pour le taux 13 semaines

Null Hypothesis: _13_SEMAINES has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.955603	0.6245
Test critical values: 1% level	-3.962944	
5% level	-3.412207	
10% level	-3.128029	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(_13_SEMAINES)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 12:33
Sample (adjusted): 10/01/2010 4/19/2018
Included observations: 1875 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
_13_SEMAINES(-1)	-0.004697	0.002402	-1.955603	0.0507
D(_13_SEMAINES(-1))	-0.162849	0.023079	-7.056172	0.0000
D(_13_SEMAINES(-2))	-0.069725	0.023063	-3.023223	0.0025
C	0.000177	9.43E-05	1.881318	0.0601
@TREND("9/28/2010")	-4.87E-08	2.72E-08	-1.789612	0.0737
R-squared	0.030827	Mean dependent var	-6.29E-06	
Adjusted R-squared	0.028754	S.D. dependent var	0.000342	
S.E. of regression	0.000337	Akaike info criterion	-13.15217	
Sum squared resid	0.000212	Schwarz criterion	-13.13741	
Log likelihood	12335.16	Hannan-Quinn criter.	-13.14674	
F-statistic	14.87007	Durbin-Watson stat	2.004628	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: _13_SEMAINES has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.824902	0.8114
Test critical values: 1% level	-3.433637	
5% level	-2.862878	
10% level	-2.567529	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(_13_SEMAINES)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 12:38
Sample (adjusted): 10/01/2010 4/19/2018
Included observations: 1875 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
_13_SEMAINES(-1)	-0.001047	0.001269	-0.824902	0.4095
D(_13_SEMAINES(-1))	-0.164711	0.023069	-7.139885	0.0000
D(_13_SEMAINES(-2))	-0.071097	0.023064	-3.082619	0.0021
C	2.33E-05	3.85E-05	0.605934	0.5446
R-squared	0.029167	Mean dependent var	-6.29E-06	
Adjusted R-squared	0.027611	S.D. dependent var	0.000342	
S.E. of regression	0.000337	Akaike info criterion	-13.15153	
Sum squared resid	0.000212	Schwarz criterion	-13.13972	
Log likelihood	12333.56	Hannan-Quinn criter.	-13.14718	
F-statistic	18.73713	Durbin-Watson stat	2.004868	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: _13_SEMAINES has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.144227	0.2305
Test critical values: 1% level	-2.566196	
5% level	-1.940993	
10% level	-1.616586	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(_13_SEMAINES)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 12:39
Sample (adjusted): 10/01/2010 4/19/2018
Included observations: 1875 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
_13_SEMAINES(-1)	-0.000294	0.000257	-1.144227	0.2527
D(_13_SEMAINES(-1))	-0.165235	0.023049	-7.168886	0.0000
D(_13_SEMAINES(-2))	-0.071521	0.023049	-3.102961	0.0019
R-squared	0.028977	Mean dependent var	-6.29E-06	
Adjusted R-squared	0.027939	S.D. dependent var	0.000342	
S.E. of regression	0.000337	Akaike info criterion	-13.15240	
Sum squared resid	0.000212	Schwarz criterion	-13.14354	
Log likelihood	12333.38	Hannan-Quinn criter.	-13.14914	
Durbin-Watson stat	2.004961			

Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 2

TABLE 26 – Test de Dickey-Fuller augmenté pour le taux 3 ans

Null Hypothesis: _3_ANS has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 3 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.497200	0.8306
Test critical values:		
1% level	-3.962947	
5% level	-3.412208	
10% level	-3.128030	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(_3_ANS)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 12:40
Sample (adjusted): 10/04/2010 4/19/2018
Included observations: 1874 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
_3_ANS(-1)	-0.002519	0.001682	-1.497200	0.1345
D(_3_ANS(-1))	-0.170204	0.023103	-7.367027	0.0000
D(_3_ANS(-2))	-0.134099	0.023227	-5.773382	0.0000
D(_3_ANS(-3))	-0.065733	0.023093	-2.846503	0.0045
C	0.000115	7.61E-05	1.506905	0.1320
@TREND("9/28/2010")	-3.94E-08	2.36E-08	-1.673149	0.0945
R-squared	0.041741	Mean dependent var	-6.52E-06	
Adjusted R-squared	0.039176	S.D. dependent var	0.000379	
S.E. of regression	0.000371	Akaike info criterion	-12.95726	
Sum squared resid	0.000257	Schwarz criterion	-12.93953	
Log likelihood	12146.95	Hannan-Quinn criter.	-12.95073	
F-statistic	16.27371	Durbin-Watson stat	2.000207	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: _3_ANS has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 3 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.384878	0.9093
Test critical values:		
1% level	-3.433639	
5% level	-2.862879	
10% level	-2.567530	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(_3_ANS)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 12:41
Sample (adjusted): 10/04/2010 4/19/2018
Included observations: 1874 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
_3_ANS(-1)	-0.000436	0.001132	-0.384878	0.7004
D(_3_ANS(-1))	-0.170833	0.023112	-7.391680	0.0000
D(_3_ANS(-2))	-0.134475	0.023237	-5.787045	0.0000
D(_3_ANS(-3))	-0.065905	0.023104	-2.852593	0.0044
C	6.13E-06	3.98E-05	0.153883	0.8777
R-squared	0.040305	Mean dependent var	-6.52E-06	
Adjusted R-squared	0.038251	S.D. dependent var	0.000379	
S.E. of regression	0.000371	Akaike info criterion	-12.95682	
Sum squared resid	0.000258	Schwarz criterion	-12.94205	
Log likelihood	12145.54	Hannan-Quinn criter.	-12.95138	
F-statistic	19.62339	Durbin-Watson stat	2.000120	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: _3_ANS has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 3 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.088978	0.2507
Test critical values:		
1% level	-2.566197	
5% level	-1.940993	
10% level	-1.616586	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(_3_ANS)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 12:41
Sample (adjusted): 10/04/2010 4/19/2018
Included observations: 1874 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
_3_ANS(-1)	-0.000266	0.000244	-1.088978	0.2763
D(_3_ANS(-1))	-0.170979	0.023086	-7.406211	0.0000
D(_3_ANS(-2))	-0.134603	0.023216	-5.797842	0.0000
D(_3_ANS(-3))	-0.066013	0.023087	-2.859353	0.0043
R-squared	0.040293	Mean dependent var	-6.52E-06	
Adjusted R-squared	0.038753	S.D. dependent var	0.000379	
S.E. of regression	0.000371	Akaike info criterion	-12.95788	
Sum squared resid	0.000258	Schwarz criterion	-12.94606	
Log likelihood	12145.53	Hannan-Quinn criter.	-12.95353	
Durbin-Watson stat	2.000144			

Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 2

TABLE 27 – Test de Dickey-Fuller augmenté pour le taux 10 ans

Null Hypothesis: $_10_ANS$ has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.407335	0.8589
Test critical values:		
1% level	-3.962941	
5% level	-3.412206	
10% level	-3.128028	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: $D(_10_ANS)$
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 12:42
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
$_10_ANS(-1)$	-0.001911	0.001358	-1.407335	0.1595
$D(_10_ANS(-1))$	-0.136617	0.022892	-5.967785	0.0000
C	9.89E-05	6.86E-05	1.441185	0.1497
@TREND("9/28/2010")	-2.79E-08	1.96E-08	-1.423908	0.1546
R-squared	0.020099	Mean dependent var	-4.29E-06	
Adjusted R-squared	0.018529	S.D. dependent var	0.000364	
S.E. of regression	0.000361	Akaike info criterion	-13.01520	
Sum squared resid	0.000243	Schwarz criterion	-13.00339	
Log likelihood	12212.26	Hannan-Quinn criter.	-13.01085	
F-statistic	12.79896	Durbin-Watson stat	2.016643	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: $_10_ANS$ has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.666955	0.8529
Test critical values:		
1% level	-3.433635	
5% level	-2.862877	
10% level	-2.567529	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: $D(_10_ANS)$
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 12:43
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
$_10_ANS(-1)$	-0.000710	0.001064	-0.666955	0.5049
$D(_10_ANS(-1))$	-0.136731	0.022898	-5.971174	0.0000
C	2.39E-05	4.40E-05	0.543196	0.5871
R-squared	0.019038	Mean dependent var	-4.29E-06	
Adjusted R-squared	0.017990	S.D. dependent var	0.000364	
S.E. of regression	0.000361	Akaike info criterion	-13.01518	
Sum squared resid	0.000244	Schwarz criterion	-13.00633	
Log likelihood	12211.24	Hannan-Quinn criter.	-13.01192	
F-statistic	18.17471	Durbin-Watson stat	2.016647	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: $_10_ANS$ has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.747429	0.3928
Test critical values:		
1% level	-2.566196	
5% level	-1.940993	
10% level	-1.616586	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: $D(_10_ANS)$
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 12:46
Sample (adjusted): 10/01/2010 4/19/2018
Included observations: 1875 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
$_10_ANS(-1)$	-0.000150	0.000201	-0.747429	0.4549
$D(_10_ANS(-1))$	-0.145819	0.023064	-6.322209	0.0000
$D(_10_ANS(-2))$	-0.064654	0.023064	-2.803295	0.0051
R-squared	0.022952	Mean dependent var	-4.42E-06	
Adjusted R-squared	0.021908	S.D. dependent var	0.000364	
S.E. of regression	0.000360	Akaike info criterion	-13.01889	
Sum squared resid	0.000243	Schwarz criterion	-13.01004	
Log likelihood	12208.21	Hannan-Quinn criter.	-13.01563	
Durbin-Watson stat	2.003652			

Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 2

TABLE 28 – Test de Dickey-Fuller augmenté pour le taux 20 ans

Null Hypothesis: _20_ANS has a unit root

Exogenous: Constant, Linear Trend

Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.994769	0.6033
Test critical values:		
1% level	-3.962941	
5% level	-3.412206	
10% level	-3.128028	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(_20_ANS)

Method: Least Squares

Date: 06/19/18 Time: 12:47

Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018

Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
_20_ANS(-1)	-0.004428	0.002220	-1.994769	0.0462
D(_20_ANS(-1))	-0.098139	0.022998	-4.267315	0.0000
C	0.000225	0.000112	2.015611	0.0440
@TREND("9/28/2010")	-3.05E-08	2.38E-08	-1.280864	0.2004
R-squared	0.012255	Mean dependent var	-2.45E-06	
Adjusted R-squared	0.010673	S.D. dependent var	0.000511	
S.E. of regression	0.000508	Akaike info criterion	-12.32997	
Sum squared resid	0.000483	Schwarz criterion	-12.31816	
Log likelihood	11569.51	Hannan-Quinn criter.	-12.32562	
F-statistic	7.742295	Durbin-Watson stat	2.010989	
Prob(F-statistic)	0.000039			

Null Hypothesis: _20_ANS has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.606365	0.4791
Test critical values:		
1% level	-3.433635	
5% level	-2.862877	
10% level	-2.567529	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(_20_ANS)

Method: Least Squares

Date: 06/19/18 Time: 12:48

Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018

Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
_20_ANS(-1)	-0.003241	0.002017	-1.606365	0.1084
D(_20_ANS(-1))	-0.098428	0.023001	-4.279341	0.0000
C	0.000143	9.15E-05	1.563423	0.1181
R-squared	0.011390	Mean dependent var	-2.45E-06	
Adjusted R-squared	0.010334	S.D. dependent var	0.000511	
S.E. of regression	0.000508	Akaike info criterion	-12.33016	
Sum squared resid	0.000484	Schwarz criterion	-12.32130	
Log likelihood	11568.69	Hannan-Quinn criter.	-12.32690	
F-statistic	10.78945	Durbin-Watson stat	2.011058	
Prob(F-statistic)	0.000022			

Null Hypothesis: _20_ANS has a unit root

Exogenous: None

Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.435522	0.5259
Test critical values:		
1% level	-2.566195	
5% level	-1.940992	
10% level	-1.616586	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(_20_ANS)

Method: Least Squares

Date: 06/19/18 Time: 12:48

Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018

Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
_20_ANS(-1)	-0.000113	0.000259	-0.435522	0.6632
D(_20_ANS(-1))	-0.100110	0.022984	-4.355561	0.0000
R-squared	0.010100	Mean dependent var	-2.45E-06	
Adjusted R-squared	0.009571	S.D. dependent var	0.000511	
S.E. of regression	0.000508	Akaike info criterion	-12.32992	
Sum squared resid	0.000484	Schwarz criterion	-12.32402	
Log likelihood	11567.46	Hannan-Quinn criter.	-12.32774	
Durbin-Watson stat	2.011524			

Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 2

2) Test de Dickey-Fuller augmenté pour les paramètres de Nelson-Siegel en niveau :

TABLE 29 – Test de Dickey-Fuller augmenté pour le paramètre β_{1t}

Null Hypothesis: BETA1 has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.568821	0.8050
Test critical values: 1% level	-3.962939	
5% level	-3.412204	
10% level	-3.128028	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA1)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:32
Sample (adjusted): 9/29/2010 4/19/2018
Included observations: 1877 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA1(-1)	-0.002379	0.001516	-1.568821	0.1169
C	0.000130	7.95E-05	1.637763	0.1016
@TREND("9/28/2010")	-1.83E-08	1.58E-08	-1.161394	0.2456
R-squared	0.001555	Mean dependent var	-1.36E-06	
Adjusted R-squared	0.000489	S.D. dependent var	0.000349	
S.E. of regression	0.000349	Akaike info criterion	-13.07960	
Sum squared resid	0.000229	Schwarz criterion	-13.07075	
Log likelihood	12278.21	Hannan-Quinn criter.	-13.07634	
F-statistic	1.458846	Durbin-Watson stat	2.079741	
Prob(F-statistic)	0.232768			

Null Hypothesis: BETA1 has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.252423	0.6535
Test critical values: 1% level	-3.433633	
5% level	-2.862877	
10% level	-2.567528	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA1)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:33
Sample (adjusted): 9/29/2010 4/19/2018
Included observations: 1877 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA1(-1)	-0.001790	0.001429	-1.252423	0.2106
C	8.47E-05	6.92E-05	1.224161	0.2210
R-squared	0.000836	Mean dependent var	-1.36E-06	
Adjusted R-squared	0.000303	S.D. dependent var	0.000349	
S.E. of regression	0.000349	Akaike info criterion	-13.07995	
Sum squared resid	0.000229	Schwarz criterion	-13.07405	
Log likelihood	12277.53	Hannan-Quinn criter.	-13.07778	
F-statistic	1.568563	Durbin-Watson stat	2.079470	
Prob(F-statistic)	0.210572			

Null Hypothesis: BETA1 has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.314012	0.5726
Test critical values: 1% level	-2.566195	
5% level	-1.940992	
10% level	-1.616586	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA1)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:41
Sample (adjusted): 9/29/2010 4/19/2018
Included observations: 1877 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA1(-1)	-5.23E-05	0.000167	-0.314012	0.7535
R-squared	0.000037	Mean dependent var	-1.36E-06	
Adjusted R-squared	0.000037	S.D. dependent var	0.000349	
S.E. of regression	0.000349	Akaike info criterion	-13.08022	
Sum squared resid	0.000229	Schwarz criterion	-13.07727	
Log likelihood	12276.78	Hannan-Quinn criter.	-13.07913	
Durbin-Watson stat	2.081423			

Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 2

TABLE 30 – Test de Dickey-Fuller augmenté pour le paramètre β_{2t}

Null Hypothesis: BETA2 has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.832878	0.6884
Test critical values: 1% level	-3.962939	
5% level	-3.412204	
10% level	-3.128028	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA2)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:34
Sample (adjusted): 9/29/2010 4/19/2018
Included observations: 1877 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA2(-1)	-0.003691	0.002014	-1.832878	0.0670
C	-6.09E-05	3.10E-05	-1.965250	0.0495
@TREND("9/28/2010")	-1.09E-08	1.76E-08	-0.617651	0.5369
R-squared	0.001951	Mean dependent var	-4.35E-06	
Adjusted R-squared	0.000886	S.D. dependent var	0.000337	
S.E. of regression	0.000337	Akaike info criterion	-13.15363	
Sum squared resid	0.000212	Schwarz criterion	-13.14478	
Log likelihood	12347.68	Hannan-Quinn criter.	-13.15037	
F-statistic	1.831580	Durbin-Watson stat	2.115417	
Prob(F-statistic)	0.160447			

Null Hypothesis: BETA2 has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.811836	0.3750
Test critical values: 1% level	-3.433633	
5% level	-2.862877	
10% level	-2.567528	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA2)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:35
Sample (adjusted): 9/29/2010 4/19/2018
Included observations: 1877 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA2(-1)	-0.002967	0.001638	-1.811836	0.0702
C	-5.80E-05	3.06E-05	-1.894586	0.0583
R-squared	0.001748	Mean dependent var	-4.35E-06	
Adjusted R-squared	0.001215	S.D. dependent var	0.000337	
S.E. of regression	0.000337	Akaike info criterion	-13.15449	
Sum squared resid	0.000212	Schwarz criterion	-13.14859	
Log likelihood	12347.49	Hannan-Quinn criter.	-13.15231	
F-statistic	3.282750	Durbin-Watson stat	2.116517	
Prob(F-statistic)	0.070171			

Null Hypothesis: BETA2 has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	0.081686	0.7086
Test critical values: 1% level	-2.566195	
5% level	-1.940992	
10% level	-1.616586	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA2)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:35
Sample (adjusted): 9/29/2010 4/19/2018
Included observations: 1877 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA2(-1)	3.40E-05	0.000416	0.081686	0.9349
R-squared	-0.000163	Mean dependent var	-4.35E-06	
Adjusted R-squared	-0.000163	S.D. dependent var	0.000337	
S.E. of regression	0.000337	Akaike info criterion	-13.15364	
Sum squared resid	0.000213	Schwarz criterion	-13.15069	
Log likelihood	12345.69	Hannan-Quinn criter.	-13.15255	
Durbin-Watson stat	2.118823			

Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 2

TABLE 31 – Test de Dickey-Fuller augmenté pour le paramètre β_{3t}

Null Hypothesis: BETA3 has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.019817	0.5895
Test critical values:		
1% level	-3.962941	
5% level	-3.412206	
10% level	-3.128028	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA3)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:36
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA3(-1)	-0.004564	0.002260	-2.019817	0.0435
D(BETA3(-1))	-0.075247	0.023045	-3.265302	0.0011
C	4.14E-06	6.29E-05	0.065799	0.9475
@TREND("9/28/2010")	-8.82E-08	6.93E-08	-1.272847	0.2032
R-squared	0.008182	Mean dependent var	-9.99E-06	
Adjusted R-squared	0.006593	S.D. dependent var	0.001364	
S.E. of regression	0.001360	Akaike info criterion	-10.36091	
Sum squared resid	0.003461	Schwarz criterion	-10.34911	
Log likelihood	9722.537	Hannan-Quinn criter.	-10.35656	
F-statistic	5.147730	Durbin-Watson stat	2.008112	
Prob(F-statistic)	0.001516			

Null Hypothesis: BETA3 has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.580429	0.4924
Test critical values:		
1% level	-3.433635	
5% level	-2.862877	
10% level	-2.567529	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA3)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:36
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA3(-1)	-0.002987	0.001890	-1.580429	0.1142
D(BETA3(-1))	-0.075914	0.023042	-3.294556	0.0010
C	-5.53E-05	4.22E-05	-1.310521	0.1902
R-squared	0.007324	Mean dependent var	-9.99E-06	
Adjusted R-squared	0.006264	S.D. dependent var	0.001364	
S.E. of regression	0.001360	Akaike info criterion	-10.36111	
Sum squared resid	0.003464	Schwarz criterion	-10.35226	
Log likelihood	9721.725	Hannan-Quinn criter.	-10.35785	
F-statistic	6.909239	Durbin-Watson stat	2.008267	
Prob(F-statistic)	0.001024			

Null Hypothesis: BETA3 has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.947486	0.3065
Test critical values:		
1% level	-2.566195	
5% level	-1.940992	
10% level	-1.616586	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA3)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:36
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
BETA3(-1)	-0.001334	0.001407	-0.947486	0.3435
D(BETA3(-1))	-0.076601	0.023041	-3.324590	0.0009
R-squared	0.006413	Mean dependent var	-9.99E-06	
Adjusted R-squared	0.005883	S.D. dependent var	0.001364	
S.E. of regression	0.001360	Akaike info criterion	-10.36126	
Sum squared resid	0.003467	Schwarz criterion	-10.35536	
Log likelihood	9720.865	Hannan-Quinn criter.	-10.35909	
Durbin-Watson stat	2.008435			

Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 2

3) Test de Dickey-Fuller augmenté pour les paramètres de Nelson-Siegel en différence première

TABLE 32 – Test de Dickey-Fuller augmenté pour le paramètre β_{1t} en différence première

Null Hypothesis: D(BETA1) has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-45.09007	0.0000
Test critical values: 1% level	-3.962941	
5% level	-3.412206	
10% level	-3.128028	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA1,2)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:57
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA1(-1))	-1.040988	0.023087	-45.09007	0.0000
C	8.31E-06	1.62E-05	0.514213	0.6072
@TREND("9/28/2010")	-1.04E-08	1.49E-08	-0.697243	0.4857
R-squared	0.520495	Mean dependent var	-1.72E-08	
Adjusted R-squared	0.519983	S.D. dependent var	0.000504	
S.E. of regression	0.000349	Akaike info criterion	-13.07945	
Sum squared resid	0.000229	Schwarz criterion	-13.07060	
Log likelihood	12271.52	Hannan-Quinn criter.	-13.07619	
F-statistic	1016.557	Durbin-Watson stat	2.002756	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: D(BETA1) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-45.09087	0.0001
Test critical values: 1% level	-3.433635	
5% level	-2.862877	
10% level	-2.567529	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA1,2)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:58
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA1(-1))	-1.040736	0.023081	-45.09087	0.0000
C	-1.45E-06	8.06E-06	-0.179992	0.8572
R-squared	0.520371	Mean dependent var	-1.72E-08	
Adjusted R-squared	0.520115	S.D. dependent var	0.000504	
S.E. of regression	0.000349	Akaike info criterion	-13.08026	
Sum squared resid	0.000229	Schwarz criterion	-13.07435	
Log likelihood	12271.28	Hannan-Quinn criter.	-13.07808	
F-statistic	2033.186	Durbin-Watson stat	2.002724	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: D(BETA1) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-45.10215	0.0001
Test critical values: 1% level	-2.566195	
5% level	-1.940992	
10% level	-1.616586	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA1,2)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:59
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA1(-1))	-1.040720	0.023075	-45.10215	0.0000
R-squared	0.520363	Mean dependent var	-1.72E-08	
Adjusted R-squared	0.520363	S.D. dependent var	0.000504	
S.E. of regression	0.000349	Akaike info criterion	-13.08130	
Sum squared resid	0.000229	Schwarz criterion	-13.07835	
Log likelihood	12271.26	Hannan-Quinn criter.	-13.08022	
Durbin-Watson stat	2.002721			

Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 2

TABLE 33 – Test de Dickey-Fuller augmenté pour le paramètre β_{2t} en différence première

Null Hypothesis: D(BETA2) has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-45.94536	0.0000
Test critical values: 1% level	-3.962941	
5% level	-3.412206	
10% level	-3.128028	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA2,2)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 15:59
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA2(-1))	-1.059768	0.023066	-45.94536	0.0000
C	-1.24E-05	1.56E-05	-0.796413	0.4259
@TREND("9/28/2010")	8.31E-09	1.43E-08	0.579612	0.5622
R-squared	0.529867	Mean dependent var	-3.77E-08	
Adjusted R-squared	0.529365	S.D. dependent var	0.000490	
S.E. of regression	0.000336	Akaike info criterion	-13.15489	
Sum squared resid	0.000212	Schwarz criterion	-13.14603	
Log likelihood	12342.29	Hannan-Quinn criter.	-13.15163	
F-statistic	1055.488	Durbin-Watson stat	2.001924	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: D(BETA2) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-45.94985	0.0001
Test critical values: 1% level	-3.433635	
5% level	-2.862877	
10% level	-2.567529	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA2,2)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 16:00
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA2(-1))	-1.059594	0.023060	-45.94985	0.0000
C	-4.58E-06	7.77E-06	-0.589337	0.5557
R-squared	0.529782	Mean dependent var	-3.77E-08	
Adjusted R-squared	0.529531	S.D. dependent var	0.000490	
S.E. of regression	0.000336	Akaike info criterion	-13.15577	
Sum squared resid	0.000212	Schwarz criterion	-13.14987	
Log likelihood	12342.12	Hannan-Quinn criter.	-13.15360	
F-statistic	2111.389	Durbin-Watson stat	2.001909	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: D(BETA2) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-45.95407	0.0001
Test critical values: 1% level	-2.566195	
5% level	-1.940992	
10% level	-1.616586	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA2,2)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 16:00
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA2(-1))	-1.059421	0.023054	-45.95407	0.0000
R-squared	0.529695	Mean dependent var	-3.77E-08	
Adjusted R-squared	0.529695	S.D. dependent var	0.000490	
S.E. of regression	0.000336	Akaike info criterion	-13.15666	
Sum squared resid	0.000212	Schwarz criterion	-13.15370	
Log likelihood	12341.94	Hannan-Quinn criter.	-13.15557	
Durbin-Watson stat	2.001878			

Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 2

TABLE 34 – Test de Dickey-Fuller augmenté pour le paramètre β_{3t} en différence première

Null Hypothesis: D(BETA3) has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-46.77179	0.0000
Test critical values: 1% level	-3.962941	
5% level	-3.412206	
10% level	-3.128028	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA3,2)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 16:01
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA3(-1))	-1.077478	0.023037	-46.77179	0.0000
C	-1.26E-08	6.29E-05	-0.000200	0.9998
@TREND("9/28/2010")	-1.15E-08	5.80E-08	-0.197474	0.8435
R-squared	0.538738	Mean dependent var	2.29E-07	
Adjusted R-squared	0.538246	S.D. dependent var	0.002003	
S.E. of regression	0.001361	Akaike info criterion	-10.35980	
Sum squared resid	0.003469	Schwarz criterion	-10.35095	
Log likelihood	9720.495	Hannan-Quinn criter.	-10.35654	
F-statistic	1093.800	Durbin-Watson stat	2.008651	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: D(BETA3) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-46.78337	0.0001
Test critical values: 1% level	-3.433635	
5% level	-2.862877	
10% level	-2.567529	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA3,2)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 16:01
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA3(-1))	-1.077459	0.023031	-46.78337	0.0000
C	-1.08E-05	3.14E-05	-0.343057	0.7316
R-squared	0.538729	Mean dependent var	2.29E-07	
Adjusted R-squared	0.538482	S.D. dependent var	0.002003	
S.E. of regression	0.001361	Akaike info criterion	-10.36085	
Sum squared resid	0.003469	Schwarz criterion	-10.35494	
Log likelihood	9720.475	Hannan-Quinn criter.	-10.35867	
F-statistic	2188.684	Durbin-Watson stat	2.008645	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Null Hypothesis: D(BETA3) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=24)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-46.79313	0.0001
Test critical values: 1% level	-2.566195	
5% level	-1.940992	
10% level	-1.616586	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(BETA3,2)
Method: Least Squares
Date: 06/19/18 Time: 16:02
Sample (adjusted): 9/30/2010 4/19/2018
Included observations: 1876 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(BETA3(-1))	-1.077400	0.023025	-46.79313	0.0000
R-squared	0.538700	Mean dependent var	2.29E-07	
Adjusted R-squared	0.538700	S.D. dependent var	0.002003	
S.E. of regression	0.001360	Akaike info criterion	-10.36185	
Sum squared resid	0.003469	Schwarz criterion	-10.35890	
Log likelihood	9720.416	Hannan-Quinn criter.	-10.36076	
Durbin-Watson stat	2.008631			

Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 3 : Méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno(BFGS)

Elle fait partie de la classe des méthodes Quasi-Newton pour optimiser les problèmes non linéaires. Cette classe s'appuie sur la méthode originale de Newton pour évaluer les dérivées secondes.

1) La méthode de Newton :

Soit un espace de dimension n et f une fonction différentiable d'ordre 2 définie sur $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

L'approximation quadratique de f en un point x_i est donné par :

$$f(x_i) + \nabla f(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{2} \nabla^2 f(x_i)(x - x_i)^2 \quad (5)$$

et détermine la direction de la recherche, p_i qui s'écrit :

$$p_i = -[\nabla^2 f(x_i)]^{-1} \nabla f(x_i) \quad (6)$$

$$x_{i+1} = x_i + p_i \quad (7)$$

Pour $i=0,1,2,\dots,K$ où K représente le nombre d'itérations et i l'étape actuelle. De plus, α_i indique la longueur du pas obtenue en respectant les conditions de Wolfe, à savoir :

$$f(x_i + \alpha_i p_i) \leq f(x_i) + c_1 \alpha_i \nabla f(x_i)^T p_i \quad (8)$$

Annexe 3

$$\nabla f(x_i + \alpha_i p_i) \geq c_2 \nabla f(x_i)^T p_i \quad (9)$$

avec $0 < c_1 < c_2 < 1$. La violation de ces conditions peut mener à une progression numérique inefficace dans l'optimisation et ainsi de trouver des points qui ne sont même pas des maximums ou des minimums locaux. Ainsi, en adoptant la méthode de Newton, chaque répétition nous rapproche du véritable optimum jusqu'à l'atteindre.

2) La méthode de BFGS :

Elle réalise une approximation de la dérivée seconde, généralement une matrice hessienne.

$$p_i = -H_i^{-1} \nabla f(x_i) \quad (10)$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i \quad (11)$$

à chaque itération, une matrice H_{i+1} symétrique définie positive est déterminée à partir de H_i sous la forme :

$$H_{i+1} = H_i - \frac{1}{\delta_i^T H_i \delta_i} H_i \delta_i \delta_i^T H_i + \frac{1}{\gamma_i^T \delta_i} \gamma_i \gamma_i^T \quad (12)$$

où $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ et $\gamma_i = \nabla f(x_{i+1}) - \nabla f(x_i)$. La valeur initiale de H_0 est en général fixée à un multiple de la matrice identité.

Sans calcul direct de la dérivée seconde, cette méthode fournit une approche rapide et efficace pour la résolution de problèmes d'optimisation non linéaires.

Annexe 4 : Modèle à correction d'erreur VECM

1) Le modèle VAR

Le vecteur auto-régressif est un modèle économétrique utilisé pour saisir l'évolution et les interdépendances entre plusieurs séries temporelles, généralisant ainsi les modèles AR univariés. Toutes les variables d'un VAR sont traitées symétriquement en incluant pour chaque variable une équation expliquant son évolution en fonction de ses propres retards et des retards de toutes les autres variables du modèle. Soit X_t un vecteur d'ordre k , la représentation VAR à p retards s'écrit de la forme :

$$X_t = M_0 + M_1 X_{t-1} + M_2 X_{t-2} + \dots + M_p X_{t-p} + \epsilon_t \quad (13)$$

$$\text{où : } X_t = \begin{pmatrix} X_{t,1} \\ X_{t,2} \\ X_{t,3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ X_{t,k} \end{pmatrix}, \epsilon_t = \begin{pmatrix} \epsilon_{t,1} \\ \epsilon_{t,2} \\ \epsilon_{t,3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \epsilon_{t,k} \end{pmatrix}, M_0 = \begin{pmatrix} m_{0,1} \\ m_{0,2} \\ m_{0,3} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ m_{0,k} \end{pmatrix} \text{ et } M_1, M_2, \dots, M_p \in M_{k,p}(\mathbb{R})^{48} \text{ qui contiennent}$$

des paramètres à estimer du modèle. Cependant, avant de procéder à une modélisation VAR, il faut s'assurer que toutes les variables sont stationnaires.

48. C'est l'espace des matrices réelles constituées de k lignes et p colonnes.

Annexe 4

→ Conditions de stationnarité

un processus x_t est dit stationnaire si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i) $E(x_t)$ est indépendante de t .
- ii) $\text{var}(x_t)$ est une constante finie indépendante de t .
- iii) $\text{cov}(x_t, x_{t-1})$ est une fonction finie de k ne dépendant pas de t .

• Test de stationnarité

Le test de Dickey-Fuller augmenté⁴⁹ permet de rendre compte de la stationnarité ou non d'une série. Les hypothèses du test se basent sur trois modèles. L'hypothèse nulle du modèle est la non-stationnarité du processus.

— Modèle 1 :

$$\Delta x_t = \rho x_{t-1} - \sum_{i=2}^p \gamma_i \Delta x_{t-i+1} + \nu_t \quad (14)$$

— Modèle 2(avec constante) :

$$\Delta x_t = \rho x_{t-1} - \sum_{i=2}^p \gamma_i \Delta x_{t-i+1} + c + \nu_t \quad (15)$$

— Modèle 3(avec constante et tendance)

$$\Delta x_t = \rho x_{t-1} - \sum_{i=2}^p \gamma_i \Delta x_{t-i+1} + bt + c + \nu_t \quad (16)$$

Pour tester la stationnarité, on va suivre la démarche suivante :

- ✓ Étape 1 : On commence avec le modèle 3, si le paramètre de tendance est significatif alors on teste la stationnarité de ce modèle, sinon on passe au modèle 2.
- ✓ Étape 2 : Si la constante au modèle 2 est significatif alors on teste la stationnarité de ce modèle, sinon on passe au modèle 1.
- ✓ Étape 3 : On teste la stationnarité du modèle sans constante ni tendance.

49. On s'est basé sur ce test parce qu'il prend en considération l'auto-corrélation des erreurs.

Annexe 4

Dans le cas des séries non stationnaires, les régressions effectuées à l'aide des MCO sont dites fallacieuses⁵⁰. Elles sont caractérisées par des R^2 très élevés alors que les variables peuvent n'avoir aucun lien entre eux. Dans ce cas, les erreurs seraient corrélées et la statistique de Student sera mal calculée puisque le calcul de la variance des erreurs est faussé.

D'où l'intérêt du concept de cointégration.

2) Le modèle VECM et la notion de cointégration

→ La notion de cointégration

L'analyse de la cointégration permet d'identifier la relation entre plusieurs variables. On admet qu'une série est intégrée d'ordre d si il faut la différencier d fois pour la rendre stationnaire. On dit que deux séries X_t et Y_t sont cointégrées s'ils sont intégrés au même ordre $d > 1$ et il existe une combinaison linéaire des deux séries qui est intégrée d'ordre k tel que $k < d$.

→ Le modèle VECM

L'équation (13) peut être réécrite sous la forme :

$$\Delta X_t = M_0 + \Pi X_{t-1} + \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + \Gamma_2 \Delta X_{t-2} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta X_{t-p+1} + \epsilon_t \quad (17)$$

$$\text{où : } \Pi = \sum_{i=1}^p M_i - I \text{ et } \Gamma_i = - \sum_{k=i+1}^p M_k$$

→ Test de cointégration : L'approche de JOHANSEN

Cette approche permet de tester la cointégration de plusieurs séries chronologiques de premier ordre d'intégration. D'après le théorème de représentation de Granger « Toutes les séries cointégrées peuvent être représentées par un modèle à correction d'erreur »⁵¹. Ainsi, le coefficient de la matrice Π a un rang réduit $r < k$, nombre de variables cointégrées. r est alors le

50. "spurious regression", cette notion a été introduite dès 1974 par Engle et Newbold puis formalisée par Engle et Granger en 1987 et enfin par Johansen en 1991 et 1995.

51. Preuve. Engle, R.E. & Granger, C.W.J. (1987) "Cointegration and error-correction representation, estimation and testing". *Econometrica* 55

Annexe 4

nombre de relations de cointégration(rang de cointégration).

La méthode de Johansen consiste à estimer la matrice Π et de voir si on peut rejeter des restrictions impliquées par le rang réduit de Π .

Annexe 5 : Résultat de l'estimation du modèle VECM

Annexe 5

FIGURE 22 – Paramètres du modèle VECM

Vector Error Correction Estimates

Date: 06/19/18 Time: 18:49

Sample (adjusted): 10/06/2010 10/13/2016

Included observations: 1497 after adjustments

Standard errors in () & t-statistics in []

Cointegrating Eq:	CointEq1	CointEq2	
BETA1(-1)	1.000000	0.000000	
BETA2(-1)	0.000000	1.000000	
BETA3(-1)	-0.670792 (0.14843) [-4.51927]	0.004017 (0.05962) [0.06738]	
C	-0.057471	0.017612	
Error Correction:	D(BETA1)	D(BETA2)	D(BETA3)
CointEq1	-0.004318 (0.00103) [-4.19334]	0.003008 (0.00102) [2.95661]	0.013624 (0.00404) [3.37523]
CointEq2	-0.005768 (0.00258) [-2.23149]	0.002491 (0.00255) [0.97547]	0.035948 (0.01013) [3.54777]
D(BETA1(-1))	0.026014 (0.07783) [0.33425]	-0.082558 (0.07688) [-1.07384]	0.209861 (0.30507) [0.68791]
D(BETA1(-2))	0.169612 (0.07775) [2.18150]	-0.135673 (0.07680) [-1.76648]	-0.311955 (0.30477) [-1.02358]
D(BETA1(-3))	-0.067772 (0.07710) [-0.87903]	0.099711 (0.07616) [1.30924]	0.889701 (0.30221) [2.94397]

Annexe 5

D(BETA1(-4))	-0.040460 (0.07801) [-0.51866]	0.117123 (0.07706) [1.51992]	0.295332 (0.30578) [0.96583]
D(BETA1(-5))	0.144512 (0.07821) [1.84763]	-0.151007 (0.07726) [-1.95446]	0.059691 (0.30659) [0.19469]
D(BETA2(-1))	0.035080 (0.04629) [0.75787]	-0.108298 (0.04572) [-2.36852]	0.114074 (0.18144) [0.62872]
D(BETA2(-2))	0.063396 (0.04629) [1.36943]	-0.068955 (0.04573) [-1.50785]	-0.054580 (0.18147) [-0.30077]
D(BETA2(-3))	-0.008691 (0.04603) [-0.18883]	0.037031 (0.04547) [0.81447]	0.334944 (0.18042) [1.85650]
D(BETA2(-4))	0.009692 (0.04638) [0.20897]	0.041759 (0.04582) [0.91144]	0.025662 (0.18180) [0.14115]
D(BETA2(-5))	0.068777 (0.04633) [1.48443]	-0.033165 (0.04577) [-0.72463]	-0.043307 (0.18162) [-0.23845]
D(BETA3(-1))	0.009598 (0.01559) [0.61574]	0.001823 (0.01540) [0.11838]	-0.027140 (0.06110) [-0.44418]
D(BETA3(-2))	0.043619 (0.01557) [2.80229]	-0.030018 (0.01538) [-1.95224]	-0.105376 (0.06101) [-1.72707]
D(BETA3(-3))	-0.004064 (0.01543) [-0.26335]	0.017854 (0.01524) [1.17134]	0.134502 (0.06048) [2.22375]

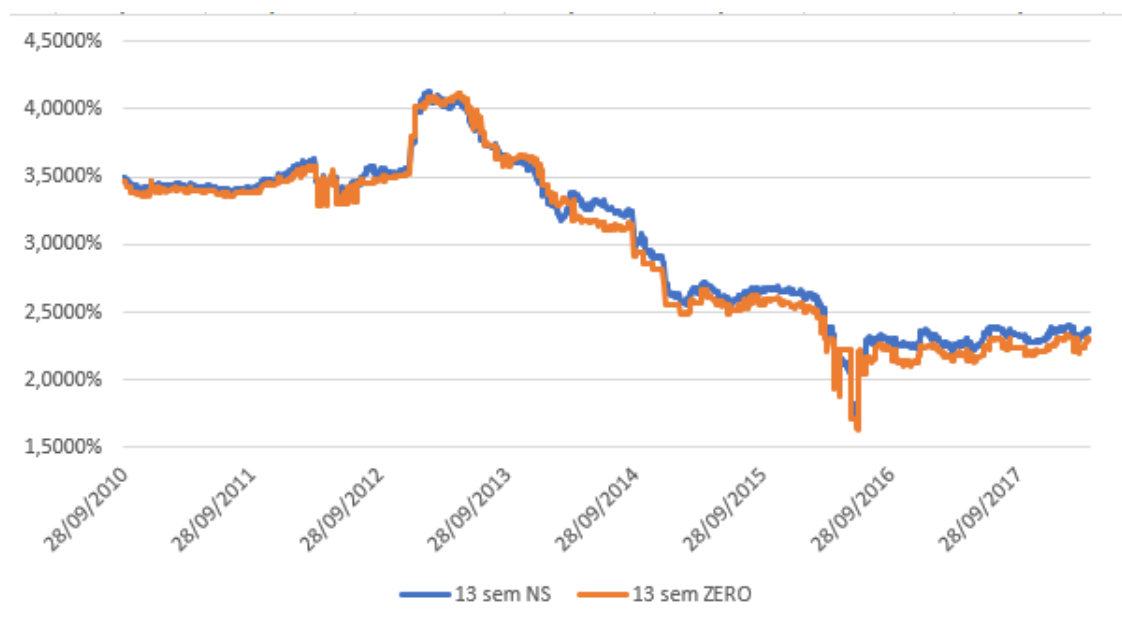
Annexe 5

D(BETA3(-4))	-0.007769 (0.01561) [-0.49764]	0.026681 (0.01542) [1.73018]	0.038322 (0.06119) [0.62625]
D(BETA3(-5))	0.009714 (0.01564) [0.62093]	-0.003582 (0.01545) [-0.23176]	0.046585 (0.06132) [0.75967]
C	-1.37E-06 (9.2E-06) [-0.14897]	-5.67E-06 (9.1E-06) [-0.62440]	-2.54E-06 (3.6E-05) [-0.07047]
R-squared	0.031223	0.034409	0.027345
Adj. R-squared	0.020088	0.023310	0.016165
Sum sq. resids	0.000184	0.000180	0.002833
S.E. equation	0.000353	0.000349	0.001384
F-statistic	2.803983	3.100255	2.445875
Log likelihood	9784.373	9802.703	7739.394
Akaike AIC	-13.04793	-13.07242	-10.31582
Schwarz SC	-12.98406	-13.00855	-10.25196
Mean dependent	-3.33E-06	-4.67E-06	-8.84E-06
S.D. dependent	0.000357	0.000353	0.001395
Determinant resid covariance (dof adj.)		3.01E-21	
Determinant resid covariance		2.90E-21	
Log likelihood		29024.33	
Akaike information criterion		-38.69650	
Schwarz criterion		-38.48362	
Number of coefficients		60	

**Annexe 6 : Ajustement du
modèle aux taux de maturités
13 semaines, 3 ans, 10 ans et 20
ans.**

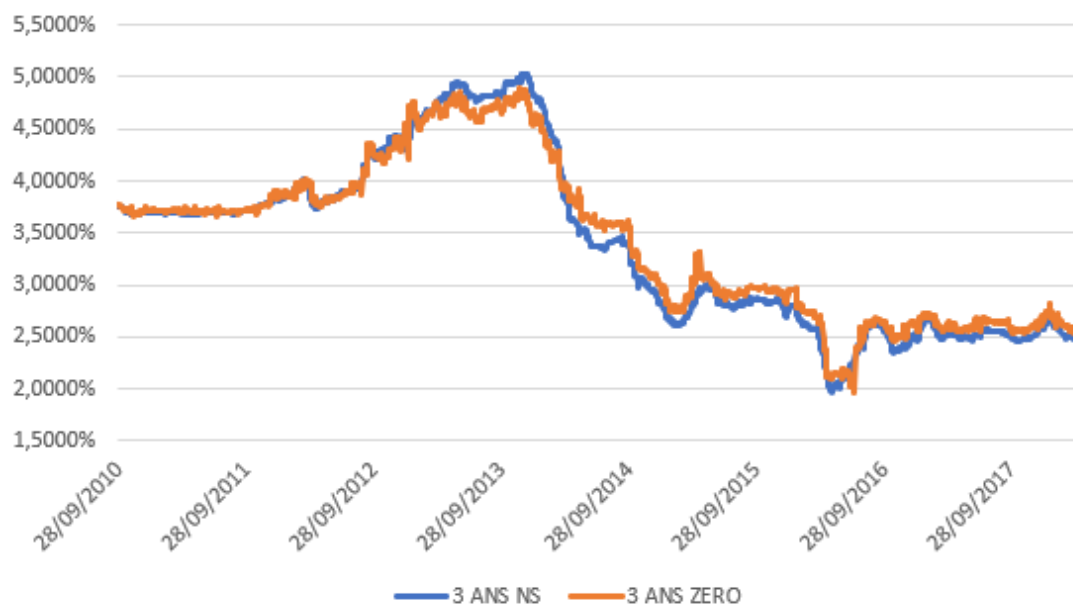
Annexe 6

FIGURE 23 – Taux 13 semaines observés et estimés



Source : Réalisée par l'auteur

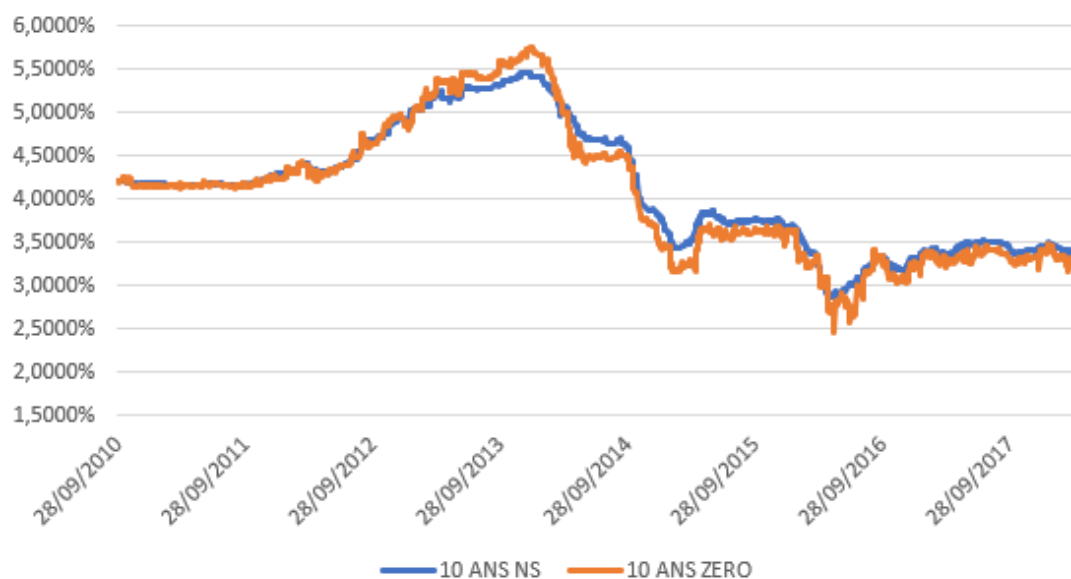
FIGURE 24 – Taux 3 ans observés et estimés



Source : Réalisée par l'auteur

Annexe 6

FIGURE 25 – Taux 10 ans observés et estimés



Source : Réalisée par l'auteur

FIGURE 26 – Taux 20 ans observés et estimés



Source : Réalisée par l'auteur