(18) a. Множество X непрерывных функций $x(t)$, у которых $x(0) \neq x(1)$

$\in X$: $x(t)=t$: $x(0)=0$, $x(1)=1$, $1\neq 0$

$x(t)=t^2$: $x(0)=0$, $x(1)=1$, $1\neq 0$

$\notin X$: $x(t)=1$: $x(0)=1$, $x(1)=1$; $1=1$

$x(t)=t^2-t$: $x(0)=0$; $x(1)=0$, $0=0$

Проверим на линейность.

Рассмотрим $f, g \in X$. Тогда $f(1)\neq f(0)$, $g(1)\neq g(0)$.

① Замкнутость относительно сложения

по условию $f(0)+g(0) \neq f(1)+g(1)$, но нельзя сказать что это условие выполняется всегда. Например
$f(t)=t$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $0\neq 1$, $f\in X$
$g(t)=1-t$, $g(0)=1$, $g(1)=0$, $0\neq 1$, $g\in X$, но

$f(0)+g(0)=1$
$f(1)+g(1)=1$ $\quad 1=1 \Rightarrow f(t)+g(t)\notin X \Rightarrow$

нарушается условие замкнутости относительно сложения $\Rightarrow$ X - не является линейным пространством б). Множество X таких числовых последовательностей

$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $|x_k| \le 1$, $k = 1, 2, 3 \dots$

$\in X$: $x = \{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty}$: $(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots)$; $|x_k| \le 1$

$\notin X$: $x = \{k\}_{k=1}^{\infty}$: при $k > 1$; $|k| > 1$

Проверим на линейность:

Рассмотрим $x, y \in X$. Тогда $|x_k| \le 1$, $|y_k| \le 1$

1) Замкнутость относительно сложения

по условию $|x_k + y_k| \le 1$

Приведу контрпример, когда это условие нарушается

$x_k = \{1\}_{k=1}^{\infty}$, $|x_k| \le 1 \in X$

$y_k = \{\frac{1}{2n}\}_{k=1}^{\infty}$, $|y_k| \le 1 \in X$

при $k = 1$: $|1 + \frac{1}{2}| = 1,5 > 1 \Rightarrow x_k + y_k \notin X \Rightarrow$

нарушается условие замкнутости относительно сложения $\Rightarrow$ X - нелинейное множество