Линейные, нормированные и Гильбертовы пространства

Вариант 1

(18) а. Множество X непрерывных функций $x(t)$, у которых $x(0) \neq x(1)$

$\in X$: $x_1(t) = t$: $x(0) = 0$, $x(1) = 1$; $0 \neq 1$

$x_2(t) = t^2$; $x(0) = 0$, $x(1) = 1$; $0 \neq 1$

$\notin X$: $x(t) = 1$: $x(0) = 1$, $x(1) = 1$, $1 = 1$

$x(t) = t^2 - t$: $x(0) = 0$; $x(1) = 0$; $0 = 0$

Проверим на линейность:

$x_1(t) + x_2(t) = t + t^2 = h(t)$ – непрерывна

$h(0) = 0$; $h(1) = 2 \Rightarrow h(0) \neq h(1) \in X$

$\alpha \in R$

$h_1(t) = x_1(t) \cdot \alpha = \alpha t$ – непрерывна

$h_1(0) = \alpha \cdot 0 = 0$; $h_1(1) = \alpha \cdot 1 = \alpha$. $h_1(0) \neq h_1(1) \Rightarrow \in X$

$h_2(t) = x_2(t) \cdot \alpha = \alpha t^2$ – непрерывна

$h_2(0) = \alpha \cdot 0 = 0$; $h_2(1) = \alpha \cdot 1 = \alpha$: $h_1(0) \neq h_1(1) \Rightarrow \in X$

$\Rightarrow$ множество X – линейное пространство

б. Множество X таких числовых последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $|x_k| \leq 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$\in X$: $x_1 = \{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty}$: $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$, $|x_k| \leq 1$

$x_2 = \{0\}_{k=1}^{\infty}$: $x_k = 0$, $|x_k| \leq 1$

$\notin X$: $x = \{k\}_{k=1}^{\infty}$: при $k > 1$, $|x_k| > 1$

Проверим на линейность:

$h_k = \frac{1}{k} + 0 = \frac{1}{k}$, $|h_k| = |\frac{1}{k}| \leq 1$

$\alpha \in R^n$

$h_{1k} = \alpha \cdot \frac{1}{k}$, при $\alpha > k$ $|h_{1k}| > 1$ – $\notin X$

$h_{2k} = \alpha \cdot 0 = 0$, $|h_{2k}| = |0| \leq 1$ – $\in X$

$\Rightarrow$ X – не линейное множество

Ответ: а – линейное пространство, б – не линейное множество

(19) $C[0;1]$, $p(x) = \max\limits_{t,s\in[0;1]} |x(t) - x(s)|$

(1) $p(x) \geq 0$ для всех x, т.к. $|x(t) - x(s)| \geq 0$ для любых $t, s \in [0;1]$

Проверим $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

если $p(x) = 0$, то $\max\limits_{t,s[0;1]} |x(t) - x(s)| = 0$

$|x(t) - x(s)| = 0$ на $[0;1]$

при $x(t) = 1$, $x(s) = 1$: $|1 - 1| = 0$, но $x \neq 0 \Rightarrow$ первая аксиома не выполняется $\Rightarrow$ не является нормой

(2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$

$p(\alpha x) = \max\limits_{t,s[0;1]} |\alpha x(t) - \alpha x(s)| = |\alpha| \max\limits_{t,s\in[0;1]} |x(t) - x(s)| =$

$|\alpha| p(x) \Rightarrow$ вторая аксиома выполняется

(3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

$p(x+y) = \max\limits_{t,s[0;1]} |x(t) + y(t) - x(s) - y(s)| = \max\limits_{t,s\in[0;1]} |(x(t) - x(s)) +$

$(y(t) - y(s))| \leq \max\limits_{t,s\in[0;1]} |x(t) - x(s)| + \max\limits_{t,s\in[0;1]} |y(t) - y(s)| \leq p(x) + p(y)$

$\Rightarrow$ аксиома 3 выполняется

т.к. $p(x)$ удовлетворяет 2 и 3, то является полунормой

Ответ: $p(x)$ задает полунорму в пространстве $C[0;1]$

(20) $x(t) = t^4 - 2t^2 + 5$, $[a;b] = [-2;2]$

$\|x(t)\|_{C[-2;2]} = \max\limits_{t\in[-2;2]} |t^4 - 2t^2 + 5|$

$x' = 4t^3 - 4t$

$x' = 0$

$4t(t^2 - 1) = 0$

$t = 0$ или $t = \pm 1$

т.к. $x(-2) = x(2) = |16 - 8 + 5| = 13$

$x(-1) = x(1) = |1 - 2 + 5| = 4 \quad \Rightarrow$

$x(0) = 5$

$\|x(t)\|_{C[-2;2]} = 13$

Ответ: $\|x(t)\|_{C[-2;2]} = 13$

(21)

$$x = \left\{ \frac{\ln^4 k}{k} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

$$\|x\|_{l^\infty} = \sup_{1 \le k < \infty} \left| \frac{\ln^4 k}{k} \right|$$

$\lim\limits_{k \to \infty} |x_k| = 0$, так что он не совпадает с супремумом

Исследуем достижимость максимума

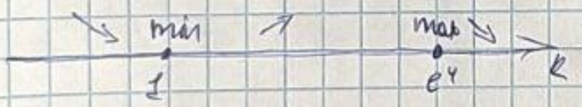
$$x = \frac{\ln^4 k}{k}$$

$$x' = -\frac{\ln^4 k - 4\ln^3 k}{k^2}$$

$$x' = 0$$

$$-\frac{\ln^4 k - 4\ln^3 k}{k^2} = 0$$

$k = 1 \qquad k = e^4$



точка максимума e^4

$e^4 \approx 54{,}59. \Rightarrow k = 55$

$$\|x\|_{l^\infty} = \sup_{1 \le k < \infty} \left| \frac{\ln^4 k}{k} \right| = \frac{\ln^4 55}{55}$$

Ответ: $\dfrac{\ln^4 55}{55}$

(22) $x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{9}}; \frac{3}{\sqrt{27}}; \frac{4}{\sqrt{81}}; \dots \right)$; $B_1(0)$?; $x = \left\{ \frac{k}{\sqrt{3^k}} \right\}_{k=1}^{\infty}$

$$x \in B_1(0) \Leftrightarrow \|x\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{\sqrt{3^k}} \right)^2} < 1 \Leftrightarrow \|x\|_{l^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{\sqrt{3^k}} \right)^2 < 1$$

$$\|x\|_{l^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \frac{16}{81} + \dots > \frac{1}{3} + \frac{4}{9} +$$

$$\frac{9}{27} = \frac{10}{9} > 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \notin B_1(0)$ в пространстве l^2

Ответ: $x \notin B_1(0)$

(23)

$x = \left(-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \dots\right)$

$y = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \dots\right)$

$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot y_k$

$x_k = \frac{(-1)^k}{3^{k-1}}$

$y_k = \frac{1}{2^{k+1}}$

$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k-1} \cdot 2^{k+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k-1} 2^{k-1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{6^{k-1}}$

геом. прогресс.

$a_0 = (-1)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^{1-1} = -1$

$q = \frac{(-1) \cdot 1}{6} = -\frac{1}{6}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{6^{k-1}} = \frac{a_0}{1-q} = \frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{6}\right)} = -\frac{6}{7}$

$(x, y) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{3}{14}$

Ответ: $-\frac{3}{14}$