Сжимающие операторы и метод последовательных приближений

Вариант 1.

(13) $x\sqrt{3} + \operatorname{arctg}(3x-2) = \sin^2 x \qquad \varepsilon = 10^{-5}$

$$\varphi(x) = x\sqrt{3} + \operatorname{arctg}(3x-2) - \sin^2 x = 0$$

$$\varphi'(x) = \sqrt{3} + \frac{3}{1+(3x-2)^2} - 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\varphi'(x) = \sqrt{3} + \frac{3}{1+(3x-2)^2} - \sin 2x$$

$$0 < \frac{3}{1+(3x-2)^2} \leq 3, \quad -1 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$0 < \nu \leq \varphi'(x) \leq \mu$$

$$\nu = \sqrt{3} + 0 - 1 = \sqrt{3} - 1$$

$$\mu = \sqrt{3} + 3 + 1 = \sqrt{3} + 4$$

$$\sqrt{3} - 1 \leq \varphi'(x) \leq \sqrt{3} + 4$$

$$x - \frac{\varphi(x)}{\mu} = x$$

$$x - \frac{1}{\sqrt{3}+4}\left(x\sqrt{3} + \operatorname{arctg}(3x-2) - \sin^2 x\right) = x$$

$$x_k = x_{k-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+4}\left(x_{k-1}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}(3x_{k-1}-2) - \sin^2 x_{k-1}\right)$$

$$\alpha = 1 - \frac{\nu}{\mu} = 1 - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+4}$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}+4}\left(0\sqrt{3} - \operatorname{arctg}(3\cdot 0 - 2) - \sin^2 0\right)$$

$$x_1 = 0{,}19315$$

$$N_{apr} = \left[\log_\alpha \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\rho(x_0, x_1)}\right] + 1$$

$$\rho(x_0, x_1) = |x_0 - x_1| = |0 - 0{,}19315| = 0{,}19315$$

$$N_{apr} = 89$$

Но при этом программе потребовалось всего 16 итераций

Ответ:

```
Приближенное решение: x = 0.44545
Число итераций: 16
Число априорных итераций: 89
```

(14)

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 77 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 = 62 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 59 \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 84 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 77 \\ 62 \\ 59 \\ 84 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -1065 \neq 0$$

$$\lambda(A^T A) = 381{,}89171$$

I – единичная матрица 4×4

$$\underbrace{\left(I - \frac{A^T A}{\lambda}\right)}_{C} x + \underbrace{\frac{A^T b}{\lambda}}_{d} = x \Leftrightarrow Cx + d = x$$

$$\lambda(C) = 0{,}98965 = \alpha$$

$$x_n = C x_{n-1} + d$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1{,}6101 \\ 2{,}8275 \\ 3{,}8432 \\ 5{,}3695 \end{pmatrix}$$

число априорных итераций для точности 10^{-2}: $N_{apr} = 946$

число априорных итераций для точности 10^{-4}: $N_{apr} = 1388$

Получим точное решение методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & 2 & 8 & 77 \\ 5 & 1 & 1 & 9 & 62 \\ 3 & 3 & 6 & 4 & 59 \\ 1 & 5 & 8 & 7 & 84 \end{array}\right) \underset{=}{a_1 : 4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}75 & 0{,}5 & 2 & 19{,}25 \\ 5 & 1 & 1 & 9 & 62 \\ 3 & 3 & 6 & 4 & 59 \\ 1 & 5 & 8 & 7 & 84 \end{array}\right) \begin{array}{l} a_2 - 5a_1 \\ a_3 - 3a_1 \\ a_4 - a_1 \\ = \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}75 & 0{,}5 & 2 & 19{,}25 \\ 0 & -7{,}75 & -1{,}5 & -1 & -34{,}25 \\ 0 & -2{,}25 & 4{,}5 & -2 & 1{,}25 \\ 0 & 3{,}25 & 7{,}5 & 5 & 64{,}75 \end{array}\right) \underset{=}{a_2 : -7{,}75} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1{,}75 & 0{,}5 & 2 & 19{,}25 \\ 0 & 1 & 6/31 & 4/31 & \frac{137}{31} \\ 0 & -2{,}25 & 4{,}5 & -2 & 1{,}25 \\ 0 & 3{,}25 & 7{,}5 & 5 & 64{,}75 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} a_1 - 1{,}75a_2 \\ a_3 + 2{,}25a_2 \\ a_4 - a_2 \cdot 3{,}25 \\ = \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{31} & 55/31 & \frac{357}{31} \\ 0 & 1 & 6/31 & 4/31 & 137/31 \\ 0 & 0 & 153/31 & -53/31 & \frac{347}{31} \\ 0 & 0 & 213/31 & 142/31 & \frac{1562}{31} \end{array}\right) \underset{=}{a_3 : \frac{153}{31}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/31 & 55/31 & \frac{357}{31} \\ 0 & 1 & 6/31 & 4/31 & \frac{137}{31} \\ 0 & 0 & 1 & -53/153 & 347/153 \\ 0 & 0 & 213/31 & 142/31 & \frac{1562}{31} \end{array}\right)$$

$a_1 - a_3 \cdot \frac{5}{31}$
$a_2 - a_3 \cdot 6/31$
$a_4 - a_3 \cdot \frac{217}{31}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{280}{153} & \frac{1006}{153} \\ 0 & 1 & 0 & 10/51 & 203/51 \\ 0 & 0 & 1 & -53/153 & 347/153 \\ 0 & 0 & 0 & 355/51 & \frac{1775}{51} \end{array}\right)$$

$a_4 : \frac{355}{51}$
$a_1 - a_4 \cdot \frac{280}{153}$
$a_2 - a_4 \cdot \frac{10}{51}$
$a_3 + a_4 \cdot \frac{53}{153}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 5$

Полученные решения:

$\varepsilon = 10^{-2}$: $x_{388} = \begin{pmatrix} 1,9917 \\ 2,9989 \\ 3,9986 \\ 5,0052 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = 10^{-4}$: $x_{444} = \begin{pmatrix} 1,9999 \\ 3 \\ 4 \\ 5,0001 \end{pmatrix}$

$\rho_2(x_{388}, x) = 0,00997 < 10^{-2}$
$\rho_2(x_{444}, x) = 0,000099 < 10^{-4}$ $\Rightarrow$ точность приближенных решений соответствует поставленной задаче.

(15) $x(t) = \frac{2}{e^{1+|x(t)|}} + \cos 2t$, $[a; b] = [-5; 5]$

$\Phi[x] = \varphi(t, |x(t)|)$, $\varphi(t, u) = \frac{2}{e^{1+u}} + \cos 2t$

$\varphi(t, u)$ непрерывна на множестве $[-5; 5] \times [0; +\infty)$

$\varphi'_u(t, u) = -\frac{2}{e^{1+u}}$

$|\varphi'_u(t, u)| = \frac{2}{e^{1+u}} \le \frac{2}{e} < 1$

$\varphi'_u(t, u)$ непрерывна для всех $u \ge 0$

$\Rightarrow$ оператор Φ сжимающий с коэффициентом $\alpha = \frac{2}{e}$ $\Rightarrow$

Φ имеет единственную неподвижную точку $x(t) \in C[-5; 5]$

$x_n(t) = \frac{2}{e^{1+|x_{n-1}(t)|}} + \cos 2t$

$x_0(t) = +\cos 2t$

$x_1(t) = \frac{2}{e^{1+|\cos 2t|}} + \cos 2t$

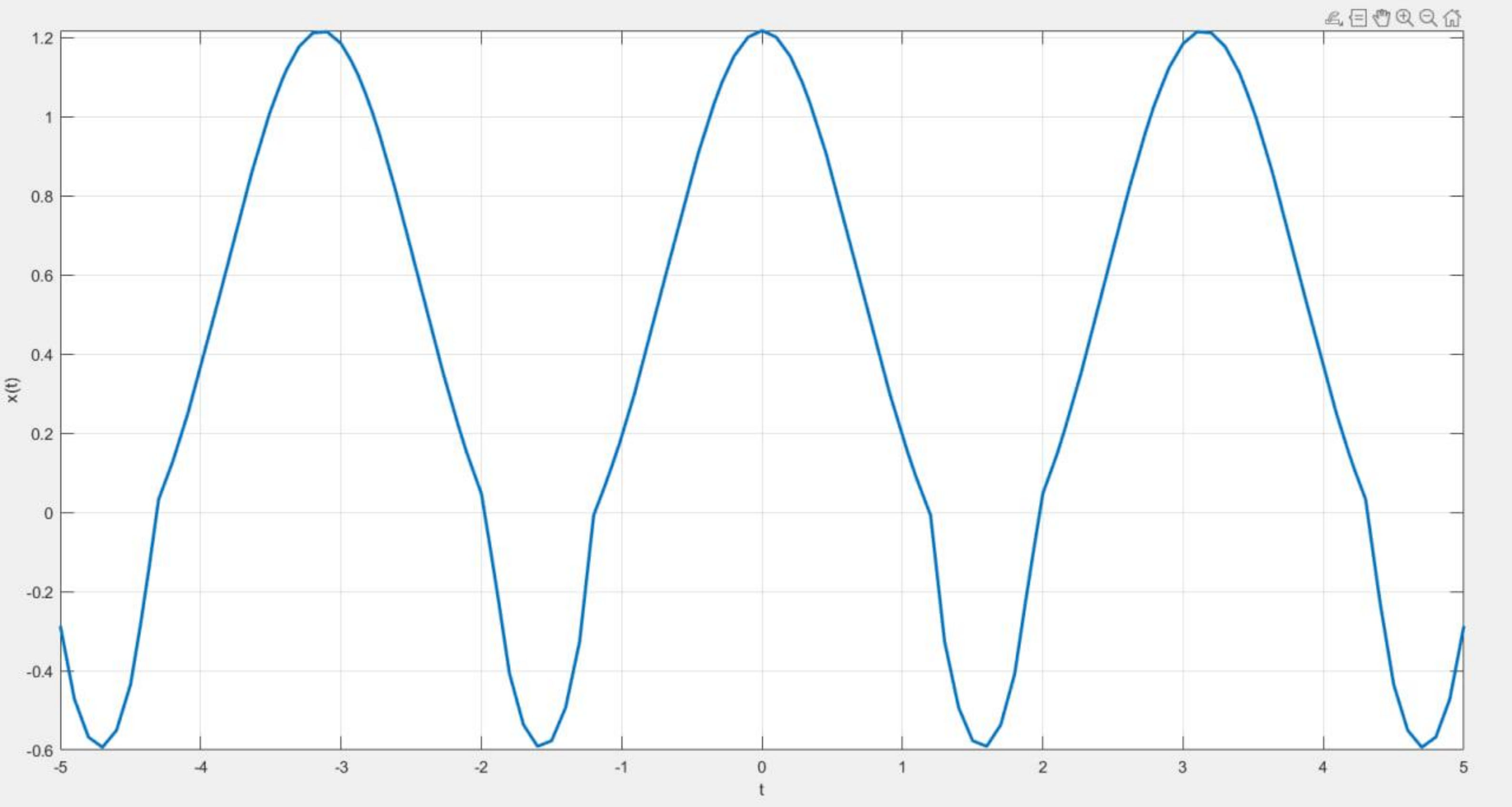
$\varepsilon = 10^{-2}$, $\alpha = \frac{2}{e}$

$\rho_{C[-5;5]}(x_0, x_1) = \max_{t \in [-5;5]} |x_0(t) - x_1(t)| = \max_{t \in [-5;5]} \left| \cos 2t - \frac{2}{e^{1+|\cos 2t|}} - \cos 2t \right|$

$= \max_{t \in [-5;5]} \frac{2}{e^{1+|\cos 2t|}} = \frac{2}{e}$

$N_{пр} = 20$

Поскольку для записи $x_{20}(t)$ потребуется очень много места, то в качестве ответа построим график:



x(t)
t

(16)

$$x(t) = \lambda \int_0^1 (1 - ts)\,x(s)\,ds + t, \quad \varepsilon = 10^{-3}$$

$$\Phi: C[0;1] \to C[0;1], \quad \Phi[x] = \lambda \int_0^1 (1 - ts)\,x(s)\,ds + t$$

$K(t,s) = \lambda(1 - ts)$ — ядро интегрального оператора

$$\alpha = \lambda \max_{t \in [0;1]} \int_0^1 |1 - ts|\,ds < 1$$

Выражение $1 - ts$ при $t, s \in [0,1]$ принимает всегда неотрицательные значения

$$0 \le 1 - ts \le 1$$

$$\int_0^1 (1 - ts)\,ds = \int_0^1 1\,ds - t\int_0^1 s\,ds = s\Big|_0^1 - t \cdot \frac{s^2}{2}\Big|_0^1 = 1 - \frac{t}{2}$$

$$\max_{t \in [0;1]} \left(1 - \frac{t}{2}\right) = 1$$

$$\alpha = \lambda \cdot 1 < 1$$

следовательно, при $\lambda < 1$ к уравнению применим принцип сжимающих операторов: уравнение имеет единственное решение и можно использовать МПИ для поиска приближенного решения.

Возьмем $\lambda = 0{,}5$

$$x(t) = 0{,}5 \int_0^1 (1 - ts)\,x(s)\,ds + t$$

$$x_n(t) = 0{,}5 \int_0^1 (1 - ts)\,x_{n-1}(s)\,ds + t$$

$$x_0(t) \equiv 1$$

$$x_1(t) = 0{,}5 \int_0^1 (1 - ts) \cdot 1\,ds + t = 0{,}5\left(\int_0^1 1\,ds - t\int_0^1 s\,ds\right) + t =$$

$$0{,}5\left(1 - \frac{t}{2}\right) + t = 0{,}5 - \frac{t}{4} + t = 0{,}5 + \frac{3t}{4}$$

$$\rho_{C[0;1]}(x_0, x_1) = \max_{t \in [0;1]} |x_0(t) - x_1(t)| = \max_{t \in [0;1]} \left|1 - 0{,}5 - \frac{3t}{4}\right| = 0{,}5$$

$N_{апр} = 11;$

11 приближение: x_11(t)=(21304779169*t)/27518828544 + 1775452727/4586471424

$$x(t) = 0{,}5\int_0^1 x(s)\,ds + t - 0{,}5t\int_0^1 x(s)\,ds$$

$$x(t) = c_1 + c_2 t, \quad c_1, c_2 \in R$$

$$c_1 = 0{,}5\int_0^1 x(s)\,ds$$

$$c_1 = 0{,}5\int_0^1 (c_1 + c_2 s)\,ds = 0{,}5\left(c_1 s + \frac{c_2 s^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{4}$$

$$c_2 = 1 - 0{,}5\int_0^1 (c_1 + c_2 s)s\,ds = 1 - 0{,}5\left(\frac{c_1 s^2}{2} + \frac{c_2 s^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \left(\frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{6}\right)$$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_2}{4} \\ c_2 = 1 - \left(\dfrac{c_1}{4} + \dfrac{c_2}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{12}{31};\ c_2 = \frac{24}{31}$$

$$x(t) = \frac{12}{31} + \frac{24t}{31}$$

$\rho_{C[0;1]}(x, x_{11}) = 0{,}00001 < 10^{-3} \Rightarrow$ приближенное решение обладает приближенной точностью.

Ответ: x_11(t)=(21304779169*t)/27518828544 + 1775452727/4586471424

(17) $x' = x\cos t - \frac{1}{2}\sin 2t, \quad x(\pi) = -1$

$$x' - x\cos t = -\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$x' - x\cos t = 0$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\cos t\,dt$$

$$\ln|x| = \sin t + C_1$$

$$x_{oo} = e^{\sin t}\cdot C_1$$

$$x_r = e^{\sin t}\cdot a$$

$$x_r' = a'\cdot e^{\sin t} + a\cdot e^{\sin t}\cdot\cos t$$

$$a' e^{\sin t} + a\cdot e^{\sin t}\cdot\cos t - a\cdot e^{\sin t}\cdot\cos t = -\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$a' e^{\sin t} = -\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$a' = -\frac{\frac{1}{2}\sin 2t}{e^{\sin t}}$$

$$a = \frac{\sin t + 1}{e^{\sin t}} \Rightarrow x_r = \sin t + 1$$

$$x_{o\delta} = C_1\cdot e^{\sin t} + \sin t + 1$$

$$-1 = C_1 \cdot e^{\sin \pi} + \sin \pi + 1 \Rightarrow C = -2$$

$$x(t) = -2 \cdot e^{\sin t} + \sin t + 1$$

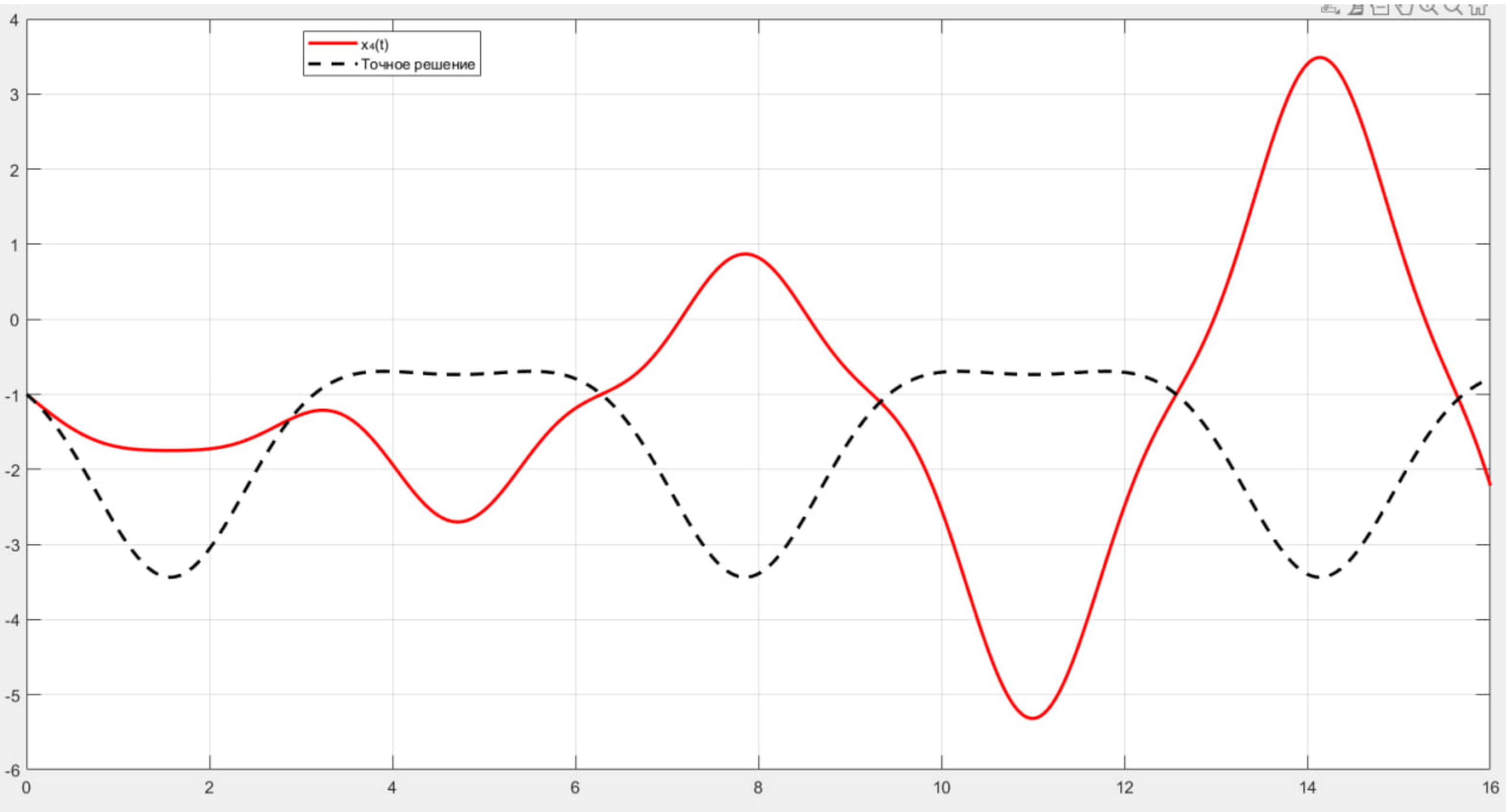
$$x(t) = -1 + \int_{\pi}^{t} \left(x(s) \cos s - \frac{1}{2} \sin 2s \right) ds$$

$$x(t) = \underbrace{\int_{\pi}^{t} x(s) \cos s \, ds - \frac{1}{4}(3 + \cos 2t)}_{\Phi[x]} \Leftrightarrow \Phi[x] = x$$

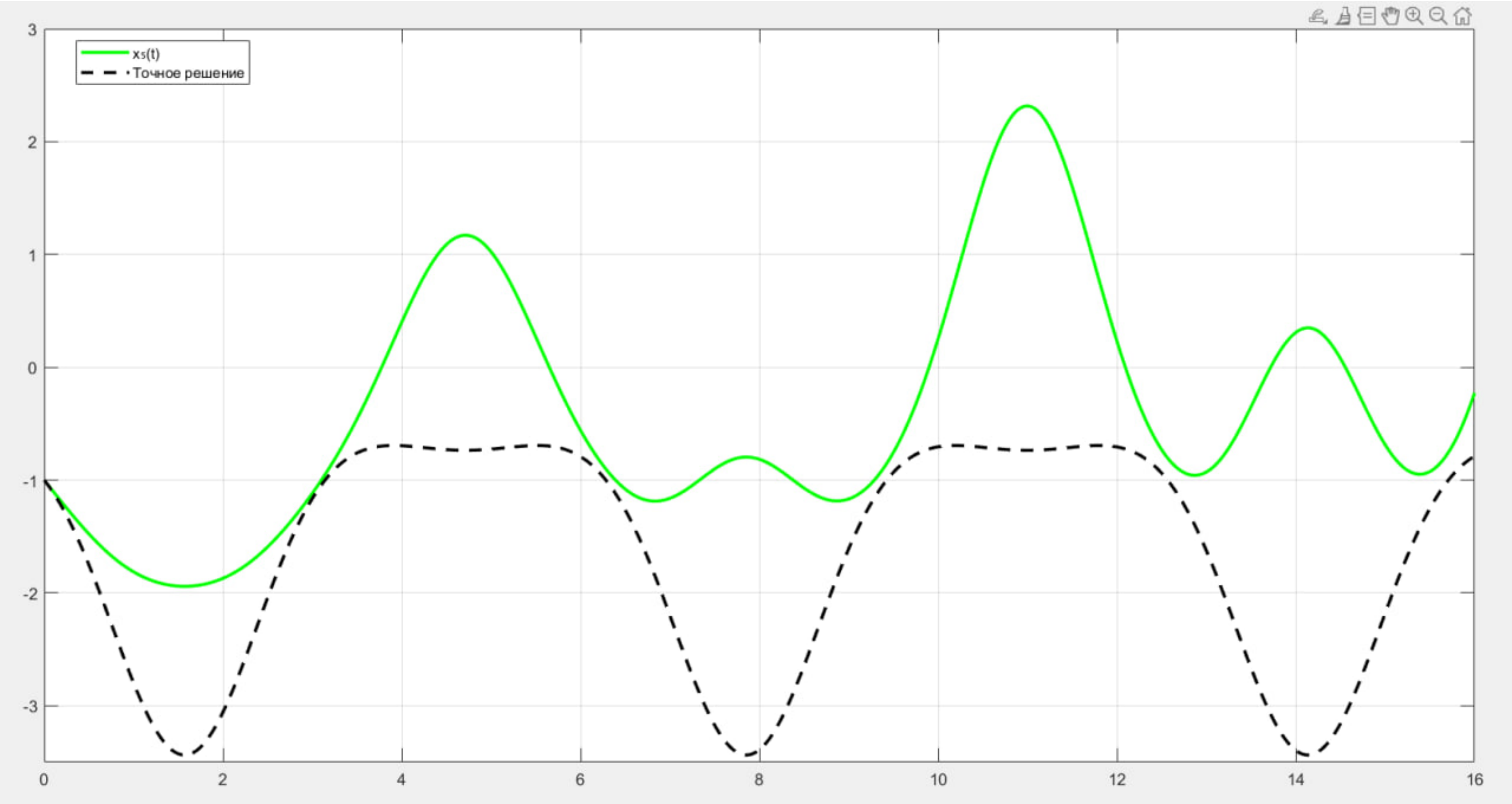
$$x_n(t) = \int_{\pi}^{t} \cos s \cdot x_{n-1}(s) \, ds - \frac{1}{4}(3 + \cos 2t)$$

$$x_0(t) = t$$

4-я итерация:



5-я итерация:



6-я итерация: