Ортогональные системы в Гильбертовых пространствах.

Вариант 1.

(24) $x = e_2 + \frac{e_3}{3} + \frac{2e_4}{3} + e_7$

$y = \frac{2e_4}{3} - \frac{2e_3}{3} - e_9$

$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x-y, x-y)}$

$x - y = e_2 + \frac{e_3}{3} + \frac{2e_4}{3} + e_7 - \frac{2e_4}{3} + \frac{2e_3}{3} + e_9 = e_2 + e_3 + e_7 + e_9$

$\|x - y\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

Ответ: $\rho(x, y) = 2$

(25) $x = e_7 - \left(\frac{e_{23}}{2} + \frac{e_{24}}{3}\right)$

$y = 0,5(e_2 - 3e_{24}) + e_7$

$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

$(x, y) = \left(\underline{e_7} - \frac{e_{23}}{2} - \underline{\frac{e_{24}}{3}}, \frac{e_2}{2} - \underline{\frac{3e_{24}}{2}} + \underline{e_7}\right) = 1 \cdot 1 + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 + 0,5 = 1,5$

$\|x\| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$

$\|y\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$\cos\varphi = \frac{1,5}{\frac{7}{6} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2}} = \frac{18}{7\sqrt{14}}$

Ответ: $\arccos \frac{18}{7\sqrt{14}}$

(26) $x(t)=\sqrt{1-t^2},\ y(t)=4t^2+4t-1$

$\mathcal{L}^2(-1;1);\ \mathcal{L}^2(-1;0)$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}(4t^2+4t-1)dt=4\int_{-1}^{1}t^2\sqrt{1-t^2}dt+4\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}dt-\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$$

$$\int t^2\sqrt{1-t^2}dt=\left\{\begin{matrix}t=\sin u,\ 1-t^2=\cos^2u\\dx=\cos u\,du\end{matrix}\right\}=\int\sin^2u\cos^2u\,du=$$

$$\int\frac{(1+\cos 2u)(1-\cos 2u)}{4}du=\int\frac{1-\cos^2 2u}{4}du=\int\frac{\sin^2 2u}{4}du=$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4u}{2}du=\frac{u}{8}-\frac{1}{8}\int\cos 4u\,du=\frac{u}{8}-\frac{\sin 4u}{32}=\frac{u}{8}-$$

$$\frac{4\sin u\cos u(1-2\sin^2u)}{32}=\frac{\arcsin t}{8}-\frac{4t\sqrt{1-t^2}(1-2t^2)}{32}=$$

$$\frac{\arcsin t-t\sqrt{1-t^2}(1-2t^2)}{8}$$

$$\int t\sqrt{1-t^2}dt=\left\{\begin{matrix}u=1-t^2\\-\frac{1}{2}du=x\,dx\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2u\sqrt{u}}{3}=$$

$$-\frac{u\sqrt{u}}{3}=\frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}{3}$$

$$\int\sqrt{1-t^2}dt=\left\{\begin{matrix}t=\sin u,\ 1-t^2=\cos^2u\\dx=\cos u\,du\end{matrix}\right\}=\int\cos^2u\,du=\frac{1}{2}\int\cos 2u\,du$$

$$+\frac{1}{2}\int du=\frac{\sin 2u+2u}{4}=\frac{t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t}{2}$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}(4t^2+4t-1)dt=\left(\frac{\arcsin t}{2}-\frac{t\sqrt{1-t^2}(1-2t^2)}{2}+\frac{4(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}{3}\right.$$

$$\left.-\frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}-\frac{\arcsin t}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(\sqrt{1-t^2}\left(t^3+\frac{4t^2}{3}-t-\frac{4}{3}\right)\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$0-0=0\Rightarrow$ <u>ортогональные</u>

$$\int_{-1}^{0}\sqrt{1-t^2}(4t^2+4t-1)dt=\left(\sqrt{1-t^2}\left(t^3+\frac{4t^2}{3}-t-\frac{4}{3}\right)\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\sqrt{1}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)-0=$$

$-\frac{4}{3}\Rightarrow$ <u>НЕ ортогональны.</u>

(28)

a) $\begin{cases} \left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \dots\right) \\ \left(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \dots\right) \\ \left(0;\ 0;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \dots\right) \\ \dots \end{cases}$

Система не ортогональна, т.к. $(e_k, e_i) \neq 0$ для любых $k \neq i$, например

$(e_1, e_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

скалярное произведение – $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{1^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 \neq 0 \Rightarrow (e_1, e_2) \neq 0 \Rightarrow$ система не ортогональна $\Rightarrow$ система не ортонормирована

Проверим линейно-независимость:

Система имеет "верхнетреугольный" вид (т.е. матрица, составленная из n элементов первых n векторов, будет верхнетреугольной с ненулевыми элементами главной диагонали. Определитель такой матрицы будет равен произведению элементов глав. диагонали, а так как нулей на гл. диагонали нет, то и определитель его не равен нулю $\Rightarrow$ векторы e линейно-независимы) $\Rightarrow$ система линейно-независимая.

Проверим полноту:

$h \perp e^{(k)} \Leftrightarrow (h, e^{(k)}) = 0$

$\begin{aligned} (h, e^{(1)}) &: \ h_1 + \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{3} + \frac{h_4}{4} + \dots = 0 \\ (h, e^{(2)}) &: \ \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{3} + \frac{h_4}{4} + \dots = 0 \\ (h, e^{(3)}) &: \ \frac{h_3}{3} + \frac{h_4}{4} + \dots = 0 \end{aligned}$

$(h, e^{(1)}) - (h, e^{(2)}) = h_1 = 0$

$(h, e^{(2)}) - (h, e^{(3)}) = \frac{h_2}{2} = 0 \Rightarrow h_2 = 0$

и т.д.

$\Rightarrow h = 0 \Rightarrow \{e^{(k)}\}$ полная

Вывод: система не является ортонормиров. базисом, но она линейно-независимая и полная $\Rightarrow$ ~~его~~ из нее можно получить ортонормированный базис с помощью процесса ортогонализации и нормировки б) $$\begin{cases} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & \dots \\ \dots \end{cases}$$

Система не ортогональна, т.к. $(e_k, e_i) \neq 0$ для любых $k \neq i$, например, $(e^{(1)}, e^{(3)}) = 1 \cdot 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow$ система не ортонормирована.

Проверим линейно-независимость:

рассмотрим первые 3 последовательности из системы и матрицу, образованную их не нулевыми элементами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{a_3 - 3a_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{a_3 - \frac{3}{2}a_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow e^{(3)}$ может быть получена как линейная комбинация $e^{(1)}, e^{(2)} \Rightarrow$ система линейно-зависима. Чтобы сделать систему линейно-независимой, нужно удалить из нее каждую 3 последовательность.

После линейных преобразований и удаления лишних строк из $\{e^{(k)}\}$ получаем систему $\{\tilde{e}^{(k)}\}$:

$$\begin{cases} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots \end{cases}$$

Проверим полноту $\{\tilde{e}^{(k)}\}$ в пространстве l^2:

$h \perp \tilde{e}^{(k)} \Leftrightarrow (h, \tilde{e}^{(k)}) = 0$

$(h, e^{(1)}): \begin{cases} h_1 = 0 \end{cases}$

$(h, e^{(2)}): \begin{cases} 2h_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow h_1 = 0, h_2 = 0 \Rightarrow h = 0$

$\Rightarrow$ система полная

Вывод: система $\{e^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ не ортогональна, не ортонормирована, линейно-зависима, но из нее [illegible] получить линейно-независимую и полную систему $\{\tilde{e}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, которую можно преобразовать в ортонормированный базис в l^2 с помощью процесса ортогонализации и нормировки.