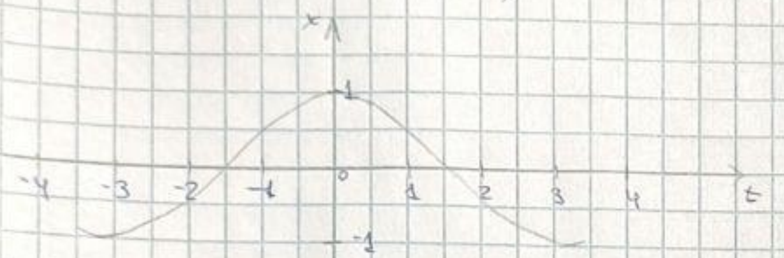
(7) $x(t) = \cos|t|$ $\quad x \in C^0[-1;1]$?

$$x(t) = \begin{cases} \cos t, & t \geq 0 \\ \cos(-t), & t < 0 \end{cases}, \qquad x \in C^1[-1;1]?$$

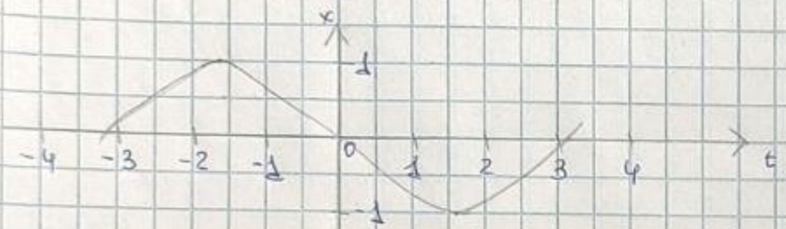
$x \in C^2[-1;1]$?

Т.к. $\cos(-t) = \cos t \Rightarrow x(t) = \cos t$



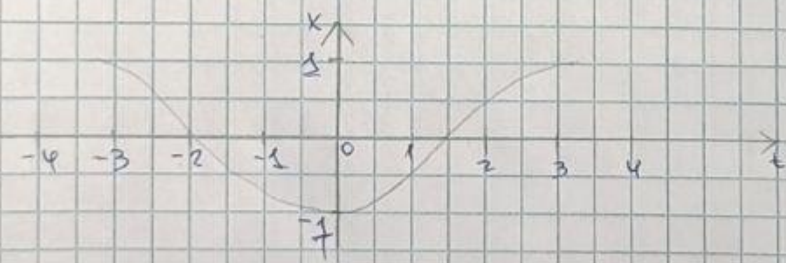
$x \in C[-1;1]$, т.к. ф-ция непрерывна

$x'(t) = -\sin(t)$



$x \in C^1[-1;1]$, т.к. $x'(t)$ – непрерывна.

$x''(t) = -\cos t$



$x \in C^2[-1;1]$, т.к. $x''(t)$ – непрерывна

Ответ: $x \in C[-1;1]$, $C^1[-1;1]$, $C^2[-1;1]$

(6) $x = \left(0; \frac{\ln 3}{3}, \frac{\ln 4}{4}; \frac{\ln 5}{5}, \ldots\right)$

$$x = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ \frac{\ln k+1}{k+1}, & k > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \sum_{k=2}^{\infty} \left|\frac{\ln k+1}{k+1}\right|^p + 0^p = \sum_{k=2}^{\infty} \left|\frac{\ln k+1}{k+1}\right|^p$$

$$\frac{(\ln k+1)^p}{(k+1)^p} \sim \frac{(\ln k)^p}{k^p}$$

при больших k $(\ln k)^p$ возрастает медленнее, чем $k^p \Rightarrow$

$x_k^p \sim \frac{1}{k^p}$

$\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится, если $p > 1 \Rightarrow p_{min} = 2$

$\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(\ln k+1)^2}{(k+1)^2}$ $\Rightarrow$ сходится по интегральному признаку.

Ответ: $p_{min} = 2$

Ниже то, что было +-

8) а) $x(t)=t$, $y(t)=\ln(t^2+1)$, $C[-1;3]$

б) $x(t)=te^t$, $y(t)=e^{-t}$, $L^2(-1;0)$

а) $\rho_C(x,y)=\max\limits_{[-1;3]}|t-\ln(t^2+1)|$

$\varphi(t)=t-\ln(t^2+1)$

$\varphi'(t)=1-\frac{1}{t^2+1}\cdot 2t=\frac{t^2-2t+1}{t^2+1}$

$\frac{t^2-2t+1}{t^2+1}=0$

$t^2-2t+1=0$

$t_{1,2}=1$

$\varphi(1)=|1-\ln 2|=1-\ln 2$

$\varphi(-1)=|-1-\ln 2|=1+\ln 2 \quad \Rightarrow \rho_C(x,y)=1+\ln 2$

$\varphi(3)=|3-\ln 10|=3-\ln 10$

б) $\rho_{L^2}(x,y)=\sqrt{\int\limits_{-1}^{0}(te^t-e^{-t})^2dt}=\sqrt{\frac{e^2}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{4e^2}}$

$\int\limits_{-1}^{0}(te^t-e^{-t})^2dt=\int\limits_{-1}^{0}(t^2e^{2t}+e^{-2t}-2t)dt=\int\limits_{-1}^{0}t^2e^{2t}dt+\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{e^{2t}}dt-t^2\Big|_{-1}^{0}=$

$\left(\left(\frac{t^2-t}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{2t}-\frac{1}{2e^{2t}}-t^2\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{2e^4+3e^2-5}{4e^2}=\frac{e^2}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{4e^2}$

$\int\limits_{-1}^{0}t^2e^{2t}=\frac{t^2e^{2t}}{2}\Big|_{-1}^{0}-\int\limits_{-1}^{0}te^{2t}dt=\frac{t^2e^{2t}}{2}\Big|_{-1}^{0}-\frac{te^{2t}}{2}\Big|_{-1}^{0}-\int\limits_{-1}^{0}\frac{e^{2t}}{2}dt=$

$\left(\frac{t^2-t}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{2t}\Big|_{-1}^{0}$

Ответ: $\rho_C(x,y)=1+\ln 2$, $\rho_{L^2}(x,y)=\sqrt{\frac{e^2}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{4e^2}}$

9) $x=\left(\frac{\ln 2}{1},\frac{\ln^2 2}{2},\frac{\ln^3 2}{6},\frac{\ln^4 2}{24},\ldots\right)$; $x_k=\frac{\ln^k 2}{k!}$

$y=\left(\frac{\ln 2}{3},\frac{\ln^2 2}{6},\frac{\ln^3 2}{18},\frac{\ln^4 2}{72},\ldots\right)$; $y_k=\frac{\ln^k 2}{3\,k!}$

$\rho_{\ell^1}(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\ln^k 2}{k!}-\frac{\ln^k 2}{3(k!)}\right|=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2\ln^k(2)}{3(k!)}\right|=$

$\frac{2}{3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\ln^k(2)}{k!}=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\ln^k(2)}{k!}=e^{\ln 2}-\frac{\ln^0 2}{0!}=2-1=1$

т.к. ряд Маклорена для $e^{\ln 2}$ начинается с $k=0$, а наш ряд с $k=1$.

Ответ: $\rho_{\ell^1}=\frac{2}{3}$