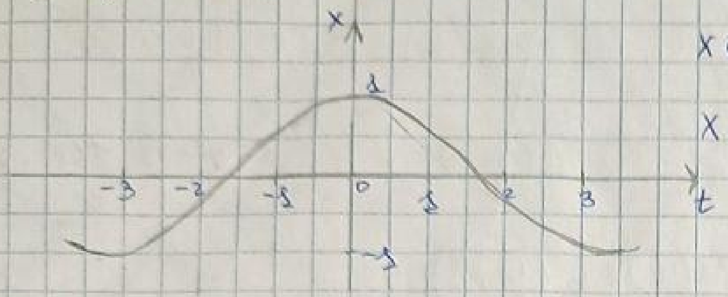
Бахирева Алина Метрические пространства

ИС-342 Вариант 11

(1) $x(t) = \cos|t|$ $x \in C[-1;1]$?

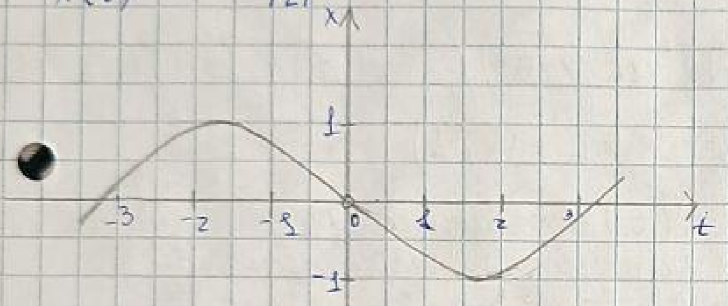
$x \in C^1[-1;1]$?

$x \in C^2[-1;1]$?



$x \in C[-1;1]$, т.к. ф-ция непрерывна

$x'(t) = -\frac{t \sin|t|}{|t|}$



$x \notin C^1[-1;1]$, т.к. производная имеет разрыв в точке $t=0$

Поскольку $C^2[-1;1] \subset C^1[-1;1]$, то $x \notin C^2[-1;1]$

Ответ: $x \in C[-1;1]$

$\notin C^1[-1;1], C^2[-1;1]$

(2) $x(t) = \frac{1}{t^2-1}$ $\in L^1(-1;0)$?

может ли $\in L^2(-1;0)$

$$\int_{-1}^{0} |x(t)|\,dt = \int_{-1}^{0} \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int_{-1}^{0} \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{1}{t+1}\,dt =$$

$$\left(\frac{\ln|t-1| - \ln|t+1|}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = -\infty \Rightarrow x \notin L^1(-1;0)$$

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{(t-1)} + \frac{B}{(t+1)}$$

$At + A + Bt - B = 1$

$t:\ A + B = 0$

$1:\ A - B = 1$ $\Rightarrow A = \frac{1}{2};\ B = -\frac{1}{2}$

т.к. $L^2(-1;0) \subset L^1(-1;0)$, то $x(t)$ не может принадлежать $L^2(-1;0)$

Ответ: $x \notin L^1(-1;0)$, не может $\in L^2(-1;0)$

③ а) $x(t) = e^{2t}$; б) $x(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}$

$C[0;1]$, $L^1(0;1)$, $L^2(0;1)$, $L^\infty(0;1)$, $L^1(1;\infty)$, $L^2(1;+\infty)$, $L^\infty(1;+\infty)$

а) $x(t)$ определена на отрезке $[0;1] \Rightarrow$

$x(t) \in C[0;1]$

$$\int_0^1 e^{2t}dt = \frac{e^{2t}}{2}\Big|_0^1 = \frac{e^2-1}{2} \approx 3{,}19 < \infty \Rightarrow$$

$x(t) \in L^1(0;1)$

$$\int_0^1 (e^{2t})^2 dt = \frac{e^{4t}}{4}\Big|_0^1 = \frac{e^4-1}{4} \approx 13{,}39 < \infty$$

$\Rightarrow x \in L^2(0;1)$

$x(t)$ ограничена на $(0;1)$, т.к. ее значения не превышают $e^2 \Rightarrow c = e^2 \Rightarrow$

$|e^{2t}| \le c \Rightarrow x(t) \in L^\infty(0;1)$

$$\int_1^\infty e^{2t}dt = \frac{e^{2t}}{2}\Big|_1^\infty = \infty \Rightarrow x(t) \notin L^1(1;\infty)$$

$$\int_1^\infty e^{4t} = \frac{e^{4t}}{4}\Big|_1^\infty = \infty \Rightarrow x(t) \notin L^2(1;\infty)$$

$x(t)$ не ограничена на $(1;+\infty)$, т.к.

$x(t) \to \infty$ при $t \to \infty \Rightarrow \notin L^\infty(1;+\infty)$

б) $x(t)$ определена на отрезке $[0;1] \Rightarrow x(t) \in C[0;1]$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}dt = \sqrt{t^2+2}\Big|_0^1 = \sqrt{3}-\sqrt{2} < \infty \Rightarrow$$

$x(t) \in L^1(0;1)$

$$\int_0^1 \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\right)^2 dt = \int_0^1 \frac{t^2}{t^2+2}dt = \left(t - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^1 = 1 - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} < \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in L^2(0;1)$

$x(t)$ ограничена на $(0;1)$, т.к. ее значение не превышают $\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$
$c = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\left|\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\right| \le c \Rightarrow x(t) \in L^\infty(0;1)$

$$\int_1^\infty \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}dt = \sqrt{t^2+2}\Big|_1^\infty = \infty \Rightarrow$$

$x(t) \notin L^1(1;+\infty)$

$$\int_1^\infty \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\right)^2 dt = \left(t - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Big|_1^\infty$$

$= \infty \Rightarrow x \notin L^2(1;+\infty)$

$x(t)$ ограничена $(1;+\infty)$ (сверху 1, снизу $\frac{1}{\sqrt{3}}$) $\Rightarrow x(t) \in L^\infty(1;\infty)$

Ответ: а) $x \in C[0;1]$; $L^1(0;1)$; $L^2(0;1)$; $L^\infty(0;1)$

$\notin L^1(1;+\infty)$; $L^2(1;+\infty)$; $L^\infty(1;+\infty)$

б) $x \in C[0;1]$, $L^1(0;1)$, $L^2(0;1)$; $L^\infty(0;1)$; $L^\infty(1;+\infty)$

$\notin L^1(1;+\infty)$; $L^2(1;+\infty)$

(4) 1. $x \in L^1(-3;1)$; $x \in L^2(-3;1)$

$\int_{-3}^{3} |x(t)| dt$ сходится, $\int_{-3}^{8} |x(t)|^2 dt$ расходится

$x(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}$

$\int_{-3}^{1} \frac{1}{\sqrt{|t|}} dt = \int_{-3}^{0} \frac{1}{\sqrt{t}} dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{3} + 2 < \infty \Rightarrow \in L^1(-3;1)$

$\int_{-3}^{3} \frac{1}{|t|} dt = \int_{3}^{0} \frac{1}{-t} dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_3^0 + \ln t \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 0 + \ln 1 - \ln 0 =$

$\infty \Rightarrow \notin L^2(-3;1)$

6. $x \notin L^2(0;1)$; $x \notin L^2(1;+\infty)$

$x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} + t$

$\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + t\right)^2 dt = \infty$; $\int_{1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + t\right)^2 dt = \infty \Rightarrow \notin L^2(0;1); L^2(1;+\infty)$

11. $x \notin L^1(1;2)$, $x \notin L^1(2;+\infty)$

$x(t) = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t}$

$\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t}\right) dt = \infty$; $\int_{2}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t}\right) dt = \infty \Rightarrow \notin L^1(1;2), L^1(2;+\infty)$

16. $x \notin L^1(0;+\infty)$; $x \in L^1(-\infty;0)$

$x = e^t$

$\int_{-\infty}^{0} e^t dt = 1$; $\int_{0}^{-\infty} e^t dt = \infty \Rightarrow \in L^1(-\infty;0)$, $\notin L^1(0;+\infty)$

Ответ: 1. $\frac{1}{\sqrt{|t|}}$; 6. $\frac{1}{\sqrt{t}} + t$; 11. $\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t}$; 16. e^t

(5) а) $x = \left\{\frac{2^k - 1}{3^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$; б) $x = \left(\frac{2}{1}, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \dots\right)$;

$l^1; l^2; l^3; l^4; l^{\infty}$?

$x = \left\{\frac{k^2+1}{k^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$

l^1: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{3^k} = \sum \frac{2^k}{3^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k}$ – сумма геом. прогрессии $\Rightarrow$ сходится

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ – сумма геом. прогрессии $\Rightarrow$ сходится $\Rightarrow$

их разность тоже сходится $\Rightarrow x \in l^1$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 \dots \Rightarrow$ расходится

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ обобщенный гарм. ряд; $2 > 1 \Rightarrow$ сходится

т.к. 1 часть расходится, то и их сумма расходится $\Rightarrow x \notin l^1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2^k-1}{3^k}\right)^2=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{2k}}{3^{2k}}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{3^{2k}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}$$

$\sum\limits_{\infty}^{\infty}\frac{2^{2k}}{3^{2k}}$ – сумм. геом. прогрес. $\Rightarrow$ сходится

$\sum\frac{2^k}{9^k}$ – сумм. геом. прогрессии $\Rightarrow$ сходится

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}$ – сумм. геом. прогрессии $\Rightarrow$ сходится

$\Rightarrow$ их сумма тоже сходится $\Rightarrow x\in \ell^2$

ℓ^3, ℓ^4 – приподобленных, аналогично ℓ^1, ℓ^2 раскладываюсь на суммы геом. прогрессий $\Rightarrow$ $x\in\ell^3, \ell^4$

$$\frac{2^k-1}{3^k}=\left(\frac{2}{3}\right)^k-\frac{1}{3^k}$$

$$\frac{2}{3}<1\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^k\to 0 \text{ при } k\to\infty$$

$$\frac{1}{3^k}=\left(\frac{1}{3}\right)^k;\ \frac{1}{3}<1\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^k\to 0 \text{ при } k\to\infty$$

$$\Rightarrow |a_k|=\left|\left(\frac{2}{3}\right)^k-\frac{1}{3^k}\right|\le\left(\frac{2}{3}\right)^k+\frac{1}{3^k}$$

максим. значение при $k=1$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1\Rightarrow |a_k|\le 1\Rightarrow$ огр. сверху $\Rightarrow$

$x\in\ell^{\infty}$

а) $x\in\ell^1,\ell^2,\ell^3,\ell^4,\ell^{\infty}$; б) $x\in\ell^{\infty}$
$\notin \ell^1,\ell^2,\ell^3,\ell^4$

$$|a_k|^2=\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^2=1+2\cdot\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k^4}\right)=\sum 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}1=1+1+1+\ldots\Rightarrow$ расходится $\Rightarrow$

и весь ряд расходится $\Rightarrow x\notin\ell^2$

в $|a_k|^3$ и $|a_k|^4$ будет аналогичный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}1\Rightarrow$ ряды будут расходится $\Rightarrow$

$x\notin\ell^3,\ell^4$

$a_k\to 1$ при $k\to\infty$

$1<a_k\le 2$ – огран. сверху $\Rightarrow$

$x\in\ell^{\infty}$

6) $x=\left(0;\frac{\ln 3}{3},\ \ ;\frac{\ln 5}{5},\ldots\right)$

$$x=\begin{cases}0; & k=1\\ \frac{\ln k+1}{k+1}, & k\ge 2\end{cases}$$

при $k\ge 2$:

$x_k=\frac{\ln k+1}{k+1}$; $\ln(k+1)\sim\ln k$; $k+1\sim k\Rightarrow x_k\sim\frac{\ln k}{k}$

$|x_k|^p\sim\frac{(\ln k)^p}{k^p}$

при $p\le 1$ ряд расходится, т.к. $(\ln k)^p$ не компенсирует убывание $\frac{1}{k^p}$

при $p>1$, ряд сходится $\Rightarrow p_{min}=2$

$\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(\ln k)^2}{k^2}\Rightarrow$ сходится

Ответ: $p=2$

(7) $n=3;\ x=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{5};\ \frac{2}{\sqrt{2}}\right),\ y=\left(-1;\ \frac{2}{5};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\rho_1(x,y)=\left|1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|+\left|-\frac{1}{5}\right|+\left|\frac{3}{\sqrt{2}}\right|=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{5}+\frac{3}{\sqrt{2}}=1+\frac{1}{5}+\frac{2}{\sqrt{2}}\approx 2,6$

$\rho_2(x,y)=\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{6-\sqrt{2}+\frac{1}{25}}\approx 2,2$

$\rho_\infty(x,y)=\max\left\{1-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{5};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right\}=\frac{3}{\sqrt{2}}\approx 2,1.$

Ответ: наибольшее в метрике ρ_1, наименьшее в ρ_∞

⑧ a) $x(t) = t$, $y(t) = \ln(t^2+1)$, $C[-1;3]$

б) $x(t) = te^t$, $y(t) = e^{-t}$, $L^2(-1;0)$

a) $\rho_C(x,y) - \max\limits_{[-1;3]} |t - \ln(t^2+1)|$

$\varphi(t) = t - \ln(t^2+1)$

$\varphi'(t) = 1 - \frac{1}{t^2+1} \cdot 2t = \frac{t^2-2t+1}{t^2+1}$

$\frac{t^2-2t+1}{t^2+1} = 0$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$t_{1,2} = 1$

$\varphi(1) = 1 - \ln 2 \approx 0,31$

$\varphi(-1) = -1 - \ln 2 \approx -1,7 \quad \Rightarrow \rho_C(x,y) = 1,7$

$\varphi(3) = 3 - \ln 10 \approx 0,69$

б) $\rho_{L^2}(x,y) = \sqrt{\int\limits_{-1}^{0} (te^t - e^{-t})^2 dt} = \sqrt{\frac{e^2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{4e^2}} \approx 2,07$

$\int\limits_{-1}^{0} (te^t - e^{-t})^2 dt = \int\limits_{-1}^{0} (t^2e^{2t} + e^{-2t} - 2t) dt = \int\limits_{-1}^{0} t^2 e^{2t} dt + \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{e^{2t}} dt - t^2\Big|_{-1}^{0} =$

$\left(\left(\frac{t^2-t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2t} - \frac{1}{2e^{2t}} - t^2\right)\Big|_{-1}^{0} = \frac{2e^4 + 3e^2 - 5}{4e^2} = \frac{e^2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{4e^2}$

$\int\limits_{-1}^{0} t^2 e^{2t} = \frac{t^2e^{2t}}{2}\Big|_{-1}^{0} - \int\limits_{-1}^{0} te^{2t} dt = \frac{t^2e^{2t}}{2}\Big|_{-1}^{0} - \frac{te^{2t}}{2}\Big|_{-1}^{0} - \int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{2t}}{2} dt =$

$\left(\frac{t^2-t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2t}\Big|_{-1}^{0}$

Ответ: $\rho_C(x,y) = 1,7$, $\rho_{L^2}(x,y) \approx 2,07$

⑨ $x = \left(\frac{\ln 2}{1}, \frac{\ln^2 2}{2}, \frac{\ln^3 2}{6}, \frac{\ln^4 2}{24}, \ldots\right)$; $x_k = \frac{\ln^k 2}{k!}$

$y = \left(\frac{\ln 2}{3}, \frac{\ln^2 2}{6}, \frac{\ln^3 2}{18}, \frac{\ln^4 2}{72}, \ldots\right)$; $y_k = \frac{\ln^k 2}{3\,k!}$

$\rho_{l^1}(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\ln^k 2}{k!} - \frac{\ln^k 2}{3(k!)}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{2\ln^k(2)}{3(k!)}\right| =$

$\frac{2}{3}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k(2)}{k!} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k(2)}{k!}$ – ряд Тейлора для $e^{\ln 2}$

Ответ: $\rho_{l^1} = \frac{2}{3}$

(10) а) $x(t)=(t^2-2t)\ln t,\ y(t)=\frac{3}{2}t^2-4t,\ r=2,\ C[\frac{1}{2};3]$

б) $x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t}},\ y(t)=\ln t,\ r=2,\ L^2(0;1)$

а) $\|x-y\|_\infty=\max_{t\in[\frac{1}{2};3]}|x(t)-y(t)|<2$

$\varphi(t)=(t^2-2t)\ln t-\frac{3t^2}{2}+4t$

при $t=\frac{1}{2}$:

$\varphi(\frac{1}{2})=(\frac{1}{4}-1)\ln\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}+2=\frac{3\ln 2}{4}+\frac{13}{8}\approx 2{,}14$

при $t=3$:

$\varphi(3)=(9-6)\ln 3-\frac{27}{2}+12=3\ln 3-\frac{3}{2}\approx 1{,}79$

$\varphi'(t)=2(t-1)(\ln t-1)$

$2(t-1)(\ln t-1)=0$

$t-1=0$ или $\ln t-1=0$

$t=1 \qquad t=e$

$\varphi(1)=(1-2)\ln 1-\frac{3}{2}+4=2{,}5$

$\varphi(e)=(e^2-2e)\ln e-\frac{3e^2}{2}+4e\approx 1{,}74$

$\|\varphi(t)\|_\infty=2{,}5$

$\|\varphi(t)\|_\infty>2\Rightarrow y(t)\notin B_r(x)$

б) $\|x-y\|_{L^2}=\sqrt{\int_0^1(x(t)-y(t))^2dt}\leq 2$

$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t}}-\ln t$

$\varphi^2(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}-\frac{2\ln t}{\sqrt[3]{t}}+\ln^2 t$

$\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}-\frac{2\ln t}{\sqrt[3]{t}}+\ln^2 t\right)dt=\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}dt-2\int_0^1\frac{\ln t}{\sqrt[3]{t}}dt+\int_0^1\ln^2 t\,dt=$

$\left(3\sqrt[3]{t}-\frac{2\cdot 3\sqrt[3]{t^2}\ln t}{2}+\frac{2\cdot 9\sqrt[3]{t^2}}{4}+t\ln^2 t-2t\ln t+2t\right)\Big|_0^1=3-\frac{2\cdot 3\ln 1}{2}$

$+\frac{2\cdot 9}{4}+\ln^2 1-2\ln 1+2=3-0+\frac{9}{2}+0^2-0+2=9{,}5$

$\|x-y\|_{L^2}=\sqrt{9{,}5}$

$\sqrt{9{,}5}>3\Rightarrow\|x-y\|_{L^2}>2\Rightarrow y(t)\notin B_r(x)$

Ответ: а) $y(t)\notin B_r(x)$

б) $y(t)\notin B_r(x)$