Непрерывность и непрерывная обратимость оператора

Вариант 1

(3.I) $A[x] = tx'' + x' - t^2 x$

D_A – линейное подпространство, состоящее из дважды непрерывно дифференцируемых функций

$A[x] = (tx')' - t^2 x$

$$(A[x], y) = \int_0^1 ((t \cdot x')' - t^2 x) y \, dt =$$

$$= \int_0^1 (t \cdot x')' y \, dt - \int_0^1 t^2 x y \, dy = t x' y \Big|_0^1 -$$

$$\int_0^1 t x' y' \, dt - \int_0^1 t^2 x y \, dy = x'(1) y(1) - t x y' \Big|_0^1$$

$$+ \int_0^1 (t y')' x \, dt - \int_0^1 t^2 x y \, dy = x'(1) y(1) - x(1) y'(1)$$

$$+ \int_0^1 (t y')' x \, dt - \int_0^1 t^2 x y \, dy = \int_0^1 ((t y')' - t^2 y) x \, dt$$

$$= (x, A[y]) + x'(1) y(1) - x(1) y'(1)$$

область определения A не дает информации о значениях x, y и их производных в единице ⇒ $x'(1)y(1) - x(1)y'(1)$ может быть ненулевым значением ⇒ нельзя утверждать, что $(A[x], y) = (x, A[y])$ при любых $x, y \in D_A$ ⇒

оператор A несимметричен

(39) $A: C[0;3] \to C[0;3]$

$A[x] = x'(t)$

D_A – линейное подпространство, состоящее из непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию $x(3)=0$

$$x_n = \frac{\sin(n(t-3))}{n};\ \in D_A \left(\frac{\sin(n(3-3))}{n} = \sin 0 = 0\right)$$

$$\|x_n\|_C = \max_{t\in[0;3]} \left|\frac{\sin n(t-3)}{n}\right| = \frac{1}{n} \max_{t\in[0;3]} |\sin n(t-3)|$$

$$\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow x_n \to 0 \text{ в } C[0;3]$$

$$x_n'(t) = \cos n(t-3)$$

$$\|A[x_n] - A[0]\|_C = \max_{t\in[0;3]} |\cos n(t-3)| = 1 \text{ для любого } n \Rightarrow$$

$$A[x_n] = 1 \text{ при } x_n = \frac{\sin n(t-3)}{n}$$

$$A[x_n] \not\to A[0]$$

$\Rightarrow$ оператор A не является непрерывным

$A[x] = 0$

$x'(t) = 0$ на $[0;3]$

$x(t) \equiv C$

$x(3) = C = 0 \Rightarrow C = 0$

$x'(t) = 0$ и $x(3) = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0 \Rightarrow$ оператор обратим

$A[x] = y(t)$

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ x(3) = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \int_3^t y(s)\,ds$$

$$A^{-1}[y] = \int_3^t y(s)\,ds$$

$$\|A^{-1}[y]\|_C = \max_{t\in[0;3]} \left| \int_3^t y(s)\,ds \right| = \max_{t\in[0;3]} \left| \int_t^3 y(s)\,ds \right|$$

$$\left| \int_t^3 y(s)\,ds \right| \le \int_t^3 |y(s)|\,ds \le \int_t^3 \|y(s)\|\,ds =$$

$$\|y\|_C \int_t^3 1\,ds = \|y\|_C\,(3-t)$$

$$\max_{t\in[0;3]} |(3-t)\|y\|_C| = \|y\|_C \max_{t\in[0;3]} (3-t) = 3\|y\|_C$$

$$\|A^{-1}[y]\|_C \le 3\|y\|_C \Rightarrow$$

A^{-1} непрерывный оператор

Ответ: A не непрерывный оператор, но непрерывно обратимый