Сходимость в метрических пространствах.

Вариант 21(1)

(1) а) l^3 $x^{(n)} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \dots\right)$

$n=1$: $x^{(1)} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{1}}, 0, 0, 0, \dots\right) = (0, 0, 0, 0, \dots)$

$n=2$: $x^{(2)} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots\right) = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \dots\right)$

$n=3$: $x^{(3)} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}, \frac{1-\sqrt{3}}{3}, 0, \dots\right)$

$n=4$: $x^{(4)} = \left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{4}}, 0, \dots\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{4}, 0, \dots\right)$

...

предположим, $x^{(n)} \to x$, в пространстве l^3, где $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$:

$x_k^{(n)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{n}}$

$x_k = \frac{1}{k}$

$$\rho_{l^3}(x^n, x) = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k}-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{k}\right|^3} = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{\infty}\left|-\frac{1}{\sqrt{n}}\right|^3} = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^k} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} - 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{n\sqrt{n}-1}} \to 0 \text{ при } n \to \infty \Rightarrow$$

$x^{(n)} \to x$ в пространстве $l^3 \Rightarrow x^{(n)}$ – фундаментальная последовательность

б) l^1: $x^{(n)} = \left(\frac{n+1}{1}, \frac{n+\sqrt{2}}{4}, \frac{n+\sqrt{3}}{9}, \frac{n+\sqrt{4}}{16}, \dots\right)$

$n=1$: $x^{(1)} = \left(\frac{1+1}{1}, \frac{1+\sqrt{2}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{9}, \frac{1+\sqrt{4}}{16}, \dots\right) = \left(2, \frac{1+\sqrt{2}}{4}, \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{16}, \dots\right)$

$n=$: $x^{(2)} = \left(\frac{2+1}{1}, \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{2+\sqrt{3}}{9}, \frac{2+\sqrt{4}}{16}, \dots\right) = \left(3, \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \dots\right)$

$n=3$: $x^{(3)} = \left(\frac{3+1}{1}, \frac{3+\sqrt{2}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{9}, \frac{3+\sqrt{4}}{16}, \dots\right) = \left(4, \frac{3+\sqrt{2}}{4}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}, \frac{5}{16}, \dots\right)$

$x_k^{(n)} = \frac{n+\sqrt{k}}{k^2} \to \infty$ при $n \to \infty$

предположим, $x^{(n)}$ не имеет предела в l^1.

$$\rho_{l^1}(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sup_{1<k<\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| = \sup_{1<k<\infty}\left|\frac{n+\sqrt{k}}{k^2} - \frac{m+\sqrt{k}}{k^2}\right| =$$

$$= \sup_{k<k<\infty}\left|\frac{n-m}{k^2}\right| = |n-m|$$

$n = 3m$

$|3m - m| = 2m \to \infty$ при $n, m \to \infty$

$\Rightarrow x^{(n)}$ не является фундаментальной последовательностью в $l^1 \Rightarrow$

$x^{(n)}$ не сходится в l^1

Ответ: а) сходится, фундаментальна; б) не сходится, не фундаментальна

(12) а) $x_n(t)=\frac{nt}{e^{nt^2}}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[\frac{1}{2};2]$

проверим равномерную сходимость

$\rho_{C[\frac{1}{2};2]}(x_n,0)=\max\limits_{t\in[\frac{1}{2};2]}|x_n(t)-0|=\max\limits_{t\in[\frac{1}{2};2]}\left(\frac{nt}{e^{nt^2}}\right)$

$\varphi=\frac{nt}{e^{nt^2}}=nt\cdot e^{-nt^2}$

$\varphi'=n(e^{-nt^2}-2nt^2e^{-nt^2})=n\left(\frac{1-2nt^2}{e^{+nt^2}}\right)$

$\varphi'=0:\ n\left(\frac{1-2nt^2}{e^{nt^2}}\right)=0$, $t=\pm\sqrt{\frac{1}{2n}}$, но, т.к. $[\frac{1}{2};2]$, нас интересует

$t_0=\frac{1}{\sqrt{2n}}$,

$\varphi(\frac{1}{2})=\frac{n}{2e^{\frac{n}{4}}}$

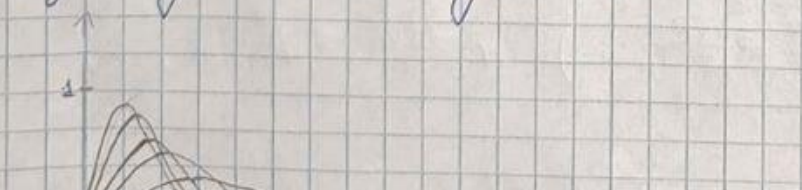
$\varphi(2)=\frac{2n}{e^{4n}}$

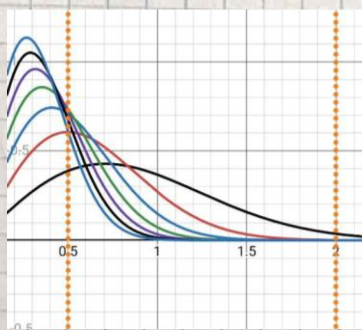
$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{2n}}{2e^2}$

$\rho_{C[\frac{1}{2};2]}(x_n,0)=\frac{n}{2e^{\frac{n}{4}}}\Rightarrow 0$ при $n\Rightarrow\infty$

$\lim\limits_{n\Rightarrow\infty}\frac{n}{2e^{\frac{n}{4}}}=\lim\limits_{n\Rightarrow\infty}\frac{2}{e^{\frac{n}{4}}}=0 \Rightarrow$

$x_n\Rightarrow x$ в $C[\frac{1}{2};2]$ $\Rightarrow$ есть равномерная сходимость $\Rightarrow$ есть среднеквадратичная сходимость





б) $x_n(t)=t^n-t^{2n}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;1]$

проверим равномерную сходимость

$\rho_{C[0;1]}(x_n,0)=\max\limits_{t\in[0;1]}|t^n-t^{2n}|=\max\limits_{t\in[0;1]} t^n-t^{2n}$

$\varphi=t^n-t^{2n}$

$\varphi'=nt^{n-1}-2nt^{2n-1}=nt^{n-1}(1-2t^n)=0$

$t=0$ или $t=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$

$\varphi(0) = \varphi(1) = 0$

$\varphi\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2n}{n}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\rho_{C[0;1]} = \frac{1}{4}$; не стремится к 0 при $n \to \infty \Rightarrow$ нет равномерной сходимости.

Проверим: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow$ действительно нет равномерной сходимости

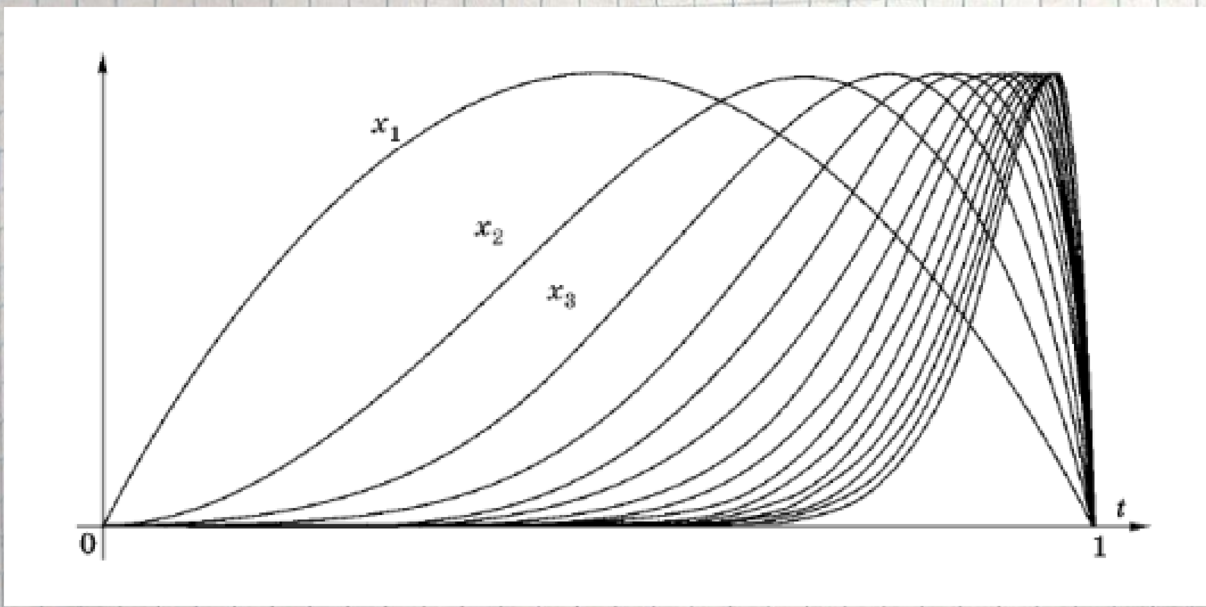
проверим среднеквадратичную сходимость:

$$\rho_{L^2(0,1)}(x_n, 0) = \sqrt{\int_0^1 (t^n - t^{2n})^2\, dt} = \sqrt{\int_0^1 (t^{2n} - 2t^{3n} + t^{4n})\, dt} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2n+1} - 2\cdot\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{4n+1}} \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} - 2\cdot\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{4n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right) - 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n+1}\right) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ есть среднеквадратичная сходимость



Ответ: а) есть и среднеквадратичная сходимость, и равномерная

б) только среднеквадратичная сходимость