Линейные операторы. Обратные операторы.
Собственные числа и функции.

Вариант 1

33 а) $A: C[-1;1] \to C[-1;1]$, $A[x] = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$

$x(t) = t^3 + t^2 + e^t$

$$A[x+y] = \frac{(x+y)(t)+(x+y)(-t)}{2} = \frac{x(t)+x(-t)+y(t)+y(-t)}{2}$$

$$= \frac{x(t)+x(-t)}{2} + \frac{y(t)+y(-t)}{2} = A[x]+A[y]$$

$$A[\alpha x] = \frac{(\alpha x)(t)+(\alpha x)(-t)}{2} = \frac{\alpha x(t)+\alpha x(-t)}{2} =$$

$$\alpha \frac{x(t)+x(-t)}{2} = \alpha A[x]$$

оператор A линейный.

$$A[x] = \frac{t^3+t^2+e^t-t^3+t^2+e^{-t}}{2} = \frac{2t^2+e^t+e^{-t}}{2} =$$

$$t^2 + \frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

б) $A: C[\frac{1}{2};1] \to C[1;2]$, $A[x] = \int\limits_{1}^{t} x(\frac{1}{s})ds$

$x(t) = \ln t$

$$A[x+y] = \int\limits_{1}^{t} (x+y)(\tfrac{1}{s})ds = \int\limits_{1}^{t} (x(\tfrac{1}{s})+y(\tfrac{1}{s}))ds =$$

$$\int\limits_{1}^{t} x(\tfrac{1}{s})ds + \int\limits_{1}^{t} y(\tfrac{1}{s})ds = A[x]+A[y]$$

$$A[\alpha x] = \int\limits_{1}^{t} (\alpha x)(\tfrac{1}{s})ds = \int\limits_{1}^{t} \alpha x(\tfrac{1}{s})ds = \alpha\int\limits_{1}^{t} x(\tfrac{1}{s})ds$$

$$= \alpha A[x]$$

оператор A линейный

$A[x] = \int_1^{t} \ln\left(\frac{1}{s}\right) ds = \int_1^{t} -\ln s\, ds = s - s\ln s \Big|_1^{t} =$

$t - t\ln t - 1 + \ln 1 = t - t\ln t - 1$

Ответ: а) оператор линейный, $A[x] = t^2 + \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

б) оператор линейный, $A[x] = t - t\ln t - 1$

(34) а) $A: C[1;2] \Rightarrow C[1;2]$, $A[x] = x(t) - t\,x(1)$

$\tilde{y} = t^2$, $\hat{y} = t^2 - t$

при $t = 1$: $A[x] = x(1) - 1\,x(1) = 0 \Rightarrow$

- R_A – непрерывные функции на $[1;2]$, которые обращаются в ноль при $t = 1$ ($R_A = \{y \in C[1;2] : y(1) = 0\}$)
- $A[x] = y$

$\tilde{y}(1) = 1^2 = 1 \neq 0 \Rightarrow A[x] = t^2$ – не разрешимо, т.к. $\tilde{y} \notin R_A$

$\hat{y}(1) = 1^2 - 1 = 0 \Rightarrow A[x] = t^2 - t$ – разрешимо, т.к. $\hat{y} \in R_A$

- $A[x] = 0$

$x(t) - t\,x(1) = 0 \quad \forall t \in [1;2]$

$x(t) = t\,x(1), \quad c = x(1)$

$x(t) = ct, \quad c \in R$

$c = 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$

$c \neq 0$: $A[x] = x(t) - t\,x(1) = ct - t\cdot c = 0 \Rightarrow$

$A[x] = 0$ имеет не единственное решение $(x(t) = ct) \Rightarrow$

$A[x]$ не имеет обратного оператора

б) $A: C[0;2] \Rightarrow C[0;1]$, $A[x]=(1+t^2)\cdot x(2t)$

$\tilde{y} = e^t$, $\hat{y} = \sqrt{1+t^2}$

• $A[x]=(1+t^2)\cdot x(2t)=y(t)$ $t\in[0;1]$

т.к. $1+t^2>0$ при $t[0;1]$

$$x(2t)=\frac{y(t)}{1+t^2} \quad t\in[0;1]$$

$$x(k)=\frac{y(\frac{k}{2})}{1+(\frac{k}{2})^2}, \quad k\in[0;2]$$

если $y\in C[0;1]$, то $\frac{y(\frac{k}{2})}{1+(\frac{k}{2})^2}$ непрерывна на $[0;2]$

$\Rightarrow R_A$ – любая непрерывная ф-ция на $[0;1]$

• $A[x]=y$

$\tilde{y}=e^t$, $A[x]=e^t$ – разрешимо, т.к. $\tilde{y}\in R_A$

$\hat{y}=\sqrt{1+t^2}$, $A[x]=\sqrt{1+t^2}$ – разрешимо, т.к. $\hat{y}\in R_A$

• $A[x]=0$

$(1+t^2)\cdot x(2t)=0$, $\forall t\in[0;1]$

$1+t^2>0$ $\forall t[0;1]$, то $x(2t)=0$ $\forall t\in[0;1]$,

только если $x(t)=0$ $\forall t\in[0;2]$

$\Rightarrow A[x]=0$ имеет единственное (нулевое) решение $x(t)\equiv 0$

$\Rightarrow A[x]$ обратим

$A[x]=y \Leftrightarrow (1+t^2)\cdot x(2t)=y(t) \Leftrightarrow$

$$x(t)=\frac{y(\frac{t}{2})}{1+(\frac{t}{2})^2} \Rightarrow A^{-1}[y]=\frac{y(\frac{t}{2})}{1+(\frac{t}{2})^2},\ t\in[0;2]$$

(35) а) $A[x] = x' + 2tx$, $D_A = \{ x \in C^1[0;1] : x(0) = 0 \}$

$A : C^1[0;1] \to C[0;1]$

$A[x] = y,\ x \in D_A \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 2tx = y \\ x(0) = 0 \end{cases}$

$x' + 2tx = 0$

$\int \frac{dx}{x} = \int -2t\,dt$

$\ln x = -t^2 + C$

$x_0 = Ce^{-t^2}$

$x_ч = ae^{-t^2}$

$x_ч' = a'e^{-t^2} - 2tae^{-t^2}$

$a'e^{-t^2} - 2tae^{-t^2} + 2tae^{-t^2} = y(t)$

$a'e^{-t^2} = y(t)$

$a = \int y(t)e^{s^2}\,ds$

$x(t) = e^{-t^2}\left(C + \int y(s)e^{s^2}\,ds\right),\ C \in \mathbb{R}$

$C = 0$ при $x(0) = 0$

$A^{-1}[y] = e^{-t^2}\int_0^t y(t)e^{s^2}\,ds$

проверим $A^{-1}[A[x]] = x$ для любой ф-ции $x = x(t) = D_A$

$A^{-1}[A[x]] = A^{-1}[x' + 2tx] = e^{-t^2}\int_0^t (x'(s)e^{s^2} + 2sx(s)e^{s^2})\,ds = e^{-t^2}\left(\int_0^t x'(s)e^{s^2}\,ds + \int_0^t 2sx(s)e^{s^2}\,ds\right.$

$$\int_0^t x'(s)e^{s^2}ds = e^{s^2}x(s)\Big|_0^t - \int_0^t x(s)2se^{s^2}ds$$

$$A^{-1}[A[x]] = e^{-t^2}\Big(e^{s^2}x(s)\Big|_0^t - \cancel{\int_0^t 2sx(s)e^{s^2}ds}$$

$$+\cancel{\int_0^t 2sx(s)e^{s^2}ds}\Big) = e^{-t^2}\big(e^{t^2}x(t) - x(0)\big) =$$

$$x(t) - e^{-t^2}\overset{0}{x(0)} = x(t) \Rightarrow A^{-1}[A[x]] = x$$

б) $A[x] = x'' + x'$, $D_A = \{C^2[0;1] : x'(0) = x(0) = 0\}$

$$A[x] = y,\ x \in D_A \Leftrightarrow \begin{cases} x'' + x' = y \\ x'(0) = x(0) = 0 \end{cases}$$

$x'' + x' = 0$

$\lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda = 0$ или $\lambda = -1$

$x_{оо} = C_1 + C_2 e^{-t}$, $C_1, C_2 \in R$

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$\Delta = -e^{-t}$

$\Delta_1 = -e^{-t}y$ $\quad C_1'(t) = y$ $\quad C_1(t) = \int y(s)ds$

$\Delta_2 = y$ $\quad C_2'(t) = -e^{+t}y$ $\quad C_2(t) = \int y(s)e^{+s}ds$

$x_{об} = C_1 + C_2 e^{-t} + \int y(s)ds + e^{-t}\int y e^{+s}ds$

$x'(0) = x(0) = 0$

$x_{об} = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow$

$x(t) = \int y(s)ds + e^{-t}\int y e^{+s}ds$

$$x(t) = \int_0^t (1 - e^{-(t-s)})\, y(s)\, ds$$

$$A^{-1}[y] = \int_0^t (1 - e^{-(t-s)})\, y(s)\, ds$$

$$A^{-1}[A[x]] = A^{-1}[x'' + x'] = \int_0^t (1 - e^{-(t-s)})(x''(s) + x'(s))\, ds = \int_0^t (1 - e^{-(t-s)})\, x''(s)\, ds + \int_0^t (1 - e^{-(t-s)}) \cdot x'(s)\, ds$$

$$\int_0^t (1 - e^{-(t-s)})\, x'(s)\, ds = x(s)\Big|_0^t - \int_0^t e^{-t+s}\, x'(s)\, ds =$$

$$x(t) - \int_0^t e^{-t+s}\, x'(s)\, ds$$

$$\int_0^t (1 - e^{-(t-s)})\, x''\, ds = x'(s)\Big|_0^t - \int_0^t x''\, \overset{dv}{\underset{u}{e^{-(t-s)}}}\, ds =$$

$$x'(t) - (e^{-(t-s)}\, x'(s))\Big|_0^t + \int_0^t e^{-(t-s)}\, x'(s)\, ds$$

$$= \int_0^t e^{-(t-s)}\, x'(s)\, ds$$

$$A^{-1}[A[x]] = x(t) - \cancel{\int_0^t e^{-t+s}\, x'(s)\, ds} + \cancel{\int_0^t e^{-t+s}\, x'(s)\, ds} =$$

$x(t)$

$\Rightarrow A^{-1}[A[x]] = x(t)$

c) $A[x] = x''$, $D_A = \{x \in C^2[0;2] : x'(0) - x(0) = x(2) - 2x'(2) = 0\}$

$A : C^2[0;2] \Rightarrow C[0;2]$

$A[x] = y,\ x \in D_A \iff \begin{cases} x'' = y \\ x'(0) - x(0) = x(2) - 2x'(2) = 0 \end{cases}$

$\lambda^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 0$

$x_{oo}(t) = C_1 + C_2 t,\ C_1, C_2 \in R$

$C_2 - C_1 = 0$ $\qquad$ $C_2 = 0$

$C_1 + 2C_2 - 2C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ $\Rightarrow A$ обратим

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

$\Delta = 1$

$\Delta_1 = -yt$ $\qquad$ $C_1' = -yt \Rightarrow C_1 = -\int_0^t s\, y(s)\, ds$

$\Delta_2 = y$ $\qquad$ $C_2' = y \Rightarrow C_2 = \int_0^t y(s)\, ds$

$x(t) = C_1 + C_2 t - \int_0^t s\, y(s)\, ds + t\int_0^t y(s)\, ds$

$x(t) = C_1 + C_2 t + \int_0^t (t-s)\, y(s)\, ds$

из условия $x'(0) - x(0) = 0$ $\quad C_2 - C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2$

из условия $x(2) - 2x'(2) = 0$: $C_1 + 2C_2 + \int_0^2 (2-s)\, y(s)\, ds - 2C_2 - 2\int_0^2 y(s)\, ds = 0$

$C_1 - \int_0^2 s\,y(s)\,ds = 0$, а, т.к. $C_1 = C_2$, то

$$x(t) = (1+t)\int_0^2 s\,y(s)\,ds + \int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds$$

$$x(t) = \int_0^2 (1+t)\,s\,y(s)\,ds + \int_0^t (t-s)\,y(s)\,ds$$

$A^{-1}[y]$

$$A^{-1}[A[x]] = A^{-1}[x''] = (1+t)\int_0^2 x''s\,ds + \int_0^t (t-s)\,x''\,ds$$

$$\int_0^2 s\,x''(s)\,ds = s\,x'(s)\Big|_0^2 - \int_0^2 x'(s)\,ds =$$

$$2x'(2) - x(2) + x(0) = x(0)$$

$$\int_0^t (t-s)\,x''(s)\,ds = (t-s)\,x'(s)\Big|_0^t - \int_0^t x'(s)(-ds)$$

$$-t\,x'(0) + x(t) - x(0)$$

$$A^{-1}[A[x]] = \cancel{x(0)} + \cancel{t\,x(0)} - \cancel{t\,x(0)} + x(t) - \cancel{x(0)} = x(t) \Rightarrow A^{-1}[A[x]] = x$$

36 а) $A[x] = 2^t x(t)$, $[a;b]=[0;1]$

$A: C[0;1] \Rightarrow C[0;1]$

$A[x] = \lambda x$

$2^t x(t) = \lambda x(t)$

$(2^t - \lambda)\, x(t) = 0 \qquad t \in [0;1]$

$2^t - \lambda$ обращается в ноль ноль только в одной точке, но $(2^t - \lambda)\, x(t) = 0$ должно выполняться для всех $t \in [0;1] \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ – единственное решение, независимо от значения $\lambda \Rightarrow A$ – не имеет собственных чисел и собственных функций

б) $A[x] = \int_0^{\pi} \sin t \sin s\, x(s)\, ds$, $[a;b] = [0;\pi]$

$$\int_0^{\pi} \sin t \sin s\, x(s)\, ds = \lambda x(t),\ t \in [0;\pi]$$

$$\sin t \int_0^{\pi} \sin s\, x(s)\, ds = \lambda x(t)$$

$$x(t) = \underbrace{\frac{\int_0^{\pi} \sin s\, x(s)\, ds}{\lambda}}_{c,\ c = const,\ c \neq 0} \cdot \sin t,\ t \in [0;\pi]$$

$$x(t) = c \sin t$$

$$\int_0^{\pi} \sin s \cdot c \sin s\, ds = c \int_0^{\pi} \sin^2 s\, ds = \frac{c\pi}{2}$$

$x(t)=\dfrac{C\cdot\frac{\pi}{2}}{\lambda}\sin t$ (приравниваем к $x(t)=C\sin t$)

$\dfrac{C\cdot\frac{\pi}{2}}{\lambda}=C \Rightarrow 1=\dfrac{\pi}{2\lambda} \Rightarrow \lambda=\dfrac{\pi}{2}$ – единственное собственное число (ненулевое)

его собственная функция $x_1(t)=\sin t,\ t\in[0;\pi]$

если $\lambda=0$:

$\sin t\,C=0$.

т.к. $\sin t$ не равна 0 на всем отрезке, то

$C=0=\int_0^\pi \sin s\, x(s)\,ds$

$\Rightarrow \lambda=0$ является собственным числом,

а собственными функциями – все непрерывные функции, удовлетворяющие условию

$\int_0^\pi \sin s\, x(s)\,ds=0$

e) $A[x]=t\,x(\frac{1}{2})-x(0),\ [a;b]=[0;1]$

$t\,x(\frac{1}{2})-x(0)=\lambda x(t),\ t\in[0;1]$ (1)

$x(t)=\dfrac{t\,x(\frac{1}{2})-x(0)}{\lambda},\ t\in[0;1]$ (2)

Рассмотрим $\lambda=0$ в уравнении (1)

$t\,x(\frac{1}{2})-x(0)=0 \quad \forall t\in[0;1]$

это может выполняться, только если $x(\frac{1}{2})=0$, $x(0)=0$, а это нулевое решение $\Rightarrow \lambda=0$ – не собственное число дале $\lambda \neq 0$ из (1)

при $t=0$:

$x(t) = \frac{x(0)}{\lambda}$, т.е. $x(0) = \frac{x(0)}{\lambda}$

$x(0)(1+\frac{1}{\lambda}) = 0 \Rightarrow$

$x(0) = 0$ или $1 + \frac{1}{\lambda} = 0$

$\lambda = -1$

при $t = \frac{1}{2}$:

$x(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}x(\frac{1}{2}) - x(0)}{\lambda}$

$\lambda x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}x(\frac{1}{2}) - x(0) = x(0) = \frac{1}{2}x(\frac{1}{2}) - \lambda x(\frac{1}{2})$

$= x(\frac{1}{2})(\frac{1}{2} - \lambda)$

$\lambda = -1$: $x(0) = x(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1) = x(\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow$

$x(0) = \frac{3}{2}x(\frac{1}{2})$

$x(t) = \frac{t x(\frac{1}{2}) - x(0)}{-1} = -t x(\frac{1}{2}) + x(0) =$

$-t x(\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}x(\frac{1}{2}) = x(\frac{1}{2})(-t + \frac{3}{2})$

$\Rightarrow \lambda = -1$ — собственное число, его собственные функции $x(t) = -t + \frac{3}{2}$

если $x(0) = 0$:

$x(t) = \frac{t x(\frac{1}{2}) - 0}{\lambda} = \frac{x(\frac{1}{2})}{\lambda} t$

при $t = \frac{1}{2}$:

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\, x\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda}$$

$$x\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) = 0$$

$$1 - \frac{1}{2\lambda} = 0$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ – собственное число

$$x(t) = \frac{x\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\, t = 2x\left(\frac{1}{2}\right) t \Rightarrow$$

$x(t) = t$ – собственная функция

Ответ: а) нет собственных чисел и собственных функций

б) $\lambda = \frac{\pi}{2}$, $x(t) = \sin t$; $\lambda = 0$, $\{x(t) \in C[0,\pi] : \int_0^\pi \sin s\, x(s)\, ds = 0\}$

в) $\lambda = 1$; $x(t) = -t + \frac{3}{2}$; $\lambda = \frac{1}{2}$, $x(t) = t$