第一章

辐射场的密度矩阵

熵最大原理

- 单模的热平衡态：

$$\rho=\frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}[e^{-\beta H}]}$$

其中：

$$H=\hbar\omega a^\dagger a$$
$$\beta=\frac{1}{kT}$$

密度矩阵可以写为：

$$\begin{aligned}\rho&=\frac{e^{-\frac{1}{kT}\hbar\omega a^\dagger a}}{\mathrm{Tr}[e^{-\frac{1}{kT}\hbar\omega a^\dagger a}]}\\&=\frac{e^{-\frac{1}{kT}\hbar\omega a^\dagger a}}{\sum_n e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}\\&=\frac{e^{-\frac{1}{kT}\hbar\omega a^\dagger a}\sum_n|n\rangle\langle n|}{\sum_n e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}\\&=\frac{\sum_n e^{-\frac{n}{kT}\hbar\omega}|n\rangle\langle n|}{\sum_n e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}\\&=(1-e^{-\frac{1}{kT}\hbar\omega})\sum_n e^{-\frac{n}{kT}\hbar\omega}|n\rangle\langle n|\end{aligned}$$

作业：计算热平衡态下的平均光子数。光子数为n的概率：

$$
p(n) \propto e^{-\frac{n}{kT}\hbar\omega} \\
\Rightarrow T\uparrow p(0)\downarrow
$$

温度为零的时候，大家都处于真空态。

多模热辐射场

- 平衡态；

$$
\begin{aligned}
\rho &= \otimes_l \rho_l \\
&= \sum p_{n1,n2,\ldots,n_l,\ldots}|n1,n2,\ldots,n_l,,,\rangle\langle n_1,n_2,\ldots n_l,\ldots|
\end{aligned}
$$

其中ρ_l为单模情况下的热平衡态。

- 相位算子：

$$
e^{i\phi} = \frac{a}{\sqrt{aa^\dagger}} = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n+1|
$$

定义出来的算子不幺正。

第二章-相干态

消灭算符本征态

- 量子化的场算符：

$$
\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \underbrace{\hat{\epsilon}_\mathbf{k}\mathscr{E}_\mathbf{k}a_\mathbf{k}e^{-i\nu_\mathrm{k}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}_{E^{(+)}} + \underbrace{h\cdot c}_{E^{(-)}}
$$

由于其对光子数态的本征态求平均，其值为零，显然生活中的光场不应该处于光子数的本征态，其应当为叠加态。那么是否存在$|\psi\rangle$，满足：

$$
\langle\psi|E|\psi\rangle = \mathscr{E}\alpha e^{-i\nu_\mathrm{k}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c.c
$$

如果$|\psi\rangle$满足下式，则其满足上式：

$$
a|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle
$$

上式可能吗？我们试一试，将$|\psi\rangle$展开：

$$
|\psi\rangle = \sum_n C_n|n\rangle
$$

于是：

$$
a|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}C_n\sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}\sqrt{n+1}|n\rangle = \alpha\sum_n C_n|n\rangle
$$

那么可以得到：

$$
\alpha C_n = C_{n+1}\sqrt{n+1}
$$
$$
\Rightarrow C_n = \frac{\alpha^n C_0}{\sqrt{n!}}
$$

归一化可以确定C_0：

$$
\sum_n |C_n|^2 = 1 \Rightarrow \sum_n |C_0|^2|\alpha|^{2n}\frac{1}{n!} = 1
$$
$$
\Rightarrow C_0 = e^{-|\alpha|^2/2}
$$

其中C_0还可以添加任意的相位，但没有必要，于是我们得到了想要的态，我们将其叫做相干态：

$$
|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle
$$

相干态可以写为：

$$
|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle e^{-|\alpha|^2/2}
$$

对上式可以做一个简化，我们发现$|0\rangle$可以写为：

$$
\begin{aligned}
|0\rangle &= e^{-\alpha^* a}|0\rangle \\
&= (1-\alpha^* a + \dots)|0\rangle \\
&= |0\rangle
\end{aligned}
$$

那么相干态可以写为：

$$
\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= e^{\alpha a^\dagger}e^{-\alpha^* a}|0\rangle e^{-|\alpha|^2/2} \\
&= e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle \\
&= D(\alpha)|0\rangle
\end{aligned}
$$

定义了新的算子。

作业：证明：

$$
D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D(\alpha)^{-1}
$$
$$
D(\alpha)^{-1} a D(\alpha) = a + \alpha
$$

激光光场想用量子力学描述，应该怎么描述？接下来看看相干态的性质是否满足一些经典的性质。

相干态的性质

平均光子数

- 平均光子数：

$$
\langle N\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2
$$

- 光子数分布：

$$
p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{\alpha^{2n}e^{-|\alpha|^2}}{n!} = \frac{\langle N\rangle^n e^{-\langle N\rangle}}{n!}
$$

这是柏松分布：

$$p(n)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

最小不确定波包态

- 真正测量的时候不能直接测量$a,a^\dagger$，但可以测量$\frac{a+a^\dagger}{2}$，$\frac{a-a^\dagger}{2i}$，他们对应着振幅。

  我们有：

$$q=(a+a^\dagger)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$
$$p=-i(a-a^\dagger)\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}$$

  q,p分别对应着电场和磁场的振幅，他们存在不确定度：

$$[q,p]=i\hbar$$
$$\Delta q\cdot\Delta p\geq\frac{\hbar}{2}$$

  这无法避免，所以我们择中一下，选择让不确定度取等号的时候描述经典的情况。那相干态是否满足最小的不确定度吗？我们将q,p重新写为：

$$X_1=\frac{1}{2}(a+a^\dagger)$$
$$X_2=\frac{1}{2i}(a-a^\dagger)$$

  回顾一下不确定度的定义：

$$\Delta^2X_1=\langle(X_1-\bar{X}_1)^2\rangle=\langle X_1^2\rangle-\langle X_1\rangle\bar{X}_1-\bar{X}_1\langle X_1\rangle+\bar{X}_1^2=\langle X_1^2\rangle-\langle X_1\rangle^2$$

  其中$\bar{X}_1=\langle X_1\rangle$，最后可以得到（可以证明，但我没有写）：

$$\Delta X_1\Delta X_2=\frac{1}{4}$$

  所以$|\alpha\rangle$是最小不确定的波包态，是最接近经典的量子态（之一）

非正交

- 相干态的内积：

$$\langle\alpha|\alpha'\rangle=e^{-(|\alpha|^2+|\alpha'|^2)/2}\sum_{n,m}\frac{\alpha'^m}{\sqrt{m!}}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\delta_{mn}$$
$$=\exp\left(-\left(|\alpha|^2+|\alpha'|^2\right)/2+\alpha^*\alpha'\right)$$

  其模方为：

$$|\langle\alpha|\alpha'\rangle|^2=\exp\left(-|\alpha-\alpha'|^2\right)$$

  只有相隔无穷远的两个相干态，其模方才接近零。

超完备

- 发现（类比于连续谱的完备关系）：

$$
\begin{aligned}
\int|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha &= \sum_{n,m}\frac{1}{\sqrt{n!m!}}\int e^{-|\alpha|^2}\alpha^n(\alpha^*)^m|n\rangle\langle m|d^2\alpha \\
&= \sum_{n,m}\frac{1}{\sqrt{n!m!}}\int r^{n+m}e^{i(n-m)\theta}e^{-r^2}|n\rangle\langle m|rdrd\theta
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\alpha = re^{i\theta}
$$
$$
\alpha^* = re^{-i\theta}
$$

怎么理解上面这个积分呢？因为其是复数平面的积分，所以这里其实是一个双重积分，一个平面上的积分，α的实部是x轴，α的虚部是y轴，我们可以将其用于极坐标。