#### 第一章

自由电场的量子化 场的模式展开 量子化 Fock态(粒子数态)

# 第一章

# 自由电场的量子化

• 真空中的Maxwell eqs:

$$egin{aligned} 
abla imes \mathbf{E} &= -rac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ 
abla imes \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 rac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \ 
abla \cdot \mathbf{E} &= 
ho/\epsilon_0 \ 
abla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

无自由电荷和电流时:

$$abla extbf{X} extbf{E} = -rac{\partial extbf{B}}{\partial t} 
onumber 
on$$

可以得到:

$$\Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = \hat{e} e^{\pm i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}$$

这只是说波动方程的解可以由正向和反向的平面波线性组合得到。

### 场的模式展开

• 腔中的驻波模式:

$$L=rac{n\lambda}{2} \ E_x\left(z,t
ight)=\sum_j A_j \underbrace{q_j}_{ ext{ widelightartoom}}\left(t
ight)\sin\left(k_jz
ight)$$

其中:

$$A_j = \left(rac{2
u_j^2 m_j}{V\epsilon_0}
ight)^{1/2}$$

 $m_i$ 有质量的量纲,V是腔的体积, $\nu_i$ 是频率。对于磁场:

$$H_y = \sum_j A_j \left(rac{\dot{q}_j \epsilon_0}{k_j}
ight) \cos\left(k_j z
ight)$$

系统的哈密顿量:

$$H=rac{1}{2}\int_V d au \left(\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2
ight) \ =rac{1}{2}\sum_j \left(m_j
u_j^2 q_j^2 + m_j \dot{q}_j^2
ight)$$

#### 量子化

• 引入量子化条件(假设):

$$p_j \equiv m_j \cdot \dot{q}_j \ [q_j, p_{j'}] = i \hbar \delta_{jj'}$$

• 引入新的算子:

$$egin{align} a_j e^{-i
u_j t} &= rac{1}{\sqrt{2m_j\hbar
u_j}}(m
u_j q_j + i\phi_j) \ a_j^\dagger e^{i
u_j t} &= rac{1}{\sqrt{2m_j\hbar
u_j}}(m
u_j q_j - i\phi_j) \ \end{array}$$

可以得到:

$$egin{aligned} \left[a_j,a_{j'}^\dagger
ight] &= \delta_{jj'} \ \left[a_j,a_{j'}^\dagger
ight] &= 0 \ \left[a_j^\dagger,a_{j'}^\dagger
ight] &= 0 \end{aligned}$$

进而将哈密顿量重新写为:

$$\Rightarrow H = \sum_{j} \hbar 
u_{j} \left( lpha_{j} a_{j}^{\dagger} + rac{1}{2} 
ight)$$

还可以得到电场与磁场:

$$egin{aligned} E_x\left(z,t
ight) &= \sum_j \mathscr{E}_j \left(a_j e^{-i
u_j t} + a_j^\dagger e^{i
u_j t}
ight) \sin\left(k_j z
ight) \ & \mathscr{E}_j &= \left(rac{\hbar
u_j}{\epsilon_0 \cdot V}
ight)^{rac{1}{2}} \ & H_y\left(z,t
ight) &= -i\epsilon_0 \sum_j \mathscr{E}_j \left(a_j e^{-i
u_j t} - a_j^\dagger e^{i
u_j t}
ight) \cos\left(k_j z
ight) \end{aligned}$$

• 推广到自由空间:

利用周期性边界条件:  $j\lambda=L$ ,可以得到电场形式:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} \mathscr{E}_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} e^{-i\nu_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c \cdot c$$

其中k满足:

$$k_l=rac{2\pi n_l}{L}, l=1,2,3$$

其中 $n_l$ 是整数,当我们推广至无边界情况:

$$\sum_k o 2igg(rac{L}{2\pi}igg)^3\int d^3k$$

在球坐标系下的积分测度:

$$d^3k = k^2dk\sin\theta d\theta d\phi = \frac{v^2}{c^3}d\nu\sin\theta d\theta d\phi$$

各项同性的结果(单位模长的态数目dN/d
u):

$$egin{align} dN &= 2igg(rac{L}{2\pi}igg)^3rac{
u^2}{c^3}d
u\int d\Omega \ &= rac{L^3
u^2}{\pi^2c^3}d
u \ \end{split}$$

量子化的结果就是:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t
ight) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} \mathscr{E}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{-i
u_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \underbrace{h\cdot c}_{E^{(-)}}$$

磁场可以类似得到。值得注意, 电场与磁场不再对易了:

$$\left[E_{x}\left(r,t\right),H_{y}\left(r,t
ight)
ight]
eq0$$

如果能够同时测量电场和磁场,那么就可以同时测量电子的速度与位置,所以矛盾,那么电场与磁场一般是不对易的(用带电粒子与弹簧)。

## Fock态(粒子数态)

● 先考虑单模的状态:

$$|H|n
angle = rac{1}{2}
u\left(a^{\dagger}a + rac{1}{2}
ight)|n
angle = E_n|n
angle$$

那么,可以验证 $a|n\rangle$ 也是其本征态:

$$H(a|n\rangle)=(E_n-\hbar
u)a|n
angle$$

与一般的谐振子一样, 其存在真空态:

$$H|0
angle=1/2\hbar
u|0
angle$$

其存在升降算子(存在一个无法确定的相位因子,这个相位因子没有意义,某种规范不变性):

$$egin{aligned} a|n
angle &= \sqrt{n}|n-1
angle\ a^\dagger|n
angle &= \sqrt{n+1}|n+1
angle\ a^\dagger a|n
angle &= n|n
angle \end{aligned}$$

粒子数表象下:

 $\circ$   $a^{\dagger}a$ : 对角非零,其他为零。

 $\circ$   $a^{\dagger}, a$ : 对角为零,对角线旁边的斜线非零,其余为零。

 $a, a^{\dagger}$ 显然非厄米,不是可观测量,但老师说可以间接观测,可以吗?

● 考虑单模电场:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t
ight)=\underbrace{\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}\mathscr{E}_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}e^{-i
u_{\mathbf{k}}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}_{E^{(+)}}+\underbrace{h\cdot c}_{E^{(-)}}$$

粒子数态的平均值:

$$\langle n \, | \mathbf{E} \, (\mathbf{r}, t) | n \rangle = 0$$

貌似和我们现实生活矛盾了(但现实生活中的光的状态一般也不是粒子数态,所以目前也不用太担心),但其平方的平均值不为零,平方不就是能量吗,这很显然:

$$\langle n \left| \mathbf{E}(\mathbf{r},t)^2 
ight| n 
angle = 2 |\mathscr{E}|^2 \left( n + rac{1}{2} 
ight)$$

当 n = 0时:

$$\langle 0 \left| \mathbf{E}(\mathbf{r},t)^2 \right| 0 
angle = \left| \mathscr{E} \right|^2$$

这是真空零点能(真空扰动,其是产生自发辐射对原因)。