第一章

自由电场的量子化

- 真空中的Maxwell eqs:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_0 \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0
\end{aligned}
$$

无自由电荷和电流时：

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0
\end{aligned}
$$

可以得到：

$$
\Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = \hat{e} e^{\pm i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}
$$

这只是说波动方程的解可以由正向和反向的平面波线性组合得到。

场的模式展开

- 腔中的驻波模式：

$$
\begin{aligned}
& L = \frac{n \lambda}{2} \\
& E_x(z, t) = \sum_j A_j \underbrace{q_j}_{\text{坐标量纲}} (t) \sin(k_j z)
\end{aligned}
$$

其中：

$$
A_j = \left(\frac{2 \nu_j^2 m_j}{V \epsilon_0} \right)^{1/2}
$$

m_j有质量的量纲，V是腔的体积，ν_j是频率。对于磁场：

$$H_y = \sum_j A_j \left(\frac{\dot{q}_j \epsilon_0}{k_j}\right) \cos\left(k_j z\right)$$

系统的哈密顿量：

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_V d\tau \left(\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \left(m_j \nu_j^2 q_j^2 + m_j \dot{q}_j^2\right) \end{aligned}$$

量子化

- 引入量子化条件（假设）：

$$\begin{aligned} p_j \equiv m_j \cdot \dot{q}_j \\ \left[q_j, p_{j'}\right] = i\hbar \delta_{jj'} \end{aligned}$$

- 引入新的算子：

$$\begin{aligned} a_j e^{-i\nu_j t} &= \frac{1}{\sqrt{2 m_j \hbar \nu_j}} \left(m \nu_j q_j + i \phi_j\right) \\ a_j^\dagger e^{i\nu_j t} &= \frac{1}{\sqrt{2 m_j \hbar \nu_j}} \left(m \nu_j q_j - i \phi_j\right) \end{aligned}$$

  可以得到：

$$\begin{aligned} \left[a_j, a_{j'}^\dagger\right] = \delta_{jj'} \\ \left[a_j, a_{j'}\right] = 0 \\ \left[a_j^\dagger, a_{j'}^\dagger\right] = 0 \end{aligned}$$

  进而将哈密顿量重新写为:

$$\Rightarrow H = \sum_j \hbar \nu_j \left(\alpha_j a_j^\dagger + \frac{1}{2}\right)$$

  还可以得到电场与磁场：

$$\begin{aligned} &E_x\left(z, t\right) = \sum_j \mathscr{E}_j \left(a_j e^{-i\nu_j t} + a_j^\dagger e^{i\nu_j t}\right) \sin\left(k_j z\right) \\ &\mathscr{E}_j = \left(\frac{\hbar \nu_j}{\epsilon_0 \cdot V}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &H_y\left(z, t\right) = -i\epsilon_0 \sum_j \mathscr{E}_j \left(a_j e^{-i\nu_j t} - a_j^\dagger e^{i\nu_j t}\right) \cos\left(k_j z\right) \end{aligned}$$

- 推广到自由空间：

  利用周期性边界条件：$j\lambda = L$，可以得到电场形式：

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right)=\sum_{\mathbf{k}}\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}\mathscr{E}_{\mathbf{k}}\alpha_{\mathbf{k}}e^{-i\nu_{\mathbf{k}}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+c\cdot c$$

其中$\mathbf{k}$满足:

$$k_l=\frac{2\pi n_l}{L},l=1,2,3$$

其中n_l是整数，当我们推广至无边界情况:

$$\sum_k\rightarrow 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\int d^3k$$

在球坐标系下的积分测度:

$$d^3k=k^2dk\sin\theta d\theta d\phi=\frac{v^2}{c^3}d\nu\sin\theta d\theta d\phi$$

各项同性的结果（单位模长的态数目$dN/d\nu$）：

$$\begin{aligned}dN&=2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3\frac{\nu^2}{c^3}d\nu\int d\Omega\\&=\frac{L^3\nu^2}{\pi^2c^3}d\nu\end{aligned}$$

量子化的结果就是:

$$\alpha_k\rightarrow a_k$$

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right)=\sum_{\mathbf{k}}\underbrace{\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}\mathscr{E}_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}e^{-i\nu_{\mathbf{k}}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}_{E^{(+)}}+\underbrace{h\cdot c}_{E^{(-)}}$$

磁场可以类似得到。值得注意，电场与磁场不再对易了:

$$\left[E_x\left(r,t\right),H_y\left(r,t\right)\right]\neq 0$$

如果能够同时测量电场和磁场，那么就可以同时测量电子的速度与位置，所以矛盾，那么电场与磁场一般是不对易的（用带电粒子与弹簧）。

Fock态（粒子数态）

- 先考虑单模的状态:

$$H|n\rangle=\frac{1}{2}\nu\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)|n\rangle=E_n|n\rangle$$

那么，可以验证$a|n\rangle$也是其本征态:

$$H(a|n\rangle)=(E_n-\hbar\nu)a|n\rangle$$

与一般的谐振子一样，其存在真空态:

$$H|0\rangle=1/2\hbar\nu|0\rangle$$

其存在升降算子（存在一个无法确定的相位因子，这个相位因子没有意义，某种规范不变性）：

$$
\begin{aligned}
a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\
a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\
a^\dagger a|n\rangle &= n|n\rangle
\end{aligned}
$$

粒子数表象下：

- $a^\dagger a$：对角非零，其他为零。
- $a^\dagger, a$：对角为零，对角线旁边的斜线非零，其余为零。

$a, a^\dagger$显然非厄米，不是可观测量，但老师说可以间接观测，可以吗?

- 考虑单模电场：

$$
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} \mathscr{E}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{-i\nu_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}_{E^{(+)}} + \underbrace{h \cdot c}_{E^{(-)}}
$$

粒子数态的平均值：

$$
\langle n | \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | n \rangle = 0
$$

貌似和我们现实生活矛盾了（但现实生活中的光的状态一般也不是粒子数态，所以目前也不用太担心），但其平方的平均值不为零，平方不就是能量吗，这很显然：

$$
\langle n \left| \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)^2 \right| n \rangle = 2|\mathscr{E}|^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)
$$

当$n=0$时：

$$
\langle 0 \left| \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)^2 \right| 0 \rangle = |\mathscr{E}|^2
$$

这是真空零点能（真空扰动，其是产生自发辐射对原因）。