#### 第一章

辐射场的密度矩阵

熵最大原理

多模热辐射场

#### 第二章-相干态

消灭算符本征态

相干态的性质

平均光子数

最小不确定波包态

非正交

超完备

# 第一章

# 辐射场的密度矩阵

## 熵最大原理

• 单模的热平衡态:

$$ho = rac{e^{-eta H}}{ ext{Tr}[e^{-eta H}]}$$

其中:

$$H=\hbar\omega a^{\dagger}a$$
  $eta=rac{1}{kT}$ 

密度矩阵可以写为:

$$ho = rac{e^{-rac{1}{kT}\hbar\omega a^{\dagger}a}}{\mathrm{Tr}ig[e^{-rac{1}{kT}\hbar\omega a^{\dagger}a}ig]} \ = rac{e^{-rac{1}{kT}\hbar\omega a^{\dagger}a}}{\sum_{n}e^{-rac{n\hbar\omega}{kT}}} \ = rac{e^{-rac{1}{kT}\hbar\omega a^{\dagger}a}\sum_{n}|n
angle\langle n|}{\sum_{n}e^{-rac{n\hbar\omega}{kT}}} \ = rac{\sum_{n}e^{-rac{n\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{n}e^{-rac{n\hbar\omega}{kT}}} \ = rac{\sum_{n}e^{-rac{n\hbar\omega}{kT}}\hbar\omega|n
angle\langle n|}{\sum_{n}e^{-rac{n\hbar\omega}{kT}}} \ = (1-e^{-rac{1}{kT}\hbar\omega})\sum_{n}e^{-rac{n\hbar\omega}{kT}}holdsylone$$

<u>作业</u>: 计算热平衡态下的平均光子数。光子数为n的概率:

$$p(n) \propto e^{-\frac{n}{kT}\hbar\omega}$$
  
 $\Rightarrow T \uparrow p(0) \downarrow$ 

温度为零的时候, 大家都处于真空态。

## 多模热辐射场

● 平衡态;

$$egin{aligned} 
ho &= \otimes_l 
ho_l \ &= \sum p_{n1,n2,...,n_l,...} |n1,n2,\dots,n_l,\,,\,
angle \langle n_1,n_2,\dots n_l,\dots| \end{aligned}$$

其中 $\rho_l$ 为单模情况下的热平衡态。

• 相位算子:

$$e^{i\phi}=rac{a}{\sqrt{aa^\dagger}}=\sum_{n=0}^{\infty}|n
angle\langle n+1|$$

定义出来的算子不幺正。

# 第二章-相干态

# 消灭算符本征态

• 量子化的场算符:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right) = \underbrace{\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}\mathscr{E}_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}e^{-i\nu_{\mathbf{k}}t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}_{E^{(+)}} + \underbrace{h\cdot c}_{E^{(-)}}$$

由于其对光子数态的本征态求平均,其值为零,显然生活中的光场不应该处于光子数的本征态,其应当为叠加态。那么是否存在 $|\psi\rangle$ ,满足:

$$\langle \psi | E | \psi \rangle = \mathscr{E} \alpha e^{-i\nu_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c. c$$

如果 $|\psi\rangle$ 满足下式,则其满足上式:

$$a|\psi
angle=lpha|\psi
angle$$

上式可能吗? 我们试一试,将 $|\psi\rangle$ 展开:

$$|\psi
angle = \sum_n C_n |n
angle$$

于是:

$$|a|\psi
angle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1
angle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \sqrt{n+1} |n
angle = lpha \sum_n C_n |n
angle$$

那么可以得到:

$$lpha C_n = C_{n+1} \sqrt{n+1}$$
 $\Rightarrow C_n = rac{lpha^n C_0}{\sqrt{n!}}$ 

归一化可以确定 $C_0$ :

$$\sum_n |C_n|^2 = 1 \Rightarrow \sum_n |C_0|^2 |lpha|^{2n} rac{1}{n!} = 1 \ \Rightarrow C_0 = e^{-|lpha|^2/2}$$

其中 $C_0$ 还可以添加任意的相位,但没有必要,于是我们得到了想要的态,我们将其叫做相干态:

$$|lpha
angle = e^{-|lpha|^2/2} \sum_n rac{lpha^n}{\sqrt{n!}} |n
angle$$

相干态可以写为:

$$|lpha
angle=e^{lpha a^\dagger}|0
angle e^{-|lpha|^2/2}$$

对上式可以做一个简化, 我们发现 | 0 > 可以写为:

$$|0\rangle = e^{-\alpha^* a} |0\rangle$$

$$= (1 - \alpha^* a + \dots) |0\rangle$$

$$= |0\rangle$$

那么相干态可以写为:

$$egin{aligned} |lpha
angle &=e^{lpha a^\dagger}e^{-lpha^*a}|0
angle e^{-|lpha|^2/2}\ &=e^{lpha a^\dagger-lpha^*a}|0
angle\ &=D(lpha)|0
angle \end{aligned}$$

定义了新的算子。

*作业*:证明:

$$D^{\dagger}(\alpha) = D(-\alpha) = D(\alpha)^{-1}$$
$$D(\alpha)^{-1}aD(\alpha) = a + \alpha$$

激光光场想用量子力学描述,应该怎么描述?接下来看看相干态的性质是否满足一些经典的性质。

# 相干态的性质

## 平均光子数

• 平均光子数:

$$\langle N 
angle = \langle lpha | a^\dagger a | lpha 
angle = |lpha|^2$$

• 光子数分布:

$$p(n) = |\langle n | lpha 
angle|^2 = rac{lpha^{2n} e^{-|lpha|^2}}{n!} = rac{\langle N 
angle^n e^{-\langle N 
angle}}{n!}$$

这是柏松分布:

$$p(n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

## 最小不确定波包态

• 真正测量的时候不能直接测量 $a,a^{\dagger}$ ,但可以测量 $\frac{a+a^{\dagger}}{2},\frac{a-a^{\dagger}}{2i}$ ,他们对应着振幅。 我们有:

$$q=(a+a^{\dagger})\sqrt{rac{\hbar}{2m\omega}} \ p=-i(a-a^{\dagger})\sqrt{rac{\hbar m\omega}{2}}$$

q, p分别对应着电场和磁场的振幅,他们存在不确定度:

$$[q,p]=i\hbar \ \Delta q\cdot \Delta p \geq rac{\hbar}{2}$$

这无法避免,所以我们择中一下,选择让不确定度取等号的时候描述经典的情况。那相干态是否满足最小的不确定度吗?我们将q,p重新写为:

$$X_1=rac{1}{2}(a+a^\dagger) \ X_2=rac{1}{2i}(a-a^\dagger)$$

回顾一下不确定度的定义:

$$\Delta^2 X_1 = \langle (X_1 - \bar{X}_1)^2 \rangle = \langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle \bar{X}_1 - \bar{X}_1 \langle X_1 \rangle + \bar{X}_1^2 = \langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2$$

其中 $ar{X}_1=\langle X_1
angle$ ,最后可以得到(<u>可以证明,但我没有写</u>):

$$\Delta X_1 \Delta X_2 = rac{1}{4}$$

所以 $|\alpha\rangle$ 是最小不确定的波包态,是最接近经典的量子态(之一)

## 非正交

• 相干态的内积:

$$egin{align} \langle lpha | lpha' 
angle &= e^{-(|lpha|^2 + |lpha'|^2)/2} \sum_{n,m} rac{lpha'^m}{\sqrt{m!}} rac{lpha^n}{\sqrt{n!}} \delta_{mn} \ &= \exp\left(-\left(|lpha|^2 + |lpha'|^2
ight)/2 + lpha^*lpha'
ight) \end{aligned}$$

其模方为:

$$|\langle lpha | lpha' 
angle|^2 = \exp\left(-|lpha - lpha'|^2
ight)$$

只有相隔无穷远的两个相干态,其模方才接近零。

# 超完备

• 发现(类比于连续谱的完备关系):

$$egin{aligned} \int |lpha
angle \langlelpha|d^2lpha &= \sum_{n,m}rac{1}{\sqrt{n!m!}}\int e^{-|lpha|^2}lpha^n(lpha^*)^m|n
angle\langle m|d^2lpha \ &= \sum_{n,m}rac{1}{\sqrt{n!m!}}\int r^{n+m}e^{i(n-m) heta}e^{-r^2}|n
angle\langle m|rdrd heta \end{aligned}$$

其中:

$$lpha = re^{i heta} \ lpha^* = re^{-i heta}$$

怎么理解上面这个积分呢?因为其是复数平面的积分,所以这里其实是一个双重积分,一个平面上的积分, $\alpha$ 的实部是x轴, $\alpha$ 的虚部是y轴,我们可以将其用于极坐标。