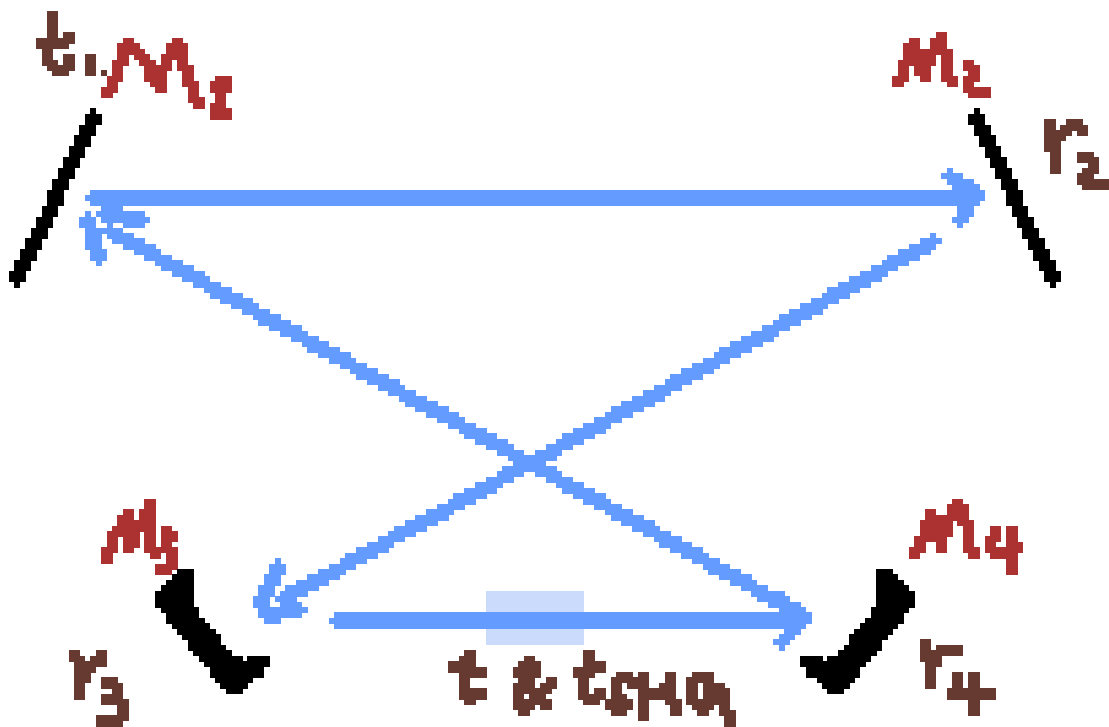


# 引言

为什么光入射到一个谐振腔里面其光功率就会增强呢？这种光功率的增强是能量守恒允许的吗？这其实是一个本科光学的作业题，但由于年代久远，当我知道谐振腔会增强光功率的时候就感觉不太像是能量守恒所允许的，所以困惑了一会儿。这次的目的就是完成这个作业，我们将以蝴蝶结腔(bow-tie cavity)为例，计算其光功率的增强系数。

## 蝴蝶结腔

一个蝴蝶结腔的结构见图：



这是我用软件Aseprite绘制的，一个画像素画的软件，感觉不太适合绘制这种示意图。其腔长被设计为：特定波长的光在其中走一圈其光学长度为波长的整数倍。图中的蝴蝶结腔加入了一个晶体，这个晶体的作用是用于生成二次谐波，这相当于给这个腔加了一个应用的背景。

# 腔的增强

## 光功率与振幅

在介绍腔增强之前，我们需要是增强了什么东西。增强的东西其实就是光功率，光功率与电场振幅的关系我们简单的表示为：

$$P = E^2$$

他们之前其实是有一个正比系数的，但我为其方便将其设置为1。（光功率其实是对电磁波的能量密度矢量求时间平均再对整个面积积分）

## 反射透射系数

电磁波的反射透射系数可以由振幅来定义，也可以由光功率来定义，我们选取后者，因为以光功率定义出来的反射透射系数应当满足：

$$r + t = 1$$

这显然是由能量守恒保证的（无吸收）。

## 晶体的等效透射系数

我们搭这样一个腔的目的是实现腔增强，腔增强后，腔内的光功率会更高，那有什么用呢？有用，当我们在这样一个腔里面放置一个晶体用于产生倍频光，那么效率就会比没有空腔的情况高非常非常多。所以我们需要分析一下晶体的等效透射系数。不加证明得引入一个关系：

$$\eta_{SHG} = \gamma_{SHG} P_c$$

其中 $\eta_{SHG}$ 为二次谐波的转换效率， $\gamma_{SHG}$ 为一个常系数。当光经过这个晶体的时候，为了计算其透射我们需要考虑两个因素，一个是由于晶体本身的反射，还有一个是晶体对光的吸收。我们设晶体对光本身的反射为 $t'$ 那么原本能够通过晶体的光功率为 $t'P$ ，但是这部分的光功率还会被晶体吸收转换为二次谐波，于是真正通过晶体的光功率为 $(1 - \eta_{SHG})t'P$ ，这表明晶体的等效透射系数就可以写为：

$$t = (1 - \gamma_{SHG} P_c) t'$$

## 腔内振幅的叠加

将腔长设计为波长的整数倍就是想依赖相干相长实现光功率的放大。所以我们考虑如下的过程：

- 首先，光功率为 $P_1$ 的一束光通过M1，由于镜面的反射其光功率变为 $t_1 P_1$ ，其振幅为 $A = A_0 = \sqrt{t_1 P_1}$ 。
- 然后其遭遇了M2，M3，其振幅变为 $A_0 \sqrt{r_2 r_3}$ 。
- 随后遭遇晶体，晶体的等效透射率为 $t$ ，所以其振幅变为 $A_0 \sqrt{r_2 r_3 t}$ 。
- 最后通过M4，M1的反射回到了原本振幅为 $A_0$ 的位置，其振幅变为了 $A_0 \sqrt{r_2 r_3 t r_4 (1 - t_1)}$ 。
- 但别忘了，我们这可是稳态过程，并不是一束脉冲波，所以它会和新的从M1进入的光发生线性叠加，振幅其实是 $A = A_0 (1 + \sqrt{r_2 r_3 t r_4 (1 - t_1)})$ ，(这就是为什么腔长要设计为波长整数倍的原因)当然，这是走一圈的振幅与没有走的振幅的叠加，还有两圈，三圈，.....等等，所以稳态情况下，腔内的振幅应当为

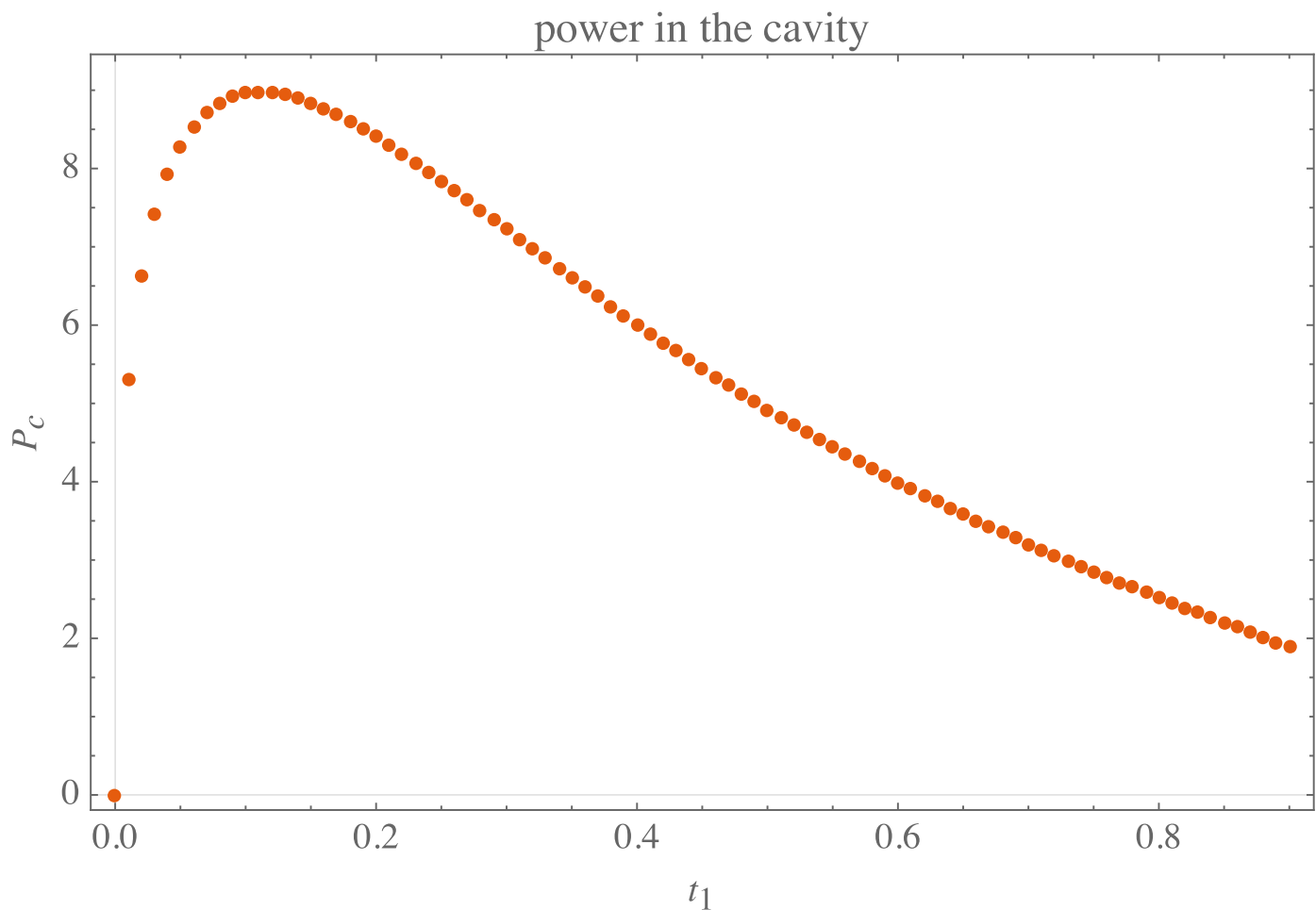
$$A = A_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sqrt{r_2 r_3 t r_4 (1 - t_1)} \right)^i \right) = A_0 \frac{1}{1 - \sqrt{r_2 r_3 t r_4 (1 - t_1)}}$$

- 所以腔内的光功率就可以表示为  $P_c = A^2 = \frac{P_1 t_1}{\left(1 - \sqrt{r_2 r_3 t r_4 (1 - t_1)}\right)^2}$ 。

我们将腔内的光功率隐式地表示为：

$$P_c = \frac{P_1 t_1}{\left(1 - \sqrt{(1 - \Gamma)(1 - t_1)(1 - \gamma_{SHG} P_c)}\right)^2}$$

其中  $\Gamma = (1 - r_2 r_3 r_4 t')$ ，代表了除了M1镜之外的三个镜以及晶体所导致的透射， $t_1$ 为M1的透射系数， $\gamma_{SHG} P_c$ 代表了二次谐波的转换效率。当我们确定了 $\Gamma, \gamma_{SHG}, P_1$ 的时候，我们就可以调整 $t_1$ 使得腔内的光功率达到最大，下图是我所绘制的腔内的光功率，入射的 $P_1 = 1, \Gamma = 0.026, \gamma_{SHG} = 0.01$ ：



可以看到，在选择 $t_1 \approx 0.1$ 的时候，腔内的光功率被放大了将近10倍。这违背了能量守恒吗？