

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 55. Явление электромагнитной индукции

В 1831 г. Фарадей открыл, что во всяком замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, возникает электрический ток. Это явление называют электромагнитной индукцией, а возникающий ток индукционным.

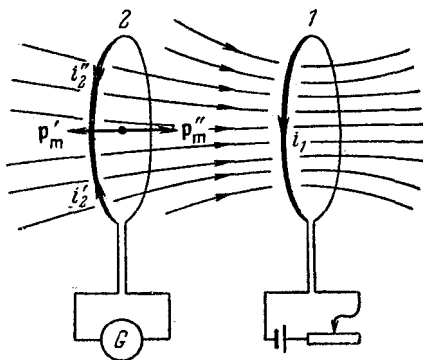


Рис. 105.

Величина индукционного тока не зависит от способа, которым вызывается изменение потока магнитной индукции Φ , и определяется лишь скоростью изменения Φ , т. е. значением $d\Phi/dt$. При изменении знака $d\Phi/dt$ меняется также направление тока. Поясним сказанное следующим примером. На рис. 105 изображен контур 1,

силу тока в котором i_1 можно менять с помощью реостата. Ток i_1 создает магнитное поле, пронизывающее контур 2. Если увеличивать ток i_1 , поток магнитной индукции Φ через контур 2 будет расти. Это приведет к появлению в контуре 2 индукционного тока i_2 , регистрируемого гальванометром. Уменьшение тока i_1 обусловит убывание потока магнитной индукции через второй контур, что приведет к появлению в нем индукционного тока иного направления, чем в первом случае. Индукционный ток i_2 можно вызвать также, приближая контур 2 к первому контуру, или удаляя второй контур от первого. В обоих случаях направления возникающего тока будут противоположными. Наконец, электромагнитную индукцию можно вызвать, не перемещая контур 2 поступательно, а поворачивая его так, чтобы менялся угол между нормалью к контуру и направлением поля.

Заполнение всего пространства, в котором поле отлочно от нуля, однородным магнетиком приводит, при прочих равных условиях, к увеличению индукционного тока в μ раз. Этим подтверждается то, что индукционный ток обусловлен изменением не потока вектора \mathbf{H} , а потока магнитной индукции.

Ленц установил правило, с помощью которого можно найти направление индукционного тока. Правило Ленца гласит, что *индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей*. Если, например, изменение Φ вызвано перемещением контура, то возникает индукционный ток такого направления, что сила, действующая на него во внешнем поле, противится движению контура. При приближении контура 2 к первому контуру возникает ток i_2 (рис. 105), магнитный момент которого направлен против внешнего поля (угол α между векторами \mathbf{p}_m' и \mathbf{B} равен π). Следовательно, согласно формуле (48.8) на контур 2 будет действовать сила, отталкивающая его от первого контура. При удалении контура 2 от первого контура возникает ток i_2'' , момент которого \mathbf{p}_m'' совпадает по направлению с \mathbf{B} ($\alpha = 0$), так что сила, действующая на контур 2, имеет направление к первому контуру.

Пусть контур 2 неподвижен, и ток индуцируется в нем путем изменения тока i_1 в первом контуре. В этом

случае индуцируется ток i_2 такого направления, что создаваемый им собственный магнитный поток стремится ослабить изменения внешнего потока, приведшие к появлению индукционного тока. При увеличении i_1 , т. е. возрастании внешнего магнитного потока, направленного вправо, возникнет ток i_2' , создающий поток, направленный влево. При уменьшении i_1 возникает ток i_2'' , собственный магнитный поток которого направлен так же, как и внешний поток, и, следовательно, стремится поддержать внешний поток неизменным.

§ 56. Электродвижущая сила индукции

Для создания тока в цепи необходимо наличие э. д. с. Поэтому явление электромагнитной индукции свидетельствует о том, что при изменениях магнитного потока Φ в контуре возникает электродвижущая сила индукции \mathcal{E}_i .

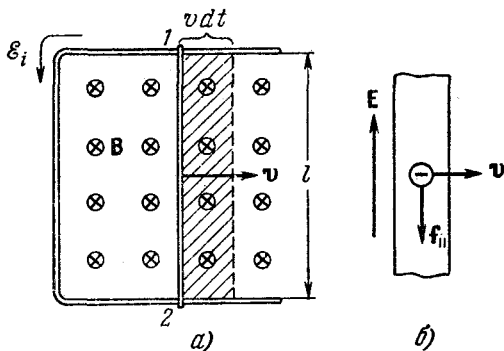


Рис. 106.

Чтобы выяснить связь между \mathcal{E}_i и скоростью изменения Φ , рассмотрим следующий пример. Возьмем контур, участок которого 1—2 длины l может перемещаться без нарушения контакта с остальной частью контура (рис. 106, а). Поместим его в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости контура (это поле изображено на рисунке кружками с крестиками — вектор \mathbf{B} направлен от нас за чертеж). Приведем подвиж-

ную часть контура в движение со скоростью v . С той же скоростью станут перемещаться относительно поля и носители заряда в проводнике — электроны (рис. 106, б). В результате на каждый электрон начнет действовать сила Лоренца f_{\parallel} , равная по модулю [см. (47.5)]

$$f_{\parallel} = evB \quad (56.1)$$

(индекс « \parallel » указывает на то, что сила направлена вдоль провода).

Действие этой силы эквивалентно действию электрической силы, обусловленной полем напряженности

$$E = vB,$$

имеющим направление, указанное на рис. 106, б. Это поле неэлектростатического происхождения. Его циркуляция по контуру дает величину э. д. с., индуцируемой в контуре:

$$\mathcal{E}_i = \oint E_l dl = El = vBl = B \frac{lv dt}{dt} = B \frac{dS}{dt}, \quad (56.2)$$

где $dS = lv dt$ — приращение площади контура за время dt (это приращение равно заштрихованной площади на рис. 106, а). При вычислении циркуляции мы учли, что E_l отлична от нуля лишь на участке длины l , причем на этом участке всюду $E_l = E$.

Произведение $B dS$ дает $d\Phi$ — приращение потока магнитной индукции через контур. Следовательно, мы пришли к выводу, что э. д. с. индукции \mathcal{E}_i , возникающая в замкнутом контуре, равна скорости изменения во времени потока магнитной индукции Φ , пронизывающего контур. Это равенство принято записывать в виде

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (56.3)$$

Знак « $-$ » в формуле (56.3) означает, что направление \mathcal{E}_i и направление $d\Phi$ ¹⁾ связаны правилом левого винта. Положительному приращению потока, имеющего направление за чертеж (рис. 106), соответствует изображенное на рисунке направление \mathcal{E}_i , которое связано с

¹⁾ Поток Φ и его приращение $d\Phi$ — скалярные величины. Поэтому об их направлении можно говорить лишь в том смысле, какой вкладывается, например, в понятие направления тока [см. замечания к формуле (7.5)].

направлением за чертёж правилом левого винта. Если бы проводник 1—2 перемещался не вправо, а влево, поток через контур уменьшался бы и \mathcal{E}_i имела бы направление, противоположное изображённому на рисунке.

На рис. 107 показано направление \mathcal{E}_i для различных направлений вектора \mathbf{B} и разной зависимости B от времени.

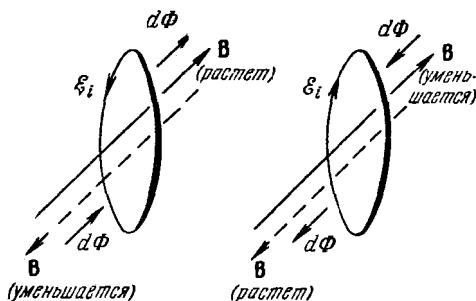


Рис. 107.

Единицей потока магнитной индукции в СИ служит вебер (вб), который представляет собой поток через поверхность в 1 м^2 , пересекаемую нормальными к ней линиями магнитного поля с B , равной 1 тесла. При скорости изменения потока, равной 1 вб/сек , в контуре индуцируется э. д. с., равная 1 в

В гауссовой системе формула (56.3) имеет вид

$$\mathcal{E}_i = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (56.4)$$

Единицей Φ в этой системе является максвелл (мкс), равный потоку через поверхность в 1 см^2 при $B = 1 \text{ гс}$. Между единицами потока в СИ и гауссовой системе имеется следующее соотношение:

$$1 \text{ вб} = 1 \text{ тл} \cdot 1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ гс} \cdot 10^4 \text{ см}^2 = 10^8 \text{ мкс}. \quad (56.5)$$

По формуле (56.4) \mathcal{E}_i получается в СГСЭ-единицах потенциала. Чтобы получить \mathcal{E}_i в вольтах, нужно умножить полученный результат на 300. Поскольку $300/c = 10^{-8}$,

$$\mathcal{E}_i (\text{в}) = - 10^{-8} \frac{d\Phi}{dt} \frac{(\text{мкс})}{(\text{сек})}. \quad (56.6)$$

В рассмотренном нами выше примере роль сторонних сил, поддерживающих ток в контуре, играют силы

Лоренца. Работа этих сил над единичным положительным зарядом, равная по определению э. д. с. (см. § 32), оказывается отличной от нуля. Это обстоятельство находится в кажущемся противоречии с высказанным в § 47 утверждением о том, что сила Лоренца работы над зарядом совершать не может. Дело в том, что сила (56.1) представляет собой не всю лоренцеву силу, действующую на электрон, а лишь параллельную проводу составляющую силы, обусловленную скоростью \mathbf{v} (рис. 108). Под действием этой составляющей электрон приходит в движение вдоль провода со скоростью \mathbf{u} , в результате чего возникает перпендикулярная к проводу составляющая лоренцевой силы (\mathbf{f}_\perp ¹⁾), модуль которой равен

$$f_\perp = euB \quad (56.7)$$

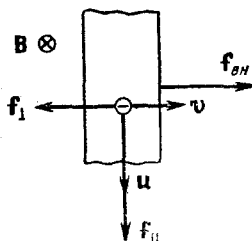


Рис. 108.

(см. рис. 108).

Таким, образом, полная лоренцева сила, действующая на электрон, равна

$$\mathbf{f}_\text{л} = \mathbf{f}_\parallel + \mathbf{f}_\perp,$$

а работа этой силы над электроном за время dt

$$dA = f_\parallel u dt - f_\perp v dt$$

(направления векторов \mathbf{f}_\parallel и \mathbf{u} одинаковы, а векторов \mathbf{f}_\perp и \mathbf{v} противоположны; см. рис. 108). Учтя, что $f_\parallel = evB$, $f_\perp = euB$, легко видеть, что работа полной силы Лоренца действительно, как и полагается, равна нулю.

Сила \mathbf{f}_\perp направлена противоположно скорости провода \mathbf{v} . Поэтому для того, чтобы участок провода 1—2 перемещался, как показано на рис. 108, с постоянной скоростью \mathbf{v} , к нему нужно приложить внешнюю силу $\mathbf{f}_\text{вн}$, уравнивающую сумму сил \mathbf{f}_\perp , приложенных ко всем электронам, содержащимся в проводе 1—2. За счет работы этой силы и будет возникать энергия,

¹⁾ Эта составляющая не вносит вклада в циркуляцию, так как ее проекция на направление провода равна нулю.

выделяемая в контуре индуцированным током. Действительно, модуль силы $f_{\text{вн}}$ можно представить в виде

$$f_{\text{вн}} = j_{\perp} nV = euBnV = euBnlS_{\text{пр}},$$

где n — число свободных электронов в единице объема, $V = lS_{\text{пр}}$ — объем провода на участке 1—2, $S_{\text{пр}}$ — площадь поперечного сечения провода.

Работа силы $f_{\text{вн}}$ за время dt равна

$$dA_{\text{вн}} = f_{\text{вн}} v dt = euBnlS_{\text{пр}} v dt. \quad (56.8)$$

Энергия, выделяемая током в контуре за время dt , определяется следующим выражением [см. формулу (37.2)]:

$$dQ = \mathcal{E}_i l dt = \mathcal{E}_{ij} S_{\text{пр}} dt,$$

где j — плотность тока. В соответствии с формулой (31.4) плотность тока равна $j = enu$, согласно (56.2) э. д. с. индукции можно представить в виде $\mathcal{E}_i = vBl$. Подставив эти значения j и \mathcal{E}_i в выражение для dQ , придем к формуле

$$dQ = vBlenuS_{\text{пр}} dt,$$

совпадающей с формулой (56.8) для $dA_{\text{вн}}$. Таким образом, мы показали, что $dQ = dA_{\text{вн}}$.

Рассмотренное нами объяснение возникновения э. д. с. индукции относится к случаю, когда магнитное поле постоянно, а изменяется геометрия контура. Но магнитный поток через контур может изменяться также за счет изменения \mathbf{B} . В этом случае объяснение возникновения э. д. с. оказывается в принципе другим. Изменяющееся со временем магнитное поле \mathbf{B} порождает вихревое электрическое поле \mathbf{E} (подробнее об этом говорится в § 103). Под действием поля \mathbf{E} приходят в движение носители тока в проводнике — возникает индуцированный ток. Связь между э. д. с. индукции и изменениями магнитного потока и в этом случае описывается формулой (56.3).

Пусть контур, в котором индуцируется э. д. с., состоит не из одного витка, а из N одинаковых витков, т. е. представляет собой соленоид (или тороид). Поскольку витки соленоида соединяются последовательно,

\mathcal{E}_i будет равна сумме э. д. с., индуцируемых в каждом из витков в отдельности,

$$\mathcal{E}_i = - \sum \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \left(\sum \Phi \right).$$

Величину

$$\Psi = \sum \Phi \quad (56.9)$$

называют потокоцеплением или полным магнитным потоком. Ее измеряют в тех же единицах, что и Φ . Если поток, пронизывающий каждый из витков, одинаков,

$$\Psi = N\Phi. \quad (56.10)$$

Воспользовавшись потокоцеплением, выражение для э. д. с., индуцируемой в соленоиде, можно записать в виде

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (56.11)$$

Пример. Катушка, имеющая N витков, вращается в однородном магнитном поле с постоянной скоростью ω (рис. 109). Найдём индуцируемую в ней э. д. с. Поток через один виток $\Phi = B_n S = BS \cos \alpha$, где S — площадь витка, α — угол между нормалью к плоскости витка и направлением B . Полный поток $\Psi = N\Phi = NBS \cos \alpha$. Угол α меняется со временем по закону $\alpha = \omega t$. Следовательно,

$$\Psi = NBS \cos \omega t = \Psi_m \cos \omega t,$$

где через Ψ_m обозначено амплитудное значение полного потока. По формуле (56.11)

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt} = \Psi_m \omega \sin \omega t = \mathcal{E}_m \sin \omega t. \quad (56.12)$$

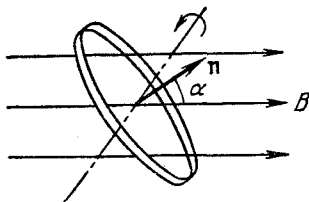


Рис. 109.

Таким образом, в катушке индуцируется переменная э. д. с., изменяющаяся со временем по гармоническому закону.

§ 57. Методы измерения магнитной индукции

Пусть полный поток, сцепленный с некоторым замкнутым контуром, изменяется от значения Ψ_1 до Ψ_2 . Найдём заряд q , который протекает при этом через каждое сечение контура. Мгновенное значение силы тока

в контуре будет равно

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt},$$

откуда

$$dq = i dt = - \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} dt = - \frac{1}{R} d\Psi$$

(знак «—» означает, что направление, в котором переносится dq , и направление $d\Psi$ связаны правилом левого винта).

Проинтегрировав это выражение, найдем полный заряд

$$q = \int dq = - \frac{1}{R} \int_1^2 d\Psi = \frac{1}{R} (\Psi_1 - \Psi_2). \quad (57.1)$$

Соотношение (57.1) лежит в основе разработанного первоначально А. Г. Столетовым баллистического способа измерения магнитной индукции, который заключается в следующем. Поместим в интересующую нас

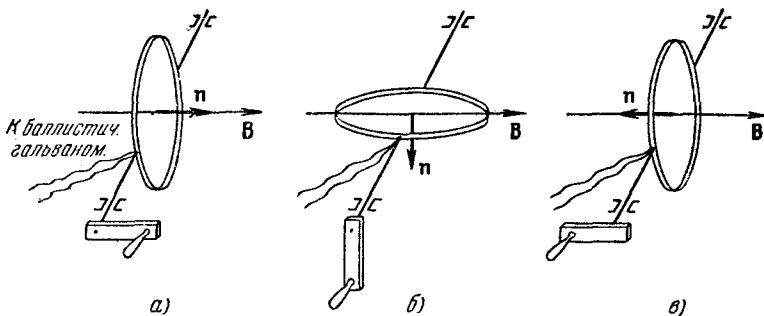


Рис. 110.

точку поля небольшую катушку, имеющую N витков. Если катушку расположить так, чтобы вектор \mathbf{B} оказался перпендикулярным к плоскости витков (рис. 110, а), то полный магнитный поток будет равен

$$\Psi_1 = NBS,$$

где S — площадь одного витка, которая должна быть настолько малой, чтобы \mathbf{B} в ее пределах можно было считать одной и той же.

Если повернуть катушку на 90° (рис. 110, б), поток через нее обратится в нуль (\mathbf{n} перпендикулярна к \mathbf{B}), т. е. изменяется на NBS . При повороте на 180° (рис. 110, в) изменение полного потока через катушку составит $2NBS$, так как значение потока станет равным $\Psi_2 = -NBS$ (\mathbf{n} и \mathbf{B} направлены в противоположные стороны). Если поворот катушки осуществить достаточно быстро, в контуре будет иметь место кратковременный импульс тока, при котором протекает заряд, равный согласно (57.1)

$$q = \frac{1}{R} 2NBS \quad (57.2)$$

(при повороте катушки на 90° формула будет такой же, но без двойки).

Заряд, протекающий по контуру при кратковременном импульсе тока, можно измерить с помощью так называемого баллистического гальванометра, который представляет собой гальванометр с большим периодом собственных колебаний. Измерив q и зная R , N и S , можно по формуле (57.2) найти B . Под R в этом случае подразумевается полное сопротивление цепи, включающее сопротивление катушки, подводных проводов и гальванометра.

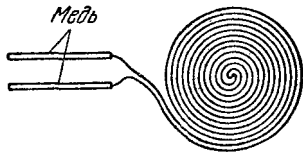


Рис. 111.

Если q в формуле (57.2) выразить в кулонах, R — в омах, а S — в кв. метрах, то B получится в тесла.

Вместо того чтобы поворачивать катушку, можно включать (либо выключать) исследуемое магнитное поле, или изменять его направление на обратное. Так, в частности, поступал А. Г. Столетов при исследовании кривой намагничивания железа.

Для измерения B используют также то обстоятельство, что электрическое сопротивление висмута под действием магнитного поля сильно возрастает — примерно на 5% на каждую десятую долю тесла (на каждую 1000 гс)¹⁾. Поэтому, помещая предварительно

¹⁾ У других металлов электрическое сопротивление в магнитном поле также возрастает, но в гораздо меньшей степени. У меди, например, увеличение сопротивления примерно в 10^4 раз меньше, чем у висмута.

проградуированную висмутовую спираль (рис. 111) в магнитное поле и измеряя относительное изменение ее сопротивления, можно определить магнитную индукцию поля.

§ 58. Токи Фуко

Индукционные токи могут возбуждаться и в сплошных массивных проводниках. В этом случае они называются токами Фуко или вихревыми токами. Поскольку электрическое сопротивление массивного проводника мало, вихревые токи могут достигать очень большой силы.

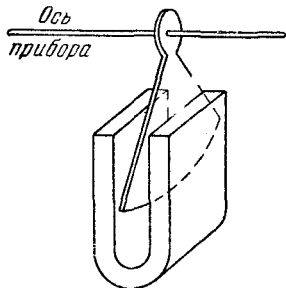


Рис. 112.

Токи Фуко подчиняются правилу Ленца — они выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием возможно сильнее противиться причине, которой они вызваны. Поэтому движущиеся в сильном магнитном поле хорошие проводники испытывают сильное торможение, обусловленное взаимодействием токов Фуко с магнитным полем. Этим поль-

зуются для успокоения (демпфирования) подвижных частей гальванометров, сейсмографов и других приборов. На подвижной части прибора укрепляется проводящая (например, алюминиевая) пластинка в виде сектора (рис. 112), которая вводится в зазор между полюсами сильного постоянного магнита. При движении пластинки в ней возникают вихревые токи, вызывающие торможение системы. Преимущество такого устройства состоит в том, что торможение возникает лишь при движении пластинки и отсутствует, когда пластинка неподвижна. Поэтому электромагнитный успокоитель совершенно не препятствует точному приходу системы в положение равновесия.

Тепловое действие токов Фуко используется в индукционных печах. Такая печь представляет собой катушку, питаемую высокочастотным током большой силы. Если поместить внутрь катушки проводящее тело, в нем возникнут интенсивные вихревые токи, которые могут разогреть тело до плавления. Таким способом осуще-

ствляют плавление металлов в вакууме, что позволяет получать материалы исключительно высокой чистоты.

С помощью токов Фуко осуществляется также прогрев внутренних металлических частей вакуумных установок для их обезгаживания.

В многих случаях токи Фуко бывают нежелательными и приходится принимать для борьбы с ними специальные меры. Так, например, чтобы предотвратить потери энергии на нагревание вихревыми токами сердечников трансформаторов, эти сердечники набираются из тонких пластин, разделенных изолирующими прослойками. Пластины располагаются так, чтобы возможные направления токов Фуко были к ним перпендикулярными. Появление ферритов (магнитных материалов с большим электрическим сопротивлением) сделало возможным изготовление сердечников сплошными.

Вихревые токи, возникающие в проводах, по которым текут переменные токи, направлены так, что ослабляют ток внутри провода и усиливают вблизи поверхности. В результате быстропеременный ток оказывается распределенным по сечению провода неравномерно — он как бы вытесняется на поверхность проводника. Это явление называется скин-эффектом (от английского *skin* — кожа) или поверхностным эффектом. Из-за скин-эффекта внутренняя часть проводников в высокочастотных цепях оказывается бесполезной. Поэтому в высокочастотных цепях применяют проводники в виде трубок.

§ 59. Явление самоиндукции

Электрический ток i , текущий в любом контуре, создает пронизывающий этот контур магнитный поток Ψ . При изменениях i будет изменяться также Ψ и, следовательно, в контуре будет индуцироваться э. д. с. Это явление называется самоиндукцией.

В соответствии с законом Био — Савара магнитная индукция B пропорциональна силе тока, вызвавшего поле. Отсюда вытекает, что ток в контуре i и создаваемый им полный магнитный поток через контур Ψ друг другу пропорциональны:

$$\Psi = Li. \quad (59.1)$$

Коэффициент пропорциональности L между силой тока и полным магнитным потоком называется индуктивностью контура¹⁾.

Линейная зависимость Ψ от i имеет место лишь в том случае, если относительная магнитная проницаемость μ среды, которой окружен контур, не зависит от напряженности поля H , т. е. в отсутствие ферромагнетиков. В противном случае μ является сложной функцией (см. рис. 103) от i (через H), и, поскольку $B = \mu_0 \mu H$, зависимость Ψ от i также будет довольно сложной. Однако соотношения (59.1) распространяют и на этот случай, считая индуктивность L функцией от i . При неизменной силе тока i полный поток Ψ может изменяться за счет изменений формы и размеров контура.

Из сказанного следует, что индуктивность L зависит от геометрии контура (т. е. его формы и размеров) и от магнитных свойств (от μ) окружающей контур среды. Если контур жесткий и поблизости от него нет ферромагнетиков, индуктивность L будет постоянной величиной.

За единицу индуктивности в СИ принимается индуктивность такого проводника, у которого при силе тока в нем в 1 а возникает полный поток Ψ , равный 1 вб. Эту единицу называют генри (гн).

Выражение, определяющее индуктивность L , имеет в гауссовой системе единиц вид

$$L = \frac{\Psi}{(i/c)} = c \frac{\Psi}{i}. \quad (59.2)$$

Чтобы найти размерность величины (59.2), воспользуемся тем, что в гауссовой системе B имеет размерность, равную согласно (40.5) размерности силы тока i , деленной на размерность c и на размерность длины (последнюю мы будем обозначать символом $[l]$). Следовательно,

$$[L] = [c] \frac{[\Psi]}{[i]} = [c] \frac{[B] [S]}{[i]} = [c] \frac{[B] [l]^2}{[i]} = [l].$$

Таким образом, в гауссовой системе индуктивность имеет размерность длины. В соответствии с этим единицу индуктивности в этой системе называют сантиметром. Индуктивностью в 1 см обладает такой контур, с которым при силе тока в 1 СГСМ-единицу (т. е. 10 а) сцеплен поток, равный 1 мкс (10^{-8} вб).

¹⁾ Устаревшее название этой величины — коэффициент самоиндукции.

Между единицами L в СИ и в гауссовой системе имеется следующее соотношение:

$$1 \text{ гн} = \frac{1 \text{ вб}}{1 \text{ а}} = \frac{10^8 \text{ мкс}}{0,1 \text{ сГСМ}} = 10^9 \text{ см.} \quad (59.3)$$

Вычислим индуктивность соленоида. Возьмем соленоид такой длины, чтобы его можно было практически считать бесконечным. При протекании по нему тока i внутри соленоида возбуждается однородное поле, магнитная индукция которого согласно формулам (42.6) и (44.24) равна $B = \mu_0 \mu n i$. Поток через каждый из витков будет $\Phi = BS$, а полный магнитный поток, сцепленный с соленоидом, равен

$$\Psi = N\Phi = n l B S = \mu_0 \mu n^2 l S i, \quad (59.4)$$

где l — длина соленоида (которая предполагается очень большой), S — площадь поперечного сечения, n — число витков на единицу длины (произведение $n l$ дает полное число витков N).

Сопоставляя (59.4) с (59.1), получаем для индуктивности очень длинного соленоида следующее выражение:

$$L = \mu_0 \mu n^2 l S = \mu_0 \mu n^2 V, \quad (59.5)$$

где $V = lS$ — объем соленоида. Заменяя в (59.5) n через N/l , получим

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} S, \quad (59.6)$$

В гауссовой системе формула для индуктивности соленоида имеет следующий вид:

$$L = 4\pi \mu n^2 l S. \quad (59.7)$$

В соответствии с (59.6) размерность μ_0 равна размерности индуктивности, деленной на размерность длины (напомним, что относительная магнитная проницаемость μ — безразмерная величина). Следовательно, в СИ μ_0 измеряется в генри на метр [см. (38.3)].

При изменениях силы тока в контуре возникает э. д. с. самоиндукции \mathcal{E}_s , равная [см. формулу (56.11)]

$$\mathcal{E}_s = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d(Li)}{dt} = - \left(L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \right). \quad (59.8)$$

Если L при изменениях силы тока остается постоянной (что, как уже отмечалось, возможно лишь при

отсутствии ферромагнетиков), выражение для \mathcal{E}_s имеет вид

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}. \quad (59.9)$$

В гауссовой системе

$$\mathcal{E}_s = -\frac{1}{c^2} L \frac{di}{dt}. \quad (59.10)$$

Соотношение (59.9) дает возможность определить индуктивность L как коэффициент пропорциональности между скоростью изменения силы тока в контуре и возникающей вследствие этого э. д. с. самоиндукции. Однако такое определение правильно лишь в случае, когда $L = \text{const}$. В присутствии ферромагнетиков L недеформируемого контура будет функцией от i (через H); следовательно, $\frac{dL}{dt}$ можно записать как $\frac{dL}{di} \frac{di}{dt}$. Произведя такую подстановку в формуле (59.8), получим

$$\mathcal{E}_s = -\left(L + i \frac{dL}{di}\right) \frac{di}{dt}, \quad (59.11)$$

откуда видно, что при наличии ферромагнетиков коэффициент пропорциональности между $\frac{di}{dt}$ и \mathcal{E}_s отнюдь не равен L .

В случае, когда $L = \text{const}$, изменение силы тока со скоростью 1 а/сек в проводнике с $L = 1 \text{ гн}$ приводит согласно (59.9) к возникновению $\mathcal{E}_s = 1 \text{ в}$.

§ 60. Ток при замыкании и размыкании цепи

По правилу Ленца дополнительные токи, возникающие в проводниках вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы воспрепятствовать изменениям тока, текущего в цепи. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании цепи и убывание тока при размыкании цепи происходит не мгновенно, а постепенно.

Найдем сначала характер изменения тока при размыкании цепи. Пусть в цепь с не зависящей от i индуктивностью L и сопротивлением R включен источник

тока, имеющий э. д. с. \mathcal{E} (рис. 113). Под действием этой э. д. с. в цепи будет течь постоянный ток

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (60.1)$$

(сопротивление источника тока считаем пренебрежимо малым).

В момент времени $t = 0$ отключим источник тока замкнув одновременно цепь накоротко переключателем Π . Как только сила тока в цепи станет убывать, возникнет э. д. с. самоиндукции. Следовательно, после отключения источника э. д. с. сила тока в цепи будет в соответствии с законом Ома удовлетворять уравнению

$$iR = \mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}.$$

Перепишем это выражение так:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0. \quad (60.2)$$

Уравнение (60.2) представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка. Его легко проинтегрировать, разделив переменные, т. е. записав в виде

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt,$$

откуда

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + \ln \text{const}$$

(имея в виду дальнейшие преобразования, мы постоянную интегрирования написали в виде $\ln \text{const}$).

Потенцирование этого соотношения дает

$$i = \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (60.3)$$

Выражение (60.3) является общим решением уравнения (60.2). Значение const найдем из начальных условий. При $t = 0$ сила тока имела значение (60.1). Следовательно, $\text{const} = I_0$. Подставив это значение в (60.3), получим

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (60.4)$$

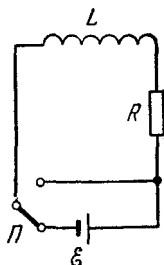
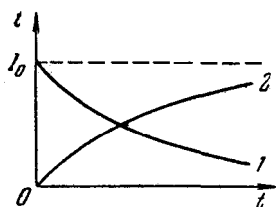


Рис. 113.

Итак, после отключения источника э. д. с. сила тока в цепи не обращается мгновенно в нуль, а убывает по экспоненциальному закону (60.4). График убывания i дан на рис. 114 (кривая 1). Скорость убывания определяется имеющей размерность времени величиной



$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (60.5)$$

которую называют постоянной времени цепи. Используя обозначение (60.5), формуле (60.4) можно придать вид

Рис. 114.

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (60.6)$$

В соответствии с этой формулой τ есть время, в течение которого сила тока уменьшается в e раз. Из соотношения (60.5) видно, что чем больше индуктивность цепи L и меньше ее сопротивление R , тем больше постоянная времени τ и тем медленнее спадает ток в цепи.

Теперь рассмотрим случай замыкания цепи. После подключения к источнику тока, до тех пор, пока сила тока не примет установившегося значения (60.1), в цепи кроме э. д. с. \mathcal{E} будет действовать э. д. с. самоиндукции. Следовательно, в соответствии с законом Ома можно написать, что

$$iR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_s = \mathcal{E} - L \frac{di}{dt}.$$

Преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (60.7)$$

Мы пришли к линейному неоднородному уравнению, которое отличается от уравнения (60.2) лишь тем, что в правой части вместо нуля в нем стоит постоянная величина \mathcal{E}/L . Как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение линейного неоднородного уравнения можно получить, прибавив любое его частное решение к общему решению соответствующего однородного уравнения. Общее решение однородного уравнения имеет вид (60.3). Легко убедиться в том, что $i = I_0 = \mathcal{E}/R$ представляет собой частное решение урав-

нения (60.7). Следовательно, общее решение уравнения (60.7) можно написать следующим образом:

$$i = I_0 + \text{const} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

В начальный момент сила тока i равна нулю. Отсюда для const получается значение $\text{const} = -I_0$. Таким образом,

$$i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (60.8)$$

Функция (60.8) описывает нарастание тока в цепи после подключения к ней источника э. д. с. График этой функции дан на рис. 114 (кривая 2).

Мы предполагали индуктивность L постоянной. Если цепь содержит катушку с железным сердечником, \mathcal{E}_s будет определяться формулой (59.8). В этом случае за счет слагаемого $i \frac{dL}{dt}$ э. д. с. самоиндукции может достигать очень больших значений. При этом сила тока может значительно превзойти I_0 .

§ 61. Энергия магнитного поля

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 115. Сначала замкнем соленоид L на батарею \mathcal{E} ; в нем установится ток i , который обусловит магнитное поле, сцепленное с витками соленоида. Если, отключив соленоид от батареи, замкнуть его через сопротивление R , то в образовавшейся цепи будет некоторое время течь постепенно убывающий ток. Работа, совершаемая этим током за время dt , равна

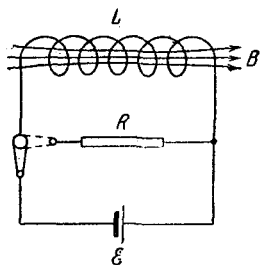


Рис. 115.

$$\begin{aligned} dA &= \mathcal{E}_s i dt = \\ &= - \frac{d\Psi}{dt} i dt = - i d\Psi. \end{aligned} \quad (61.1)$$

Если индуктивность соленоида не зависит от i ($L = \text{const}$), то $d\Psi = L di$ и выражение (61.1) принимает следующий вид:

$$dA = - L i di. \quad (61.2)$$

Проинтегрировав это выражение по i в пределах от первоначального значения i до нуля, получим работу, совершаемую в цепи за все время, в течение которого происходит исчезновение магнитного поля:

$$A = - \int_i^0 Li \, di = \frac{Li^2}{2}. \quad (61.3)$$

Работа (61.3) идет на приращение внутренней энергии проводников, т. е. на их нагревание. Совершение этой работы сопровождается исчезновением магнитного поля, которое первоначально существовало в окружающем соленоид пространстве. Поскольку никаких других изменений в окружающих электрическую цепь телах не происходит, остается заключить, что магнитное поле является носителем энергии, за счет которой и совершается работа (61.3). Таким образом, мы приходим к выводу, что проводник с индуктивностью L , по которому течет ток i , обладает энергией

$$W = \frac{Li^2}{2}, \quad (61.4)$$

которая локализована в возбуждаемом током магнитном поле [ср. эту формулу с выражением (29.1) для энергии заряженного конденсатора].

В гауссовой системе выражение для энергии контура с током имеет вид

$$W = \frac{1}{c^2} \frac{Li^2}{2}. \quad (61.5)$$

Заметим, что выражение (61.3) можно трактовать как ту работу, которую необходимо совершить против э. д. с. самоиндукции в процессе нарастания тока от 0 до i , и которая идет на создание магнитного поля, обладающего энергией (61.4). В самом деле, работа, совершаемая против э. д. с. самоиндукции,

$$A' = \int_0^i (-\mathcal{E}_s) i \, dt.$$

Произведя преобразования, подобные тем, которые привели нас к выражению (61.2), получим

$$A' = \int_0^i Li \, di = \frac{Li^2}{2}, \quad (61.6)$$

что совпадает с (61.3). Работа (61.6) совершается при установлении тока за счет источника э. д. с. и идет целиком на создание сцепленного с контуром магнитного поля. Выражение (61.6) не учитывает той работы, которую источник э. д. с. затрачивает в процессе установления тока на нагревание проводников¹⁾.

Выразим энергию магнитного поля (61.4) через величины, характеризующие само поле. В случае бесконечного (практически очень длинного) соленоида

$$L = \mu_0 \mu n^2 V, \quad H = ni,$$

откуда

$$i = \frac{H}{n}.$$

Подставляя эти значения L и i в (61.4) и производя преобразования, получим

$$W = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V. \quad (61.7)$$

Как было показано в § 42, магнитное поле бесконечно длинного соленоида однородно и отлично от нуля только внутри соленоида. Следовательно, энергия (61.7) заключена в пределах соленоида и распределена по его объему с постоянной плотностью w , которую можно получить, разделив W на V . Произведя это деление, получим

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (61.8)$$

¹⁾ Она равна

$$A'' = \int_0^i Ri^2 \, dt.$$

Воспользовавшись соотношением (44.15), формулу для плотности энергии магнитного поля можно записать следующим образом:

$$w = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}. \quad (61.9)$$

Полученное нами выражение для плотности энергии магнитного поля имеет вид, аналогичный выражению (30.2) для плотности энергии электрического поля, с тем лишь отличием, что электрические величины в нем заменены соответствующими магнитными.

В гауссовой системе формулы для плотности энергии магнитного поля выглядят следующим образом:

$$w = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{BH}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi}. \quad (61.10)$$

Если магнитное поле неоднородно, плотность энергии больше там, где больше H и μ . Чтобы найти энергию магнитного поля, заключенную в некотором объеме V , нужно вычислить интеграл

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\mu_0\mu H^2}{2} dV. \quad (61.11)$$

§ 62. Взаимная индукция

Возьмем два контура 1 и 2, расположенные друг относительно друга не очень далеко (рис. 116). Если в

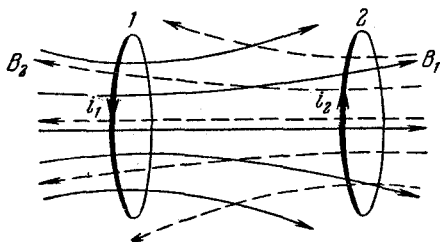


Рис. 116.

первом контуре течет ток силы i_1 , он создает через другой контур пропорциональный i_1 полный поток

$$\Psi_2 = L_{21}i_1 \quad (62.1)$$

(поле, создающее этот поток, изображено на рисунке сплошными линиями).

При изменениях тока i_1 во втором контуре индуцируется э. д. с.

$$\mathcal{E}_{i_2} = - L_{21} \frac{di_1}{dt}. \quad (62.2)$$

Аналогично, при протекании во втором контуре тока силы i_2 возникает связанный с первым контуром поток

$$\Psi_1 = L_{12} i_2 \quad (62.3)$$

(поле, создающее этот поток, изображено пунктирными линиями).

При изменениях тока i_2 в контуре 1 индуцируется э. д. с.

$$\mathcal{E}_{i_1} = - L_{12} \frac{di_2}{dt}. \quad (62.4)$$

Контурь 1 и 2 называются связанными, а явление возникновения э. д. с. в одном из контуров при изменениях силы тока в другом называется взаимной индукцией.

Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются взаимной индуктивностью (или коэффициентом взаимной индукции) контуров. Позже мы покажем, что эти коэффициенты всегда равны друг другу:

$$L_{12} = L_{21}. \quad (62.5)$$

Взаимная индуктивность L_{12} зависит от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости окружающей контуры среды. Измеряется L_{12} в тех же единицах, что и индуктивность L .

Вычислим энергию магнитного поля, создаваемого обоими контурами. Если ток течет только в одном из контуров, например в первом, энергия магнитного поля согласно (61.4) равна

$$W_1 = \frac{L_1 i_1^2}{2}, \quad (62.6)$$

а плотность энергии —

$$w_1 = \frac{\mu_0 \mu H_1^2}{2},$$

где H_1 — напряженность поля, создаваемого током i_1 .

Аналогично, если ток течет только во втором контуре, энергия поля равна

$$W_2 = \frac{L_2 i_2^2}{2}, \quad (62.7)$$

а ее плотность

$$w_2 = \frac{\mu_0 \mu H_2^2}{2},$$

где H_2 — напряженность поля, создаваемого током i_2 .

В случае, когда ток в обоих контурах одновременно отличен от нуля, напряженность поля в любой точке будет согласно принципу суперпозиции равна

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2,$$

так что, вообще говоря,

$$H^2 \neq H_1^2 + H_2^2.$$

Отсюда следует, что

$$w \neq w_1 + w_2,$$

и полная совместная энергия контуров W не равна сумме энергий (62.6) и (62.7).

Чтобы найти энергию W , вычислим работу, которую должны совершить источники тока, включенные в оба контура, для того, чтобы в контурах возникли токи силы i_1 и i_2 и было создано соответствующее суммарное поле. Пусть вначале сила тока в обоих контурах равна нулю. Для того чтобы создать в первом контуре ток силы i_1 , источник тока, включенный в контур, должен совершить против э. д. с. самоиндукции \mathcal{E}_{s1} работу, величина которой согласно (61.6) равна

$$A_1' = \frac{L_1 i_1^2}{2},$$

где L_1 — индуктивность первого контура.

Теперь, поддерживая силу тока i_1 неизменной, станем увеличивать силу тока во втором контуре от 0 до i_2 . При этом источник тока, включенный во второй контур, должен совершить работу

$$A_2' = \frac{L_2 i_2^2}{2},$$

где L_2 — индуктивность второго контура.

Однако дело не исчерпывается только этим. При изменениях тока i_2 в первом контуре будет индуцироваться э. д. с. (62.4). Для того чтобы появление этой э. д. с. не вызвало изменения силы тока в контуре, источник тока, включенный в первый контур, должен совершить против э. д. с. индукции работу

$$A'_{12} = \int (-\mathcal{E}_{11}) i_1 dt.$$

Подставляя сюда выражение (62.4) для \mathcal{E}_{11} и учитывая, что сила тока i_1 постоянна, получим

$$A'_{12} = i_1 \int_0^t L_{12} \frac{di_2}{dt} dt = i_1 \int_0^{i_2} L_{12} di_2 = L_{12} i_1 i_2.$$

Таким образом, полная работа, которая совершается источниками тока, действующими в обоих контурах, при установлении значений силы тока i_1 и i_2 равна

$$A' = A'_1 + A'_2 + A'_{12} = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + L_{12} i_1 i_2. \quad (62.8)$$

Проведя такие же рассуждения для случая, когда вначале устанавливается во втором контуре ток силы i_2 , а затем в первом контуре ток силы i_1 , получим для работы следующее выражение:

$$A' = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + L_{21} i_2 i_1 \quad (62.9)$$

(в этом случае, чтобы поддерживать неизменной силу тока i_2 , нужно совершать работу против э. д. с. индукции (62.2), которая пропорциональна L_{21}).

Поскольку работа не может зависеть от того, в какой последовательности создаются токи — сначала i_1 , а затем i_2 , или наоборот, — выражения (62.8) и (62.9) должны быть равны друг другу. Отсюда следует справедливость соотношения (62.5).

Вычисленная нами работа идет на создание энергии W магнитного поля. Поэтому можно написать, что

$$W = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + L_{12} i_1 i_2. \quad (62.10)$$

Первое слагаемое в этой формуле дает энергию тока i_1 , второе — энергию тока i_2 , слагаемое $L_{12}i_1i_2$ называется взаимной энергией токов i_1 и i_2 .

Найдем энергию W в предположении, что токи i_1 и i_2 одновременно увеличиваются от нуля до заданных значений. В этом случае в первом контуре индуцируется э. д. с., равная $\mathcal{E}_{s1} + \mathcal{E}_{i1}$, где $\mathcal{E}_{s1} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$ — э. д. с. самоиндукции, а \mathcal{E}_{i1} — э. д. с., определяемая формулой (62.4). Во втором контуре действует $\mathcal{E}_{s2} + \mathcal{E}_{i2}$. Работа, совершаемая против этих э. д. с., идет на создание энергии токов. Поэтому можно написать, что

$$\begin{aligned} W &= \int_0^t [-(\mathcal{E}_{s1} + \mathcal{E}_{i1})] i_1 dt + \int_0^t [-(\mathcal{E}_{s2} + \mathcal{E}_{i2})] i_2 dt = \\ &= \int_0^t \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \right) i_1 dt + \int_0^t \left(L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt} \right) i_2 dt. \end{aligned}$$

Используя соотношение (62.5), это выражение можно преобразовать к виду

$$W = \int_0^t L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt + \int_0^t L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} dt + \int_0^t L_{12} \left(i_1 \frac{di_2}{dt} + \frac{di_1}{dt} i_2 \right) dt.$$

Первые два интеграла дают соответственно $\frac{L_1 i_1^2}{2}$ и $\frac{L_2 i_2^2}{2}$. Третий интеграл можно записать следующим образом:

$$\int_0^t L_{12} \frac{d(i_1 i_2)}{dt} dt = L_{12} i_1 i_2.$$

Итак, мы снова приходим к выражению (62.10).

Формуле для энергии токов можно придать симметричный вид

$$W = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + \frac{L_{12} i_1 i_2}{2} + \frac{L_{21} i_2 i_1}{2}.$$

Для энергии N связанных друг с другом контуров получается аналогичное выражение

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^N L_{ik} i_i i_k, \quad (62.11)$$

где $L_{ik} = L_{ki}$ — взаимная индуктивность i -го и k -го контуров, а $L_{ii} = L_i$ — индуктивность i -го контура.

В заключение найдем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный железный сердечник (рис. 117). Поскольку линии магнитной индукции сосредоточиваются внутри сердечника [см. текст, следующий за формулой (45.5)], можно считать, что возбуждаемое любой из обмоток магнитное поле будет иметь всюду в сердечнике одинаковую напряженность (напомним, что густота линий магнитной индукции пропорциональна B). Если первая обмотка имеет N_1 витков и по ней течет ток силы i_1 , то согласно теореме о циркуляции [см. (44.6)] можно написать, что

$$Hl = N_1 i_1, \quad (62.12)$$

где l — длина сердечника.

Поток магнитной индукции через поперечное сечение сердечника $\Phi = BS = \mu_0 \mu H S$, где S — площадь поперечного сечения сердечника. Подставив сюда значение H из (62.12) и умножив получившееся выражение на N_2 , получим полный поток, сцепленный со второй обмоткой

$$\Psi_2 = \frac{S}{l} \mu_0 \mu N_1 N_2 i_1.$$

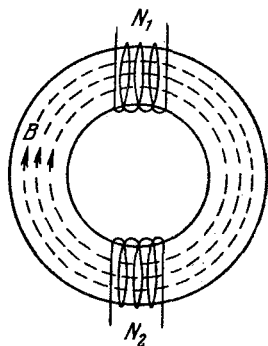


Рис. 117.

Сопоставляя это выражение с (62.1), находим, что

$$L_{21} = \frac{S}{l} \mu_0 \mu N_1 N_2. \quad (62.13)$$

Проведя вычисление потока Ψ_1 , связанного с первой обмоткой, в предположении, что по второй обмотке течет ток силы i_2 , можно прийти для L_{12} к такому же точно выражению.

§ 63. Работа перемагничивания ферромагнетика

При изменениях тока в цепи против э. д. с. самоиндукции совершается работа

$$dA' = (-\mathcal{E}_s) i dt = \frac{d\Psi}{dt} i dt = i d\Psi. \quad (63.1)$$

Если индуктивность цепи L остается постоянной (что возможно только при отсутствии ферромагнетиков), эта работа полностью идет на создание энергии магнитного поля: $dA' = dW^1$). Иначе, как мы сейчас выясним, обстоит дело при наличии ферромагнетиков.

Выразим (63.1) через величины, характеризующие магнитное поле. С этой целью рассмотрим очень длинный соленоид. В этом случае $H = ni$, $\Psi = n l B S$. Следовательно, можно написать

$$i = \frac{H}{n}, \quad d\Psi = n l S dB.$$

Подставив эти выражения в (63.1), получим

$$dA' = H dB \cdot V, \quad (63.2)$$

где $V = lS$ — объем соленоида, т. е. объем поля.

Выясним, можно ли выражение (63.2) отождествить с приращением энергии магнитного поля. Напомним, что энергия — функция состояния. Поэтому сумма ее приращений не зависит от пути, по которому совершается переход из одного состояния в другое, и, в частности, сумма приращений энергии для кругового процесса равна нулю:

$$\oint dW = 0$$

(иначе говоря, dW является полным дифференциалом).

Если заполнить соленоид ферромагнетиком, то связь между B и H будет иметь вид, изображенный на рис. 118. При обходе по петле гистерезиса (т. е. при одном цикле перемагничивания) интеграл

$$\oint H dB$$

¹⁾ В этом случае (63.1) переходит в $dA' = Li di$ [см. (61.6)].

будет равен площади $S_{\text{п}}$, охватываемой петлей. Таким образом, интеграл от выражения (63.2), т. е.

$$\oint dA', \quad (63.3)$$

отличен от нуля. Отсюда мы заключаем, что при наличии ферромагнетиков работа (63.2) не может быть приравнена приращению энергии магнитного поля.

В расчете на единицу объема ферромагнетика работа (63.3) равна

$$\oint H dB = S_{\text{п}}. \quad (63.4)$$

По завершении цикла перемагничивания H и B , а значит и магнитная энергия будут иметь первоначальную величину. Следовательно, работа (63.4) идет не на создание энергии магнитного поля. Как показывает опыт, она идет на увеличение внутренней энергии ферромагнетика, т. е. на его нагревание.

Итак, при совершении одного цикла перемагничивания ферромагнетика затрачивается в расчете на единицу объема работа (63.4), численно равная площади петли гистерезиса. Эта работа идет на нагревание ферромагнетика.

В гауссовой системе работа перемагничивания ферромагнетика в расчете на единицу объема определяется выражением

$$\frac{1}{4\pi} \oint H dB = \frac{1}{4\pi} S_{\text{п}}, \quad (63.5)$$

т. е. численно равна площади петли гистерезиса, деленной на 4π .

В отсутствие ферромагнетиков B является однозначной функцией H ($B = \mu_0 \mu H$, где $\mu = \text{const}$). Поэтому (63.2) представляет собой полный дифференциал

$$dA' = \mu_0 \mu H dH \cdot V.$$

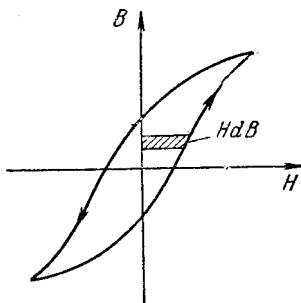


Рис. 118.

Интегрирование от 0 до H дает

$$W = \int dA' = V \mu_0 \mu \int_0^H H dH = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V,$$

что в расчете на единицу объема совпадает с (61.8). Таким образом, в отсутствие ферромагнетиков работа (63.2), как уже отмечалось, идет на создание энергии магнитного поля, т. е.

$$d\omega = H dB \quad (63.6)$$

представляет собой приращение плотности энергии магнитного поля.

В гауссовой системе

$$d\omega = \frac{1}{4\pi} H dB. \quad (63.7)$$

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

§ 64. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

Представим себе заряд e' , влетающий в однородное магнитное поле со скоростью v , перпендикулярной к \mathbf{B} . Под действием силы Лоренца заряд приобретает постоянное по величине нормальное ускорение

$$\omega_n = \frac{f}{m} = \frac{e'}{m} v B \quad (64.1)$$

(угол между v и \mathbf{B} прямой).

Если скорость изменяется только по направлению, движение с постоянным по величине нормальным ускорением представляет собой равномерное движение по окружности (см. т. I, § 20), радиус которой определяется условием $\omega_n = v^2/R$. Подставляя сюда значение (64.1) для ω_n и решая получившееся уравнение относительно R , получаем

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B}. \quad (64.2)$$

Итак, в случае, когда вектор v перпендикулярен к \mathbf{B} , заряженная частица движется по окружности, радиус которой зависит от скорости частицы, магнитной индукции поля и отношения заряда частицы e' к ее массе m . Отношение e'/m называется удельным зарядом.

Найдем время T , которое затрачивает частица на один оборот. Для этого разделим длину окружности $2\pi R$ на скорость частицы v . В результате получим

$$T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B}. \quad (64.3)$$

Период обращения частицы по окружности оказывается не зависящим от ее скорости, он определяется только удельным зарядом частицы и магнитной индукцией поля. На рис. 119 показаны траектории движения в однородном магнитном поле двух частиц с одинаковым удельным зарядом, но различными скоростями v_1 и v_2 . Если частицы выходят одновременно из точки O ,

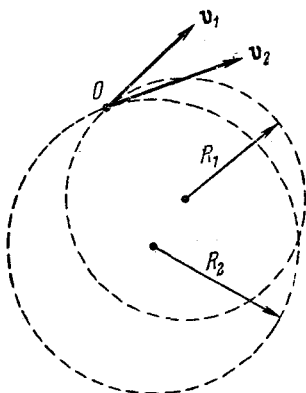


Рис. 119.

то, совершив за одинаковое время полный оборот, они снова встретятся в точке O .

Выясним характер движения заряженной частицы

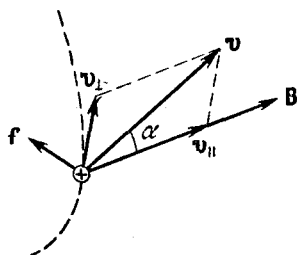


Рис. 120.

в случае, когда ее скорость образует с направлением однородного магнитного поля угол α , отличный от $\pi/2$. Разложим вектор v на две составляющие: v_{\perp} — перпендикулярную к B и v_{\parallel} — параллельную B (рис. 120). Легко видеть, что

$$v_{\perp} = v \sin \alpha, \quad v_{\parallel} = v \cos \alpha.$$

Сила Лоренца равна

$$f = e' v B \sin \alpha = e' v_{\perp} B$$

и лежит в плоскости, перпендикулярной к B . Создаваемое этой силой ускорение является для v_{\perp} нормальным. Составляющая силы Лоренца в направлении B равна нулю; поэтому повлиять на величину v_{\parallel} эта сила не может. Таким образом, движение частицы можно представить как наложение двух движений: 1) перемещения вдоль направления B с постоянной скоростью

$v_{\parallel} = v \cos \alpha$ и 2) равномерного вращения в плоскости, перпендикулярной к вектору \mathbf{B} . Радиус окружности, по которой происходит вращение, определяется формулой (64.2) с заменой v на $v_{\perp} = v \sin \alpha$. Траектория движения представляет собой спираль, ось которой совпадает с направлением \mathbf{B} (рис. 121). Шаг спирали l можно найти, умножив v_{\parallel} на определяемый формулой (64.3) период обращения T :

$$l = v_{\parallel} T = 2\pi \frac{m}{e'} \frac{1}{B} v \cos \alpha. \quad (64.4)$$

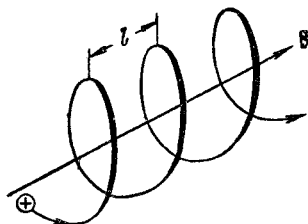


Рис. 121.

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда частицы. Если заряд положителен, спираль закручивается против часовой стрелки. Спираль, по которой движется отрицательно заряженная частица, закручивается по часовой стрелке (предполагается, что мы смотрим на спираль вдоль направления \mathbf{B} ; частица при этом летит от нас, если $\alpha < \pi/2$, и на нас, если $\alpha > \pi/2$).

§ 65. Отклонение движущихся заряженных частиц электрическим и магнитным полями

Рассмотрим узкий пучок одинаковых заряженных частиц (например, электронов), попадающий в точке O

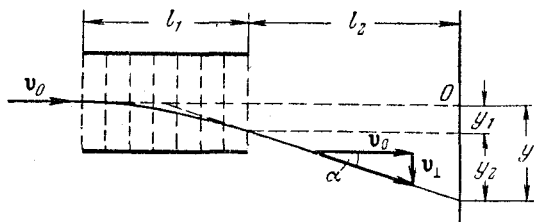


Рис. 122.

на перпендикулярный к нему экран (рис. 122). Определим смещение следа пучка, вызываемое перпендикулярным к пучку однородным электрическим полем, действующим на пути длиной l_1 . Пусть первоначально

скорость частиц равна v_0 . Войдя в область поля, каждая частица будет двигаться с постоянным по величине и направлению, перпендикулярным к v_0 ускорением $w_{\perp} = \frac{e'}{m} E$ (e'/m — удельный заряд частицы). Движение под действием поля продолжается время $t = l_1/v_0$. За это время частицы сместятся на расстояние

$$y_1 = \frac{1}{2} w_{\perp} t^2 = \frac{1}{2} \frac{e'}{m} E \frac{l_1^2}{v_0^2} \quad (65.1)$$

и приобретут перпендикулярную к v_0 составляющую скорости

$$v_{\perp} = w_{\perp} t = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0}.$$

В дальнейшем частицы летят прямолинейно в направлении, которое образует с вектором v_0 угол α , определяемый условием

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_0} = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0^2}. \quad (65.2)$$

В результате в дополнение к смещению (65.1) пучок приобретет смещение

$$y_2 = l_2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{e'}{m} E \frac{l_1 l_2}{v_0^2},$$

где l_2 — расстояние от границы поля до экрана.

Таким образом, смещение следа пучка относительно точки O равно

$$y = y_1 + y_2 = \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v_0^2} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right). \quad (65.3)$$

Последнее выражение можно с учетом (65.2) записать в виде

$$y = \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right),$$

откуда вытекает, что частицы, покинув поле, летят так, как если бы они вылетели из центра конденсатора, создающего поле, под углом α , который определяется формулой (65.2),

Теперь предположим, что на имеющем протяженность l_1 пути частиц включается перпендикулярное к их скорости v_0 однородное магнитное поле (рис. 123; поле перпендикулярно к плоскости рисунка, область поля обведена пунктирной окружностью). Под действием поля

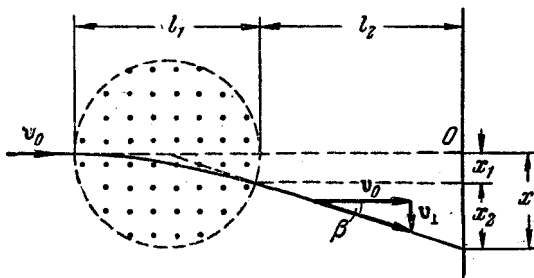


Рис. 123.

каждая частица получит постоянное по величине ускорение $\omega_{\perp} = \frac{e'}{m} v_0 B$. Ограничиваясь случаем, когда отклонение пучка полем невелико, можно считать, что ускорение ω_{\perp} также постоянно по направлению и перпендикулярно к v_0 . Тогда для расчета смещения можно использовать полученные нами формулы, заменив в них ускорение $\omega_{\perp} = \frac{e'}{m} E$ значением $\omega_{\perp} = \frac{e'}{m} v_0 B$. В результате для смещения, которое мы теперь обозначим буквой x , получим

$$x = \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v_0} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right). \quad (65.4)$$

Угол, на который отклонится пучок магнитным полем, определится выражением

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v_0}. \quad (65.5)$$

С учетом (65.5) формулу (65.4) можно записать следующим образом:

$$x = \operatorname{tg} \beta \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right).$$

Следовательно, при малых отклонениях частицы, покинув магнитное поле, летят так, как если бы они вылетели из центра поля под углом β , величина которого определяется выражением (65.5).

Отметим, что как отклонение (65.3) электрическим полем, так и отклонение (65.4) магнитным полем пропорционально удельному заряду частиц и напряженности (или индукции) соответствующего поля. Оба отклонения зависят также от v_0 . Частицы с одинаковыми e'/m

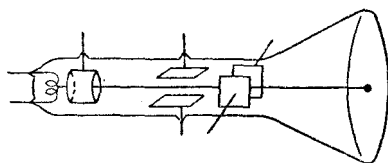


Рис. 124.

и v_0 получают в каждом из полей одинаковое отклонение и, следовательно, попадают в одну и ту же точку экрана.

Отклонение пучка электронов электрическим или магнитным полем используется в электроннолучевых трубках.

Внутри трубки с электрическим отклонением (рис. 124) кроме так называемого электронного прожектора, создающего узкий пучок быстрых электронов (электронный луч), помещаются две пары взаимно перпендикулярных пластин. Подавая напряжение на любую пару пластин, можно вызвать пропорциональное ему смещение электронного луча в направлении, перпендикулярном к данным пластинам. Экран трубки покрывают флуоресцирующим составом. Поэтому в месте попадания на экран электронного луча возникает яркое светящееся пятно.

Электроннолучевые трубки применяются в осциллографах — приборах, позволяющих наблюдать и фотографировать быстротекущие процессы. На одну пару отклоняющих пластин подают напряжение, изменяющееся линейно со временем, на другую пару — исследуемое напряжение. Вследствие ничтожной инерционности электронного пучка его отклонение будет без запаздывания следовать за изменениями напряжений на отклоняющих пластинах, причем луч вычертит на экране осциллографа график зависимости исследуемого напряжения от времени. Многие неэлектрические величины могут быть с помощью соответствующих устройств (датчиков) преобразованы в электрические напряжения (или токи).

Поэтому с помощью осциллографов исследуют самые различные по природе процессы.

Электроннолучевая трубка является неотъемлемой частью телевизионных устройств. В телевидении чаще применяются трубки с магнитным управлением электронным лучом. У таких трубок вместо отклоняющих пластин имеются две расположенные снаружи взаимно перпендикулярные системы катушек, каждая из которых создает перпендикулярное к лучу магнитное поле. Изменяя ток в катушках, вызывают перемещение светового пятна, создаваемого лучом на экране.

§ 66. Определение заряда и массы электрона

Измерение удельного заряда электрона, т. е. отношения e/m , было впервые осуществлено Томсоном в 1897 г. с помощью разрядной трубки, изображенной на рис. 125. Выходящий из отверстия в аноде A электронный пучок (катодные лучи; см. § 89) проходил между пластинами плоского конденсатора и попадал на флуоресцирующий экран, создавая на нем светящееся пятно. Подавая напряжение на пластины конденсатора, можно было воздействовать на пучок однородным электрическим полем.

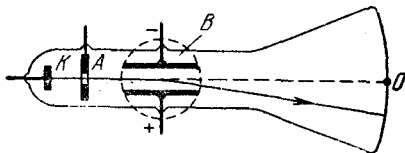


Рис. 125.

Трубка помещалась между полюсами электромагнита, с помощью которого можно было создавать на том же участке пути электронов перпендикулярное к электрическому однородное магнитное поле (область этого поля обведена на рис. 125 пунктирным кружком). При выключенных полях пучок попадал на экран в точке O . Каждое из полей в отдельности вызывало смещение пучка в вертикальном направлении. Величины смещений определяются полученными в предыдущем параграфе выражениями (65.3) и (65.4).

Включив магнитное поле и измерив вызванное им смещение следа пучка

$$x = \frac{e}{m} B \frac{l_1}{v_0} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \quad (66.1)$$

Томсон включал также электрическое поле и подбирал его величину и направление так, чтобы пучок снова попадал в точку O . В этом случае электрическое и магнитное поля действовали на электроны пучка одновременно с одинаковыми по величине, но противоположно направленными силами, т. е. выполнялось условие

$$eE = ev_0B. \quad (66.2)$$

Решая совместно уравнения (66.1) и (66.2), Томсон вычислял e/m и v_0 ¹⁾.

Буш применил для определения удельного заряда электронов метод магнитной фокусировки. Суть этого метода заключается в следующем. Предположим, что в однородном магнитном поле вылетает из некоторой точки слегка расходящийся симметричный относительно направления поля пучок электронов, имеющих одинаковую по величине скорость v . Направления, по которым вылетают электроны, образуют с направлением \mathbf{B} небольшие углы α . Как было выяснено в § 64, электроны движутся в этом случае по спиральным траекториям, совершая за одинаковое время [см. формулу (64.3)]

$$T = 2\pi \frac{m}{e} \frac{1}{B}$$

полный оборот и смещаясь вдоль направления поля на расстояние l , равное

$$l = v \cos \alpha T. \quad (66.3)$$

Вследствие малости углов α расстояния (66.3) для разных электронов будут практически одинаковыми и равными vT (для малых углов $\cos \alpha \approx 1$). Следовательно, расходящийся пучок сфокусируется в точке, отстоящей от точки вылета электронов на расстоянии

$$l = vT = 2\pi \frac{m}{e} \frac{v}{B}. \quad (66.4)$$

В опыте Буша электроны, испущенные раскаленным катодом K (рис. 126), ускоряются, проходя разность потенциалов U , приложенную между катодом и анодом A .

¹⁾ С равным успехом можно было измерять отклонение пучка электрическим полем и затем компенсировать действие электрического поля магнитным.

В результате они приобретают скорость v , величина которой может быть найдена из условия

$$eU = \frac{mv^2}{2}. \quad (66.5)$$

Вылетев затем из отверстия в аноде, электроны образуют узкий пучок, направленный вдоль оси эвакуированной трубки, вставленной внутрь соленоида. На входе в соленоид помещается конденсатор, на который подается переменное напряжение. Поле, создаваемое конденсатором, отклоняет электроны пучка от оси прибора на

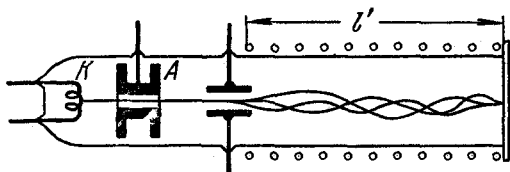


Рис. 126.

небольшие изменяющиеся со временем углы α . В результате происходит «завихрение» пучка — электроны начинают двигаться по различным спиральным траекториям. На выходе из соленоида ставится флуоресцирующий экран. Если подобрать магнитную индукцию B так, чтобы расстояние l' от конденсатора до экрана удовлетворяло условию

$$l' = nl \quad (66.6)$$

(где l — шаг спирали, а n — целое число), то точка пересечения траекторий электронов попадет на экран — электронный пучок окажется сфокусированным в этой точке и возбудит на экране резкое светящееся пятно. Если условие (66.6) не соблюдается, светящееся пятно на экране будет размытым. Решая совместно уравнения (66.4), (66.5) и (66.6), можно найти e/m и v .

Наиболее точное значение удельного заряда электрона, установленное с учетом результатов, полученных разными методами, равно

$$\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ к/кг} = 5,27 \cdot 10^{17} \text{ СГСЭ/г}. \quad (66.7)$$

Величина (66.7) дает отношение заряда электрона к его массе покоя m_0 . Как вытекает из теории относительности, масса любого тела зависит от его скорости по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (66.8)$$

В этой формуле m — масса тела, движущегося со скоростью v , c — скорость света в пустоте, а m_0 — масса тела в том случае, когда оно покоится, называемая массой покоя.

В опытах Томсона скорость электронов составляла примерно 0,1 c , что приводило к отклонению m от m_0 на 0,5%. В последующих опытах скорость электронов достигала очень больших значений. Во всех случаях было обнаружено уменьшение измеряемых значений e/m с ростом v , происходившее в точном соответствии с формулой (66.8).

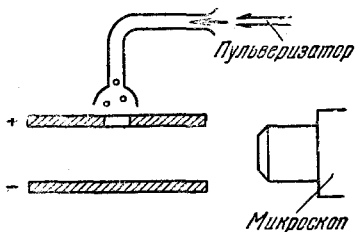


Рис. 127.

Заряд электрона был определен с большой точностью Милликенем в 1909 г. В закрытое пространство между горизонтально расположенными пластинами конденсатора (рис. 127) Милликен вводил мельчайшие капельки масла. При разбрызгивании капельки электризовались и их можно было устанавливать неподвижно, подбирая величину и знак напряжения на конденсаторе. Равновесие наступало при условии

$$P' = e'E; \quad (66.9)$$

здесь P' — результирующая силы тяжести и архимедовой силы, равная $\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g$, где ρ — плотность капельки, r — ее радиус, ρ_0 — плотность воздуха.

Зная r и E , можно было найти e' . Для определения радиуса измерялась скорость равномерного падения капельки в отсутствие поля. Как известно из механики

[см. т. I, формулу (60.2)], эта скорость равна

$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho_0)gr^2}{9\eta}. \quad (66.10)$$

Измерив v_0 и зная ρ , ρ_0 и вязкость воздуха η , можно по формуле (66.10) вычислить r . Движение капельки наблюдалось с помощью микроскопа. Для измерения v_0 определялось время, за которое капелька проходила расстояние между двумя нитями, видимыми в поле зрения микроскопа.

Точно зафиксировать равновесие капельки очень трудно. Поэтому вместо поля, отвечающего условию (66.9), включалось такое поле, под действием которого капелька начинала двигаться с небольшой скоростью вверх. Установившаяся скорость подъема v_E определяется из условия, что сила P' и сила трения $6\pi\eta rv$ в сумме уравнивают силу $e'E$:

$$P' + 6\pi\eta rv_E = e'E.$$

Выразив P' через ρ , ρ_0 и r , подставив значение r из (66.10) и решив уравнение относительно e' , получим

$$e' = 9\pi \sqrt{\frac{2\eta^3}{(\rho - \rho_0)g}} \sqrt{v_0} \frac{v_0 + v_E}{E} {}^1).$$

Следовательно, измерив скорость свободного падения капельки v_0 и скорость ее подъема v_E в известном электрическом поле E , можно было найти заряд капельки e' .

Измерив скорость v_E , Милликен вызывал ионизацию воздуха, облучая пространство между пластинами рентгеновскими лучами. Отдельные ионы, прилипая к капельке, изменяли ее заряд, в результате чего скорость v_E изменялась.

Как показали измерения Милликена, изменения заряда капельки $\Delta e'$ и сам заряд e' каждый раз получались целыми кратными одной и той же величине e . Тем самым была экспериментально доказана дискретность электрического заряда, т. е. тот факт, что всякий заряд складывается из элементарных зарядов одинаковой

¹⁾ В эту формулу Милликен вносил поправку, учитывающую, что размеры капелек были сравнимы с длиной свободного пробега молекул воздуха.

величины. Значение элементарного заряда, установленное с учетом измерений Милликена и данных, полученных другими методами, равно

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ к} = 4,80 \cdot 10^{-10} \text{ СГСЭ.} \quad (66.11)$$

Таковую же величину имеет заряд электрона. Для массы покоя электрона с учетом (66.7) и (66.11) получается значение

$$m_0 = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ кг} = 0,91 \cdot 10^{-27} \text{ г.} \quad (66.12)$$

Таким образом, масса электрона приблизительно в 1840 раз меньше массы самого легкого из атомов — атома водорода (см. т. I, § 92).

§ 67. Определение удельного заряда положительных ионов. Масс-спектрографы

Описанные в предыдущем параграфе методы определения e'/m пригодны в том случае, если все частицы в пучке имеют одинаковую скорость. Все образующие пучок электроны разгоняются одинаковой разностью потенциалов, приложенной между катодом, из которого они вылетают, и анодом; поэтому разброс значений скоростей электронов в пучке очень мал. Если бы это было не так, электронный пучок давал бы на экране сильно размытое пятно, и измерения были бы невозможны.

Положительные ионы образуются за счет ионизации молекул газа, например, при газовом разряде (см. § 84). Возникая в разных местах, ионы проходят неодинаковую разность потенциалов, вследствие чего их скорости бывают различными. Таким образом, методы, которыми был определен удельный заряд электронов, к ионам неприменимы. В 1907 г. Томсоном был разработан «метод парабол», который позволил обойти отмеченное затруднение.

В опыте Томсона тонкий пучок положительных ионов проходил через область, в которой на него одновременно воздействовали параллельные друг другу электрическое и магнитное поля (рис. 128). Оба поля были однородными и образовывали с первоначальным направлением пучка прямой угол. Они вызывали отклонения ионов: магнитное — в направлении оси x , электрическое —

вдоль оси y . Согласно формулам (65.4) и (65.3) эти отклонения были равны

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{e'}{m} B \frac{l_1}{v} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \\ y &= \frac{e'}{m} E \frac{l_1}{v^2} \left(\frac{1}{2} l_1 + l_2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (67.1)$$

где v — скорость данного иона с удельным зарядом e'/m , l_1 — протяженность области, в которой поля действуют на пучок, l_2 — расстояние от границы этой области до фотопластинки, регистрировавшей попадавшие на нее ионы.

Величины (67.1) представляют собой координаты точки, в которой попадает на пластинку ион, имеющий данное значение e'/m и величину скорости v . Ионы с одинаковым удельным зарядом, но различными скоростями попадали в разные точки пластинки. Исключив из формул (67.1) скорость v , получим уравнение кривой, вдоль которой располагались следы ионов с одним и тем же значением e'/m . Возведя первое из уравнений (67.1) в квадрат и разделив затем его на второе, после преобразований получим

$$y = \left[\frac{E}{l_1 B^2 (0,5 l_1 + l_2)} \right] \frac{m}{e'} x^2. \quad (67.2)$$

Таким образом, ионы с одинаковыми e'/m и различными v оставляли на пластинке след в виде параболы. Ионы с различными e'/m располагались вдоль разных парабол. Зная параметры прибора (т. е. E , B , l_1 и l_2) и измеряя смещения y и x , можно было по формуле (67.2) находить удельный заряд ионов, соответствующих каждой параболе. При изменении направления одного из полей соответствующая координата изменяла знак на обратный, так что получались параболы, симметричные прежним. Деля пополам расстояние между

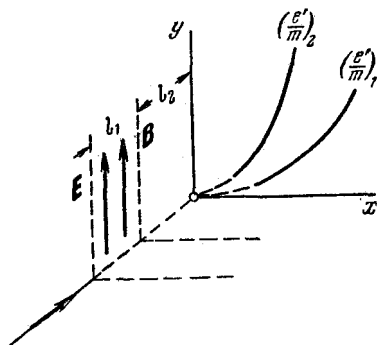


Рис. 128.

соответствующими точками симметричных парабол, можно было находить x и y . След, оставляемый на пластинке пучком при выключенных полях, давал начало координат. На рис. 129 показаны первые параболы, полученные Томсоном.

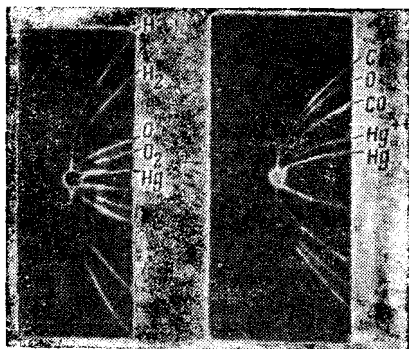


Рис. 129.

Произведя опыт с химически чистым неоном, Томсон обнаружил, что этот газ давал две параболы, соответствовавшие атомным весам 20 и 22. Попытки объяснить этот результат привели к предположению о том, что существуют две химически неразличимые разновид-

ности атомов неона (по современной терминологии — два изотопа неона). Доказательство этого предположения было дано Астоном, усовершенствовавшим метод определения удельного заряда ионов.

Прибор Астона, названный им масс-спектрографом, имел следующее устройство (рис. 130). Пучок

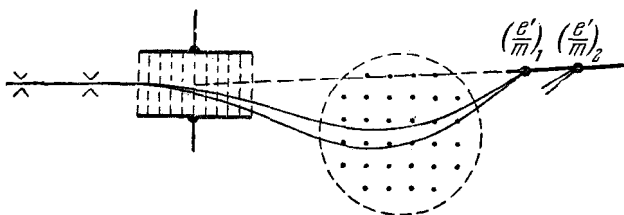


Рис. 130.

ионов, выделенный системой щелей, пропускаться последовательно через электрическое и магнитное поля, направленные так, что они вызывали отклонения ионов в противоположных направлениях. При прохождении электрического поля ионы с данным e'/m отклонялись

тем сильнее, чем меньше была их скорость. Поэтому из электрического поля ионы выходили в виде расходящегося пучка. В магнитном поле траектории ионов также искривлялись тем сильнее, чем меньше была их скорость. В результате после выхода из магнитного поля ионы образовывали пучок, сходящийся в одной точке.

Ионы с другими значениями удельного заряда фокусировались в других точках (на рис. 130 показаны

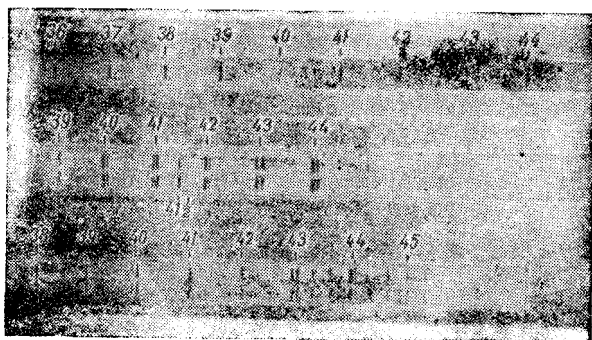


Рис. 131.

траектории ионов лишь для одного значения e'/m). Соответствующий расчет дает, что точки, в которых сходятся пучки, образованные ионами с различными e'/m , лежат приблизительно на одной прямой. Располагая вдоль этой прямой фотопластинку, Астон получал на ней ряд штрихов, каждый из которых соответствовал определенному значению e'/m . Сходство получавшегося на пластинке изображения с фотографией оптического линейчатого спектра послужило причиной того, что Астон назвал его масс-спектрограммой, а свой прибор — масс-спектрографом. На рис. 131 приведены полученные Астоном масс-спектрограммы (против штрихов указаны массовые числа ионов).

Бейнбридж создал прибор другого типа. В масс-спектрографе Бейнбриджа (рис. 132) пучок ионов проходит сначала через так называемый селектор (или фильтр) скоростей, который выделяет из пучка ионы

с определенным значением скорости. В селекторе ионы подвергаются одновременному действию взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей, каждое из которых отклоняет ионы в противоположные стороны. Через выходную щель селектора проходят только те ионы, для которых действия электрического и магнитного полей компенсируют друг друга. Это происходит при условии, что $e'E = e'vB$. Следовательно, скорости вышедших из селектора ионов, независимо от их

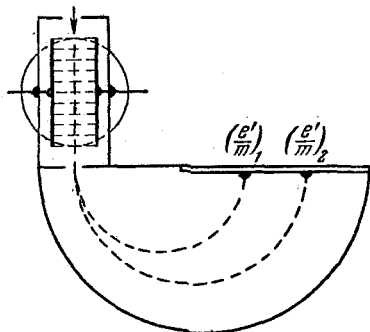


Рис. 132.

массы и заряда, имеют одинаковую величину, равную $v = E/B$.

Выйдя из селектора, ионы попадают в область перпендикулярного к их скорости однородного магнитного поля с индукцией B' . В этом случае ионы движутся по окружностям, радиусы которых согласно (64.2) зависят от e'/m :

$$R = \frac{m}{e'} \frac{v}{B'}.$$

Описав половину окружности, ионы попадают на фотопластинку на расстояниях от щели, равных $2R$. Следовательно, ионы каждого сорта (определяемого значением e'/m) оставляют на пластинке след в виде узкой полоски. Зная параметры прибора, можно вычислить удельные заряды ионов. Поскольку заряды ионов являются целыми кратными элементарного заряда e , по найденным значениям e'/m можно определить массы ионов.

В настоящее время имеется много типов усовершенствованных масс-спектрографов. Созданы также приборы, в которых ионы регистрируются не фотопластинкой, а с помощью электрического устройства. Они получили название масс-спектрометров.

§ 68. Циклотрон

Независимость периода обращения заряженной частицы в однородном магнитном поле от ее скорости [см. формулу (64.3)] положена в основу ускорителя заряженных частиц, называемого циклотроном. Этот прибор состоит из двух электродов в виде половинок круглой невысокой коробки (рис. 133), получивших название дуантов. Дуанты заключены в откачиваемый корпус, который помещается между полюсами большого электромагнита. Поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно к плоскости дуантов. На дуанты подается переменное напряжение, снимаемое с полюсов генератора высокой частоты.

Введем в зазор между дуантами в тот момент, когда напряжение достигнет наибольшей величины, положительно заряженную частицу. Частица будет подхвачена электрическим полем и втянута внутрь отрицательного электрода. Пространство внутри дуанта является эквипотенциальным, следовательно, частица в нем будет находиться под воздействием только магнитного поля. Как было выяснено в § 64, в этом случае происходит движение заряженной частицы по окружности, радиус которой пропорционален скорости частицы [см. формулу (64.2)]. Подберем частоту изменения напряжения между дуантами так, чтобы к моменту, когда частица, пройдя половину окружности, подойдет к зазору между дуантами, разность потенциалов между ними изменила знак и достигла амплитудного значения. Тогда частица будет снова ускорена и влетит во второй дуант

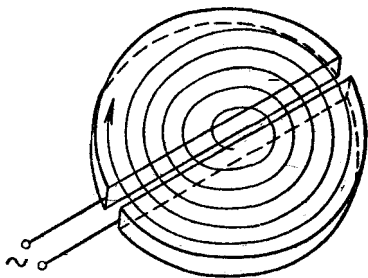


Рис. 133.

с энергией в два раза большей, чем та, с которой она двигалась в первом дуанте. Обладая большей скоростью, частица будет двигаться во втором дуанте по окружности большего радиуса ($R \sim v$), но время, за которое она пройдет половину окружности, останется прежним (оно не зависит от v). Поэтому к моменту, когда частица влетит в зазор между дуантами, напряжение между ними снова изменит знак и станет максимальным по величине.

Таким образом, если частоту изменения напряжения сделать равной периоду обращения частицы, определяемому формулой (64.3), то частица будет двигаться по кривой, близкой к спирали, получая при каждом прохождении через зазор между дуантами дополнительную порцию энергии, равную $e'U$ (e' — заряд частицы, U — напряжение, вырабатываемое генератором). Располагая источником переменного напряжения сравнительно небольшой величины ($\sim 10^5$ в), можно с помощью циклотрона ускорить протоны до энергий порядка 25 Мэв. При более высоких энергиях начинает сказываться зависимость массы протонов от скорости — период обращения увеличивается [согласно (64.3) он пропорционален m] и синхронизм между движением частиц и изменениями ускоряющего поля оказывается нарушенным.

Чтобы избежать нарушения синхронизма и получить частицы больших энергий, делают изменяющейся либо частоту напряжения, питающего дуанты, либо индукцию магнитного поля. Прибор, в котором в процессе ускорения каждой порции частиц соответствующим образом уменьшается частота ускоряющего напряжения, называется фазотроном (либо синхроциклотроном). Ускоритель, в котором частота не меняется, а индукция магнитного поля изменяется так, чтобы отношение m/V оставалось постоянным, называют синхротроном (ускорители этого типа применяются исключительно для ускорения электронов).

В ускорителе, названном синхрофазотроном¹⁾, изменяются и частота ускоряющего напряжения, и магнитное поле. Ускоряемые частицы движутся в синхрофазотроне не по спирали, а по круговой траектории постоянного радиуса. По мере увеличения скорости и массы

¹⁾ Синхрофазотрон называют также протонным синхротроном.

частиц индукция магнитного поля растет так, что определяемый формулой (64.2) радиус остается все время постоянным. При этом период обращения меняется как из-за возрастания массы частиц, так и вследствие увеличения B . Для того, чтобы ускоряющее напряжение было синхронно с движением частиц, частота этого напряжения делается изменяющейся по соответствующему закону. Дуантов в синхрофазотроне нет, ускорение частиц происходит на отдельных участках траектории с помощью электрического поля, создаваемого генераторами напряжения меняющейся частоты.

Самый мощный в настоящее время (в 1969 г.) ускоритель элементарных частиц — протонный синхротрон — запущен в 1967 г. в СССР в Институте физики высоких энергий (г. Серпухов под Москвой). Он ускоряет протоны до энергии в 76 Гэв ($76 \cdot 10^9 \text{ эв}$). Скорость протонов, обладающих такой энергией, отличается от скорости света в пустоте менее чем на $0,01\%$ ($v = 0,99992 c$).

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ. И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

§ 69. Природа носителей тока в металлах

Для выяснения природы носителей тока в металлах был поставлен ряд опытов. Прежде всего отметим опыт Рикке, осуществленный в 1901 г. Рикке взял три цилиндра — два медных и один алюминиевый — с тщательно отшлифованными торцами. Цилиндры были взвешены и затем сложены вместе в последовательности: медь — алюминий — медь. Через такой составной проводник пропускался непрерывно ток одного и того же направления в течение года. За все время через цилиндры прошел заряд, равный $3,5 \cdot 10^6$ к. Взвешивание показало, что пропускание тока не оказало на вес цилиндров никакого влияния. При исследовании соприкасавшихся торцов под микроскопом также не было обнаружено проникновения одного металла в другой. Результаты опыта Рикке свидетельствовали о том, что перенос заряда в металлах осуществляется не атомами, а какими-то частицами, входящими в состав всех металлов. Такими частицами могли быть открытые в 1897 г. Томсоном электроны.

Чтобы отождествить носители тока в металлах с электронами, нужно было определить знак и величину удельного заряда носителей. Опыты, поставленные с этой целью, основывались на следующих рассуждениях. Если в металле имеются легко перемещающиеся заряженные частицы, то при торможении металлического проводника эти частицы должны некоторое время продолжать двигаться по инерции, в результате чего в проводнике воз-

никнет импульс тока и будет перенесен некоторый заряд. Пусть проводник движется вначале со скоростью v_0 (рис. 134). Начнем тормозить его с ускорением w . Продолжая двигаться по инерции, носители заряда приобретут относительно проводника ускорение $-w$. Такое же ускорение можно сообщить носителям в неподвижном проводнике, если создать в нем электрическое поле напряженности $E = -\frac{mw}{e'}$,

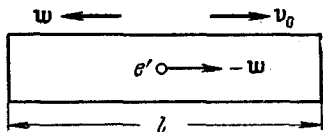


Рис. 134.

т. е. приложить к концам проводника разность потенциалов $U = lE = -\frac{mwl}{e'}$

(l — длина проводника, m — масса, а e' — заряд носителя). В этом случае по проводнику потечет ток силы $i = \frac{U}{R}$, где R — сопротивление проводника. Следовательно, за время dt через каждое сечение проводника пройдет заряд

$$dq = i dt = -\frac{mwl}{e'R} dt = -\frac{ml}{e'R} dv.$$

За все время торможения пройдет заряд

$$q = \int_0^t dq = - \int_{v_0}^0 \frac{ml}{e'R} dv = \frac{m}{e'} \frac{lv_0}{R}. \quad (69.1)$$

Величины q , l , v_0 и R поддаются измерению. Таким образом, затормозив проводник и измерив проходящий при этом в цепи заряд, можно найти удельный заряд носителей. Направление импульса тока даст знак носителей.

Первый опыт с ускоренно движущимися проводниками был поставлен в 1913 г. Мандельштамом и Папалекси. Они приводили катушку с проводом в быстрые крутильные колебания вокруг ее оси. К концам катушки подключался телефон, в котором был слышен звук, обусловленный импульсами тока.

Количественный результат был получен Толменом и Стюартом в 1916 г. Катушка из провода длиной 500 м приводилась во вращение, при котором линейная скорость витков составляла 300 м/сек. Затем катушка резко

тормозилась и с помощью баллистического гальванометра измерялся заряд, протекавший в цепи за время торможения. Вычисленное по формуле (69.1) значение удельного заряда носителей получалось очень близким к e/m для электронов. Таким образом, было экспериментально доказано, что носителями тока в металлах являются электроны.

Ток в металлах можно вызвать весьма малой разностью потенциалов. Это дает основание считать, что носители тока — электроны перемещаются по металлу практически свободно. К тому же выводу приводят и результаты опыта Толмена и Стюарта.

Существование свободных электронов можно объяснить тем, что при образовании кристаллической решетки от атомов металла отщепляются слабее всего связанные (валентные) электроны, которые становятся «коллективной собственностью» всего куска металла. Если от каждого атома отщепится по одному электрону, то концентрация свободных электронов (т. е. их число n в единице объема) будет равна количеству атомов в единице объема. Произведем оценку n . Число атомов в единице объема равно $\frac{\delta}{\mu} N_A$, где δ — плотность металла, μ — масса килограмм-атома, N_A — число Авогадро. Для металлов значения δ/μ заключены в пределах от 20 кмоль/м³ (для калия) до 200 кмоль/м³ (для бериллия). Следовательно, для концентрации свободных электронов (или, как их еще называют, электронов проводимости) получаются значения порядка

$$n = 10^{28} \div 10^{29} \text{ м}^{-3} (10^{22} \div 10^{23} \text{ см}^{-3}). \quad (69.2)$$

§ 70. Элементарная классическая теория металлов

Исходя из представлений о свободных электронах, Друде разработал классическую теорию металлов, которая затем была усовершенствована Лоренцем. Друде предположил, что электроны проводимости в металле ведут себя подобно молекулам идеального газа. В промежутках между соударениями они движутся совершенно свободно, пробегая в среднем некоторый путь λ . Правда, в отличие от молекул газа, пробег которых определяется соударениями молекул друг с другом, элект-

троны сталкиваются преимущественно не между собой, а с ионами, образующими кристаллическую решетку металла. Эти столкновения приводят к установлению теплового равновесия между электронным газом и кристаллической решеткой. Полагая, что на электронный газ могут быть распространены результаты кинетической теории газов, оценку средней скорости теплового движения электронов можно произвести по формуле [см. т. I, формулу (106.12)]

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (70.1)$$

Для комнатной температуры ($\sim 300^\circ \text{K}$) вычисление по этой формуле приводит к следующему значению:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{3,14 \cdot 0,91 \cdot 10^{-30}}} \approx 10^5 \text{ м/сек.}$$

При включении поля на хаотическое тепловое движение, происходящее со скоростью (70.1), накладывается упорядоченное движение электронов с некоторой средней скоростью \bar{u} . Величину этой скорости легко оценить, исходя из формулы, связывающей плотность тока j с числом n носителей в единице объема, их зарядом e и средней скоростью \bar{u} :

$$j = ne\bar{u}. \quad (70.2)$$

Предельная допустимая техническими нормами плотность тока для медных проводов составляет около $10 \text{ а/мм}^2 = 10^7 \text{ а/м}^2$. Взяв для n значение $10^{23} \text{ см}^{-3} = 10^{29} \text{ м}^{-3}$, получим

$$\bar{u} = \frac{j}{en} \approx \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29}} \approx 10^{-3} \text{ м/сек.}$$

Таким образом, даже при очень больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного движения зарядов (\bar{u}) в 10^8 раз меньше средней скорости теплового движения (\bar{v}). Поэтому при вычислениях модуль результирующей скорости $|\mathbf{v} + \mathbf{u}|$ всегда можно заменить модулем скорости теплового движения $|\mathbf{v}|$.

Найдем вызванное полем изменение среднего значения кинетической энергии электронов. Средний квадрат результирующей скорости равен

$$\overline{(\mathbf{v} + \mathbf{u})^2} = \overline{\mathbf{v}^2} + 2\overline{\mathbf{v}\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u}^2} = \overline{\mathbf{v}^2} + 2\overline{\mathbf{v}}\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{u}^2}^1).$$

Но среднее значение \mathbf{v} равно нулю (см. § 31). Поэтому

$$\overline{(\mathbf{v} + \mathbf{u})^2} = \overline{\mathbf{v}^2} + \overline{\mathbf{u}^2}.$$

Следовательно, упорядоченное движение увеличивает кинетическую энергию электронов ϵ_k в среднем на

$$\overline{\Delta\epsilon_k} = \frac{m\overline{u^2}}{2}. \quad (70.3)$$

Закон Ома. Друдэ считал, что сразу после очередного соударения электрона с ионом кристаллической решетки скорость упорядоченного движения электрона равна нулю. Предположим, что напряженность поля не изменяется. Тогда под действием поля электрон получит постоянное ускорение, равное eE/m , и к концу пробега скорость упорядоченного движения достигнет в среднем значения

$$\bar{u}_{\max} = \frac{eE}{m} \tau, \quad (70.4)$$

где τ — среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

Друдэ не учитывал распределения электронов по скоростям и приписывал всем электронам одинаковое значение скорости v . В этом приближении

$$\tau = \frac{\lambda}{v},$$

где λ — среднее значение длины свободного пробега, v — скорость теплового движения электронов (мы воспользовались тем, что $|\mathbf{v} + \mathbf{u}|$ практически равен $|\mathbf{v}|$).

Подставим это значение τ в формулу (70.4):

$$\bar{u}_{\max} = \frac{eE\lambda}{mv}. \quad (70.5)$$

¹⁾ Если две случайные величины a и b независимы друг от друга (что справедливо для скоростей \mathbf{v} и \mathbf{u}), то среднее значение их произведения равно произведению средних значений

$$\overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}.$$

Скорость u изменяется за время пробега линейно. Поэтому ее среднее (за пробег) значение равно половине максимального:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \bar{u}_{\max} = \frac{eE\lambda}{2mv}.$$

Подставив это выражение в формулу (70.2), получим

$$j = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E.$$

Плотность тока оказалась пропорциональной напряженности поля. Следовательно, мы получили закон Ома. Согласно (33.4) коэффициент пропорциональности между j и E представляет собой проводимость

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{2mv}. \quad (70.6)$$

Если бы электроны не сталкивались с ионами решетки, длина свободного пробега, а следовательно, и проводимость были бы бесконечно велики. Таким образом, электрическое сопротивление металлов обусловлено соударениями свободных электронов с ионами, помещающимися в узлах кристаллической решетки металла.

Закон Джоуля — Ленца. К концу свободного пробега электрон приобретает дополнительную кинетическую энергию, средняя величина которой согласно формулам (70.3) и (70.5) равна

$$\overline{\Delta \epsilon_k} = \frac{m\bar{u}_{\max}^2}{2} = \frac{e^2\lambda^2}{2mv^2} E^2. \quad (70.7)$$

Столкнувшись с ионом, электрон по предположению полностью теряет приобретенную им за время пробега скорость, т. е. передает энергию (70.7) кристаллической решетке. Эта энергия идет на увеличение внутренней энергии металла, проявляющееся в его нагревании. Каждый электрон претерпевает за секунду в среднем $1/\tau = v/\lambda$ соударений, сообщая всякий раз решетке энергию (70.7). Следовательно, в единице объема за единицу времени должно выделяться тепло

$$w = n \frac{1}{\tau} \overline{\Delta \epsilon_k} = \frac{ne^2\lambda}{2mv} E^2,$$

где n — число электронов проводимости в единице объема.

Величина w есть не что иное, как удельная мощность тока (см. § 34). Множитель при E^2 совпадает со значением (70.6) для σ . Таким образом, мы пришли к выражению (34.5) закона Джоуля — Ленца.

Закон Видемана — Франца. Из опыта известно, что наряду с высокой электропроводностью металлы отличаются также большой теплопроводностью. Видеман и Франц установили в 1853 г. эмпирический закон, согласно которому отношение коэффициента теплопроводности κ к коэффициенту электропроводности σ для всех металлов приблизительно одинаково и изменяется пропорционально абсолютной температуре. Так, например, при комнатной температуре это отношение равно для алюминия $5,8 \cdot 10^{-6}$, для меди $6,4 \cdot 10^{-6}$ и для свинца $7,0 \cdot 10^{-6} \frac{\text{дж} \cdot \text{ом}}{\text{сек} \cdot \text{град}}$.

Способностью проводить тепло обладают и неметаллические кристаллы. Однако теплопроводность металлов значительно превосходит теплопроводность диэлектриков. Из этого можно заключить, что теплопередача в металлах осуществляется в основном не кристаллической решеткой, а электронами. Рассматривая электроны как одноатомный газ, для коэффициента теплопроводности можно заимствовать выражение кинетической теории газов [см. т. I, формулу (113.6)]

$$\kappa = \frac{1}{3} n m \bar{v} \lambda c_V$$

(через nm обозначена плотность газа, вместо \bar{v} взято v).

Удельная теплоемкость одноатомного газа равна $c_V = \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} = \frac{3}{2} \frac{k}{m}$. Подставляя это значение в выражение для κ , получим

$$\kappa = \frac{1}{2} n k v \lambda.$$

Разделим κ на выражение (70.6) для σ

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{k m v^2}{e^2}.$$

Произведя замену $\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT$, приходим к соотношению

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T,$$

которое выражает закон Видемана — Франца.

Подставив $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ дж/град и $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ к, получим

$$\frac{\kappa}{\sigma} = 2,23 \cdot 10^{-8} T.$$

При $T = 300^\circ \text{ К}$ для отношения κ/σ получается значение $6,7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{дж} \cdot \text{ом}}{\text{сек} \cdot \text{град}}$, очень хорошо согласующееся с экспериментальными данными (см. приведенные выше значения для Al, Cu и Pb). Однако, как выяснилось впоследствии, столь хорошее совпадение оказалось случайным, ибо когда Лоренц уточнил расчеты, учтя распределение электронов по скоростям, для отношения κ/σ получилось значение $2 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T$, которое хуже согласуется с данными опыта¹⁾.

Итак, классическая теория смогла объяснить законы Ома и Джоуля — Ленца, а также дала качественное объяснение закона Видемана — Франца. Вместе с тем эта теория встретила с весьма существенными затруднениями. Из них основными являются два. Из формулы (70.6) вытекает, что сопротивление металлов (т. е. величина, обратная σ) должно возрастать как корень квадратный из T . В самом деле, для предположений о зависимости от температуры величин n и λ нет никаких оснований. Скорость же теплового движения пропорциональна корню из T . Этот вывод теории противоречит опытным данным, согласно которым электрическое сопротивление металлов растет пропорционально первой степени T (см. § 33), т. е. быстрее, чем \sqrt{T} .

Второе затруднение классической теории заключается в том, что электронный газ должен обладать молярной

¹⁾ Согласно квантовой теории

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 T = 2,45 \cdot 10^{-8} T.$$

теплоемкостью, равной $\frac{3}{2} R$. Добавляя эту величину к теплоемкости решетки, составляющей $3R$ (см. т. I, § 141), мы получим для килограмм-атомной теплоемкости металла значение $\frac{9}{2} R$. Таким образом, согласно классической электронной теории килограмм-атомная теплоемкость металлов должна быть в 1,5 раза больше, чем у диэлектриков. В действительности же теплоемкость металлов не отличается заметно от теплоемкости неметаллических кристаллов. Объяснение такого несоответствия смогла дать лишь квантовая теория металлов.

Несмотря на неспособность классической теории дать объяснение ряда явлений, она сохранила значение и до настоящего времени, потому что в случае малых концентраций свободных электронов (что имеет место в полупроводниках) она дает вполне удовлетворительные результаты. Вместе с тем по сравнению с квантовой теорией классическая обладает значительной простотой и наглядностью.

§ 71. Основы квантовой теории металлов

В классической теории металлов считалось само собой разумеющимся, что электроны проводимости могут обладать любыми значениями энергии. Согласно квантовой теории энергия электронов в любом кристаллическом теле (в частности, в металле) так же, как и энергия электронов в атоме, квантуется. Это означает, что она может принимать лишь дискретные (т. е. разделенные конечными промежутками) значения, называемые уровнями энергии. Дозволенные уровни энергии в кристалле группируются в зоны.

Чтобы понять происхождение зон, рассмотрим воображаемый процесс объединения атомов в кристалл. Пусть первоначально имеется N изолированных атомов какого-либо вещества. Каждый электрон любого атома обладает одним из разрешенных значений энергии, т. е. занимает один из дозволенных энергетических уровней. В основном, невозбужденном состоянии атома суммарная энергия электронов имеет минимальное возможное значение. Поэтому, казалось бы, все электроны должны находиться на самом низком уровне. Однако электроны

подчиняются принципу запрета Паули, который гласит, что в любой квантовой системе (атоме, молекуле, кристалле и т. д.) на каждом энергетическом уровне¹⁾ может находиться не более двух электронов, причем собственные моменты (спины) электронов, занимающих одновременно один и тот же уровень, должны иметь противоположные направления²⁾. Следовательно, на самом низком уровне атома может разместиться только два электрона, остальные заполняют попарно более высокие уровни. На рис. 135 показано размещение электронов по уровням в основном состоянии атома, имеющего 5 электронов. Схема уровней изображена условно, без соблюдения масштаба. Электроны обозначены кружками со стрелкой. Разные направления стрелок соответствуют противоположным направлениям спинов.

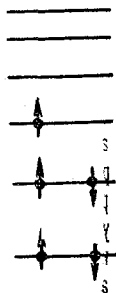


Рис. 135.

Пока атомы изолированы друг от друга, они имеют полностью совпадающие схемы энергетических уровней. Заполнение уровней электронами осуществляется в каждом атоме независимо от заполнения аналогичных уровней в других атомах. По мере сближения атомов между ними возникает все усиливающееся взаимодействие, которое приводит к изменению положения уровней. Вместо одного одинакового для всех N атомов уровня возникают N очень близких, но не совпадающих уровней. Таким образом, каждый уровень изолированного атома расщепляется в кристалле на N густо расположенных уровней, образующих полосу или зону.

Величина расщепления для разных уровней не одинакова. Уровни, заполненные в атоме более близкими к ядру (внутренними) электронами, возмущаются меньше, чем уровни, заполненные внешними электронами.

¹⁾ Может случиться, что одно и то же значение энергии будет соответствовать нескольким квантовым состояниям. Это явление называется вырождением, а число различных состояний с одинаковой энергией — кратностью вырождения g . В этом случае на каждом энергетическом уровне может находиться не более $2g$ электронов.

²⁾ Принципу Паули подчиняются не только электроны, но и все другие частицы с полуцелым спином [см. § 51, текст, следующий за формулой (51.4)].

На рис. 136 показано расщепление различных уровней как функция расстояния r между атомами. Отмеченные на рисунке значения r_1 и r_2 соответствуют расстояниям между атомами в двух различных кристаллах. Из схемы видно, что возникающее в кристалле расщепление уровней, занятых внутренними электронами, очень мало. Заметно расщепляются лишь уровни, занимаемые валентными электронами. Такому же расщеплению подвергаются и более высокие уровни, не занятые электронами в основном состоянии атома.

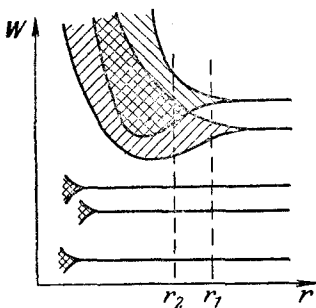


Рис. 136.

При достаточно малых расстояниях между атомами может произойти перекрывание зон, соответствующих двум соседним уровням атома (см. пунктирную прямую, отвечающую расстоянию r_2 между атомами). Число уровней в такой слившейся зоне равно сумме количеств уровней, на которые расщепляются оба уровня атома.

Взаимодействующие атомы представляют собой единую квантовую систему, в пределах которой действует принцип запрета Паули. Следовательно, $2N$ электронов, которые заполняли какой-то уровень в изолированных атомах, разместятся в кристалле попарно (с противоположными спинами) на N уровнях соответствующей полосы.

Нижние, образованные слабо расщепленными уровнями зоны заполняются электронами, каждый из которых не утрачивает и в кристалле прочной связи со своим атомом. Эти зоны и заполняющие их электроны в дальнейшем интересовать нас не будут.

Дозволенные значения энергии валентных электронов в кристалле объединяются в зоны, разделенные промежутками, в которых разрешенных значений энергии нет. Эти промежутки называются запрещенными зонами. Ширина разрешенных и запрещенных зон не зависит от размеров кристалла. Таким образом, чем больше атомов содержит кристалл, тем теснее располагаются

уровни в зоне. Ширина разрешенных зон имеет величину порядка нескольких электронвольт. Следовательно, если кристалл содержит 10^{23} атомов, расстояние между соседними уровнями в зоне составляет $\sim 10^{-23}$ эв.

При абсолютном нуле энергия кристалла должна быть минимальной. Поэтому валентные электроны заполняют попарно нижние уровни разрешенной зоны, возникшей из того уровня, на котором находятся валентные электроны в основном состоянии атома (мы будем называть ее валентной зоной). Более высокие разрешенные зоны будут от электронов свободны. В зависимости



Рис. 137.

от степени заполнения валентной зоны электронами и ширины запрещенной зоны возможны три случая, изображенные на рис. 137. В случае а) электроны заполняют валентную зону не полностью. Поэтому достаточно сообщить электронам, находящимся на верхних уровнях, совсем небольшую энергию ($\sim 10^{-23} \div 10^{-22}$ эв) для того, чтобы перевести их на более высокие уровни. Энергия теплового движения (kT) составляет при 1°K величину порядка 10^{-4} эв (при комнатной температуре $\sim 1/40$ эв). Следовательно, при температурах, отличных от 0°K , часть электронов переводится на более высокие уровни. Дополнительная энергия, вызванная действием на электрон электрического поля, также оказывается достаточной для перевода электрона на более высокие уровни. Поэтому электроны могут ускоряться электрическим полем и приобретать дополнительную скорость в направлении, противоположном направлению поля. Таким образом, кристалл с подобной схемой энергетических уровней будет представлять собою металл.

Частичное заполнение валентной зоны (в случае металла ее называют также зоной проводимости) может произойти, если на последнем занятом уровне в атоме находится только один электрон; или имеет место перекрывание зон (см. рис. 136, расстояние r_2). В первом случае N электронов проводимости заполняют попарно только половину уровней валентной зоны. Во втором случае число уровней в зоне проводимости будет больше N , так что, даже если количество электронов проводимости равно $2N$, они не смогут занять все уровни зоны.

В случаях б) и в) уровни валентной зоны полностью заняты электронами — зона заполнена. Для того чтобы увеличить энергию электрона, необходимо сообщить ему количество энергии, не меньшее, чем ширина запрещенной зоны ΔW . Электрическое поле (во всяком случае, такой напряженности, при которой не происходит электрический пробой кристалла) сообщить электрону такую энергию не в состоянии. При этих условиях электрические свойства кристалла определяются шириной запрещенной зоны ΔW . Если ΔW невелико (порядка нескольких десятых электронвольта), энергия теплового движения оказывается достаточной для того, чтобы перевести часть электронов в верхнюю свободную зону. Эти электроны будут находиться в условиях, аналогичных тем, в которых находятся валентные электроны в металле. Свободная зона окажется для них зоной проводимости. Одновременно станет возможным переход электронов валентной зоны на ее освободившиеся верхние уровни. Такое вещество называется электронным полупроводником.

Если ширина запрещенной зоны ΔW велика (порядка нескольких электронвольт), тепловое движение не сможет забросить в свободную зону заметное число электронов. В этом случае кристалл оказывается изолятором.

Таким образом, квантовая теория объясняет с единой точки зрения существование хороших проводников (металлов), полупроводников и изоляторов.

Рассмотрим распределение электронов по уровням зоны проводимости в металле. При абсолютном нуле на каждом из $N/2$ нижних уровней будет находиться по два электрона, остальные уровни будут свободны. Такое распределение показано на рис. 138 сплошной линией. По оси ординат отложено число электронов на данном уров-

не [смысл обозначения $2f(W)$ станет ясен в дальнейшем]. В качестве индекса для обозначения уровня использована его энергия W . Собственно, в соответствии с тем, что уровни энергии дискретны, распределение изображается слева от W_{\max} совокупностью точек с ординатой 2, а справа от W_{\max} — точками с ординатой 0. Но так как расстояния между уровнями очень малы, эти точки располагаются весьма густо и образуют сплошную линию.

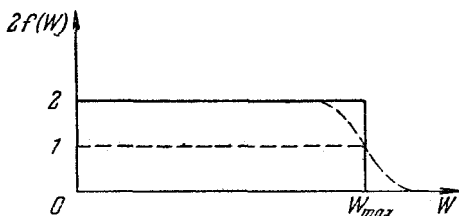


Рис. 138.

Для верхнего заполненного при абсолютном нуле уровня квантовая теория дает значение

$$W_{\max} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3},$$

где $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ дж·сек, m — масса электрона, n — число свободных электронов в единице объема. Принимая $n = 10^{29}$ м⁻³, получим

$$W_{\max} = \frac{1,05^2 \cdot 10^{-68}}{2 \cdot 0,91 \cdot 10^{-30}} (3 \cdot 3,14^2 \cdot 10^{29})^{2/3} \approx 1,25 \cdot 10^{-18} \text{ дж} \approx 8 \text{ эв.}$$

Если бы уровни зоны распределялись по оси энергии с постоянной плотностью (т. е. число уровней dz , приходящееся на интервал энергий dW , не зависело от W), среднее значение энергии электронов было бы равно половине максимального. В действительности, плотность уровней пропорциональна \sqrt{W} , т. е. $dz \sim \sqrt{W} dW$. Вычисления дают для средней энергии электронов при абсолютном нуле значение $\bar{W} = \frac{3}{5} W_{\max}$. Следовательно, даже при 0° К электроны проводимости в металле обладают огромной кинетической энергией, равной в среднем примерно 5 эв. Чтобы сообщить классическому электронному

газу такую энергию, его нужно нагреть до температуры порядка четырехсот тысяч градусов Кельвина. Столь же быстро движутся и валентные электроны в изоляторах. Однако они находятся в таких условиях, что электрическое поле не может изменить их состояние и вызвать преобладание движения в одном направлении.

Выясним, какова вероятность нахождения электронов на различных уровнях при температурах, отличных от 0°K . В классической физике распределение частиц по состояниям с различной энергией характеризуется функцией Больцмана:

$$f_B(W) = Ae^{-\frac{W}{kT}}, \quad (71.1)$$

где A — коэффициент пропорциональности [ср. т. I, формула (109.6)]. Эта функция определяет вероятность того, что частица будет находиться в состоянии с энергией W .

Распределение (71.1) было получено в предположении, что в каждом состоянии с данной энергией может находиться неограниченное количество частиц¹⁾. Функция распределения, учитывающая принцип запрета Паули, была найдена Ферми. Она имеет вид

$$f(W) = \frac{1}{e^{(W-W_F)/kT} + 1}. \quad (71.2)$$

Здесь W — энергия данного уровня, W_F — параметр системы, называемый уровнем Ферми.

Функция (71.2) дает вероятность заполнения электронами данного уровня. Легко убедиться в том, что сплошная кривая на рис. 138 с точностью до множителя 2 совпадает с графиком функции (71.2) для $T = 0$. В самом деле, в этом случае

$$f(W) = 1, \text{ если } W < W_F$$

и

$$f(W) = 0, \text{ если } W > W_F.$$

Таким образом, при 0°K уровень Ферми совпадает с верхним заполненным электронами уровнем W_{max} .

Для $W = W_F$ функция (71.2) при любой температуре имеет значение, равное $1/2$. Следовательно, уровень Фер-

¹⁾ При $T = 0$ функция (71.1) обращается в нуль при всех значениях энергии, кроме $W = 0$. Это означает, что все частицы должны находиться на нулевом уровне.

ми совпадает с тем энергетическим уровнем, вероятность заполнения которого равна половине (на таком уровне в среднем находится один электрон). Значение W_F можно найти из условия

$$\sum_k 2f(W_k) = N, \quad (71.3)$$

где N — полное число валентных электронов в кристалле. Каждое слагаемое представляет собой среднее число электронов на k -м уровне. Суммирование производится по всем уровням валентной зоны и остальных лежащих над ней зон.

Уровни в пределах разрешенных зон лежат очень густо. Поэтому сумму (71.3) можно заменить интегралом. Всем уровням, лежащим в пределах небольшого интервала энергий dW , можно приписать одинаковую занятость $2f(W)$. Если плотность уровней равна $g(W)$, число их в интервале dW составит $g(W)dW$. На долю этих уровней придется в среднем $dN_W = 2f(W)g(W)dW$ электронов. А полное число электронов на всех уровнях должно быть равно

$$\int_0^{\infty} dN_W = \int_0^{\infty} 2f(W)g(W)dW = \int_0^{\infty} \frac{2g(W)dW}{e^{(W-W_F)/kT} + 1} = N. \quad (71.4)$$

Зная вид $g(W)$, можно вычислить интеграл (71.4) (для интервалов энергий, соответствующих запрещенным зонам, $g(W)$ следует положить равной нулю). Получившееся выражение будет содержать W_F и T . Следовательно, для данного N можно найти W_F как функцию T . Выражение (71.4) представляет собой по существу условие нормировки функции $f(W)$ [см. т. I, § 106, текст, предшествующий формуле (106.7)].

Вычисления, проведенные для металлов, показывают, что W_F слабо зависит от температуры, так что значения уровня Ферми при не слишком высоких температурах (если $kT \ll W_{F0}$) мало отличаются от значения W_{F0} при абсолютном нуле.

При температурах, отличных от 0°K , распределение, описываемое функцией (71.2), имеет вид, показанный на рис. 138 пунктирной кривой. Ордината кривой характеризует среднюю по времени занятость уровня; поэтому, например, ордината, равная 0,25, означает, что

$\frac{1}{4}$ времени уровень занят одним электроном (или $\frac{1}{8}$ — двумя), а остальное время пустует.

В области больших энергий (т. е. при $W - W_F \gg kT$, что выполняется в области «хвоста» кривой распределения) единицей в знаменателе можно пренебречь. Тогда функция (71.2) принимает вид

$$f(W) \approx e^{-\frac{W-W_F}{kT}} = \text{const} \cdot e^{-\frac{W}{kT}}, \quad (71.5)$$

т. е. переходит в функцию (71.1) распределения Больцмана.

Распределение электронов по уровням можно сделать очень наглядным, изобразив, как это сделано на рис. 139, кривую распределения Ферми совместно со

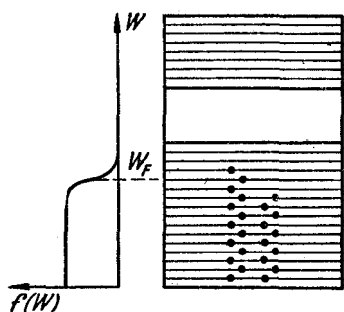


Рис. 139.

схемой энергетических зон.

Чем выше температура, тем более полого идет ниспадающий участок кривой. Однако заметное отличие распределения при температуре T от распределения при 0°K наблюдается лишь в области порядка kT . Следовательно, тепловое движение влияет на кинетическую энергию лишь небольшой части всех электронов.

Поэтому средняя энергия электронов слабо зависит от температуры. Этим объясняется тот факт, что электроны проводимости не вносят заметного вклада в теплоемкость металла. Таким образом, квантовая теория устраняет одно из основных затруднений, которого не могла преодолеть классическая теория.

Для зависимости электропроводности металла от температуры квантовая теория также дает хорошо согласующиеся с опытом результаты.

§ 72. Полупроводники

Полупроводники обязаны своим названием тому обстоятельству, что по величине электропроводности они занимают промежуточное положение между металлами и изоляторами. Однако характерным для них яв-

ляется не величина проводимости, а то, что их проводимость растет с повышением температуры (напомним, что у металлов она уменьшается). Полупроводниками являются вещества, у которых валентная зона полностью заполнена электронами (см. рис. 137, б), а ширина запрещенной зоны невелика (у собственных полупроводников не более 1 эв).

Различают собственную и примесную проводимости полупроводников.

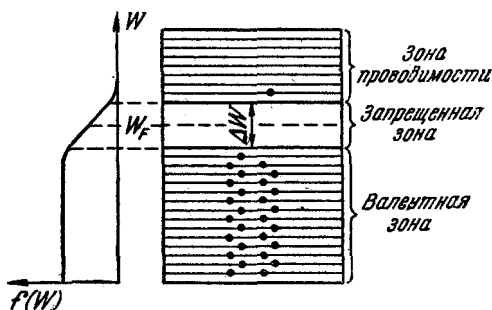


Рис. 140.

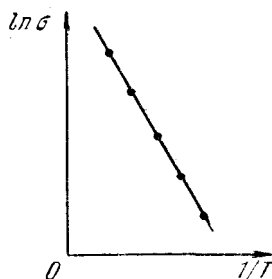
Собственная проводимость. Собственная проводимость возникает в результате перехода электронов с верхних уровней валентной зоны в зону проводимости. При этом в зоне проводимости появляется некоторое число носителей тока — электронов, занимающих уровни вблизи дна зоны; одновременно в валентной зоне освобождается такое же число мест на верхних уровнях. Такие свободные от электронов места на уровнях заполненной при абсолютном нуле валентной зоны называют дырками.

Распределение электронов по уровням валентной зоны и зоны проводимости определяется функцией Ферми (71.2). Вычисления по формуле (71.4) показывают, что уровень Ферми лежит точно посередине запрещенной зоны (рис. 140). Следовательно, для электронов, перешедших в зону проводимости, величина $W - W_F$ мало отличается от половины ширины запрещенной зоны. Уровни зоны проводимости лежат на хвосте кривой распределения. Поэтому вероятность их заполнения

электронами можно находить по формуле (71.5). Полагая в этой формуле $W = W_F = \Delta W/2$, получим

$$f(W) \approx e^{-\frac{\Delta W}{2kT}}. \quad (72.1)$$

Количество электронов, перешедших в зону проводимости, будет пропорционально вероятности (72.1). Эти электроны, а также, как мы увидим ниже, образовавшиеся в таком же числе дырки, являются носителями тока. Поскольку проводимость пропорциональна числу носителей, она также должна быть пропорциональна выражению (72.1). Следовательно, электропроводность полупроводников быстро растет с температурой, изменяясь по закону



$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta W}{2kT}}, \quad (72.2)$$

Рис. 141.

где ΔW — ширина запрещенной зоны.

Если на графике откладывать зависимость $\ln \sigma$ от $1/T$, то для полупроводников получается прямая линия, изображенная на рис. 141. По наклону этой прямой можно определить ширину запрещенной зоны ΔW .

Типичными полупроводниками являются элементы IV группы периодической системы Менделеева — германий и кремний. Они образуют решетку, в которой каждый атом связан ковалентными (парно-электронными) связями (см. т. I, § 139) с четырьмя равноотстоящими от него соседними атомами. Условно такое взаимное расположение атомов можно представить в виде плоской структуры, изображенной на рис. 142. Кружки со знаком «+» обозначают положительно заряженные атомные остатки (т. е. ту часть атома, которая остается после удаления валентных электронов), кружки со знаком «—» — валентные электроны, двойные линии — ковалентные связи.

При достаточно высокой температуре тепловое движение может разорвать отдельные пары, освободив один электрон (такой случай показан на рис. 142).

Покинутое электроном место перестает быть нейтральным, в его окрестности возникает избыточный положительный заряд $+e$ — образуется дырка. На это место может перескочить электрон одной из соседних пар. В результате дырка начинает также странствовать по кристаллу, как и освободившийся электрон.

Если свободный электрон встретится с дыркой, они рекомбинируют (соединяются). Это означает, что электрон нейтрализует избыточный положительный заряд, имеющийся в окрестности дырки, и теряет свободу передвижения до тех пор, пока снова не получит от кристаллической решетки энергию, достаточную для своего вы-

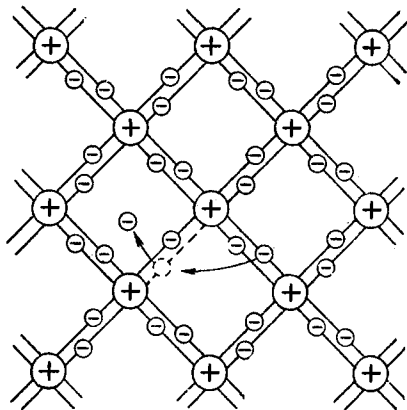


Рис. 142.

свобождения. Рекомбинация приводит к одновременному исчезновению свободного электрона и дырки. На схеме уровней (рис. 140) процессу рекомбинации соответствует переход электрона из зоны проводимости на один из свободных уровней валентной зоны.

Итак, в полупроводнике идут одновременно два процесса: рождение попарно свободных электронов и дырок и рекомбинация, приводящая к попарному исчезновению электронов и дырок. Вероятность первого процесса быстро растет с температурой. Вероятность рекомбинации пропорциональна как числу свободных электронов, так и числу дырок. Следовательно, каждой температуре соответствует определенная равновесная концентрация электронов и дырок, величина которой изменяется с температурой по такому же закону, как и σ [см. формулу (72.2)].

В отсутствие внешнего электрического поля электроны проводимости и дырки движутся хаотически. При включении поля на хаотическое движение накладывается упорядоченное движение: электронов против поля и дырок — в направлении поля. Оба движения —

и дырок, и электронов — приводят к переносу заряда вдоль кристалла. Следовательно, собственная электропроводность обуславливается как бы носителями заряда двух знаков — отрицательными электронами и положительными дырками.

Собственная проводимость наблюдается во всех без исключения полупроводниках при достаточно высокой температуре.

Примесная проводимость. Этот вид проводимости возникает, если некоторые атомы данного полупроводника заменить в узлах кристаллической решетки атомами, валентность которых отличается на единицу от валентности основных атомов. На рис. 143 условно изображена решетка германия с примесью 5-валентных атомов фосфора. Для образования ковалентных связей с соседями атому фосфора достаточно четырех электронов. Следова-

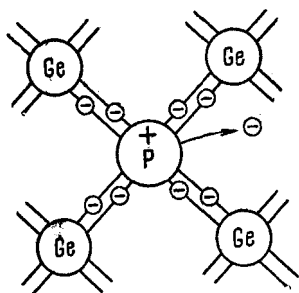


Рис. 143.

тельно, пятый валентный электрон оказывается как бы лишним и легко отщепляется от атома за счет энергии теплового движения, образуя странствующий свободный электрон. В отличие от рассмотренного раньше случая образование свободного электрона не сопровождается нарушением ковалентных связей, т. е. образованием дырки. Хотя в окрестности атома примеси возникает избыточный положительный заряд, но он связан с этим атомом и перемещаться по решетке не может. Благодаря этому заряду атом примеси может захватить приблизившийся к нему электрон, но связь захваченного электрона с атомом будет непрочной и легко нарушается вновь за счет тепловых колебаний решетки.

Таким образом, в полупроводнике с 5-валентной примесью имеется только один вид носителей тока — электроны. Соответственно говорят, что такой полупроводник обладает электронной проводимостью или является полупроводником *n*-типа (от слова *negativ* — отрицательный). Атомы примеси, поставляющие электроны проводимости, называются **д о н о р а м и**.

Таким образом, в полупроводнике с 5-валентной примесью имеется только один вид носителей тока — электроны. Соответственно говорят, что такой полупроводник обладает электронной проводимостью или является полупроводником *n*-типа (от слова *negativ* — отрицательный). Атомы примеси, поставляющие электроны проводимости, называются **д о н о р а м и**.

Примеси искажают поле решетки, что приводит к возникновению на энергетической схеме так называемых локальных уровней, расположенных в запрещенной зоне кристалла (рис. 144). Любой уровень валентной зоны или зоны проводимости может быть занят электроном, находящимся в любом месте кристалла.

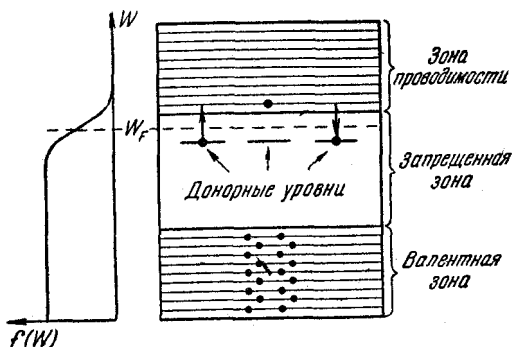


Рис. 144.

Энергию, соответствующую локальному уровню, электрон может иметь, лишь находясь вблизи атома примеси, вызвавшего появление этого уровня. Следовательно, электрон, занимающий примесный уровень, локализован вблизи атома примеси.

Если донорные уровни расположены недалеко от потолка валентной зоны¹⁾, они не могут существенно повлиять на электрические свойства кристалла. Иначе обстоит дело, когда расстояние таких уровней от дна зоны проводимости гораздо меньше, чем ширина запрещенной зоны. В этом случае энергия теплового движения даже при обычных температурах оказывается достаточной для того, чтобы перевести электрон с донорного уровня в зону проводимости. На рис. 143 этому процессу соответствует отщепление пятого валентного электрона от атома примеси. Захвату свободного электрона атомом примеси соответствует на рис. 144

¹⁾ Это значит, что пятый валентный электрон прочно связан со своим атомом,

переход электрона из зоны проводимости на один из донорных уровней.

Уровень Ферми в полупроводнике *n*-типа лежит между донорными уровнями и дном зоны проводимости, при невысоких температурах — приблизительно посередине между ними (рис. 144).

На рис. 145 условно изображена решетка кремния с примесью 3-валентных атомов бора. Трех валентных электронов атома бора недостаточно для образования

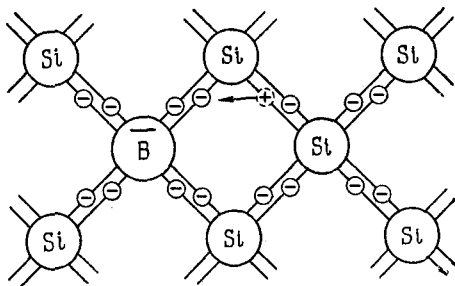


Рис. 145.

связей со всеми четырьмя соседями. Поэтому одна из связей окажется не укомплектованной и будет представлять собой место, способное захватить электрон. При переходе на это место электрона одной из соседних пар возникнет дырка, которая будет кочевать по кристаллу. Вблизи атома примеси возникнет избыточный отрицательный заряд, но он будет связан с данным атомом и не может стать носителем тока. Таким образом, в полупроводнике с 3-валентной примесью возникают носители тока только одного вида — дырки. Проводимость в этом случае называется дырочной, а о полупроводнике говорят, что он принадлежит к *p*-типу (от слова *positiv* — положительный). Примеси, вызывающие возникновение дырок, называются акцепторными.

На схеме уровней (рис. 146) акцептору соответствует расположенный в запретной зоне недалеко от ее дна локальный уровень. Образованию дырки отвечает переход электрона из валентной зоны на акцепторный уровень. Обратный переход соответствует разрыву одной из четырех ковалентных связей атома примеси с его соседями и

рекомбинации образовавшегося при этом электрона и дырки.

Уровень Ферми в полупроводнике p -типа лежит между потолком валентной зоны и акцепторными уровнями, при невысоких температурах — приблизительно посредине между ними.

С повышением температуры концентрация примесных носителей тока быстро достигает насыщения. Это означает, что практически освобождаются все донорные или

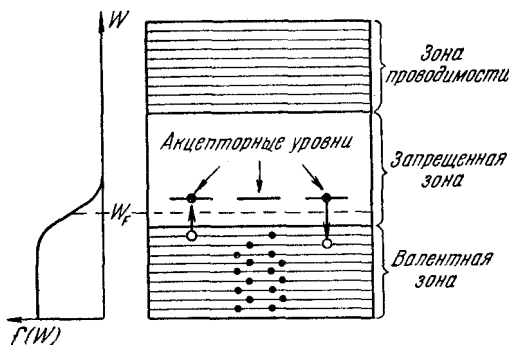


Рис. 146.

заполняются электронами все акцепторные уровни. Вместе с тем по мере роста температуры все в большей степени начинает сказываться собственная проводимость полупроводника, обусловленная переходом электронов непосредственно из валентной зоны в зону проводимости. Таким образом, при высоких температурах проводимость полупроводника будет складываться из примесной и собственной проводимости. При низких температурах преобладает примесная, а при высоких — собственная проводимость.

§ 73. Эффект Холла

Холл обнаружил в 1880 г. следующее явление: если металлическую пластинку, вдоль которой течет постоянный электрический ток, поместить в перпендикулярное к ней магнитное поле, то между параллельными току и полю гранями (рис. 147) возникает разность потенциалов

$U_H = \varphi_1 - \varphi_2$. Величина ее определяется выражением

$$U_H = RbjB, \quad (73.1)$$

где b — ширина пластинки, j — плотность тока, B — магнитная индукция поля, R — разный для различных металлов коэффициент пропорциональности, получивший

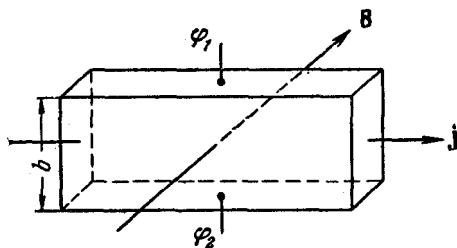


Рис. 147.

название постоянной Холла. Само явление называют эффектом Холла или гальваномагнитным явлением.

Эффект Холла очень просто объясняется электронной теорией. В отсутствие магнитного поля ток в пластинке

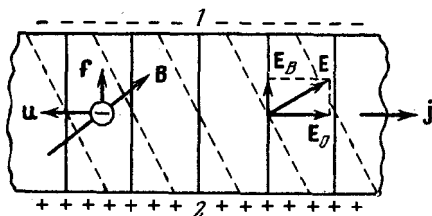


Рис. 148.

обуславливается электрическим полем E_0 (рис. 148). Эквипотенциальные поверхности этого поля образуют систему перпендикулярных к вектору E_0 плоскостей, изображенных на рисунке сплошными прямыми линиями. Потенциал во всех точках каждой поверхности, а следовательно, и в точках 1 и 2 одинаков. Носители тока — электроны — имеют отрицательный заряд, поэтому скорость их упорядоченного движения u направлена противоположно вектору плотности тока j .

При включении магнитного поля каждый носитель оказывается под действием силы Лоренца, направленной вдоль стороны b пластинки (рис. 147) и равной по модулю

$$f = euB. \quad (73.2)$$

В результате у электронов появляется составляющая движения в направлении к верхней (на рисунке) грани пластинки. У этой грани образуется избыток отрицательных, соответственно у нижней грани — избыток положительных зарядов. Следовательно, возникает дополнительное поперечное электрическое поле E_B . Когда напряженность этого поля достигает такой величины, что его действие на заряды будет уравнивать силу (73.2), установится стационарное распределение зарядов в поперечном направлении. Соответствующее значение E_B определяется из условия: $eE_B = euB$, откуда

$$E_B = uB. \quad (73.3)$$

Поле E_B складывается с полем E_0 в результирующее поле E . Эквипотенциальные поверхности перпендикулярны в каждой точке к вектору напряженности поля. Следовательно, они повернутся и займут положения, изображенные на рис. 148 пунктиром. Точки 1 и 2, которые прежде лежали на одной и той же эквипотенциальной поверхности, теперь будут иметь разные потенциалы. Чтобы найти напряжение, возникающее между этими точками, нужно умножить E_B на расстояние между ними b . Выражая, кроме того, в (73.3) u через j , n и e в соответствии с формулой $j = neu$ [см. (70.2)], получим

$$U_H = bE_B = \frac{1}{ne} bjB. \quad (73.4)$$

Последнее выражение совпадает с (73.1), если положить

$$R = \frac{1}{ne}. \quad (73.5)$$

Таким образом, измерив постоянную Холла, можно найти концентрацию носителей тока (т. е. их число в единице объема).

Важной характеристикой вещества является подвижность в нем носителей тока, под которой подразумевается

средняя скорость, приобретаемая носителем в поле, напряженность которого равна единице. Если в поле напряженности E носители приобретают скорость u , то подвижность их u_0 равна

$$u_0 = \frac{u}{E}. \quad (73.6)$$

В СИ скорость измеряется в метрах в секунду, напряженность электрического поля в вольтах на метр. Следовательно, единицей подвижности будет $1 \text{ м}^2 \cdot \text{в}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$.

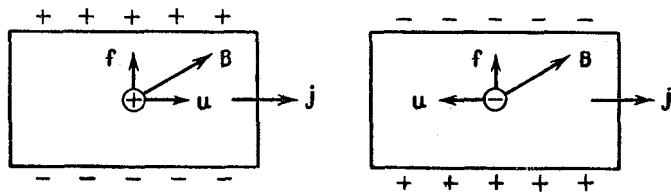


Рис. 149.

Подвижность можно связать с проводимостью σ и концентрацией носителей n . Для этого разделим соотношение $j = neu$ на напряженность поля E . Учтя, что отношение j к E дает σ , а u , деленное на E , есть подвижность, получим

$$\sigma = neu_0. \quad (73.7)$$

Определив постоянную Холла R и проводимость σ , можно по формулам (73.5) и (73.7) найти концентрацию и подвижность носителей тока в соответствующем образце.

Явление Холла наблюдается не только в металлах, но и в полупроводниках, причем по знаку эффекта можно судить о принадлежности полупроводника к n - или p -типу. На рис. 149 сопоставлен эффект Холла для образцов с положительными и отрицательными носителями. Направление силы Лоренца изменяется на противоположное как при изменении направления движения заряда, так и при изменении его знака. Следовательно, при одинаковом направлении тока сила Лоренца, действующая на положительные и отрицательные носители, имеет одинаковое направление. Поэтому в случае положительных

носителей потенциал верхней (на рисунке) грани выше, чем нижней, а в случае отрицательных носителей — ниже. Таким образом, определив знак холловской разности потенциалов, можно установить знак носителей тока.

Любопытно, что у некоторых металлов знак U_H соответствует положительным носителям тока. Это объясняется особым перекрыванием зон, при котором часть электронов переходит с верхних уровней валентной зоны на нижние уровни другой зоны. В результате возникают в равном количестве как свободные электроны, так и дырки. Проводимость такого металла имеет смешанный (электронно-дырочный) характер. Аномальный (для металлов) знак эффекта Холла обусловлен тем, что дырки обладают большей подвижностью, чем электроны.

§ 74. Работа выхода

Металлы не приобретают сами по себе положительного заряда. Значит, электроны проводимости не могут самопроизвольно покидать металл в заметном количестве. Это объясняется тем, что металл представляет для электронов потенциальную яму. Покинуть металл удастся только тем электронам, энергия которых оказывается достаточной для преодоления потенциального барьера, имеющегося на поверхности. Силы, обуславливающие этот барьер, имеют следующее происхождение. Случайное удаление электрона от наружного слоя положительных ионов решетки приводит к возникновению в том месте, которое покинул электрон, избыточного положительного заряда. Кулоновское взаимодействие с этим зарядом заставляет электрон, скорость которого не очень велика, вернуться обратно. Таким образом, отдельные электроны все время покидают поверхность металла, удаляясь от нее на несколько межатомных расстояний и затем поворачивают обратно. В результате металл оказывается окруженным тонким облаком электронов. Это облако образует совместно с наружным слоем ионов двойной электрический слой (рис. 150; кружки — ионы, черные точки — электроны). Силы, действующие на электрон в таком слое, направлены внутрь металла. Работа, совершаемая против этих сил при переводе электрона из металла наружу, идет на увеличение потенциальной энергии электрона W_p .

Таким образом, потенциальная энергия валентных электронов ¹⁾ внутри металла меньше, чем вне металла, на величину, равную глубине потенциальной ямы W_{p0} (рис. 151). Скачок потенциальной энергии происходит на длине порядка нескольких межатомных расстояний ($\sim 10^{-9}$ м), поэтому стенки ямы можно считать вертикальными.

Потенциальная энергия электрона связана с потенциалом точки, в которой находится электрон, соотноше-

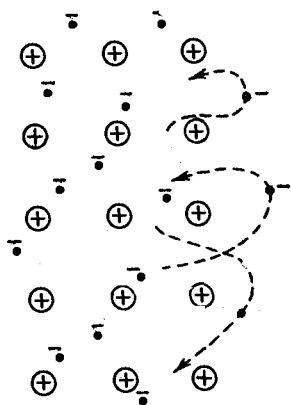


Рис. 150.

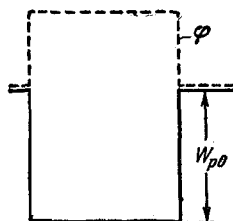


Рис. 151.

нием $W_p = -e\phi$ [см. формулу (10.5)]. Поскольку заряд электрона отрицателен, потенциал точки и потенциальная энергия электрона имеют разные знаки. Отсюда следует, что потенциал внутри металла больше, чем потенциал в непосредственной близости к его поверхности (мы будем для краткости говорить просто «на поверхности»), на величину W_{p0}/e .

Сообщение металлу избыточного положительного заряда увеличивает потенциал как на поверхности, так и внутри металла. Потенциальная энергия электрона соответственно уменьшается (рис. 152, а). На рис. 152, б даны кривые W_p и ϕ для случая, когда металл заряжен отрицательно ²⁾.

¹⁾ Потенциальная яма для электронов, заполняющих уровни нижних зон (т. е. прочно связанных со своими атомами), имеет большую глубину. Все рассуждения этого параграфа относятся к валентным электронам.

²⁾ В последнем случае высота потенциального барьера немного понижается (соответственно уменьшается работа выхода). Это явление называется эффектом Шоттки.

Полная энергия электронов в металле складывается из потенциальной и кинетической энергий. Как было выяснено в § 71, значения кинетической энергии электронов проводимости заключены при абсолютном нуле в пределах от 0 до совпадающей с уровнем Ферми W_{\max} . На

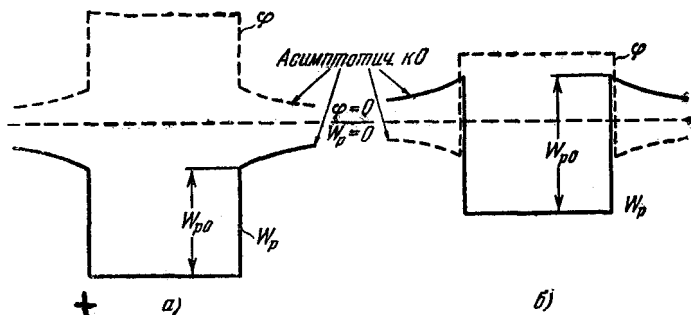


Рис. 152.

рис. 153 энергетические уровни зоны проводимости вписаны в потенциальную яму (пунктиром изображены незанятые при 0° K уровни). Для удаления за пределы металла разным электронам нужно сообщить неодинаковую энергию. Так, электрону, находящемуся на самом нижнем уровне зоны проводимости, необходимо сообщить энергию W_{p0} ; для электрона, находящегося на уровне Ферми, достаточна энергия $W_{p0} - W_{\max} = W_{p0} - W_F$.

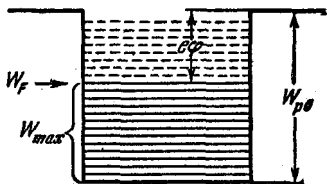


Рис. 153.

Наименьшая энергия, которую необходимо сообщить электрону для того, чтобы удалить его из твердого или жидкого тела в вакуум, называется работой выхода. Работу выхода принято обозначать через $e\phi$, где ϕ — величина, имеющая размерность потенциала и называемая потенциалом выхода.

В соответствии со сказанным выше работа выхода электрона из металла определяется выражением ¹⁾

$$e\phi = W_{p0} - W_F. \quad (74.1)$$

¹⁾ Величину (74.1) иногда называют эффективной работой выхода, а W_{p0} — полной работой выхода.

Мы пришли к этому выражению в предположении, что температура металла равна 0°К . При других температурах работу выхода также определяют как разность глубины потенциальной ямы и уровня Ферми, т. е. распространяют определение (74.1) на любые температуры. Это же определение применяется и для полупроводников.

Работа выхода электрона из металла немного зависит от температуры. Это вызвано тем, что, как отмечалось в § 71, изменяется с температурой уровень Ферми W_F . Кроме того, из-за обусловленного тепловым расширением изменения средних расстояний между атомами слегка изменяется глубина потенциальной ямы W_{po} .

Величина работы выхода очень чувствительна к состоянию поверхности металла, в частности к ее чистоте. Подобрав надлежащим образом покрытие поверхности, можно сильно снизить работу выхода. Так, например, нанесение на поверхность вольфрама слоя окисла щелочноземельного металла (Ca, Sr, Ba) снижает работу выхода с 4,5 эв (для чистого W) до 1,5—2 эв.

§ 75. Термоэлектронная эмиссия. Электронные лампы

Термоэлектронной эмиссией называется испускание электронов нагретыми твердыми или жидкими телами.

Нас в этом параграфе будут интересовать только металлы.

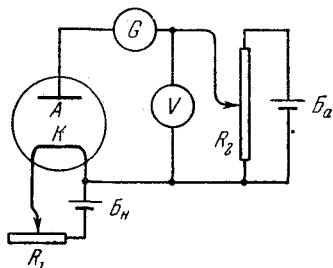


Рис. 154.

Явление термоэлектронной эмиссии объясняется тем, что вследствие распределения по энергиям имеется некоторое количество электронов, энергия которых достаточна для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер, имеющийся на границе металла. При

повышении температуры количество таких электронов резко возрастает и делается вполне заметным.

Исследование термоэлектронной эмиссии удобно производить с помощью схемы, изображенной на рис. 154.

Основным элементом схемы является двухэлектродная лампа, называемая также вакуумным диодом. Она представляет собой хорошо откачанный металлический или стеклянный баллон, внутри которого имеются два электрода — катод K и анод A . Конструктивно электроды могут быть выполнены разными способами. В простейшем случае катод имеет форму тонкой прямой нити, анод — коаксиального с ней цилиндра (рис. 155).

Катод нагревается током, создаваемым батареей накала B_n . Температуру накала можно менять, регулируя с помощью реостата R_1 силу тока накала. На электроды

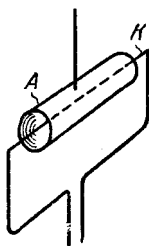


Рис. 155.

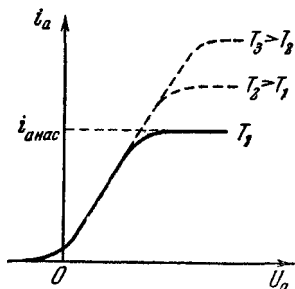


Рис. 156.

подается напряжение от анодной батареи B_a . Величину анодного напряжения U_a можно изменять с помощью потенциометра R_2 и измерять вольтметром V (U_a считается положительным, если потенциал анода выше потенциала катода). Гальванометр G предназначен для измерения силы анодного тока i_a .

Если установить постоянный накал катода и снять зависимость силы анодного тока i_a от анодного напряжения U_a , то получается кривая, изображенная на рис. 156 (различные кривые соответствуют разным температурам катода). Эта кривая называется вольт-амперной характеристикой.

При $U_a = 0$ вылетевшие из катода электроны образуют вокруг него отрицательный пространственный заряд — электронное облако. Это облако отталкивает вылетающие из катода электроны и большую часть их возвращает обратно. Все же небольшому числу электронов удается долететь до анода, в результате чего в анодной

цепи будет течь слабый ток. Чтобы полностью прекратить попадание на анод электронов, т. е. сделать i_a равным нулю, необходимо приложить между катодом и анодом некоторое отрицательное напряжение. Следовательно, вольт-амперная характеристика диода начинается не в нуле, а немного левее начала координат.

При малых положительных значениях U_a сила анодного тока изменяется пропорционально $U_a^{3/2}$. Теоретически эта зависимость была получена Ленгмюром и Богуславским и называется законом трех вторых.

По мере роста U_a все большее число электронов отсасывается электрическим полем к аноду и, наконец, при определенном значении U_a электронное облако полностью рассасывается и все вылетевшие из катода электроны получают возможность достигнуть анода. Дальнейший рост U_a не может увеличить силу анодного тока — ток достигает насыщения.

Очевидно, что именно ток насыщения характеризует термоэлектронную эмиссию. Если в единицу времени с единицы поверхности катода вылетает N электронов, то плотность тока насыщения (сила тока насыщения, отнесенная к единице поверхности катода) будет равна $j_{\text{нас}} = Ne$. Таким образом, измеряя плотность тока насыщения при различной силе тока накала, можно найти количество электронов, вылетающих с единицы поверхности при разных температурах.

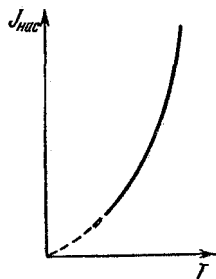


Рис. 157.

На рис. 156 изображены вольт-амперные характеристики для нескольких температур. При малых U_a они совпадают. Зависимость плотности тока насыщения от температуры показана на рис. 157. Квантовая теория приводит к следующей формуле:

$$j_{\text{нас}} = AT^2 e^{-\frac{e\phi}{kT}}, \quad (75.1)$$

где $e\phi$ — работа выхода, A — не зависящая от рода металла константа, теоретическое значение которой равно $1,20 \cdot 10^6 \text{ а/м}^2 \cdot \text{град}^2$ ($120 \text{ а/см}^2 \cdot \text{град}^2$). Экспериментальные значения A получаются примерно в два раза мень-

щими, чем теоретическое. Ход $j_{\text{нас}}$ с температурой формула передает вполне удовлетворительно.

Формула (75.1) называется формулой Ричардсона — Дэшмана или просто формулой Ричардсона ¹⁾.

Как следует из (75.1), уменьшение $e\phi$ резко повышает эмиссию (легко убедиться в том, что при 1160°K , т. е. при $kT = 0,10\text{ эв}$, уменьшение $e\phi$ от 3 до 1 эв приводит к возрастанию $j_{\text{нас}}$ почти в $5 \cdot 10^8$ раз). Поэтому при изготовлении электронных ламп применяются специальные покрытия и способы обработки катодов, приводящие к снижению работы выхода. Современные так называемые оксидные катоды, изготавливаемые из никеля, покрытого окисью бария или стронция, имеют работу выхода порядка 1,0—1,2 эв.

В предыдущем параграфе отмечалось, что внешнее поле уменьшает высоту потенциального барьера и тем самым снижает работу выхода (эффект Шоттки). Это приводит к тому, что и после достижения насыщения сила тока в диоде немного растет с увеличением U_a . Следовательно, соответствующий участок вольт-амперной характеристики не горизонтален (как изображено на рис. 156), а идет под небольшим углом к оси U_a .

Диод пропускает ток только в том случае, когда потенциал анода выше, чем катода. При отрицательном напряжении ток в анодной цепи отсутствует. Это свойство диода позволяет использовать его для выпрямления переменного тока. Диод, предназначенный для этой цели, называют также кенотроном. На рис. 158 показан график тока, текущего через кенотрон, если на него подается переменное напряжение, изменяющееся со временем по гармоническому закону. В этом случае ток в цепи течет лишь в течение половины периода, в связи с чем такой способ выпрямления тока называется однополупериодным. Используя одновременно два кенотрона

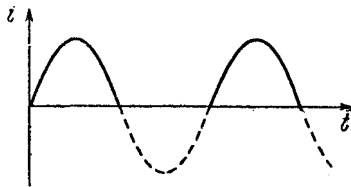


Рис. 158.

¹⁾ Ричардсон вывел классическую формулу для термоэлектронной эмиссии, которая отличается от (75.1) лишь тем, что вместо T^2 в нее входит \sqrt{T} . Формула (75.1) была получена Дэшменом.

или двойной диод, собранный в одном баллоне, можно осуществить двухполупериодное выпрямление. Соответствующая схема изображена на рис. 159. Первичная обмотка трансформатора питается переменным током. Вторичных обмоток две. Меньшая служит для накала катода. Большая обмотка имеет средний вывод, который через нагрузку R соединен с катодом. Концы обмотки идут к анодам. Одну половину периода под более высоким потенциалом, чем катод, находится один анод, вторую половину — другой. В результате через нагрузку течет ток, изображенный графически на рис. 160. Такой пульсирующий ток можно сгладить.

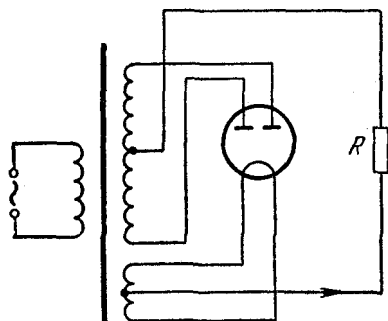


Рис. 159.

Если между катодом и анодом поместить третий электрод в виде сетки, получится трехэлектродная лампа — триод (рис. 161; цепь накала на схеме опущена). Сетка может быть выполнена, например, в виде спирали, обвивающей

каждый из электродов. Если сообщить сетке небольшой положительный потенциал по отношению к катоду (в этом случае напряжение U_c между сеткой и катодом мы будем считать положительным), электроны будут быстрее отсасываться от катода. Некоторые из них попадут на сетку (в результате чего возникнет небольшой сеточный ток i_c), но основная часть пролетит сквозь сет-

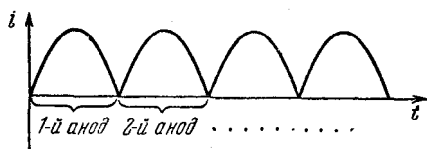


Рис. 160.

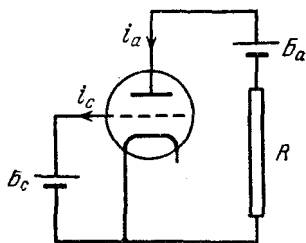


Рис. 161.

щейся вокруг катода. Если сообщить сетке небольшой положительный потенциал по отношению к катоду (в этом случае напряжение U_c между сеткой и катодом мы будем считать положительным), электроны будут быстрее отсасываться от катода. Некоторые из них попадут на сетку (в результате чего возникнет небольшой сеточный ток i_c), но основная часть пролетит сквозь сет-

ку и достигнет анода. Из-за близости сетки к катоду небольшие изменения напряжения между сеткой и катодом оказывают большое влияние на силу анодного тока.

Отрицательное сеточное напряжение U_c уменьшает анодный ток и при достаточно большом отрицательном напряжении U_c ток прекращается полностью — лампа оказывается запертой. Если построить зависимость анодного тока i_a от сеточного напряжения U_c при постоянном анодном напряжении U_a , получается кривая,

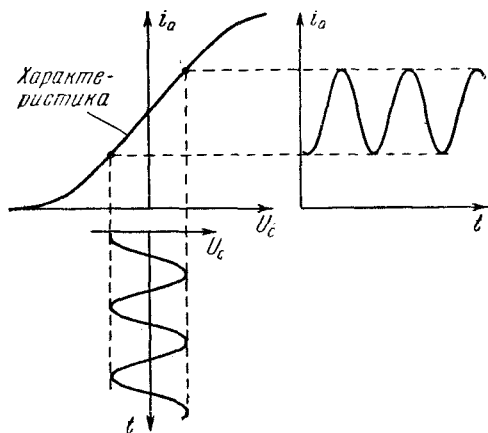


Рис. 162.

изображенная на рис. 162. Совокупность таких кривых, построенных для разных значений U_a , образует семейство сеточных характеристик триода. Величина

$$S = \frac{di_a}{dU_c} \quad (75.2)$$

называется крутизной характеристики.

Значительная часть характеристики прямолинейна. Подавая на сетку небольшое синусоидальное напряжение U_c , можно получить большие синусоидальные изменения анодного тока. При этом с сопротивления R может быть снято переменное напряжение с гораздо большей амплитудой, чем амплитуда U_c . На этом основано действие триода как усилителя. Кроме того, триод может быть использован для преобразования (изменения формы) и генерирования (возбуждения) переменных токов и напряжений.

Для улучшения характеристик электронной лампы в нее вводятся дополнительные электроды — сетки. Четырехэлектродная лампа называется тетродом, пятиэлектродная — пентодом и т. д. Широкое применение получили также лампы, в которых в одном баллоне совмещены две системы электродов. Каждая такая лампа выполняет функции двух ламп.

§ 76. Контактная разность потенциалов

Если привести два разных металла в соприкосновение, между ними возникнет разность потенциалов, которая называется контактной. При этом в окружающем металлы пространстве появляется электрическое поле. На рис. 163 изображены эквипотенциальные поверхности (сплошные линии) и линии напряженности (пунктирные) этого поля; поверхность каждого из металлов является эквипотенциальной.

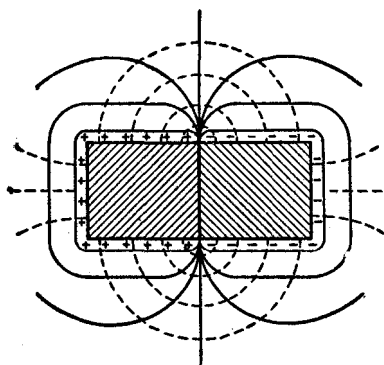


Рис. 163.

Контактная разность потенциалов вызывается тем, что при соприкосновении металлов часть электронов из одного металла переходит в другой. В верхней части рис. 164 изображены два металла — слева до приведения их в соприкосновение, справа — после. В нижней части рисунка дан график потенциальной энергии электрона. Уровень Ферми в первом металле лежит по предположению выше, чем во втором. Естественно, что при возникновении контакта между металлами электроны с самых высоких уровней в первом металле станут переходить на более низкие свободные уровни второго металла. В результате потенциал первого металла возрастет, а второго — уменьшится. Соответственно потенциальная энергия электрона в первом металле уменьшится, а во втором увеличится (напомним, что потенциал металла и потенциальная энергия электрона в нем имеют разные знаки; см. рис. 152).

В верхней части рис. 164 изображены два металла — слева до приведения их в соприкосновение, справа — после. В нижней части рисунка дан график потенциальной энергии электрона. Уровень Ферми в первом металле лежит по предположению выше, чем во втором. Естественно, что при возникновении контакта между металлами электроны с самых высоких уровней в первом металле станут переходить на более низкие свободные уровни второго металла. В результате потенциал первого металла возрастет, а второго — уменьшится. Соответственно потенциальная энергия электрона в первом металле уменьшится, а во втором увеличится (напомним, что потенциал металла и потенциальная энергия электрона в нем имеют разные знаки; см. рис. 152).

В статистической физике доказывается, что условием равновесия между соприкасающимися металлами (а также между полупроводниками или металлом и полупроводником) является равенство полных энергий, соответствующих уровням Ферми (рис. 164; в этом случае уровни Ферми располагаются на одинаковой высоте). При

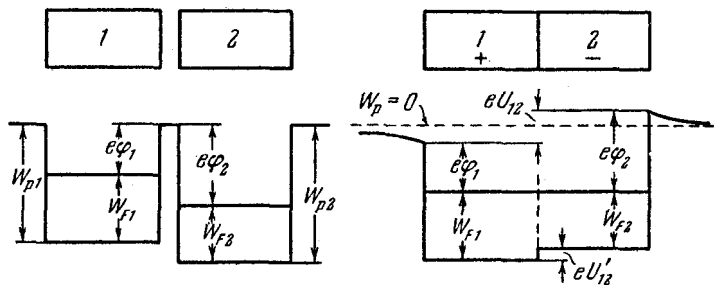


Рис. 164.

соблюдении такого условия потенциальная энергия электрона в непосредственной близости к поверхности первого металла будет на $(e\phi_2 - e\phi_1)$ меньше, чем вблизи второго металла. Следовательно, потенциал на поверхности первого металла будет на

$$U_{12} = \frac{e\phi_2 - e\phi_1}{e} = \phi_2 - \phi_1 \quad (76.1)$$

выше, чем на поверхности второго. Величина U_{12} и есть контактная разность потенциалов между первым и вторым металлами.

Как видно из формулы (76.1), контактная разность потенциалов между первым и вторым металлами равна разности работ выхода для второго и первого металлов, деленной на элементарный заряд, или просто разности потенциалов выхода для второго и первого металлов.

Разность потенциалов (76.1) устанавливается между точками, лежащими вне металлов в непосредственной близости к их поверхности. Поэтому ее называют внешней контактной разностью потенциалов. Чаще же говорят просто о контактной разности потенциалов, подразумевая под ней внешнюю. Между внутренними точками металлов также имеется разность

потенциалов, которая называется внутренней. Как видно из рис. 164, потенциальная энергия электрона в первом металле меньше, чем во втором, на $W_{F1} - W_{F2}$. Соответственно потенциал внутри первого металла выше, чем внутри второго на величину

$$U'_{12} = \frac{W_{F1} - W_{F2}}{e}. \quad (76.2)$$

Выражение (76.2) дает внутреннюю контактную разность потенциалов. На такую величину убывает потенциал при переходе из первого металла во второй.

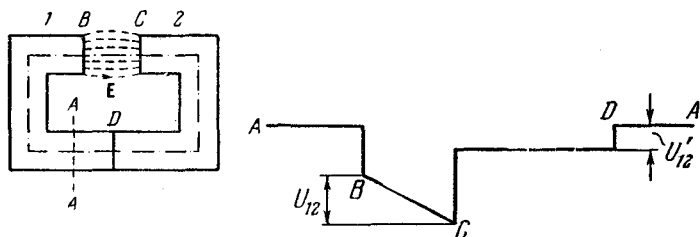


Рис. 165.

На рис. 165 изображены два соприкасающихся металла 1 и 2 и рядом — изменение потенциала вдоль контура, обозначенного штрихпунктирной линией. В зазоре $B - C$ возникает электрическое поле, линии напряженности которого показаны пунктиром.

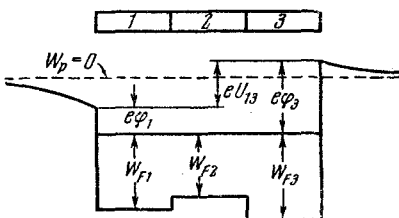


Рис. 166.

На рис. 166 дан ход потенциальной энергии электрона вдоль трех различных соприкасающихся друг с другом металлов 1, 2, 3. Из рисунка видно, что устанавливающаяся между металлами 1 и 3 разность потенциа-

лов оказывается в этом случае точно такой, как и при их непосредственном соприкосновении¹⁾. То же самое справедливо при любом числе промежуточных звеньев: раз-

¹⁾ Сами потенциалы при этом могут измениться. В частности, может случиться, что оба крайние металла будут иметь потенциал одного знака.

ность потенциалов между концами цепи определяется разностью работ выхода для металлов, образующих крайние звенья цепи.

Внешняя контактная разность потенциалов колеблется для различных пар металлов от нескольких десятых вольта до нескольких вольт.

Контактная разность потенциалов возникает и на границе между металлом и полупроводником, а также на границе между двумя полупроводниками.

В заключение отметим, что в замкнутой цепи, составленной из любого числа разнородных металлов или полупроводников (рис. 167), сумма скачков потенциала равна нулю. Следовательно, если все спаи поддерживать при одинаковой температуре, э. д. с. в цепи возникнуть не может. Возникновение тока в такой цепи противоречило бы второму началу термодинамики. Действительно, так как протекание тока в металлах и полупроводниках не сопровождается химическими изменениями, ток совершал бы работу за счет тепла, получаемого от окружающей среды. Никаких побочных процессов (например, передачи части полученного тепла другим телам) при этом не происходило бы. Таким образом был бы осуществлен перпетуум мобиле второго рода.

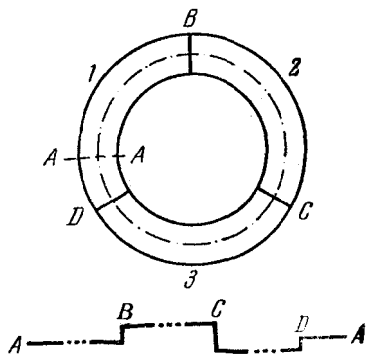


Рис. 167.

§ 77. Термоэлектрические явления

Между тепловыми и электрическими процессами в металлах (а также и в полупроводниках) существует определенная взаимосвязь, которая обуславливает ряд явлений, называемых термоэлектрическими: явление Зеебека, явление Пельтье и явление Томсона.

Явление Зеебека. Зеебек обнаружил в 1821 г., что если спаи 1 и 2 двух разнородных металлов, образующих замкнутую цепь (рис. 168), поддерживать при различных температурах, то в цепи течет ток. Изменение

знака у разности температур спаев сопровождается изменением направления тока.

Термоэлектродвижущая сила (сокращенно термо-э. д. с.) обусловлена двумя причинами. Как отмечалось в § 71, уровень Ферми зависит от температуры¹⁾. Поэтому скачок потенциала при переходе из одного металла в другой [внутренняя контактная разность потенциалов, см. формулу (76.2)] для спаев, находящихся при разных температурах, неодинаков и сумма скачков потенциала для всей цепи отлична от нуля. Одного этого было бы достаточно для возникновения действующей в указанном на рис. 168 стрел-

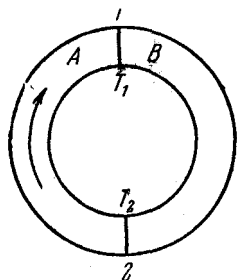


Рис. 168.

кой направления э. д. с., равной

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{конт}} &= U'_{AB}(T_1) + U'_{BA}(T_2) = \\ &= \frac{1}{e} \{ [W_{FA}(T_1) - W_{FB}(T_1)] + [W_{FB}(T_2) - W_{FA}(T_2)] \} = \\ &= \frac{1}{e} \{ [W_{FB}(T_2) - W_{FB}(T_1)] - [W_{FA}(T_2) - W_{FA}(T_1)] \}. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно представить следующим образом:

$$\mathcal{E}_{\text{конт}} = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{1}{e} \frac{dW_{FB}}{dT} \right) dT - \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{1}{e} \frac{dW_{FA}}{dT} \right) dT. \quad (77.1)$$

Чтобы понять вторую причину возникновения термо-э. д. с., рассмотрим однородный металлический проводник, вдоль которого имеется градиент температуры (рис. 169). В этом случае концентрация электронов с более высокой энергией (с $W > W_F$) у нагретого конца будет больше, чем у холодного; концентрация электронов с более низкой энергией (с $W < W_F$) будет, наобо-

¹⁾ Для металлов при невысоких температурах (когда $kT \ll W_{F0}$) эта зависимость имеет вид

$$W_F = W_{F0} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{W_{F0}} \right)^2 \right],$$

где W_{F0} — уровень Ферми при 0° К.

рот, у нагретого конца меньше. Вдоль проводника возникает градиент концентрации электронов с данным значением энергии, что повлечет за собой диффузию более быстрых электронов к холодному концу, а более медленных — к тепловому.

Диффузионный поток быстрых электронов будет больше, чем поток медленных электронов. Поэтому вблизи холодного конца образуется избыток электронов, а вблизи горячего — их недостаток. В результате внутри проводника возникнет электрическое поле, направленное навстречу градиенту температуры. Оно будет уменьшать поток быстрых и увеличивать поток медленных электронов. Когда оба потока выравняются в каждом сечении, наступит равновесное состояние. При этом на каждом участке проводника длиной dx будет происходить изменение потенциала $d\varphi$, соответствующее изменению температуры dT на том же участке. Введем обозначение

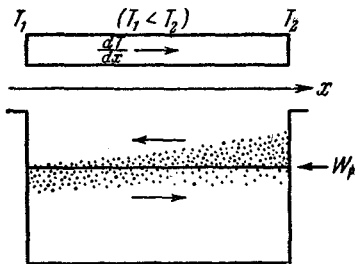


Рис. 169.

$$\beta = \frac{d\varphi}{dT}. \quad (77.2)$$

В общем случае потенциал вдоль проводника может изменяться по разным причинам. Под $d\varphi$ в (77.2) подразумевается только та часть изменения потенциала, которая вызвана градиентом температуры.

Между концами проводника, находящимися при температурах T_1 и T_2 , появляется разность потенциалов

$$\Delta\Phi_{\text{диффуз}} = \int_{T_1}^{T_2} \beta dT. \quad (77.3)$$

Величина β невелика — порядка 10^{-4} в/град. Поэтому обнаружить разность потенциалов (77.3) бывает трудно.

Описанный процесс возникновения разности потенциалов на концах неравномерно нагретого проводника имеет место и в полупроводниках. Если носителями тока являются электроны, потенциал нагретого конца, как мы

видели, оказывается выше, чем потенциал холодного. Значит, у полупроводников n -типа $d\phi$ и dT имеют одинаковые знаки и, следовательно, $\beta > 0$. В случае дырочной проводимости дырки, диффундируя в большем числе к холодному концу, создают вблизи него избыточный положительный заряд. Таким образом, у полупроводника p -типа потенциал холодного конца будет выше, чем потенциал нагретого, и $\beta < 0$ ¹⁾.

Вернемся снова к рис. 168. За счет неодинаковости β для участков A и B возникнет в направлении, указанном стрелкой, э. д. с., равная

$$\mathcal{E}_{\text{диффуз}} = \int_{T_1}^{T_2} \beta_A dT + \int_{T_2}^{T_1} \beta_B dT = \int_{T_1}^{T_2} \beta_A dT - \int_{T_1}^{T_2} \beta_B dT \quad (77.4)$$

(при определении пределов интегрирования надо иметь в виду, что э. д. с. действует в направлении убывания потенциала).

Термоэлектродвижущая сила $\mathcal{E}_{\text{термо}}$ складывается из суммы скачков потенциала (77.1) в контактах (спаях) и суммы изменений потенциала (77.4), вызванных диффузией носителей тока. Таким образом,

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \mathcal{E}_{\text{конт}} + \mathcal{E}_{\text{диффуз}}.$$

Подставив сюда выражения (77.1) и (77.4) и производя несложные преобразования, находим

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \int_{T_1}^{T_2} \left(\beta_A - \frac{1}{e} \frac{dW_{FA}}{dT} \right) dT - \int_{T_1}^{T_2} \left(\beta_B - \frac{1}{e} \frac{dW_{FB}}{dT} \right) dT.$$

Величина

$$\alpha = \beta - \frac{1}{e} \frac{dW_F}{dT} \quad (77.5)$$

является характеристикой металла или полупроводника и называется коэффициентом термо-э. д. с.

¹⁾ Такой же знак β имеют металлы, у которых знак холловской разности потенциалов соответствует положительным носителям (см. последний абзац § 73).

Воспользовавшись обозначением (77.5) выражение для термо-э. д. с. можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_A dT - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_B dT. \quad (77.6)$$

Если α_A и α_B в пределах интервала $T_1 \div T_2$ мало изменяются с температурой, можно написать

$$\mathcal{E}_{\text{термо}} = \alpha_{AB} (T_1 - T_2), \quad (77.7)$$

где через α_{AB} обозначена разность $\alpha_A - \alpha_B$. Величину α_{AB} называют удельной термо-э. д. с. данной пары металлов или полупроводников. Для большинства пар металлов α_{AB} имеет порядок $10^{-5} \div 10^{-4}$ в/град; для полупроводников она может оказаться гораздо больше (до $1,5 \cdot 10^{-3}$ в/град). Это объясняется тем, что у полупроводников с разным типом проводимости α имеет разные знаки¹⁾, вследствие чего $|\alpha_{AB}| = |\alpha_A| + |\alpha_B|$.

В отдельных случаях удельная термо-э. д. с. слабо зависит от температуры. Однако, как правило, с увеличением разности температур спаев $\mathcal{E}_{\text{термо}}$ изменяется не по линейному закону, а довольно сложным образом, вплоть до того, что может менять знак. Так, например, если один спай пары железо — медь поддерживать при 0°C , то при температуре второго спае, равной примерно 540°C , термо-э. д. с. обращается в нуль; при более низкой температуре спае $\mathcal{E}_{\text{термо}}$ имеет один знак, при более высокой — другой.

Явление Зеебека используется для измерения температур. Соответствующее устройство называется термопарой. Один спай термопары поддерживают при постоянной температуре (например, при 0°C), другой помещают в тот объем, температуру которого хотят измерить. О величине температуры можно судить по силе возникающего термо-тока, измеряемой гальванометром. Более точный результат получается, если измерять возникающую термо-э. д. с. по методу компенсации.

¹⁾ При повышении температуры уровни Ферми примесных полупроводников смещаются по направлению к середине запрещенной зоны, т. е. для полупроводников разных типов в противоположные стороны. Величина (77.2) для полупроводников с разным типом проводимости также имеет разные знаки.

С помощью термопар можно измерять с точностью порядка сотых долей градуса как низкие, так и высокие температуры.

В качестве источников тока термопары из металлов и их сплавов не используются вследствие весьма низкого к. п. д. (не более 0,5%). Термопары из полупроводниковых материалов обладают гораздо большим к. п. д. (до 7%). Они уже нашли применение в качестве небольших генераторов тока для бытовых целей. Энергии такого генератора, надеваемого в виде абажура на стекло керосиновой лампы, хватает для питания радиоприемника.

Явление Пельтье. Это явление, открытое Пельтье в 1834 г., заключается в том, что при протекании тока через цепь, составленную из разнородных металлов или полупроводников, в одних спаях происходит выделение, а в других — поглощение тепла. Таким образом, явление Пельтье оказывается обратным явлению Зеебека. Количество выделившегося тепла определяется выражением

$$Q_{AB} = P_{AB} \cdot q = P_{AB} it, \quad (77.8)$$

где q — заряд, прошедший через спай, P_{AB} — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом Пельтье (ток течет от звена A к звену B).

В отличие от тепла Джоуля-Ленца тепло Пельтье пропорционально не квадрату, а первой степени силы тока. При перемене направления тока Q изменяет знак, т. е. вместо выделения тепла наблюдается поглощение такого же количества тепла (при том же q). Следовательно,

$$P_{AB} = - P_{BA}.$$

Между коэффициентом Пельтье и коэффициентом термо-э. д. с. имеется вытекающее из законов термодинамики соотношение

$$P_{AB} = \alpha_{AB} T. \quad (77.9)$$

Явление Пельтье имеет следующее объяснение. Носители тока (электроны или дырки) по разные стороны от спая имеют различную среднюю энергию (имеется в виду полная энергия — кинетическая плюс потенциальная). Если носители, пройдя через спай, попадают в область с меньшей энергией, они отдают избыток энер-

гии кристаллической решетке, в результате чего спай нагревается. На другом спае носители переходят в область с большей энергией; недостающую энергию они заимствуют у решетки, что приводит к охлаждению спая.

Иначе обстоит дело в контакте двух полупроводников с различными типами проводимости. В этом случае на одном спае электроны и дырки движутся навстречу друг другу. Встретившись, они рекомбинируют: электрон, находившийся в зоне проводимости n -полупроводника, попав в p -полупроводник, занимает в валентной зоне место дырки. При этом высвобождается энергия, которая требуется для образования свободного электрона в n -полупроводнике и дырки в p -полупроводнике, а также кинетическая энергия электрона и дырки. Эта энергия сообщается кристаллической решетке и идет на нагревание спая. На другом спае протекающий ток отсасывает электроны и дырки от границы между полупроводниками. Убыль носителей тока в пограничной области восполняется за счет попарного рождения электронов и дырок (при этом электрон из валентной зоны p -полупроводника переходит в зону проводимости n -полупроводника). На образование пары затрачивается энергия, которая заимствуется у решетки — спай охлаждается.

А. Ф. Иоффе выдвинул идею использования явления Пельтье для создания холодильных установок. Созданы опытные образцы небольших бытовых холодильников, рабочим элементом которых является батарея из чередующихся полупроводников n - и p -типа. Спаи одного вида (соответствующие, например, переходу от n к p) введены в охлаждаемую область, другого вида (соответствующие переходу от p к n) выведены наружу. При надлежащем направлении тока внутренние спаи поглощают тепло, понижая температуру окружающего их пространства, наружные спаи отдают тепло внешней среде.

Заманчиво также применить явление Пельтье для электрического обогрева помещений. В этом случае спай, поглощающий тепло, следует вывести наружу, а спай, выделяющий тепло, поместить внутри обогреваемого помещения. Пропуская ток в соответствующем направлении, можно, как показывают расчеты, получить выделение на внутреннем спае количества тепла, почти в два раза превышающего затраты энергии на создание тока

(остальная энергия черпается из внешней среды). Такая система обогрева имеет еще и то преимущество, что в случае необходимости (например, в жаркую погоду) ее можно без переделок использовать для понижения температуры помещения — для этого нужно лишь изменить направление тока на обратное.

Явление Томсона. На основании термодинамических соображений Томсон предсказал в 1856 г., что тепло, аналогичное теплу Пельтье, должно выделяться (или поглощаться) при прохождении тока по однородному проводнику, вдоль которого имеется градиент температуры. Этот эффект был впоследствии обнаружен экспериментально и получил название явления Томсона.

Удельная мощность, выделяющаяся в проводнике вследствие явления Томсона, равна

$$\omega = \tau \frac{dT}{dx} j, \quad (77.10)$$

где $\frac{dT}{dx}$ — градиент температуры в данном месте, j — плотность тока, τ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом Томсона. Этот коэффициент связан с коэффициентом термо-э. д. с. и коэффициентом Пельтье определенными соотношениями, вытекающими из термодинамики.

Явление Томсона объясняется по аналогии с явлением Пельтье. Пусть ток течет в направлении возрастания температуры. Если носители тока — электроны, они при своем движении будут переходить из мест с более высокой температурой (и, следовательно, большей средней энергией электронов) в места с более низкой температурой (и меньшей средней энергией). Избыток своей энергии электроны отдадут решетке, что приведет к выделению тепла. Если носителями тока служат дырки, эффект, как легко видеть, будет иметь обратный знак.

§ 78. Полупроводниковые диоды и триоды

Выпрямление токов и усиление напряжений можно осуществить с помощью полупроводниковых устройств, называемых полупроводниковыми (или кристаллическими) диодами и триодами. Полупроводниковые триоды называют также транзисторами.

Полупроводниковые устройства можно подразделить на две группы: устройства с точечными контактами и устройства с плоскостными контактами. Мы ограничимся рассмотрением плоскостных диодов и транзисторов.

Основным элементом плоскостных устройств является так называемый $p-n$ -переход. Он представляет собой тонкий слой на границе между двумя областями одного и того же кристалла, отличающимися типом примесной проводимости. Для изготовления такого перехода берут, например, монокристалл из очень чистого германия с электронным механизмом проводимости (обусловленным ничтожными остатками примесей). В вырезанную из кристалла тонкую пластинку вплавляют с одной стороны кусочек индия. Во время этой операции, которая осуществляется в вакууме или в атмосфере инертного газа, атомы индия диффундируют в германий на некоторую глубину. В той области, в которую проникают атомы индия, проводимость германия становится дырочной. На границе этой области возникает $p-n$ -переход.

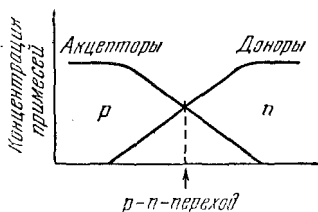
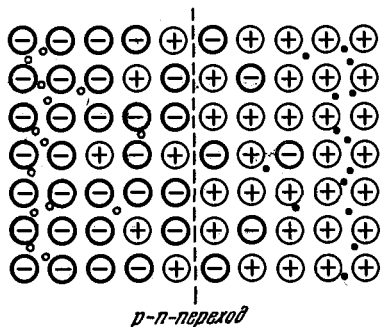


Рис. 170.

На рис. 170 показан ход концентрации примесей в направлении, перпендикулярном к граничному слою. В p -области основными носителями тока являются дырки, образовавшиеся в результате захвата электронов атомами примеси (акцепторы при этом становятся отрицательными ионами); кроме того, в этой области имеется небольшое число неосновных носителей — электронов, возникающих вследствие перевода тепловым движением электронов из валентной зоны непосредственно в зону проводимости (этот процесс немного увеличивает и число дырок). В n -области основные носители тока — электроны, отданные донорами в зону проводимости (доноры при этом превращаются в положительные ионы); происходящий за счет теплового движения переход электронов из валентной зоны в зону проводимости приводит к образованию небольшого числа дырок — неосновных носителей для этой области.

Диффундируя во встречных направлениях через пограничный слой, дырки и электроны рекомбинируют друг с другом. Поэтому $p-n$ -переход оказывается сильно обедненным носителями тока и приобретает большое сопротивление. Одновременно на границе между обла-



p-n-переход

Рис. 171.

стями возникает двойной электрический слой, образованный отрицательными ионами акцепторной примеси, заряд которых теперь не компенсируется дырками, и положительными ионами донорной примеси, заряд которых теперь не компенсируется электронами (рис. 171; кружки — ионы, черные точки — электроны, белые точки — дырки). Электрическое поле в этом слое направлено

так, что противодействует дальнейшему переходу через слой основных носителей. Равновесие достигается при такой высоте потенциального барьера, при которой

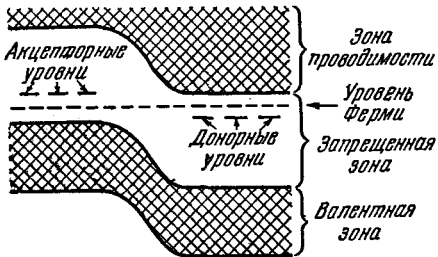


Рис. 172.

уровни Ферми обеих областей располагаются на одинаковой высоте (рис. 172). Изгибание энергетических зон в области перехода вызвано тем, что потенциал p -области в состоянии равновесия ниже, чем потенциал n -области; соответственно потенциальная энергия электрона в p -области больше, чем в n -области. Нижняя граница

валентной зоны дает ход потенциальной энергии электрона $W_{pэ}$ в направлении, перпендикулярном к переходу (см. сплошную кривую на рис. 173, а). Поскольку заряд дырок противоположен заряду электронов, их потенциальная энергия $W_{pд}$ больше там, где меньше $W_{pэ}$, и наоборот (см. пунктирную кривую на рис. 173, а).

Равновесие между p - и n -областями является подвижным. Некоторому количеству основных носителей удастся преодолеть потенциальный барьер, вследствие чего через переход течет небольшой ток $i_{осн}$ (рис. 173, а).

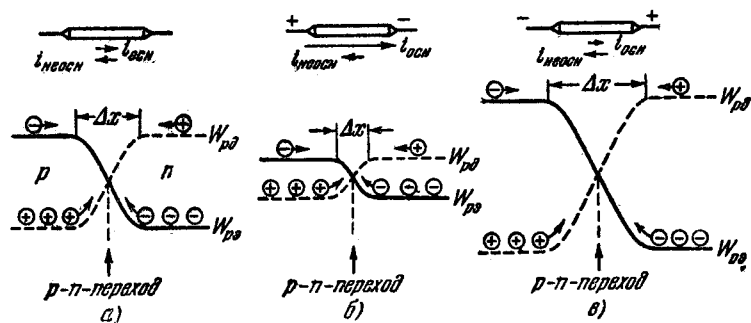


Рис. 173.

Этот ток компенсируется обусловленным неосновными носителями встречным током $i_{неосн}$. Неосновных носителей очень мало, но они легко проникают через границу областей, «скатываясь» с потенциального барьера. Величина $i_{неосн}$ определяется числом рождающихся ежесекундно неосновных носителей и от высоты потенциального барьера почти не зависит. Величина $i_{осн}$, напротив, сильно зависит от высоты барьера. Равновесие устанавливается как раз при такой высоте потенциального барьера, при которой оба тока $i_{осн}$ и $i_{неосн}$ компенсируют друг друга.

Подадим на кристалл внешнее напряжение такого направления, чтобы «+» был подключен к p -области, а «—» был подключен к n -области¹⁾ (такое напряжение

¹⁾ Включение внешнего напряжения нарушает равновесие, так что уровни Ферми обеих областей смещаются друг относительно друга. При прямом напряжении W_F в p -области располагается ниже, чем в n -области.

называется прямым). Это приведет к возрастанию потенциала (т. е. увеличению $W_{pд}$ и уменьшению $W_{pэ}$) p -области и понижению потенциала (т. е. уменьшению $W_{pд}$ и увеличению $W_{pэ}$) n -области (рис. 173, б). В результате высота потенциального барьера уменьшится и ток $i_{осн}$ возрастет. Ток же $i_{неосн}$ останется практически без изменений (он, как отмечалось, от высоты барьера почти не зависит). Следовательно, результирующий ток станет отличен от нуля. Понижение потенциального барьера пропорционально приложенному напряжению (оно равно eU). При уменьшении высоты барьера ток основных носителей, а следовательно и результирующий ток, быстро нарастает. Таким образом, в направлении от p -области к n -области $p-n$ -переход пропускает ток, сила которого быстро нарастает при увеличении приложенного напряжения. Это направление называется прямым (или пропускным, или проходным).

Возникающее в кристалле при прямом напряжении электрическое поле «поджимает» основные носители к границе между областями, вследствие чего ширина переходного слоя, обедненного носителями, сокращается¹⁾. Соответственно уменьшается и сопротивление перехода, причем тем сильнее, чем больше напряжение. Таким образом, вольт-амперная характеристика в пропускной области не является прямой (рис. 174).

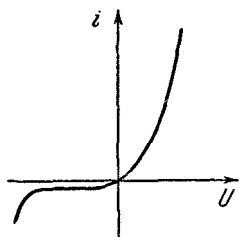


Рис. 174.

Теперь приложим к кристаллу напряжение такого направления чтобы «+» был подключен к n -области, а «—» был подключен к p -области (такое напряжение называется обратным). Обратное напряжение приводит к повышению потенциального барьера и соответствующему уменьшению тока основных носителей $i_{осн}$ (рис. 173, в). Возникающий при этом результирующий ток (называемый обратным) довольно быстро достигает насыщения (т. е. перестает зависеть от U , рис. 174) и становится равным $i_{неосн}$. Таким образом, в направлении

¹⁾ Уменьшение ширины переходного слоя можно объяснить тем, что при заданном $d\phi/dx$ меньшее изменение потенциала $\Delta\phi$ осуществляется на меньшей длине Δx .

от n -области к p -области (которое называется обратным или запиорным) $p-n$ -переход пропускает слабый ток, целиком обусловленный неосновными носителями. Лишь при очень большом обратном напряжении сила тока начинает резко возрастать, что обусловлено электрическим пробоем перехода. Каждый $p-n$ -переход характеризуется своим предельным значением обратного напряжения, которое он способен выдержать без разрушения.

Поле, возникающее в кристалле при наложении обратного напряжения, «оттягивает» основные носители от границы между областями, что приводит к возрастанию ширины переходного слоя, обедненного носителями. Соответственно увеличивается и сопротивление перехода. Следовательно, $p-n$ -переход обладает в обратном направлении гораздо большим сопротивлением, чем в прямом.

Из сказанного вытекает, что $p-n$ -переход может быть использован для выпрямления переменного тока. На рис. 175 показан график тока, текущего через переход, в том случае, если приложенное напряжение изменяется по гармоническому закону. В этом случае ширина слоя, обедненного носителями, и сопротивление перехода пульсируют, изменяясь в такт с изменениями напряжения.

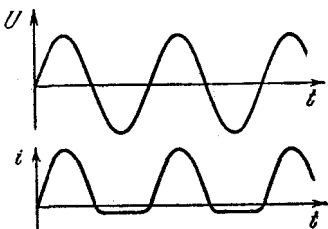


Рис. 175.

Германиевые выпрямители могут выдерживать обратное напряжение до 1000 в. При напряжении в 1 в плотность тока в прямом направлении достигает 100 а/см^2 , в обратном — не больше нескольких микроампер. Еще более высокое обратное напряжение допускают кремниевые выпрямители. Они также выдерживают более высокую рабочую температуру (до 180°С вместо примерно 100°С для германия). Гораздо худшими параметрами обладают широко распространенные селеновые выпрямители. Допустимое обратное напряжение составляет для них не более 50 в, наибольшая плотность прямого тока до 50 ма/см^2 . Соединяя последовательно N выпрямительных элементов (селеновых шайб), можно получить выпрямитель, выдерживающий N -кратное обратное напряжение.

Полупроводниковый триод, или транзистор, представляет собой кристалл с двумя $p-n$ -переходами. В зависимости от порядка, в котором чередуются области с разными типами проводимости, различают $p-n-p$ - и $n-p-n$ -транзисторы¹⁾. Средняя часть транзистора

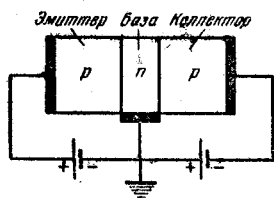


Рис. 176.

(обладающая в зависимости от типа транзистора n - или p -проводимостью) называется его базой. Прилегающие к базе с обеих сторон области с иным, чем у нее, типом проводимости образуют эмиттер и коллектор.

Рассмотрим кратко принцип работы транзистора типа $p-n-p$ (рис. 176). Для его из-

готовления берут пластинку из очень чистого германия с электронной проводимостью и с обеих сторон вплавляют в нее индий. Концентрация носителей в эмиттере и коллекторе, т. е. в дырочной области, должна быть больше, чем концентрация носителей в пределах базы, т. е. в электронной области. На рис. 177, а даны кривые потенциальной энергии — электронов (сплошная линия) и дырок (пунктирная линия).

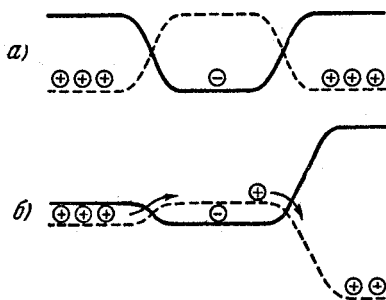


Рис. 177.

На переход эмиттер — база подается напряжение в проходном направлении (рис. 176), а на переход база — коллектор подается большее напряжение в запиорном направлении. Это приводит к понижению потенциального барьера на первом переходе и повышению барьера на втором (рис. 177, б). Протекание тока в цепи эмиттера сопровождается проникновением дырок в область базы (встречный поток электронов мал вследствие того, что их концентрация невелика). Проникнув в базу, дырки диффундируют по направле-

¹⁾ Бывают и более сложные транзисторы, например типа $p-n-p-n$ и др.

нию к коллектору. Если толщина базы небольшая, почти все дырки, не успев рекомбинировать, будут достигать коллектора. В нем они подхватываются полем и увеличивают ток, текущий в запиорном направлении в цепи коллектора.

Всякое изменение тока в цепи эмиттера приводит к изменению количества дырок, проникающих в коллектор, и, следовательно, к почти такому же изменению тока в цепи коллектора. Очевидно, что изменение тока в цепи коллектора не превосходит изменения тока в цепи эмиттера¹⁾, так что, казалось бы, описанное устройство бесполезно. Однако надо учесть, что переход имеет в запиорном направлении гораздо большее сопротивление, чем в проходном. Поэтому при одинаковых изменениях токов изменения напряжения в цепи коллектора будут во много раз больше, чем в цепи эмиттера. Следовательно, транзистор усиливает напряжения и мощности. Снимаемая с прибора повышенная мощность появляется за счет источника тока, включенного в цепь коллектора.

Германиевые транзисторы дают усиление (по напряжению и по мощности), достигающее 10 000.

¹⁾ В транзисторе типа $p-n-p-n$ удается получить и усиление по току.

ТОК В ЭЛЕКТРОЛИТАХ

§ 79. Диссоциация молекул в растворах

Прохождение тока через металлы и электронные полупроводники не сопровождается какими-либо химическими превращениями. Такие вещества называются проводниками первого рода. Вещества, в которых при прохождении тока происходят химические превращения, называются проводниками второго рода или электролитами. К их числу принадлежат растворы солей, щелочей или кислот в воде и некоторых других жидкостях, а также расплавы солей, являющихся в твердом состоянии ионными кристаллами.

Носителями тока в электролитах служат ионы, на которые диссоциируют (расщепляются) в растворе молекулы растворенного вещества. Чтобы выяснить, каким образом происходит диссоциация, рассмотрим полярную молекулу, например NaCl . При объединении атомов Na и Cl в молекулу происходит перераспределение электронов — валентный электрон Na оказывается как бы включенным в оболочку атома Cl , для полной застройки которой не хватает как раз одного электрона. В результате атом Na превращается в положительный ион, атом Cl — в отрицательный. Оба иона удерживаются в молекуле силами электростатического (кулоновского) взаимодействия. Аналогично любая другая полярная молекула состоит из двух или большего числа ионов.

В растворе каждая молекула растворенного вещества находится в окружении молекул растворителя. Если молекулы растворителя являются также полярными, они будут испытывать вблизи молекулы растворенного ве-

щества ориентирующее действие создаваемого ею электрического поля. Поэтому молекулы растворителя повернутся к положительно заряженной части молекулы растворенного вещества своими отрицательными «концами», а к отрицательно заряженной части — положительными «концами» (рис. 178; сплошным контуром обведена молекула растворенного вещества, пунктирными контурами — молекулы растворителя). При таком расположении молекул растворителя создаваемое ими поле ослабляет связь между разноименными ионами молекулы растворенного вещества, вследствие чего эта связь может оказаться разорванной за счет энергии теплового движения. В этом случае молекула разделяется на два или большее количество ионов разных знаков (диссоциирует).

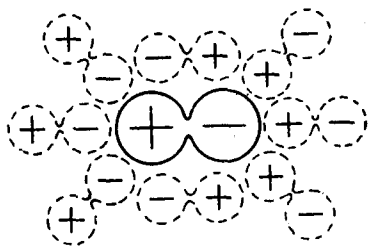


Рис. 178.

Напряженность поля, создаваемого диполем, пропорциональна величине его электрического момента [см. формулу (6.5)]. Поэтому связь между ионами в молекуле растворенного вещества ослабляется тем сильнее, чем больше дипольный момент окружающих ее молекул, т. е. чем больше диэлектрическая проницаемость жидкости, взятой в качестве растворителя. Из всех жидкостей самой большой диэлектрической проницаемостью обладает вода ($\epsilon = 81$). В соответствии с этим диссоциация молекул в водных растворах бывает особенно велика.

Образовавшиеся ионы начинают странствовать по раствору. Если ионы разных знаков сблизятся на достаточно малое расстояние, они могут объединиться снова в молекулу. Этот процесс, противоположный процессу диссоциации, называется рекомбинацией (или молизацией) ионов. В растворе идут одновременно оба процесса — диссоциация все новых и новых молекул и рекомбинация ионов в молекулы. Когда количество молекул, диссоциирующих в единицу времени, станет равным количеству молекул, возникающих за то же время вследствие рекомбинации, установится равновесное состояние. Этому состоянию соответствует определенная

степень диссоциации, которую принято характеризовать коэффициентом диссоциации α , показывающим, какая часть молекул растворенного вещества находится в диссоциированном состоянии. Если количество молекул растворенного вещества, содержащихся в единице объема раствора, равно n , то $n' = \alpha n$ молекул будут находиться в растворе в виде ионов и $n'' = (1 - \alpha)n$ — в виде недиссоциированных молекул.

Для каждой молекулы растворенного вещества, еще не распавшейся на ионы, существует определенная вероятность того, что она диссоциирует в течение одной секунды. Следовательно, количество диссоциирующих за единицу времени в единице объема молекул $\Delta n'$ должно быть пропорционально n'' — числу еще не распавшихся на ионы молекул:

$$\Delta n' = k' n'' = k' (1 - \alpha) n. \quad (79.1)$$

Коэффициент пропорциональности k' зависит от природы растворителя и растворенного вещества. Для растворителей с большим значением ϵ коэффициент k' больше. Кроме того, он возрастает при повышении температуры.

Вероятность встречи двух ионов разных знаков пропорциональна как числу положительных, так и числу отрицательных ионов. И то, и другое число равно количеству диссоциировавших молекул n' . Поэтому количество молекул, возникающих в единице объема за единицу времени вследствие рекомбинации, пропорционально n'^2 :

$$\Delta n'' = k'' n'^2 = k'' \alpha^2 n^2. \quad (79.2)$$

Для состояния равновесия $\Delta n' = \Delta n''$, поэтому [см. выражения (79,1) и (79,2)]

$$k' (1 - \alpha) n = k'' \alpha^2 n^2,$$

откуда

$$\alpha^2 + \frac{k'}{k'' n} \alpha - \frac{k'}{k'' n} = 0.$$

Из двух решений этого уравнения

$$\alpha = -\frac{k'}{2k'' n} \pm \sqrt{\frac{k'^2}{4k''^2 n^2} + \frac{k'}{k'' n}}$$

решение со знаком «—» перед корнем нужно отбросить, так как α не может быть отрицательным. Другое решение легко привести к виду

$$\alpha = \frac{k'}{2k''n} \left(\sqrt{1 + \frac{4k''n}{k'}} - 1 \right). \quad (79.3)$$

Эта формула является приближенной. Коэффициенты k' и k'' можно считать постоянными лишь в том случае, если каждая молекула растворенного вещества имеет своими соседями только молекулы растворителя, что выполняется при небольших относительных концентрациях раствора. При больших концентрациях окружение каждой молекулы состоит как из молекул растворителя, так и из молекул растворенного вещества, вследствие чего изменяется вероятность диссоциации. Изменяется также вероятность рекомбинации при встрече ионов различных знаков.

При малых n (когда $\frac{4k''n}{k'} \ll 1$) функцию (79.3) можно приближенно представить следующим образом:

$$\alpha \approx \frac{k'}{2k''n} \left(1 + \frac{2k''n}{k'} - 1 \right) = 1. \quad (79.4)$$

Следовательно, в сильно разбавленных растворах практически все молекулы растворенного вещества оказываются диссоциированными. Это объясняется тем, что при малых n ионы почти не сталкиваются друг с другом; поэтому рекомбинация не происходит и с течением времени все молекулы распадаются на ионы.

При больших n (когда единицей можно пренебречь по сравнению с $\sqrt{\frac{4k''n}{k'}}$, а тем более по сравнению с $\frac{4k''n}{k'}$) выражение (79.3) принимает вид

$$\alpha \approx \frac{k'}{2k''n} \sqrt{\frac{4k''n}{k'}} = \sqrt{\frac{k'}{k''n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

В этом случае коэффициент диссоциации α очень мал (по условию $\frac{4k''n}{k'} \gg 1$, а следовательно $\frac{k'}{k''n} \ll 1$) и убывает с ростом концентрации пропорционально $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

При невысоких температурах ионы бывают окружены облепившими их молекулами растворителя (рис. 179; аналогичная картина наблюдается для отрицательного иона). Это явление называется

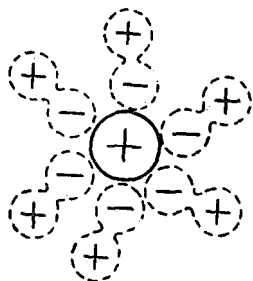


Рис. 179.

сольватацией (в случае водных растворов — гидратацией) ионов, а само образование из иона и удерживаемой его силовым полем оболочки из молекул растворителя называют сольватом. Более интенсивное тепловое движение нарушает связь между ионом и молекулами, образующими оболочку сольвата. Поэтому при повышении температуры размеры сольвата делаются

все меньше и в конце концов при достаточно большой температуре сольватная оболочка полностью исчезает.

§ 80. Электролиз

Если в электролит ввести твердые проводящие пластинки (электроды) и подать на них напряжение, ионы приходят в движение и возникает электрический ток (рис. 180). Положительно заряженные ионы движутся к отрицательному электроду (катоде), вследствие чего их называют катионами. Отрицательные ионы движутся к положительному электроду (аноду) и носят название анионов.

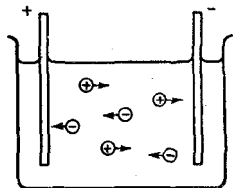


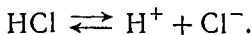
Рис. 180.

Достигнув соответствующего электрода, ионы отдают ему избыточные или получают недостающие электроны и превращаются в нейтральные атомы или молекулы. В зависимости от химической природы электролита и электродов нейтрализовавшиеся ионы либо выделяются на электродах, либо вступают в реакцию с электродами или растворителем. Химические реакции, в которые вступают нейтрализовавшиеся ионы, называют вторичными. Продукты вторичных реакций выделяются на электродах или переходят в раствор.

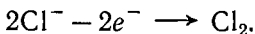
Таким образом, прохождение тока через электролит сопровождается выделением на электродах составных частей электролита. Это явление получило название электролиза.

Рассмотрим несколько примеров.

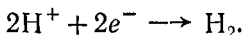
1. Возьмем в качестве электролита водный раствор соляной кислоты. Молекула HCl диссоциирует в растворе на положительно заряженный ион водорода H^+ и отрицательно заряженный ион хлора Cl^- :



Подойдя к аноду, ионы хлора отдают ему избыточные электроны и превращаются в нейтральные атомы хлора, которые сразу же объединяются попарно в молекулы:

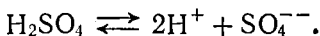


Атомы водорода, нейтрализовавшись на катоде, объединяются попарно в молекулы H_2 :

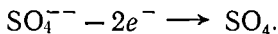
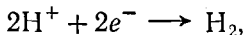


Следовательно, в процессе электролиза расходуется растворенное вещество, а на электродах выделяются газообразные хлор и водород. Вторичных реакций в этом случае не происходит.

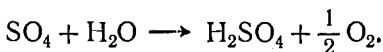
2. Электролит — раствор серной кислоты в воде. Молекула H_2SO_4 диссоциирует в растворе на два положительных однозарядных иона водорода и двухзарядный отрицательный ион SO_4^{--} :



На электродах протекают следующие процессы:



Водород выделяется в виде пузырьков на катоде. Нейтральная же группировка атомов SO_4 химически очень активна и вступает во вторичную реакцию. Если электроды изготовлены, например, из платины или никеля, SO_4 реагирует с водой:



Молекула серной кислоты поступает в раствор, кислород выделяется в виде пузырьков на аноде. В итоге происходит разложение воды с выделением ее составных частей. Вторичная реакция в этом случае протекает с растворителем.

3. Медные электроды погружены в водный раствор медного купороса. Диссоциация протекает по схеме



Нейтрализовавшиеся атомы меди отлагаются в виде твердого осадка на катоде. Нейтральная группировка SO_4 предпочтительнее вступает в реакцию с медью, чем с водой. Поэтому вторичная реакция идет с материалом анода:



Образовавшаяся молекула поступает в раствор. Таким образом, в ходе электролиза происходит растворение анода и отложение меди на катоде, электролит же в конечном счете не изменяется.

§ 81. Законы Фарадея

Законы электролиза были установлены экспериментально Фарадеем в 1836 г. Эти законы очень просты. Первый из них утверждает, что *количество выделившегося на электроде вещества пропорционально заряду, прошедшему через электролит*:

$$m = Kq = K \int_0^t i \, dt; \quad (81.1)$$

здесь m — масса выделившегося вещества, K — коэффициент, зависящий от природы вещества и называемый его электрохимическим эквивалентом. При $q = 1$ масса m численно равна K . Следовательно, электрохимический эквивалент представляет собой массу вещества, выделяющегося на электроде при прохождении через электролит заряда, равного единице.

Второй закон Фарадея связывает электрохимический эквивалент K вещества с его химическим эквивалентом A/z (A — атомный вес, z — валентность данного веще-

ства)¹⁾. Этот закон гласит, что *электрохимические эквиваленты всех веществ пропорциональны их химическим эквивалентам*. Коэффициент пропорциональности пишут в виде $1/F$. Величину F называют числом Фарадея. Выражение второго закона Фарадея теперь выглядит следующим образом:

$$K = \frac{1}{F} \frac{A}{z}. \quad (81.2)$$

Подставив выражение (81.2) в формулу (81.1), мы объединим оба закона. В результате получается

$$m = \frac{A}{z} \frac{q}{F}. \quad (81.3)$$

При q , численно равном F , масса m численно совпадает с A/z . Таким образом, для выделения на электроде килограмм-эквивалента или грамм-эквивалента любого вещества требуется пропустить через электролит одно и то же количество электричества, численно равное F . Опытным путем установлено, что

$$F = 96,497 \cdot 10^6 \frac{\text{кулон}}{\text{килограмм-эквивалент}} \\ \left(\text{приблизенно } 96,5 \cdot 10^6 \frac{\kappa}{\text{кг-эkv}} \right) \quad (81.4)$$

или

$$F = 96497 \frac{\text{кулон}}{\text{грамм-эквивалент}}.$$

¹⁾ Химическим эквивалентом элемента называется безразмерная величина, численно равная массе данного элемента, выраженной в граммах (или в килограммах), которая замещает в химических соединениях 1,0078 г (соответственно кг) водорода.

Валентностью z элемента называется число атомов водорода, которое замещается в химических соединениях одним атомом данного элемента.

Для одновалентного элемента химический эквивалент равен его атомному весу. Для z -валентного элемента химический эквивалент равен A/z .

Количество элемента, масса которого, выраженная в граммах, численно равна химическому эквиваленту, называется грамм-эквивалентом. Количество вещества, масса которого равна A/z килограммов, называется килограмм-эквивалентом.

Понятие химического эквивалента, а также грамм-эквивалента и килограмм-эквивалента может быть распространено также на те группировки атомов, которые выделяются при электролизе на электродах.

Законы Фарадея сыграли большую роль в установлении атомной (т. е. дискретной) природы электричества. Килограмм-эквивалент любого вещества содержит $N' = N_A/z$ атомов (N_A — число Авогадро). Следовательно, N_A/z ионов переносят заряд, равный F . На долю каждого иона приходится заряд

$$e' = \frac{F}{N'} = \frac{F}{N_A} z.$$

Таким образом, заряд иона оказывается целым кратным заряду

$$e = \frac{F}{N_A}, \quad (81.5)$$

который, очевидно, представляет собой элементарный заряд.

Предоставляем читателю убедиться в том, что подстановка в (81.5) значения (81.4) для F и $N_A = 6,02 \times 10^{26}$ киломоль⁻¹ приводит к величине элементарного заряда (66.11).

Соотношение (81.5) было использовано для определения числа Авогадро. При этом было взято значение F , найденное из опытов по электролизу, и значение e , полученное Милликенем (см. § 66).

§ 82. Электролитическая проводимость

При включении электрического поля на хаотическое тепловое движение ионов накладывается упорядоченное движение — положительных ионов в направлении поля, отрицательных — против направления поля. Размеры ионов (а тем более сольватов) гораздо больше размеров электрона, поэтому окружающие ион молекулы оказывают на него непрерывно воздействие (напомним, что движение электронов в металлах в промежутках между соударениями с ионами решетки можно было считать свободным). Это воздействие приводит к тому, что ион, подобно шарiku в вязкой среде, испытывает при своем движении сопротивление, пропорциональное скорости. Следовательно, каждому значению напряженности поля E соответствует свое значение скорости установившегося равномерного движения ионов u , определяемое условием

$$e'E = ku,$$

где e' — заряд иона, k — коэффициент пропорциональности между скоростью иона и силой сопротивления среды движению иона.

Таким образом, под действием поля напряженности E ион будет двигаться (в направлении поля или против поля) с постоянной скоростью

$$u = \frac{e'}{k} E. \quad (82.1)$$

Сопоставляя это выражение с формулой (73.6), мы видим, что отношение e'/k есть не что иное, как подвижность иона u_0 . Ионы разных знаков могут иметь разный по величине заряд e' , кроме того, и коэффициент k для них будет различен. Поэтому ионы разных знаков обладают различной подвижностью u_0 .

Подвижность иона зависит от его природы и свойств растворителя. С повышением температуры подвижность растет. Это происходит за счет того, что уменьшается вязкость среды, в которой движется ион, но в еще большей степени это бывает вызвано тем, что при повышении температуры уменьшаются размеры сольватной оболочки, окружающей ион.

Подвижность ионов в электролитах очень мала. При комнатной температуре для водных растворов она составляет примерно $10^{-8} - 10^{-7} \frac{\text{м/сек}}{\text{в/м}} \left(10^{-4} - 10^{-3} \frac{\text{см/сек}}{\text{в/см}} \right)$. Подвижность электронов в металлах приблизительно на четыре порядка больше $\left(\sim 10^{-4} \frac{\text{м/сек}}{\text{в/м}} \right)$.

Движение ионов создает электрический ток, плотность которого равна

$$j = (n^+ e^+ u_0^+ + n^- e^- u_0^-) E,$$

где n^+ — число положительных ионов в единице объема, e^+ — заряд, а u_0^+ — подвижность положительных ионов, n^- , e^- и u_0^- — аналогичные величины для отрицательных ионов [ср. с формулой (31.4)].

Величина, стоящая в скобках, не зависит от E . Следовательно, плотность тока в электролитах пропорциональна напряженности поля. Это означает, что для электролитов справедлив закон Ома.

Если молекулы диссоциируют на два иона, то $e^+ = e^- = e'$ и $n^+ = n^- = n' = \alpha n$ (числу диссоциировавших

молекул). В этом случае

$$j = \alpha n e' (u_0^+ + u_0^-) E. \quad (82.2)$$

Выражение (82.2) справедливо лишь на некотором удалении от электродов. В непосредственной близости от электродов ток создается ионами только одного знака: анионами вблизи анода и катионами вблизи катода.

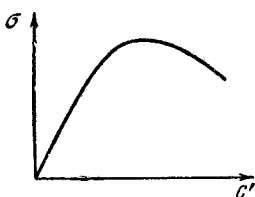
Согласно формуле (82.2) проводимость электролита определяется следующим выражением:

$$\sigma = \alpha n e' (u_0^+ + u_0^-).$$

Умножим и разделим это выражение на $N' = \frac{N_A}{z}$ — число молекул в килограмм-эквиваленте растворенного вещества:

$$\sigma = \alpha \frac{n}{N'} (e' N') (u_0^+ + u_0^-).$$

Произведение $e' N'$ равно числу Фарадея F . Отношение n/N' дает количество килограмм-эквивалентов растворенного вещества в единице объема раствора; его называют эквивалентной концентрацией растворенного вещества. Обозначим эту концентрацию буквой η , тогда выражению для проводимости электролита можно придать следующий вид:



$$\sigma = \alpha \eta F (u_0^+ + u_0^-). \quad (82.3)$$

Рис. 181.

При повышении температуры коэффициент диссоциации α и подвижность ионов увеличиваются. Поэтому проводимость электролитов σ возрастает с температурой. Зависимость проводимости от концентрации оказывается довольно сложной. Это вызвано тем, что σ зависит от η и непосредственно, и через α . При малых концентрациях, когда $\alpha \approx 1$ [см. формулу (79.4)], σ растет пропорционально η . В дальнейшем с увеличением η начинает убывать коэффициент диссоциации α ; поэтому рост проводимости замедляется, а затем она даже начинает убывать. На рис. 181 показана зависимость проводимости σ водного раствора серной кислоты от относительной концентрации c' раствора.

Электролиз находит самые разнообразные технические применения. Охарактеризуем вкратце некоторые из них.

1. Гальванопластика. В 1837 г. Б. С. Якоби применил электролиз для изготовления металлических слепков с рельефных моделей. Модель из воска или какого-либо другого пластического материала покрывается для создания проводящего слоя графитовым порошком и затем включается в качестве катода при электролизе. Электролитом служит раствор соли, содержащей металл, из которого хотят получить слепок. Металл отлагается на катоде в виде слоя, точно отражающего рельеф модели. Полученный слепок легко отделяется от катода. Таким способом иногда изготавливаются типографские клише.

2. Гальваностегия. С помощью электролиза наносят на поверхность металлических изделий тонкий слой другого металла. Это делается с декоративными целями (золочение, серебрение, платинирование), а также для создания антикоррозионных покрытий (никелирование, хромирование, кадмирование и т. п.).

3. Электрометаллургия. Путем электролиза расплавленных руд получают алюминий, натрий, магний, бериллий и некоторые другие металлы. Например, сырьем для получения алюминия служат обычно бокситы — минералы, содержащие глинозем (Al_2O_3). В качестве электродов применяются угольные пластины. Руда поддерживается в расплавленном состоянии за счет тепла, выделяемого при прохождении тока.

Электролиз применяют также для рафинирования (т. е. очистки) металлов. Для этого пластина из очищаемого металла включается в качестве анода соответствующей электролитической ванны. Электролитом служит раствор соли очищаемого металла. При надлежащем выборе напряжения выделяться на катоде будет только данный металл, а примеси выпадут в виде осадка. Таким путем получают, например, очень чистую медь, которая называется электролитической.

4. Электролитическая полировка. Количество вещества, осаждающегося на электроде или переходящего с электрода в раствор, пропорционально плотности тока. У выступов, как мы знаем, напряженность поля E больше, следовательно, в этих местах больше и плотность

тока; во впадинах плотность тока, напротив, бывает меньше. Поэтому, если изделие с шероховатой поверхностью сделать анодом соответствующим образом выбранной электролитической ванны, то с выступов будет переходить в раствор больше металла, чем из впадин, и шероховатости будут сглаживаться. На этом принципе основывается электрополировка металлов.

5. Получение тяжелой воды. Тяжелой водой (D_2O) называется вода, в которой атомы водорода замещены атомами дейтерия (D) — изотопа водорода с атомным весом 2. Тяжелая вода присутствует в небольшом количестве в обычной воде. Ионы D^+ обладают меньшей подвижностью, чем ионы H^+ . Поэтому в выделяющемся при электролизе газе тяжелый водород присутствует в относительно меньшем количестве, чем в исходной воде; в электролите же концентрация тяжелой воды повышается. Если производить электролиз достаточно долго, можно получить воду с высоким содержанием молекул D_2O .

6. Электролитические конденсаторы. Если в раствор борной щелочи (смеси борной кислоты и аммиака) погрузить алюминиевые электроды и приложить к ним напряжение, то анод быстро покрывается очень тонким непроводящим слоем окислов алюминия, и ток прекращается. Изолирующий слой поддерживается за счет электролиза и при изменении полярности исчезает. Таким образом, анод и электролит оказываются разделенными тончайшим слоем изолятора и образуют конденсатор весьма большой емкости (емкость конденсатора обратно пропорциональна расстоянию между обкладками).

В «сухих» электролитических конденсаторах электролит изготавливают в виде густой пасты и пропитывают им бумажную прокладку, помещаемую между обкладками. Подобные конденсаторы при небольших размерах обладают емкостью порядка сотен микрофарад. При их включении необходимо строго соблюдать обозначенную полярность. Если электрод с образовавшимся на нем слоем окисла подключить к минусу цепи (т. е. в обратном направлении), то изолирующий слой исчезнет и сила тока резко возрастет, что приведет к разрушению конденсатора. Каждый такой конденсатор бывает рассчитан на определенное предельное напряжение, при превышении которого изолирующий слой пробивается и конденсатор выходит из строя.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ

§ 84. Виды газового разряда

Прохождение электрического тока через газы называется газовым разрядом. В металлах, полупроводниках и электролитах носители тока существуют всегда, независимо от процессов, связанных с прохождением тока; электрическое поле лишь обуславливает упорядоченное движение имеющихся зарядов. Газы в нормальном состоянии являются изоляторами, носители тока в них отсутствуют. Лишь при соблюдении специальных условий в газах могут появиться носители зарядов (ионы, электроны) и возникает электрический разряд.

Носители тока в газах могут возникать в результате внешних воздействий, не связанных с наличием электрического поля. В этом случае говорят о несамостоятельной проводимости газа. Несамостоятельный разряд может быть вызван нагреванием газа до высокой температуры (термическая ионизация), воздействием ультрафиолетовых или рентгеновских лучей, а также воздействием излучения радиоактивных веществ.

Если носители тока возникают в результате тех процессов в газе, которые обусловлены приложенным к газу электрическим полем, проводимость называется самостоятельной.

Характер газового разряда зависит от множества факторов: от химической природы газа и электродов, от температуры и давления газа, от формы, размеров и взаимного расположения электродов, от напряжения,

плотности и мощности тока и т. п. Поэтому газовый разряд может принимать весьма разнообразные формы. В частности, он может сопровождаться свечением и звуковыми эффектами — шипением, шорохами и треском.

§ 85. Несамостоятельный газовый разряд

Пусть газ, находящийся между плоскими параллельными электродами (рис. 182), подвергается непрерывному постоянному по интенсивности воздействию какого-либо ионизирующего агента (например, рентгеновских лучей). Действие ионизатора приводит к тому, что от

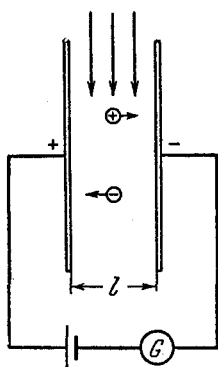


Рис. 182.

некоторых молекул газа¹⁾ отщепляется один или несколько электронов, в результате чего эти молекулы превращаются в положительно заряженные ионы. При не очень низких давлениях отщепившиеся электроны обычно захватываются нейтральными молекулами, которые таким образом становятся отрицательно заряженными ионами. Число пар ионов, возникающих под действием ионизатора за секунду в единице объема, обозначим через Δn_i .

Наряду с процессом ионизации в газе будет происходить рекомбинация ионов (т. е. нейтрализация разноименных ионов при встрече или воссоединение положительного иона и электрона в нейтральную молекулу). Количество рекомбинирующих за секунду в единице объема пар ионов Δn_r , как и в случае электролитов [см. формулу (79.2)], пропорционально квадрату числа имеющихся в единице объема пар ионов n :

$$\Delta n_r = rn^2 \quad (85.1)$$

(r — коэффициент пропорциональности).

В состоянии равновесия Δn_i должно быть равно Δn_r , т. е.

$$\Delta n_i = rn^2. \quad (85.2)$$

¹⁾ Атомы мы также будем считать молекулами (одноатомными).

Отсюда для равновесной концентрации ионов (числа пар ионов в единице объема) получается следующее выражение:

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}}. \quad (85.3)$$

Под действием космического излучения и следов радиоактивных веществ, имеющих в земной коре, в атмосферном воздухе возникает ежесекундно в среднем несколько пар ионов в 1 см^3 . Для воздуха коэффициент $r = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$. Равновесная концентрация ионов составляет примерно 10^3 см^{-3} . Эта концентрация недостаточна для того, чтобы обусловить заметную проводимость. Чистый сухой воздух, как известно, является очень хорошим изолятором.

Если подать напряжение на электроды, то убыль ионов будет происходить не только вследствие рекомбинации, но и за счет отсасывания ионов полем к электродам. Пусть из единицы объема отсасывается ежесекундно Δn_i пар ионов. Если заряд каждого иона e' , то нейтрализация на электродах одной пары ионов сопровождается переносом по цепи заряда, равного e' . Каждую секунду электродов достигают $\Delta n_i Sl$ пар ионов (S — площадь электродов, l — расстояние между ними; Sl равно объему межэлектродного пространства). Следовательно, сила тока в цепи равна:

$$I = e' \Delta n_i Sl;$$

отсюда

$$\Delta n_i = \frac{I}{e' l S} = \frac{j}{e' l}, \quad (85.4)$$

где j — плотность тока.

При наличии тока условие равновесия должно быть записано следующим образом:

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j.$$

Подставив сюда выражения (85.1) и (85.4) для Δn_r и Δn_j , получим соотношение

$$\Delta n_i = r n^2 + \frac{j}{e' l}. \quad (85.5)$$

Вместе с тем для плотности тока может быть написано выражение, аналогичное выражению (82.2) для электролитов:

$$j = e' n (u_0^+ + u_0^-) E, \quad (85.6)$$

где u_0^+ и u_0^- — подвижности положительных и отрицательных ионов. В этом выражении n является, как это следует из соотношения (85.5), функцией j , т. е. в конечном счете функцией E .

Исключив n из выражений (85.5) и (85.6) и решив получающееся квадратное уравнение, можно найти для j следующую формулу:

$$j = \frac{e' (u_0^+ + u_0^-)^2}{2rl} E^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4\Delta n_i r l^2}{(u_0^+ + u_0^-)^2 E^2}} - 1 \right) \quad (85.7)$$

(второе решение отрицательно и должно быть отброшено как не имеющее физического смысла).

Рассмотрим случаи слабых и сильных полей.

1. В случае слабых полей плотность тока будет очень мала и слагаемым $j/e'l$ в соотношении (85.5) можно пренебречь по сравнению с rn^2 (это означает, что убыль ионов из межэлектродного пространства происходит в основном за счет рекомбинации¹⁾). Тогда (85.5) переходит в (85.2) и для равновесной концентрации ионов получается выражение (85.3). Подставляя это значение n в (85.6), получаем

$$j = e' \sqrt{\frac{\Delta n_i}{r}} (u_0^+ + u_0^-) E \quad (85.8)$$

(эта формула получается из (85.7), если пренебречь единицей по сравнению с $\frac{4\Delta n_i r l^2}{(u_0^+ + u_0^-)^2 E^2}$).

Множитель при E в формуле (85.8) не зависит от напряженности поля. Следовательно, в случае слабых полей несамостоятельный газовый разряд подчиняется закону Ома.

Подвижность ионов в газах гораздо больше, чем в электролитах — она имеет величину порядка $10^{-4} \frac{\text{м/сек}}{\text{в/м}}$

$\left(1 \frac{\text{см/сек}}{\text{в/см}}\right)$. Некоторые ионы, называемые ионами Ланжевена, обладают в 100—1000 раз меньшей подвижностью. Они представляют собой обычный ион, соединившийся с пылинкой, капелькой воды и т. п.

¹⁾ Такое же соотношение между количеством рекомбинирующих и количеством отсасываемых полей ионов имеет место у электролитов.

При равновесной концентрации $n = 10^9 \text{ м}^{-3} = 10^3 \text{ см}^{-3}$ и напряженности поля $E = 1 \text{ в/м}$ плотность тока согласно формуле (85.6) составит

$$j = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^9 (10^{-4} + 10^{-4}) \cdot 1 \sim 10^{-14} \text{ а/м}^2 = 10^{-18} \text{ а/см}^2$$

(ионы мы считали однозарядными).

2. В случае сильных полей слагаемым rn^2 в формуле (85.5) можно пренебречь по сравнению с $j/e'l$. Это означает, что практически все возникающие ионы достигают электродов, не успев рекомбинировать. При этом условии соотношение (85.5) принимает вид

$$\Delta n_i = \frac{j}{e'l},$$

откуда

$$j = e' \Delta n_i \cdot l \quad (85.9)$$

(это выражение можно получить из (85.7), преобразовав корень по формуле $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, справедливой при малых x).

Плотность тока (85.9) создается всеми ионами, порождаемыми ионизатором в заключенном между электродами столбе газа с единичным поперечным сечением. Следовательно, эта плотность тока является наибольшей при данной интенсивности ионизатора и величине межэлектродного промежутка l . Ее называют плотностью тока насыщения $j_{\text{нас}}$.

Вычислим $j_{\text{нас}}$ при следующих условиях: $\Delta n_i = 10^7 \text{ м}^{-3} = 10 \text{ см}^{-3}$ (напомним, что в атмосферном воздухе при обычных условиях возникает каждую секунду в каждом кубическом сантиметре несколько пар ионов), $l = 0,1 \text{ м}$ (10 см). По формуле (85.9)

$$j_{\text{нас}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^7 \cdot 10^{-1} \sim 10^{-13} \text{ а/м}^2 = 10^{-17} \text{ а/см}^2.$$

Этот расчет показывает, что проводимость воздуха в обычных условиях ничтожно мала.

График функции (85.7) изображен на рис. 183 (сплошная кривая). При достаточно больших значениях напряженности поля ток начинает резко возрастать (см. пунктирный участок кривой). Это объясняется тем, что

порождаемые внешним ионизатором электроны¹⁾ за время свободного пробега успевают приобрести энергию, достаточную для того, чтобы, столкнувшись с молекулой, вызвать ее ионизацию (ионизация ударом). Возникшие при этом свободные электроны, разогнавшись, в свою очередь вызывают ионизацию. Таким образом, происходит лавинообразное размножение первичных ионов, созданных внешним ионизатором, и усиление разрядного тока. Однако процесс не утрачивает характера самостоятельного разряда, так как после прекращения действия внешнего ионизатора разряд продолжается только до тех пор, пока все электроны (первичные и вторичные) не достигнут анода (задняя граница пространства, в котором имеются ионизирующие частицы — электроны, перемещается к аноду).

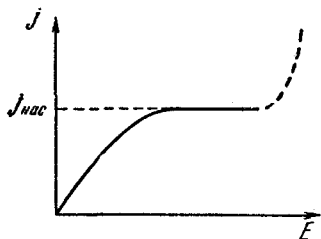


Рис. 183.

Для того чтобы разряд стал самостоятельным, необходимо наличие двух встречных лавин ионов, что возможно только в том случае, когда ионизацию ударом способны вызвать носители обоих знаков.

Весьма важно, что несамостоятельные разрядные токи, усиленные за счет размножения носителей, пропорциональны числу первичных ионов, создаваемых внешним ионизатором. Это свойство разряда используется в пропорциональных счетчиках (см. следующий параграф).

§ 86. Ионизационные камеры и счетчики

Действие ионизационных камер и счетчиков — приборов, применяемых для обнаружения и счета ядерных частиц, а также для измерения интенсивности рентгеновского и гамма-излучения, основано на использовании несамостоятельного газового разряда.

Принципиальная схема ионизационной камеры и счетчика одинакова (рис. 184). Отличаются они лишь режи-

¹⁾ Вследствие большой длины свободного пробега электроны раньше приобретают способность вызывать ионизацию, чем газовые ионы.

мом работы и конструктивными особенностями. Счетчик (рис. 184, б) состоит из цилиндрического корпуса, по оси которого укреплен на изоляторах электрод в виде тонкой нити (анод). Вторым электродом (катодом) служит корпус счетчика. Иногда счетчик заключают в оболочку из стекла. Для впуска ионизирующих частиц в торце счетчика делается окошко из алюминиевой фольги или из слюды. Некоторые частицы, а также рентгеновское и гамма-излучение проникают в счетчик или ионизационную камеру непосредственно через их стенки.

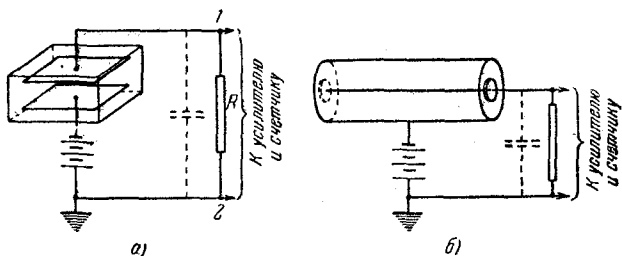


Рис. 184.

Ионизационная камера (рис. 184, а) может иметь электроды разной формы. В частности, они могут быть такими же, как у счетчика, либо иметь форму плоских параллельных пластин и т. п.

Предположим, что в пространство между электродами влетает быстрая заряженная частица (например, α - или β -частица), которая создает N_0 пар первичных ионов (электронов и положительных ионов). Возникшие ионы увлекаются полем к электродам, вследствие чего через сопротивление R проходит некоторый заряд q , который мы будем называть импульсом тока. На рис. 185 приведена зависимость импульса тока q от напряжения U между электродами для двух различных количеств первичных ионов N_0 , отличающихся по величине в три раза ($N_{02} = 3N_{01}$). На графике можно выделить шесть обозначенных римскими цифрами различных областей. Области I и II были подробно рассмотрены в предыдущем параграфе. В частности, область II есть область тока насыщения — все созданные ионизатором ионы достигают электродов, не успев рекомбинировать.

Естественно, что при этом условии импульс тока не зависит от напряжения.

Начиная со значения напряжения U_p поле достигает такой величины, что электроны получают возможность ионизировать молекулы ударом. Поэтому количество электронов и положительных ионов лавинообразно нарастает. В результате на каждый из электродов попадает AN_0 ионов. Величина A называется коэффициентом газового усиления. В области *III* этот коэффициент не зависит от количества первичных ионов N_0

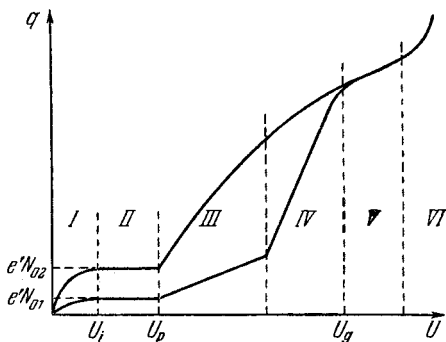


Рис. 185.

(но зависит от напряжения). Поэтому, если поддерживать напряжение постоянным, импульс тока будет пропорционален количеству первичных ионов, образованных ионизатором. Область *III* называется областью пропорциональности, а напряжение U_p — порогом пропорциональной области. Коэффициент газового усиления изменяется в этой области от 1 в начале до $10^3 \div 10^4$ в конце (рис. 185 выполнен без соблюдения масштаба по оси q ; выдержано лишь соотношение 1:3 между ординатами кривых в областях *II* и *III*).

В области *IV*, называемой областью частичной пропорциональности, коэффициент газового усиления A все сильнее зависит от N_0 , в связи с чем различие в импульсах тока, порожденных различным количеством первичных ионов, все больше сглаживается.

При напряжениях, соответствующих области *V* (ее называют областью Гейгера, а напряжение U_g — порогом этой области), процесс приобретает характер

самостоятельного разряда. Первичные ионы лишь создают первоначальный толчок для его возникновения. Величина импульса тока в этой области совершенно не зависит от количества первичных ионов.

В области VI напряжение столь велико, что разряд, возникнув, больше не прекращается. Поэтому ее называют областью непрерывного разряда.

Ионизационная камера. Ионизационной камерой называется прибор, работающий без газового усиления, т. е. при напряжениях, соответствующих области II. Существуют два типа ионизационных камер. Камеры одного типа применяются для регистрации импульсов, создаваемых отдельными частицами (импульсные камеры). Влетевшая в камеру частица создает в ней некоторое число ионов, в результате чего через сопротивление R начинает течь ток i . Это приводит к тому, что потенциал точки 1 (см. рис. 184, а) повышается и становится равным iR (первоначально потенциал этой точки был такой же, как и заземленной точки 2). Этот потенциал поступает на усилитель и после усиления приводит в действие счетное устройство. После того, как все попавшие на внутренний электрод заряды пройдут через сопротивление R , ток прекратится и потенциал точки 1 снова станет равным нулю. Характер работы камеры зависит от длительности импульса тока, вызванного одной частицей.

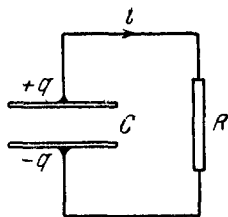


Рис. 186.

Чтобы выяснить, от чего зависит продолжительность импульса, рассмотрим цепь, состоящую из конденсатора C и сопротивления R (рис. 186). Если сообщить обкладкам конденсатора разноименные заряды величины q_0 , через сопротивление R потечет ток, вследствие чего величина зарядов q на обкладках конденсатора будет убывать. Мгновенное значение напряжения, приложенного к сопротивлению, равно $U = q/C$. Следовательно, сила тока

$$i = \frac{U}{R} = \frac{q}{RC}. \quad (86.1)$$

Убыль заряда на обкладках $-dq$ равна idt . Таким образом, i в уравнении (86.1) можно заменить через

— $\frac{dq}{dt}$. В результате получается следующее дифференциальное уравнение:

$$-\frac{dq}{dt} = \frac{q}{RC}.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Согласно (86.1) $\frac{dq}{q} = \frac{di}{i}$. Поэтому можно написать

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\ln i = -\frac{1}{RC} t + \ln i_0, \quad (86.2)$$

где через $\ln i_0$ обозначена постоянная интегрирования.

Наконец, прологарифмировав (86.2), получим

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (86.3)$$

При $t = 0$ получается $i = i_0$. Таким образом, i_0 представляет собой начальное значение силы тока.

Из выражения (86.3) следует, что за время

$$\tau = RC \quad (86.4)$$

сила тока уменьшается в e раз. В соответствии с этим величина (86.4) носит название постоянной времени цепи. Чем больше эта величина, тем медленнее спадает ток в цепи.

Схема ионизационной камеры (рис. 184, а) сходна со схемой, изображенной на рис. 186. Роль C играет межэлектродная емкость, показанная на рисунке пунктиром. Чем больше сопротивление R , тем сильнее будет повышаться напряжение точки I при данной силе тока и тем, следовательно, легче обнаружить импульс. Поэтому сопротивление R стремятся сделать как можно больше. Вместе с тем для того, чтобы камера могла отдельно регистрировать импульсы тока, порождаемые быстро следующими друг за другом частицами, постоян-

ная времени должна быть невелика. Поэтому при выборе величины R для импульсных камер приходится идти на компромисс. Обычно берут R порядка 10^8 ом. Тогда при $C = 10^{-11}$ ф постоянная времени составит 10^{-3} сек.

Другим типом ионизационных камер являются так называемые интегрирующие камеры. В них берут R порядка 10^{15} ом. При $C = 10^{-11}$ ф постоянная времени будет равна 10^4 сек. В этом случае импульсы тока, порождаемые отдельными ионизирующими частицами, сливаются и по сопротивлению течет постоянный ток, величина которого характеризует суммарный заряд ионов, возникающих в камере в единицу времени.

Таким образом, ионизационные камеры обоих типов различаются лишь величиной постоянной времени RC .

Пропорциональные счетчики. Импульсы, вызываемые отдельными частицами, могут быть значительно усилены (до $10^3 \div 10^4$ раз), если напряжение между электродами попадает в область III (рис. 185). Прибор, работающий в таком режиме, называется пропорциональным счетчиком. Внутренний электрод счетчика делается в виде нити диаметром в несколько сотых миллиметра. Этот электрод служит анодом. Напряженность поля между электродами изменяется по закону $\frac{1}{r}$

[см. формулу (8.8)]; поэтому вблизи нити она достигает особенно больших значений. При достаточно большом напряжении между электродами электроны, возникающие вблизи нити, приобретают под действием поля энергию, достаточную для того, чтобы вызвать ионизацию молекул ударом. В результате происходит «размножение» ионов. Размеры объема, в пределах которого происходит размножение, увеличиваются с ростом напряжения. В соответствии с этим растет и коэффициент газового усиления:

Количество первичных ионов зависит от природы и энергии частицы, вызвавшей импульс. Поэтому по величине импульсов на выходе пропорционального счетчика можно различить частицы разной природы, а также произвести сортировку частиц одной и той же природы по их энергиям.

Пропорциональные счетчики могут применяться и для счета нейтронов. В этом случае счетчик наполняют

газообразным трехфтористым бором (BF_3). Нейтроны вступают в ядерную реакцию с изотопом бора с массовым числом 10 (B^{10}), причем возникают α -частицы, которые и вызывают первичную ионизацию.

Счетчики Гейгера — Мюллера. Еще большего усиления импульса (до 10^8) можно достигнуть, заставив работать счетчик в области Гейгера (область V на рис. 185). Счетчик, работающий в этом режиме, называется счетчиком Гейгера — Мюллера (сокращенно счетчиком Гейгера). Как уже отмечалось, разряд в этой области переходит в самостоятельный, первичные ионы, создаваемые ионизирующей частицей, лишь «запускают» разряд. Поэтому величина импульса не зависит от первоначальной ионизации. Для того, чтобы получать от отдельных частиц отдельные импульсы, необходимо возникший разряд быстро прервать (погасить). Это достигается либо с помощью внешнего сопротивления R (в несамогасящихся счетчиках), либо за счет процессов, возникающих в самом счетчике. В последнем случае счетчик называется самогасящимся.

Гашение разряда с помощью внешнего сопротивления объясняется тем, что при протекании по сопротивлению разрядного тока на нем возникает большое падение напряжения. В результате на межэлектродный промежуток приходится только часть приложенного напряжения, которая оказывается недостаточной для поддержания разряда.

Прекращение разряда в самогасящихся счетчиках обусловлено следующими причинами. Электроны обладают гораздо большей (примерно в 1000 раз) подвижностью, чем положительные ионы. Поэтому за то время, за которое электроны достигают нити, положительные ионы почти не сдвигаются со своих мест. Эти ионы создают положительный пространственный заряд, ослабляющий поле вблизи нити, и разряд прекращается. Гашению разряда в этом случае препятствуют дополнительные процессы, которых мы не будем рассматривать. Для их подавления к газу, заполняющему счетчик (обычно аргону), добавляется примесь многоатомного органического газа (например, паров спирта). Такой счетчик разделяет импульсы от частиц, следующих друг за другом с интервалами порядка 10^{-4} сек.

§ 87. Процессы, приводящие к появлению носителей тока при самостоятельном разряде

Носители тока — электроны и ионы — могут возникать при самостоятельном разряде за счет различных процессов, некоторые из которых мы рассмотрим прежде, чем перейти к описанию отдельных видов разряда.

Столкновения электронов с молекулами. Столкновения электронов (а также ионов) с молекулами могут иметь упругий и неупругий характер. Молекула, как и атом, может находиться в дискретных энергетических состояниях. Состояние с наименьшей энергией называется основным. Для того чтобы перевести молекулу из основного в различные возбужденные состояния, требуются определенные значения энергии W_1 , W_2 и т. д. Сообщив молекуле достаточно большую энергию W_i , можно вызвать ее ионизацию.

Перейдя в возбужденное состояние, молекула обычно пребывает в нем всего лишь 10^{-8} сек, после чего переходит снова в основное состояние, излучая избыток энергии в виде кванта света — фотона. В некоторых так называемых метастабильных состояниях молекула может находиться значительно дольше — примерно 10^{-3} сек.

При соударении частиц должны выполняться законы сохранения энергии и импульса. Поэтому на передачу энергии при ударе накладываются определенные ограничения — не вся энергия, которой обладает ударяющая частица, может быть передана другой частице.

Если при столкновении молекуле не может быть сообщена энергия, достаточная для ее возбуждения, суммарная кинетическая энергия частиц остается без изменений и удар будет упругим. Пусть частица массы m_1 , имеющая скорость v_{10} , ударяется о неподвижную ($v_{20} = 0$) частицу массы m_2 . При центральном ударе должны выполняться условия

$$\frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$
$$m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

где v_1 и v_2 — скорости частиц после удара.

Решая эту систему уравнений относительно неизвестных v_1 и v_2 (см. т. I, § 30), получим

$$v_2 = \frac{2v_{10}m_1}{m_1 + m_2}.$$

Таким образом, для энергии, которая передается при упругом ударе второй частице, получается выражение

$$\Delta W_{\text{упр}} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} \cdot \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Если $m_1 \ll m_2$, это выражение можно приближенно записать следующим образом:

$$\Delta W_{\text{упр}} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} \cdot \frac{4m_1}{m_2} = W_{10} \frac{4m_1}{m_2}, \quad (87.1)$$

где W_{10} — энергия ударяющейся частицы перед ударом.

Из формулы (87.1) следует, что легкая частица (электрон), ударяясь упруго о тяжелую частицу (молекулу), сообщает ей лишь малую долю своего запаса энергии ($\frac{m_1}{m_2} \ll 1$). Легкая частица «отскакивает» от тяжелой, подобно мячу от стенки, с практически не изменяющейся по величине скоростью. Как показывает соответствующий расчет, при нецентральной ударе доля переданной энергии оказывается еще меньше.

При достаточно большой энергии ударяющей частицы (электрона или иона) молекула может быть возбуждена или ионизирована. В этом случае суммарная кинетическая энергия частиц не сохраняется — часть энергии затрачивается на возбуждение или ионизацию, т. е. на увеличение внутренней энергии соударяющихся частиц. Такие соударения называются неупругими столкновениями первого рода.

Молекула, находящаяся в возбужденном состоянии, при столкновении с другой частицей (электроном, ионом или нейтральной молекулой) может перейти в основное состояние, не излучая избыток энергии, а передав его электрону. В этом случае суммарная кинетическая энергия частиц после удара будет больше, чем до удара. Такие соударения называются неупругими столкновениями второго рода. Переход молекул из метастабильного состояния в основное возможен только за счет столкновений второго рода.

При неупругом столкновении первого рода уравнения сохранения энергии и импульса имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1 v_{10}^2}{2} &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \Delta W_{\text{вн}}, \\ m_1 v_{10} &= m_1 v_1 + m_2 v_2, \end{aligned} \right\} \quad (87.2)$$

где $\Delta W_{\text{вн}}$ — увеличение внутренней энергии молекулы, соответствующее ее переходу в возбужденное состояние.

Исключив v_1 из уравнений (87.2), можно получить

$$\Delta W_{\text{вн}} = m_2 v_{10} v_2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (87.3)$$

При одной и той же скорости ударяющейся частицы (v_{10}) приращение внутренней энергии молекулы $\Delta W_{\text{вн}}$ зависит от скорости v_2 , с которой молекула движется после удара. Чтобы найти наибольшее возможное значение $\Delta W_{\text{вн}}$, продифференцируем функцию (87.3) по v_2 и приравняем получившееся выражение нулю:

$$\frac{d(\Delta W_{\text{вн}})}{dv_2} = m_2 v_{10} - \frac{m_1 + m_2}{m_1} m_2 v_2 = 0.$$

Отсюда $v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10}$. Подставляя найденное значение v_2 в формулу (87.3), находим, что

$$\Delta W_{\text{вн max}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{m_1 v_{10}^2}{2}. \quad (87.4)$$

Если ударяющая частица значительно легче ударяемой ($\frac{m_1}{m_2} \ll 1$), множитель при $\frac{m_1 v_{10}^2}{2}$ в выражении (87.4) близок к единице. Таким образом, при ударе легкой частицы (электрона) о тяжелую (молекулу) почти вся энергия ударяющей частицы может быть затрачена на возбуждение или ионизацию¹⁾ молекулы.

Однако даже если энергия ударяющей частицы — электрона — достаточно велика, соударение не обязательно приводит к возбуждению или ионизации

¹⁾ В случае ионизации уравнения (87.2) усложняются, так как после соударения будет не две частицы, а три. Однако заключение о возможности затраты почти всей энергии электрона на ионизацию остается справедливым.

молекулы. Имеется определенная вероятность обоих этих процессов, которая зависит от скорости, т. е. энергии электрона. На рис. 187 показан примерный ход этих вероятностей. Чем быстрее летит электрон, тем меньший промежуток времени взаимодействует он с молекулой, пролетая вблизи нее. Поэтому обе вероятности быстро достигают максимума, а затем с увеличением энергии электрона убывают. Как видно из рисунка, электрон,

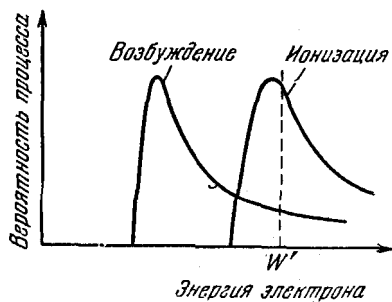


Рис. 187.

имеющий, например, энергию W' , с большей вероятностью будет вызывать ионизацию молекулы, чем ее возбуждение.

Вторичная электронная эмиссия. Вторичной электронной эмиссией называется испускание электронов поверхностью твердого или жидкого тела при бомбардировке ее электронами или ионами. Отношение числа вторич-

ных электронов N_2 к числу N_1 частиц, вызвавших эмиссию, называется коэффициентом вторичной эмиссии

$$\delta = \frac{N_2}{N_1}. \quad (87.5)$$

Коэффициент вторичной эмиссии зависит от природы поверхности и бомбардирующих ее частиц, а также от энергии этих частиц. Скорость вторичных электронов невелика и от энергии первичных частиц не зависит.

В случае бомбардировки поверхности металлов электронами коэффициент вторичной эмиссии достигает максимума при энергии первичных электронов порядка нескольких сотен электронвольт (от 200 до 800 эв для различных металлов). Наибольшие значения коэффициента δ_{max} заключены в пределах от 0,5 (для бериллия) до 1,8 (для платины). Для полупроводников δ_{max} может достигать гораздо больших значений (порядка 10). Таким образом, вторичную эмиссию от соответствующим образом подобранной поверхности можно использовать для «умножения» количества электронов в пучке. В электронных умножителях, предложенных впервые Л. А. Кубец-

ким, вторичные электроны, испущенные каждым из последовательно расположенных электродов, ускоряются электрическим полем и бомбардируют следующий электрод. С помощью таких приборов достигается усиление электронных пучков в сотни раз.

Автоэлектронная эмиссия. Если вблизи поверхности металла создать электрическое поле очень большой напряженности ($\sim 10^6$ в/см), наблюдается испускание электронов, называемое автоэлектронной (или холодной) эмиссией. Это явление иногда называют также вырыванием электронов электрическим полем. Автоэлектронная эмиссия была объяснена квантовой теорией. При наличии сильного поля препятствующий выходу электронов потенциальный барьер на поверхности металла выглядит так, как показано на рис. 188.

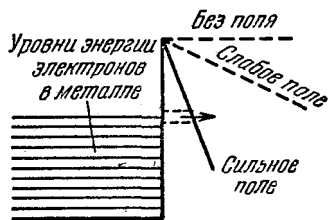


Рис. 188.

Согласно квантовой механике имеется отличная от нуля вероятность того, что элементарная частица пройдет через потенциальный барьер даже в том случае, когда ее энергия меньше, чем высота барьера. Частица как бы проходит через туннель в барьере, в связи с чем это явление называют туннельным эффектом. Вероятность туннельного эффекта растет с уменьшением ширины барьера. Поэтому автоэлектронная эмиссия наблюдается лишь в очень сильных полях.

Фотоионизация. Электромагнитное излучение («свет») состоит из элементарных частиц — фотонов. Энергия фотона равна $h\nu$, где h — постоянная Планка, ν — частота излучения. Фотон может быть поглощен молекулой (см. сноску на стр. 306), причем его энергия идет на возбуждение или ионизацию. В этом случае ионизация молекулы называется фотоионизацией. Непосредственную (прямую) фотоионизацию способно вызвать ультрафиолетовое излучение. Видимое излучение (обладающее меньшей частотой) может обусловить так называемую ступенчатую фотоионизацию. Энергия фотона видимого света недостаточна для отщепления электрона от молекулы. Однако ее хватает для того, чтобы

перевести молекулу в одно из возбужденных состояний. Для ионизации молекулы, находящейся в возбужденном состоянии, требуется меньше энергии, чем для ионизации молекулы в нормальном состоянии. Поэтому ионизация молекулы, возбужденной фотоном, может быть достигнута за счет ее соударения с другой молекулой.

В газовом разряде возможно возникновение коротковолнового излучения, способного вызвать прямую фотоионизацию. Достаточно быстрый электрон может при ударе не только ионизировать молекулу, но и перевести образовавшийся ион в возбужденное состояние. Переход иона в основное состояние сопровождается испусканием излучения меньшей длины волны (т. е. большей частоты), чем у излучения нейтральной молекулы. Энергия фотонов такого излучения достаточна для непосредственной фотоионизации.

Кроме перечисленных процессов, в некоторых видах самостоятельного газового разряда играет большую роль явление термоэлектронной эмиссии, рассмотренное в § 75. Имеет место также фотоэлектронная эмиссия (или внешний фотоэффект), заключающаяся в испускании электронов поверхностью металла или полупроводника при освещении ее светом с достаточно малой длиной волны. Однако роли фотоэлектронной эмиссии в различных видах самостоятельного разряда мы касаться не будем.

§ 88. Газоразрядная плазма

При некоторых видах самостоятельного разряда степень ионизации газа бывает очень большой. Газ в сильно ионизированном состоянии при условии, что суммарный заряд электронов и ионов в каждом элементарном объеме равен (или почти равен) нулю, называется *плазмой*¹⁾.

Плазма представляет собой особое состояние вещества. В таком состоянии находится вещество в недрах Солнца и других звезд, обладающих температурой в десятки миллионов градусов. Плазма, возникшая вслед-

¹⁾ Плазму определяют как сильно ионизированную квазинейтральную (т. е. почти нейтральную) среду, в которой хаотическое движение частиц преобладает над их направленным перемещением под действием внешнего электрического поля.

ствие высокой температуры вещества, называется высокотемпературной (или изотермической). Плазма, возникающая при газовом разряде, называется газоразрядной.

Для того чтобы плазма находилась в стационарном состоянии, необходимо наличие процессов, восполняющих убыль ионов в результате рекомбинации. В высокотемпературной плазме это осуществляется за счет термической ионизации, в газоразрядной плазме — за счет ударной ионизации электронами, ускоренными электрическим полем. Особую разновидность плазмы представляет собой ионосфера (один из слоев атмосферы). Высокая степень ионизации молекул ($\sim 1\%$) поддерживается в этом случае за счет фотоионизации, обусловленной коротковолновым излучением Солнца.

Электроны в газоразрядной плазме принимают участие в двух движениях — в хаотическом движении с некоторой средней скоростью \bar{v} и в упорядоченном движении в направлении, противоположном E , со средней скоростью \bar{u} (гораздо меньшей, чем \bar{v}). Условия в плазме таковы, что электрическое поле не только обуславливает упорядоченное движение электронов, но и увеличивает скорость \bar{v} их хаотического движения.

Пусть в момент включения поля в газе имеется некоторое число электронов, средняя скорость которых соответствует температуре газа $T_r \left(\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT_r \right)$. За время между двумя последовательными соударениями с молекулами газа электрон проходит в среднем путь λ (рис. 189; траектория электрона слегка искривлена под действием силы $-eE$). При этом поле совершает над ним работу

$$A = eEl_f, \quad (88.1)$$

где l_f — проекция перемещения электрона на направление силы.

Вследствие соударений с молекулами направление движения электрона все время изменяется случайным

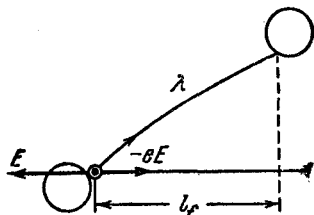


Рис. 189.

образом. Поэтому работа (88.1) для отдельных участков траектории имеет разную величину и разный знак. На одних участках поле увеличивает энергию электрона, на других — уменьшает. Если бы упорядоченное движение электронов отсутствовало, среднее значение l_f , а следовательно и работы (88.1) было равно нулю. Однако наличие упорядоченного движения приводит к тому, что среднее значение работы A отлично от нуля и притом положительно. Оно равно

$$\bar{A} = eE\bar{u}\tau = eE\bar{u} \frac{\lambda}{\bar{v}}, \quad (88.2)$$

где τ — средняя продолжительность свободного пробега электрона ($\bar{u} \ll \bar{v}$).

Следовательно, поле в среднем увеличивает энергию электрона. Правда, электрон, столкнувшись с молекулой, передает ей часть своей энергии. Но, как мы выяснили в предыдущем параграфе, доля δ переданной при упругом ударе энергии очень мала — она в среднем равна $\delta = 2m/M$, где m — масса электрона, а M — масса молекулы¹⁾.

В разреженном газе (λ обратно пропорциональна давлению) и при достаточно большой напряженности поля E работа (88.2) может превосходить энергию $\delta \frac{mv^2}{2}$, передаваемую в среднем молекуле при каждом столкновении. Поэтому энергия хаотического движения электрона будет расти. В конце концов она достигнет значения, достаточного для того, чтобы возбудить или ионизировать молекулу. Начиная с этого момента часть соударений перестает быть упругой и сопровождается большой потерей энергии. Поэтому средняя доля передаваемой энергии δ увеличивается.

Таким образом, энергию, необходимую для ионизации, электроны приобретают не за один свободный пробег, а постепенно накапливают ее на протяжении ряда пробегов. Ионизация приводит к возникновению большого количества электронов и положительных ионов — появляется плазма.

¹⁾ Согласно формуле (87.1) при центральном ударе $\delta = 4m/M$. В случае, когда электрон и молекула лишь слегка «задевают» друг друга, $\delta \approx 0$.

Энергия электронов плазмы определяется условием, что средняя величина работы, совершаемой полем над электроном за один свободный пробег, равна средней величине энергии, отдаваемой электроном при соударении с молекулой:

$$eE\bar{u}\frac{\lambda}{\bar{v}} = \delta \frac{m\bar{v}^2}{2}$$

(в этом соотношении δ есть сложная функция скорости \bar{v}).

Опыт показывает, что для электронов в газоразрядной плазме имеет место максвелловское распределение по скоростям. Вследствие слабого взаимодействия электронов с молекулами (δ при упругом ударе очень мало, а относительное количество неупругих соударений незначительно) средняя скорость хаотического движения электронов оказывается во много раз больше скорости, соответствующей температуре газа T_g . Если ввести температуру электронов T_e , определив ее из соотношения

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT_e,$$

то для T_e получается значение порядка нескольких десятков тысяч градусов. Отличие T_g и T_e свидетельствует о том, что между электронами и молекулами в газоразрядной плазме нет термодинамического равновесия¹⁾.

Концентрация носителей тока в плазме очень велика. Поэтому плазма обладает хорошей электропроводностью. Подвижность электронов, как уже отмечалось, примерно на три порядка больше, чем у ионов, вследствие чего ток в плазме создается в основном электронами.

§ 89. Тлеющий разряд

Самостоятельный разряд принимает разнообразные формы в зависимости от давления газа, конфигурации электродов и параметров внешней цепи. Физические явления, которыми сопровождается разряд, очень сложны. Мы ограничимся кратким рассмотрением основных видов самостоятельного разряда, опуская ряд деталей.

¹⁾ В высокотемпературной плазме средняя энергия молекул, электронов и ионов одинакова. Этим объясняется ее другое название — изотермическая.

Тлеющий разряд возникает при низких давлениях. Его можно наблюдать в стеклянной трубке длиной около 0,5 м, с впаянными у концов плоскими металлическими электродами (рис. 190). На электроды подается напряжение порядка 1000 в. При атмосферном давлении ток через трубку не течет. Если понижать давление в трубке, то примерно при 40 мм рт. ст. возникает разряд в виде светящегося извилистого тонкого шнура, соединяющего

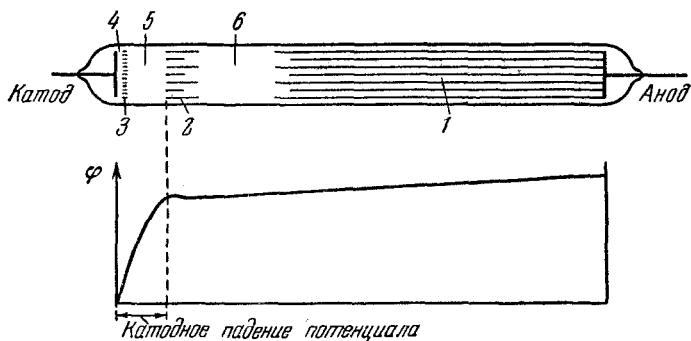


Рис. 190.

анод с катодом. По мере понижения давления шнур утолщается и приблизительно при 5 мм рт. ст. заполняет все сечение трубки — устанавливается тлеющий разряд. Его основные части показаны на рис. 190. Вблизи катода располагается тонкий светящийся слой, называемый катодной светящейся пленкой 3. Между катодом и светящейся пленкой находится астоново темное пространство 4. По другую сторону светящейся пленки помещается слабо светящийся слой, по контрасту кажущийся темным и называемый круковым темным пространством 5. Этот слой переходит в светящуюся область, которую называют тлеющим свечением 2. Все перечисленные выше слои образуют катодную часть тлеющего разряда.

С тлеющим свечением граничит темный промежуток — фарадеево темное пространство 6. Граница между ними размыта. Вся остальная часть трубки заполнена светящимся газом: ее называют положи-

тельным столбом 1. При понижении давления катодная часть разряда и фарадеево темное пространство расширяются, а положительный столб укорачивается. При давлении порядка 1 мм рт. ст. положительный столб распадается на ряд чередующихся темных и светлых изогнутых слоев — страт.

Измерения, проведенные с помощью зондов (тоненьких проволочек, впаянных в разных точках вдоль трубки), а также другими методами, показали, что потенциал изменяется вдоль трубки неравномерно (см. график на рис. 190). Почти все падение потенциала приходится на первые три участка разряда по круковому темное пространство включительно (катодное падение потенциала). В области тлеющего свечения потенциал не изменяется — здесь напряженность поля равна нулю. Наконец, в фарадеевом темном пространстве и положительном столбе потенциал медленно растет. Такое распределение потенциала вызвано образованием в области крукова темного пространства положительного пространственного заряда, обусловленного повышенной концентрацией положительных ионов.

Основные процессы, необходимые для поддержания тлеющего разряда, происходят в его катодной части. Остальные части разряда не существенны, они могут даже отсутствовать (при малом расстоянии между электродами или при низком давлении). Основных процессов два. Это — вторичная электронная эмиссия из катода, обусловленная бомбардировкой его положительными ионами, и ударная ионизация электронами молекул газа.

Положительные ионы, ускоренные катодным падением потенциала, бомбардируют катод и выбивают из него электроны. Вторичные электроны вылетают из катода с небольшой скоростью. В астоновом темном пространстве они ускоряются электрическим полем. Приобретая достаточную энергию, электроны начинают возбуждать молекулы газа, в результате чего возникает катодная светящаяся пленка. Электроны, пролетевшие без столкновений в область крукова темного пространства, имеют большую энергию, вследствие чего они чаще ионизируют молекулы, чем возбуждают (см. рис. 187). Таким образом, интенсивность свечения газа уменьшается, но зато в круковом темном пространстве образуется много

электронов и положительных ионов. Образовавшиеся ионы вначале имеют очень малую скорость. Поэтому в круковом темном пространстве создается положительный пространственный заряд, что приводит к перераспределению потенциала вдоль трубки и к возникновению катодного падения потенциала.

Электроны, возникшие при ионизации в круковом темном пространстве, вместе с первоначальными электронами проникают в область тлеющего свечения, которая характеризуется высокой концентрацией электронов и положительных ионов и суммарным пространственным зарядом, близким к нулю (плазма). Поэтому напряженность поля здесь очень мала — поле не ускоряет электроны и ионы. Благодаря высокой концентрации электронов и ионов в области тлеющего свечения идет интенсивный процесс рекомбинации, сопровождающийся излучением выделяющейся при этом энергии. Таким образом, тлеющее свечение есть в основном свечение рекомбинации.

Из области тлеющего свечения в фарадеево темное пространство электроны и положительные ионы проникают за счет диффузии (на границе между этими областями поле отсутствует, но зато имеется большой градиент концентрации электронов и ионов). Вследствие меньшей концентрации заряженных частиц вероятность рекомбинации в фарадеевом темном пространстве сильно падает. Поэтому фарадеево пространство и является темным.

В фарадеевом темном пространстве уже имеется поле. Увлекаемые этим полем электроны постепенно накапливают энергию, так что в конце концов возникают условия, необходимые для существования плазмы. Положительный столб представляет собой газоразрядную плазму. Он выполняет роль проводника, соединяющего анод с катодными частями разряда. Свечение положительного столба вызвано переходом возбужденных молекул в основное состояние. Молекулы разных газов испускают при этом излучение разной длины волны. Поэтому свечение положительного столба имеет характерный для каждого газа цвет. Это обстоятельство используется в газосветных трубках для изготовления светящихся надписей и реклам. Эти надписи представляют собой не что иное, как положительный столб тлеющего разряда. Нео-

новые газоразрядные трубки дают красное свечение, аргоновые — синевато-зеленое и т. д.

Если постепенно уменьшать расстояние между электродами, катодная часть разряда остается без изменений, длина же положительного столба уменьшается, пока этот столб не исчезает совсем. В дальнейшем исчезает фарадеево темное пространство и начинает сокращаться длина тлеющего свечения, причем положение границы этого свечения с кружковым темным пространством остается неизменным. Когда расстояние анода до этой границы делается очень малым, разряд прекращается.

В сигнальных неоновых лампах (рис. 191) электроды сближены так, что положительный столб в них отсутствует и излучение света обусловлено тлеющим свечением. Путем специальной обработки поверхностей электродов напряжение зажигания разряда можно снизить примерно до 50 в. Эти лампы применяются для сигнализации о наличии напряжения в данной сети.

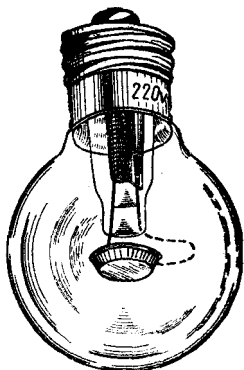


Рис. 191.

При понижении давления катодная часть разряда занимает все большую долю межэлектродного пространства. При достаточно низком давлении кружково темное пространство распространяется почти на весь сосуд. Свечение газа в этом случае перестает быть заметным, зато стенки трубки начинают светиться зеленоватым свечением. Большинство электронов, выбитых из катода и ускоренных катодным падением потенциала, долетает без столкновений с молекулами газа до стенок трубки и, ударяясь о них, вызывает свечение. По историческим причинам поток электронов, испускаемый катодом газоразрядной трубки при очень низких давлениях, получил название катодных лучей. Свечение, вызываемое бомбардировкой быстрыми электронами, называется катодolumинесценцией.

Если в катode газоразрядной трубки сделать узкий канал, часть положительных ионов проникает в пространство за катодом и образует резко ограниченный пучок

ионов, называемый канальовыми (или положительными) лучами. Такой способ получения пучка положительных ионов не утратил практического значения до наших дней.

§ 90. Дуговой разряд

В 1802 г. В. В. Петров обнаружил, что при разведении первоначально соприкасавшихся угольных электродов, подключенных к большой гальванической батарее, между электродами вспыхивает ослепительное свечение. При горизонтальном расположении электродов нагретый светящийся газ изгибается в виде дуги, в связи с чем открытое В. В. Петровым явление было названо вольтовой (или электрической) дугой.

Сила тока в дуге может достигать огромных значений (тысячи и десятки тысяч ампер) при напряжении в несколько десятков вольт.

Дуговой разряд может протекать как при низком (порядка нескольких миллиметров ртутного столба), так и при высоком (до 1000 ат) давлении. Основными процессами являются термоэлектронная эмиссия с раскаленной поверхности катода и термическая ионизация молекул, обусловленная высокой температурой газа. Почти все межэлектродное пространство заполнено высокотемпературной плазмой. Она служит проводником, по которому электроны, испущенные катодом, достигают анода.



Рис. 192.

Температура плазмы составляет около 6000°K . В дуге сверхвысокого давления (до 1000 ат) температура плазмы может достигать $10\,000^{\circ}\text{K}$ (напомним, что температура поверхности Солнца равна 5800°K). Вследствие бомбардировки положительными ионами катод раскаляется примерно до 3500°K . Анод, бомбардируемый мощным потоком электронов, разогревается еще больше. Это приводит к тому, что анод интенсивно испаряется и на его поверхности образуется углубление — кратер. Кратер является самым ярким местом дуги.

Дуговой разряд обладает падающей вольт-амперной характеристикой (рис. 192). Это объясняется тем, что при увеличении силы тока возрастают термоэлектронная

эмиссия с катода и степень ионизации газоразрядного промежутка.

Кроме описанной выше термоэлектронной дуги (т. е. разряда, обусловленного термоэлектронной эмиссией с раскаленной поверхности катода) бывает дуга с холодным катодом. В качестве катода в этом случае служит обычно жидкая ртуть, налитая в баллон, из которого удален воздух. Разряд происходит в парах ртути. Электроны вылетают из катода за счет автоэлектронной эмиссии. Необходимое для этого сильное поле у поверхности катода создается положительным пространственным зарядом, образованным ионами. Электроны испускаются не всей поверхностью катода, а небольшим ярко светящимся и непрерывно перемещающимся катодным пятном. Температура газа в этом случае невелика. Ионизация молекул в плазме происходит, как и при тлеющем разряде, за счет электронных ударов.

Дуговой разряд находит разнообразные применения. В 1882 г. русский инженер Н. Н. Бенардос предложил использовать электрическую дугу для сварки металлов. В 1888 г. Н. Г. Славянов усовершенствовал электросварку, заменив угольные электроды металлическими.

Электрическая дуга применяется в качестве мощного источника света. В дуговых лампах сверхвысокого давления (лампах СВД) разряд происходит между вольфрамовыми электродами в атмосфере паров ртути при давлении до 100 ат или в инертном газе (неоне, аргоне, криптоне или ксеноне) при давлении до 20 ат. Лампа такого типа изображена на рис. 193. Боковой электрод служит для зажигания лампы от источника высокого напряжения. В связи с тем, что лампа СВД сильно разогревается, ее баллон изготавливается из кварца (размягчающегося при более высокой температуре, чем стекло). Ртутная лампа в холодном состоянии содержит аргон при небольшом давлении (порядка нескольких миллиметров ртутного столба) и капельку ртути. Первоначально дуговой разряд возникает в аргоне. Когда

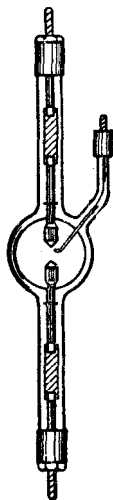


Рис. 193.

лампа нагревается, ртуть испаряется и в дальнейшем разряд идет в парах ртути.

Дуга, горящая в парах ртути, испускает мощный поток ультрафиолетового излучения. Ртутные лампы с баллоном из кварца (кварц пропускает ультрафиолетовые лучи; обычное стекло их поглощает) применяются в качестве источников ультрафиолетовых лучей в медицине и в научных исследованиях. В лампах дневного света стенки разрядной трубки покрываются специально подобранными веществами (люминофорами), которые под действием ультрафиолетового излучения паров ртути начинают светиться в свою очередь, но уже излучением, близким по спектральному составу к дневному свету. Такие источники света в несколько раз экономичнее, чем лампы накаливания.

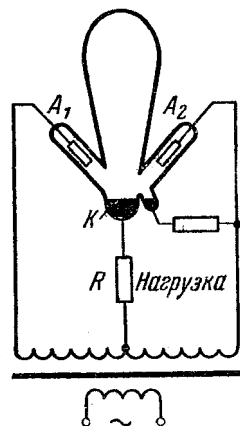


Рис. 194.

Дуговой разряд в парах ртути при низком давлении с ртутным катодом используется в ртутных выпрямителях. На рис. 194 дана схема двухполупериодного ртутного выпрямителя. Ток течет к катоду K от того из анодов A_1 или A_2 , который в данный момент находится

под положительным потенциалом по отношению к катоду. В результате через нагрузку R течет ток одного направления. Ртутный электрод в боковом отростке служит для зажигания разряда. Чтобы включить выпрямитель, колбу наклоняют до тех пор, пока ртуть катода и отростка не соединится. При возвращении колбы в вертикальное положение в месте разрыва ртути возникает дуга, после чего разряд переходит на один из анодов.

На дуговом разряде основано действие приборов, называемых газотроном и тиратроном. Газотрон представляет собой диод с калящимся катодом, заполненный парами ртути или аргоном при невысоком давлении. Электроны, испущенные катодом вследствие термоэлектронной эмиссии, ионизируют молекулы газа, что приводит к образованию газоразрядной плазмы (эти процессы типичны для дугового разряда). Хорошая проводимость

плазмы препятствует образованию вблизи катода электронного облака (как это имеет место в вакуумном диоде). Поэтому при небольшом напряжении между электродами (15—20 в) газотрон пропускает сильные токи (порядка 10 а). Так как ток течет через газотрон лишь при положительном (по отношению к катоду) напряжении на аноде, его используют для выпрямления тока. На рис. 195 приведена схема¹⁾ однополупериодного выпрямителя на газотроне (на схеме R — нагрузка, в которой используется выпрямленный ток). Собрав схему, изображенную на рис. 195, на двух газотронах можно осуществить двухполупериодное выпрямление.

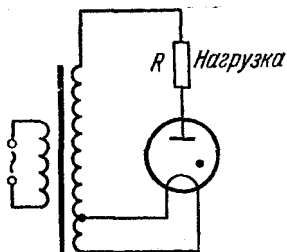


Рис. 195.

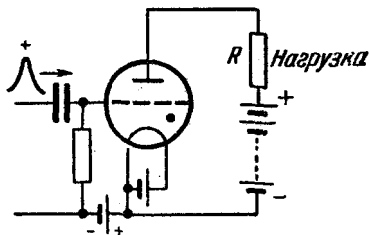


Рис. 196.

Тиратрон отличается от газотрона наличием третьего электрода — сетки. Этот прибор используется в качестве быстродействующего включателя тока. Соответствующая схема изображена на рис. 196. В нормальном состоянии сетка имеет по отношению к катоду отрицательный потенциал. Поэтому электроны, вылетевшие из катода, возвращаются полем обратно, и ток через тиратрон не течет. При подаче на сетку хотя бы кратковременного положительного импульса в тиратроне возникает дуговой разряд и начинает течь сильный ток. Образовавшаяся плазма, обладая высокой проводимостью, экранирует сетку²⁾, вследствие чего изменения потенциала на сетке не могут в дальнейшем воздействовать на разряд. Включение тока с помощью тиратрона осуществляется весьма быстро (за время порядка

¹⁾ На схемах газонаполненные лампы отличают от аналогичных вакуумных ламп точкой.

²⁾ Экранировка достигается тем, что вблизи сетки накапливаются ионы.

10^{-7} сек). Таким образом, тиратрон является безынерционным включателем тока и поэтому широко применяется в автоматике и телемеханике. Для прекращения тока нужно на короткое время ($\sim 10^{-5}$ сек) снять анодное напряжение. За это время плазма исчезает в результате рекомбинации, и снова устанавливается состояние, которое было до зажигания.

§ 91. Искровой и коронный разряды

Искровой разряд возникает, когда напряженность электрического поля достигает пробивного для данного газа значения $E_{\text{пр}}$. Величина $E_{\text{пр}}$ зависит от давления газа; для воздуха при атмосферном давлении она составляет около 30 000 в/см. С увеличением давления $E_{\text{пр}}$ возрастает. Согласно экспериментальному закону Пашена отношение пробивной напряженности поля к давлению приблизительно постоянно:

$$\frac{E_{\text{пр}}}{p} \approx \text{const.} \quad (91.1)$$

Искровой разряд сопровождается возникновением ярко светящегося извилистого, разветвленного канала, по которому проходит кратковременный импульс тока большой силы. Примером может служить молния; длина ее бывает до 10 км, диаметр канала — до 40 см, сила тока может достигать 100 000 и более ампер, продолжительность импульса составляет около 10^{-4} сек. Каждая молния состоит из нескольких (до 50) импульсов, следующих по одному и тому же каналу; их общая длительность может достигать нескольких секунд.

Температура газа в искровом канале бывает очень высокой — до $10\,000^\circ\text{К}$. Быстрый сильный нагрев газа приводит к резкому повышению давления и возникновению ударных и звуковых волн. Поэтому искровой разряд сопровождается звуковыми явлениями — от слабого треска при искре малой мощности до раскатов грома, раздающихся вслед за молнией.

Возникновению искры предшествует образование в газе сильно ионизированного канала, называемого стримером. Этот канал получается путем перекрытия отдельных электронных лавин, возникающих на пути искры. Родоначальником каждой лавины служит

электрон, образующийся путем фотоионизации. Схема развития стримера показана на рис. 197. Напряженность поля такова, что электрон, вылетевший за счет какого-либо процесса из катода, приобретает на длине свободного пробега энергию, достаточную для ионизации. Поэтому происходит размножение электронов — возникает лавина (образующиеся при этом положительные ионы не играют существенной роли вследствие гораздо меньшей подвижности; они лишь обуславливают пространственный заряд, вызывающий перераспределение потенциала). Излучение, испускаемое атомом, у которого при ионизации был вырван один из

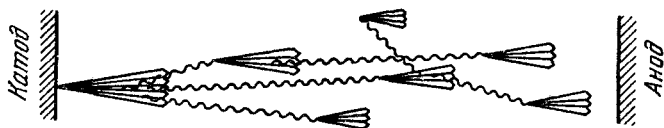


Рис. 197.

внутренних электронов (это излучение показано на схеме волнистыми линиями), вызывает фотоионизацию молекул, причем образовавшиеся электроны порождают все новые лавины. После перекрывания лавин образуется хорошо проводящий канал — стример, по которому устремляется от катода к аноду мощный поток электронов — происходит пробой.

Есть взять электроды такой формы, при которой поле в межэлектродном пространстве приблизительно однородно (например, в виде шаров достаточно большого диаметра), то искра будет возникать при вполне определенном напряжении $U_{пр}$, величина которого зависит от расстояния между шарами l ($E_{пр} = U_{пр}/l$). На этом основан искровой вольтметр, с помощью которого обычно измеряется высокое напряжение (порядка $10^3—10^5$ в). При измерениях определяется наибольшее расстояние $l_{мах}$, при котором возникает искра. Умножив затем $E_{пр}$ на $l_{мах}$, получают значение измеряемого напряжения.

Высокая температура и давление газа в искре обуславливают сильное механическое воздействие на электроды. Это явление лежит в основе разработанного

Б. Р. и Н. И. Лазаренко метода электронскровой обработки металлов.

Если один из электродов (или оба) имеет очень большую кривизну (например, электродом служит тонкая проволока или острие), вначале возникает так называемый коронный разряд. При дальнейшем увеличении напряжения этот разряд переходит в искровой или дуговой. При коронном разряде ионизация и возбуждение молекул происходят не во всем межэлектродном пространстве, а лишь вблизи электрода с малым радиусом кривизны, где напряженность поля достигает значений, равных или превышающих $E_{пр}$. В этой части разряда газ светится. Свечение имеет вид короны, окружающей электрод, чем и вызвано название этого вида разряда. Коронный разряд с острия имеет вид светящейся кисти, в связи с чем его иногда называют кистевым разрядом. В зависимости от знака коронирующего электрода говорят о положительной или отрицательной короне. Между коронирующим слоем и некоронирующим электродом лежит внешняя область короны. Режим пробоя ($E \geq E_{пр}$) существует только в пределах коронирующего слоя. Поэтому можно сказать, что коронный разряд представляет собой неполный пробой газового промежутка.

В случае отрицательной короны явления на катоде сходны с явлениями на катоде тлеющего разряда. Ускоренные сильным полем положительные ионы выбивают из катода электроны, которые вызывают ионизацию и возбуждение молекул в коронирующем слое. Во внешней области короны поле недостаточно для того, чтобы сообщить электронам энергию, необходимую для ионизации. Поэтому проникшие в эту область электроны дрейфуют под действием поля к аноду. Часть электронов захватывается молекулами, вследствие чего образуются отрицательные ионы. Таким образом, ток во внешней области обуславливается только отрицательными носителями — электронами и отрицательными ионами. В этой области разряд имеет несамостоятельный характер.

В положительной короне электронные лавины зарождаются у внешней границы короны и устремляются к коронирующему электроду — аноду. Образование электронов, порождающих лавины, обусловлено фото-

ионизацией, вызванной излучением коронирующего слоя. Носителями тока во внешней области короны служат положительные ионы, которые дрейфуют под действием поля к катоду.

Если оба электрода имеют большую кривизну (два коронирующих электрода), вблизи каждого из них протекают процессы, присущие коронирующему электроду данного знака. Оба коронирующие слоя разделяются внешней областью, в которой движутся встречные потоки положительных и отрицательных носителей тока. Такая корона называется двухполярной.

Упомянутый в § 86 при рассмотрении счетчиков самостоятельный газовый разряд представляет собой коронный разряд.

Толщина коронирующего слоя и сила разрядного тока растут с увеличением напряжения. При небольшом напряжении размеры короны малы и ее свечение незаметно. Такая микроскопическая корона возникает вблизи острия, с которого стекает электрический ветер (см. § 21).

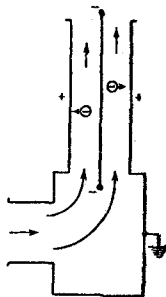


Рис. 198.

Корона, появляющаяся под действием атмосферного электричества на верхушках корабельных мачт, деревьев и т. п., получила в старину название огня святого Эльма.

В высоковольтных устройствах, в частности в линиях высоковольтных передач, коронный разряд приводит к вредным утечкам тока. Поэтому приходится принимать меры для его устранения. С этой целью провода высоковольтных линий берут достаточно большого диаметра, тем большего, чем выше напряжение линии.

Полезное применение в технике коронный разряд нашел в электрофильтрах. Очищаемый газ движется в трубе, по оси которой расположен отрицательный коронирующий электрод (рис. 198). Отрицательные ионы, имеющиеся в большом количестве во внешней области короны, оседают на загрязняющих газ частицах или капельках и увлекаются вместе с ними к внешнему некоронирующему электроду. Достигнув этого электрода, частицы нейтрализуются и оседают на нем. Впоследствии при ударах по трубе осадок, образованный уловленными частицами, осыпается в сборник.

ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

§ 92. Квазистационарные токи

Закон Ома (35.2) и вытекающие из него правила Кирхгофа (36.1) и (36.2) были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющихся тока и напряжения, если только их изменения происходят не слишком быстро. Электромагнитные возмущения распространяются по цепи с огромной скоростью, равной скорости света c . Если за время $\tau = l/c$, необходимое для передачи возмущения в самую отдаленную точку цепи, сила тока изменяется незначительно, то мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи будут практически одинаковыми. Токи, удовлетворяющие такому условию, называются квазистационарными. Для периодически изменяющихся токов условие квазистационарности запишется следующим образом:

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T,$$

где T — период изменений.

При размерах цепи порядка 3 м $\tau = 10^{-8}$ сек. Таким образом, вплоть до T порядка 10^{-6} сек (что соответствует частоте 10^6 гц) токи в такой цепи можно считать квазистационарными. Ток промышленной, частоты ($\nu = 50$ гц) квазистационарен для цепей длиной до ~ 100 км.

Мгновенные значения квазистационарных токов подчиняются закону Ома. Следовательно, для них справедливы и правила Кирхгофа.

Пусть к зажимам сопротивления R (рис. 199, а), не обладающего индуктивностью и емкостью ¹⁾ (такое сопротивление называется активным), приложено напряжение, изменяющееся по закону

$$U = U_m \cos \omega t \quad (92.1)$$

(U_m — амплитудное значение напряжения). При выполнении условия квазистационарности ток через сопротивление определяется законом Ома

$$i = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t. \quad (92.2)$$

Таким образом, между амплитудными значениями силы тока и напряжения имеется соотношение

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (92.3)$$

Соотношения между переменными токами и напряжениями делаются особенно наглядными, если изображать их (как и гармонические колебания) с помощью векторов (см. т. I, § 68). Выберем произвольное направление, которое назовем осью токов (рис. 199, б). Отложим вдоль этого направления вектор тока длиной I_m . Поскольку напряжение и ток в рассматриваемом случае изменяются синфазно, вектор напряжения также будет направлен вдоль оси токов; длина его равна RI_m . Совокупность векторов напряжений или токов образует векторную диаграмму данной цепи.

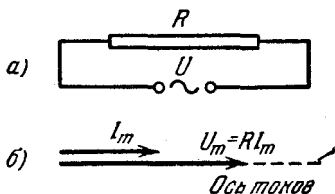


Рис. 199.

§ 93. Переменный ток, текущий через индуктивность

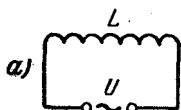
Подадим переменное напряжение (92.1) на концы индуктивности L (например, катушки) с пренебрежимо малыми сопротивлением и емкостью (рис. 220, а). В индуктивности начнет течь переменный ток, вследствие

¹⁾ Всякий проводник (например, прямолинейный отрезок провода) обладает некоторой емкостью и индуктивностью. Поэтому «чистые» активное сопротивление R , индуктивность L и емкость C являются абстракциями.

чего возникнет э. д. с. самоиндукции [см. формулу (59.9)]

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}$$

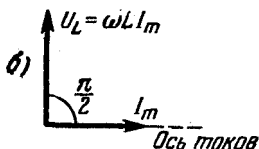
(полагаем, что L не зависит от i). Уравнение (35.1) закона Ома запишется следующим образом ($R = 0$, разность потенциалов равна U , $\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}_s$):



откуда

$$U_m \cos \omega t - L \frac{di}{dt} = 0,$$

$$L \frac{di}{dt} = U_m \cos \omega t. \quad (93.1)$$



В рассматриваемом случае все внешнее напряжение приложено к индуктивности L . Следовательно, величина

$$U_L = L \frac{di}{dt} \quad (93.2)$$

Рис. 200.

есть не что иное, как падение напряжения на индуктивности.

Перепишем уравнение (93.1) в виде

$$di = \frac{U_m}{L} \cos \omega t dt.$$

Интегрирование дает

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t + \text{const.}$$

Постоянной составляющей тока, очевидно, нет; поэтому $\text{const} = 0$. Таким образом,

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = I_m \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (93.3)$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}. \quad (93.4)$$

Сопоставляя соотношения (92.3) и (93.4), мы видим, что роль сопротивления в данном случае играет величина

$$X_L = \omega L, \quad (93.5)$$

которую называют реактивным индуктивным сопротивлением или просто индуктивным сопротивлением. Если L взять в генри, а ω — в сек^{-1} , то X_L будет выражено в омах.

Как видно из (93.5), величина индуктивного сопротивления растет с частотой ω . Постоянному току ($\omega = 0$) индуктивность не оказывает сопротивления. Заменяя в (93.1) U_m через ωLI_m , получим для падения напряжения на индуктивности следующее выражение:

$$U_L = \omega LI_m \cos \omega t. \quad (93.6)$$

Из сравнения выражений (93.3) и (93.6) вытекает, что падение напряжения на индуктивности опережает по фазе ток, текущий через индуктивность, на $\pi/2$. Если направить, как и на рис. 199, ось токов горизонтально, получается векторная диаграмма, изображенная на рис. 200, б.

Сдвиг по фазе между током и напряжением на индуктивности легко понять, если учесть, что производная косинуса имеет наибольшее значение в тот момент, когда косинус равен нулю, причем максимум производной достигается на $1/4$ периода раньше, чем максимум самого косинуса (рис. 201).

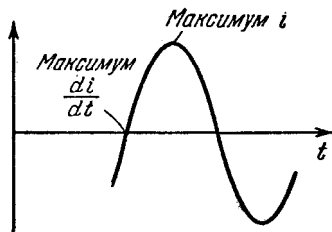


Рис. 201.

§ 94. Переменный ток, текущий через емкость

Пусть напряжение (92.1) подано на емкость C (рис. 202, а). Индуктивностью цепи и сопротивлением подводящих проводов будем пренебрегать. Емкость непрерывно перезаряжается, вследствие чего в цепи течет переменный ток. Поскольку сопротивление подводящих проводов пренебрежимо мало, напряжение на конденсаторе $U_C = \frac{q}{C}$ можно считать равным внешнему напряжению U :

$$U_C = \frac{q}{C} = U_m \cos \omega t. \quad (94.1)$$

Производная от q по t даст силу тока в цепи i . Умножим выражение (94.1) на C и продифференцируем по t , заменив \dot{q} через i :

$$i = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (94.2)$$

где

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{\left(\frac{1}{\omega C} \right)}. \quad (94.3)$$

Величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (94.4)$$

называется реактивным емкостным сопротивлением или просто емкостным сопротивлением. Если C взять в фарадах, а ω в сек^{-1} , то X_C будет выражено в омах.

Для постоянного тока ($\omega = 0$) $X_C = \infty$ — постоянный

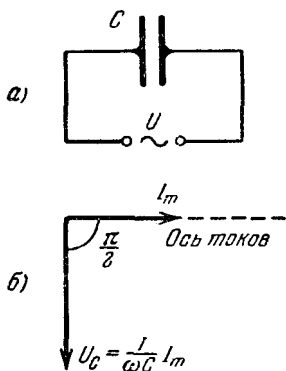


Рис. 202.

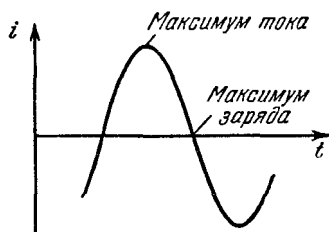


Рис. 203.

ток через конденсатор течь не может. Переменный ток ($\omega \neq 0$) может течь через конденсатор, причем оказываемое току сопротивление будет тем меньше, чем больше частота тока ω и емкость конденсатора C .

Заменяв в выражении (94.1) U_m через $\frac{1}{\omega C} I_m$, для падения напряжения на емкости получим

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t. \quad (94.5)$$

Сравнив (94.2) и (94.5), находим, что падение напряжения на емкости отстает по фазе от текущего через емкость тока на $\pi/2$ (см. векторную диаграмму на

рис. 202, б). Причина отставания заключена в том, что до тех пор, пока ток течет в одном и том же направлении, заряд на обкладках конденсатора растет. Сила тока проходит через максимум и начинает убывать (рис. 203), а заряд (а следовательно, и U_C) все еще продолжает расти, достигая максимума в тот момент, когда i обращается в нуль. Вслед затем ток изменяет направление и начинается убывание зарядов на обкладках.

§ 95. Цепь переменного тока, содержащая емкость, индуктивность и сопротивление

Рассмотрим цепь, составленную из активного сопротивления R , индуктивности L и емкости C (рис. 204, а). Подадим на концы этой цепи напряжение (92.1) частоты ω . В цепи возникнет переменный ток той же частоты, амплитуда I_m и фаза которого, очевидно, определяются параметрами цепи R , L и C . Этот ток вызовет

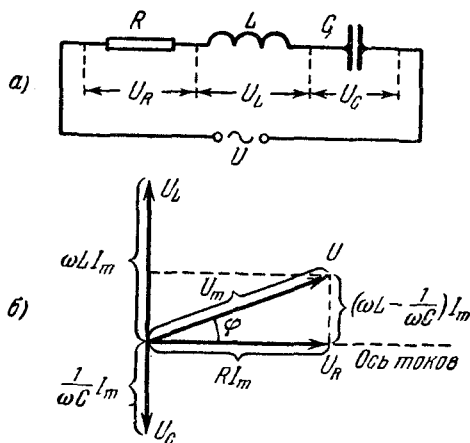


Рис. 204.

на активном сопротивлении падение напряжения U_R , амплитуда которого равна $R I_m$, а фаза совпадает с фазой тока (см. рис. 199, б). Поэтому на векторной диаграмме (рис. 204, б) вектор, изображающий U_R , нужно отложить по оси токов. Падение напряжения на индуктивности U_L (с амплитудой $\omega L I_m$) опережает ток по

фазе на $\pi/2$ (см. рис. 200, б); поэтому вектор, изображающий U_L , должен быть повернут относительно оси токов на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Наконец, падение напряжения на емкости U_C (имеющее амплитуду $\frac{1}{\omega C} I_m$) отстает от тока по фазе на $\pi/2$ (см. рис. 202, б); следовательно, вектор, изображающий U_C , должен быть повернут относительно оси токов на угол $\pi/2$ по часовой стрелке.

Падения напряжений U_R , U_L и U_C в сумме должны быть равны приложенному к цепи напряжению U . Поэтому, сложив векторы, изображающие U_R , U_L и U_C , мы получим вектор, изображающий U (его длина равна U_m). Этот вектор образует с осью токов угол φ , тангенс которого, как видно из рис. 204, б, равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (95.1)$$

Угол φ дает разность фаз между напряжением U и силой тока i . Из прямоугольного треугольника, гипотенуза которого U_m , следует, что

$$(RI_m)^2 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \right]^2 = U_m^2,$$

откуда

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (95.2)$$

Итак, если напряжение на зажимах цепи изменяется по закону

$$U = U_m \cos \omega t,$$

то в цепи течет ток

$$i = I_m \cos (\omega t - \varphi), \quad (95.3)$$

где φ и I_m определяются формулами (95.1) и (95.2).

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (95.4)$$

называется полным сопротивлением цепи. Величина

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (95.5)$$

называется реактивным сопротивлением. Таким образом,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (95.6)$$

Ток отстает от напряжения ($\varphi > 0$) или опережает его ($\varphi < 0$) в зависимости от соотношения между X_L и X_C . При $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ток отстает от напряжения, при $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ ток опережает напряжение. Если $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, изменения тока и напряжения происходят синфазно ($\varphi = 0$). При удовлетворяющей этому условию частоте

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (95.7)$$

полное сопротивление цепи Z имеет наименьшее, возможное при данных R , L и C , значение, равное R . Соответственно сила тока достигает наибольшего (возможного при данном U_m) значения. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи. Падения напряжения на емкости U_C и индуктивности U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется резонансом напряжений, а частота (95.7) — резонансной частотой. Векторная диаграмма для случая резонанса напряжений показана на рис. 205.

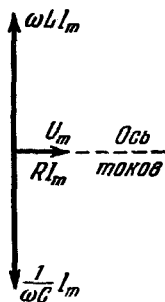


Рис. 205.

Подставив в выражения для амплитуды напряжения на индуктивности ($U_L = \omega L I_m$) и емкости ($U_C = \frac{1}{\omega C} I_m$) значение резонансной частоты (95.7), получим

$$U_{L\text{рез}} = U_{C\text{рез}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m.$$

Если $\sqrt{\frac{L}{C}} > R$, напряжение на индуктивности и на емкости превышает напряжение, приложенное к цепи. Явление резонанса напряжений характерно тем, что полное сопротивление цепи оказывается чисто активным (ток и напряжение изменяются синфазно) и имеет

наименьшую возможную при данных параметрах цепей величину.

Если емкость в цепи отсутствует, приложенное напряжение равно сумме падений напряжения на сопротивлении и индуктивности: $U = U_R + U_L$. Соответствующая векторная диаграмма изображена на рис. 206. В этом случае, как видно из рисунка,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}, \quad I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

Формулы (95.1) и (95.2) совпадают с полученными нами выражениями, если положить в них $\frac{1}{\omega C} = 0$, т. е.

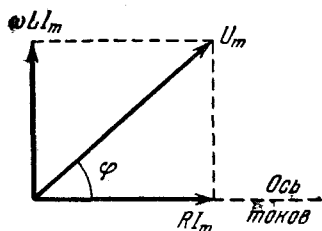


Рис. 206.

$C = \infty$. Таким образом, отсутствие емкости в цепи означает $C = \infty$, а не $C = 0$, как казалось бы на первый взгляд. Это можно пояснить следующим образом. Постепенный переход от цепи, содержащей емкость, к цепи без емкости можно осуществить, сближая обкладки конденсатора до их полного

соприкосновения. При этом зазор между обкладками d стремится к нулю, а величина емкости стремится к бесконечности [см. формулу (25.2)].

§ 96. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности, выделяемой в цепи, равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока [ср. с формулой (37.2)]:

$$P(t) = U(t) i(t) = U_m \cos \omega t I_m \cos (\omega t - \varphi).$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta),$$

выражению для мгновенной мощности можно придать вид

$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + \frac{1}{2} U_m I_m \cos (2\omega t - \varphi). \quad (96.1)$$

Практический интерес представляет среднее по времени значение $P(t)$, которое мы обозначим просто P . Так как среднее значение $\cos(2\omega t - \varphi)$ равно нулю,

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi. \quad (96.2)$$

Таким образом, мгновенная мощность (96.1) колеблется около среднего значения (96.2) с частотой 2ω , в два раза превышающей частоту тока (рис. 207).

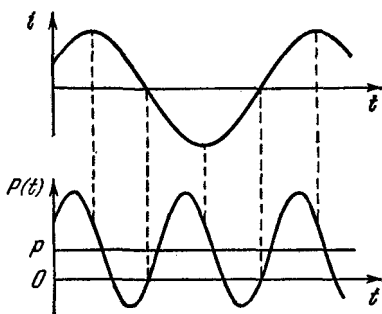


Рис. 207.

Если ток в цепи не совершает механической работы, средняя мощность (96.2) выделяется в активном сопротивлении в виде тепла. В соответствии с формулой (95.1)

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{R}{Z}. \quad (96.3)$$

Подставив это значение $\cos \varphi$ в формулу (96.2) и учитывая, что $\frac{U_m}{Z} = I_m$ [см. формулу (95.2)], получим

$$P = \frac{R I_m^2}{2}. \quad (96.4)$$

Такую же мощность развивает постоянный ток, сила которого равна

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (96.5)$$

Величина (96.5) называется действующим (или эффективным) значением силы тока. Аналогично величина

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (96.6)$$

называется действующим значением напряжения.

С использованием действующих значений формуле (96.2) для средней мощности можно придать вид

$$P = UI \cos \varphi. \quad (96.7)$$

В выражение для мощности входит множитель $\cos \varphi$, который называют коэффициентом мощности. Если реактивное сопротивление $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ равно нулю (это будет, в частности, при $X_L = X_C = 0$), то согласно (96.3) $\cos \varphi = 1$ и $P = UI$. При чисто реактивном сопротивлении цепи ($R = 0$) $\cos \varphi = 0$, поэтому и средняя мощность, выделяемая в цепи, равна нулю. В этом случае одну четверть периода тока энергия поступает из внешней сети в цепь, а следующую четверть периода возвращается обратно (мгновенная мощность изменяется с частотой 2ω). Таким образом, при $\cos \varphi = 0$ ни при какой силе тока невозможно получить в цепи среднюю мощность, отличную от нуля. В технике стремятся сделать $\cos \varphi$ как можно больше. При малом $\cos \varphi$ для выделения в цепи необходимой мощности нужно пропускать ток большей силы. При этом возрастают потери в подводящих проводах и приходится увеличивать их сечение.

§ 97. Символический метод

Расчеты цепей переменного тока значительно упрощаются, если применять так называемый символический метод. Этот метод основывается на том, что, как известно

из курса математики, каждому вектору A , расположенному в координатной плоскости (рис. 208), можно сопоставить комплексное число

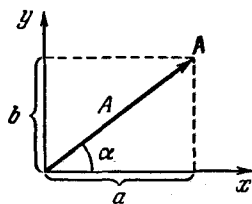


Рис. 208.

$$\hat{A} = a + bj = Ae^{j\alpha}, \quad (97.1)$$

где a и b — проекции вектора на координатные оси (начало вектора предполагается совмещенным с началом координат), A — модуль комплексного числа (совпадающий с модулем вектора), α — аргумент комплекс-

ного числа (совпадающий с углом между вектором и осью x), j — мнимая единица¹⁾.

Между величинами a, b, A и α имеются следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{b}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (97.2)$$

При сложении комплексных чисел складываются отдельно их вещественные и мнимые части:

$$\hat{A} = \sum \hat{A}_k = \sum a_k + j \sum b_k.$$

Легко видеть, что \hat{A} соответствует сумме векторов, изображаемых комплексными числами \hat{A}_k (рис. 209).

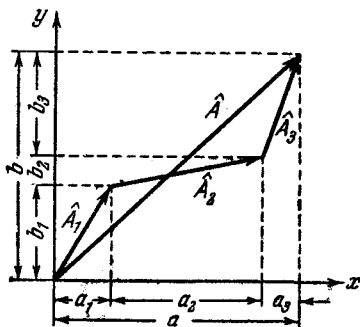


Рис. 209.

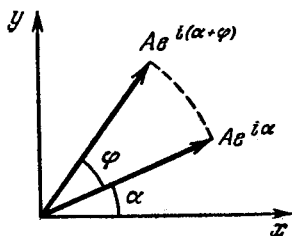


Рис. 210.

Из правила перемножения двух комплексных чисел

$$Ae^{j\alpha} \cdot Be^{j\beta} = ABe^{j(\alpha+\beta)}$$

вытекает, что умножение комплексной величины $\hat{A} = Ae^{j\alpha}$, изображающей вектор A (рис. 210), на

¹⁾ В отличие от принятого в математике обозначения i , в электротехнике $\sqrt{-1}$ обозначают буквой j . Использование этого обозначения, а также обозначение углов и фаз буквой φ не сможет вызвать недоразумений, так как в главах XV и XVI мы не будем прибегать к понятиям плотности тока и потенциала.

В электротехнике для обозначения комплексных величин вместо «крышечки» (например, \hat{U}) применяется точка (\dot{U}). Мы не можем воспользоваться таким обозначением, поскольку точка над символом величины в физике всегда означает производную по времени.

комплексное число $e^{j\varphi}$ равнозначно повороту вектора A на угол φ против часовой стрелки. Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $e^{j\varphi} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$. Таким образом, умножение на j равнозначно повороту вектора на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Аналогично умножение на $1/j = -j$ равнозначно повороту вектора на угол $\pi/2$ по часовой стрелке.

Чтобы продемонстрировать преимущества символического метода, произведем с его помощью вычисление падений напряжения на индуктивности и емкости. Формула (93.2) запишется в символическом виде следующим образом:

$$\hat{U}_L = L \frac{d\hat{i}}{dt}.$$

Если через индуктивность течет ток

$$\hat{i} = I_m e^{j\omega t}, \quad (97.3)$$

то

$$\hat{U}_L = L \frac{d}{dt} (I_m e^{j\omega t}) = j\omega L I_m e^{j\omega t} = j\omega L \hat{i}. \quad (97.4)$$

Таким образом, для того чтобы получить вектор напряжения U_L , нужно вектор силы тока умножить на ωL и повернуть против часовой стрелки на угол $\pi/2$. Это согласуется с рис. 200, б.

Согласно (94.1) $U_C = q/C$. Заряд на конденсаторе можно записать в виде

$$q = \int i dt.$$

Подставив это выражение в формулу для U_C и перейдя к символической записи, получим

$$\hat{U}_C = \frac{1}{C} \int \hat{i} dt.$$

Если в цепи течет ток (97.3),

$$\hat{U}_C = \frac{1}{C} \int I_m e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega C} I_m e^{j\omega t} = -j \frac{1}{\omega C} \hat{i} \quad (97.5)$$

(постоянная составляющая напряжения предполагается отсутствующей; поэтому постоянная интегрирования при-

нята равной нулю). Полученный результат согласуется с рис. 202, б.

Падение напряжения на активном сопротивлении, очевидно, равно

$$\hat{U}_R = R\hat{i}. \quad (97.6)$$

В случае цепи, изображенной на рис. 204, а, сумма величин (97.4), (97.5) и (97.6) даст внешнее напряжение \hat{U} :

$$R\hat{i} + j\omega L\hat{i} - j\frac{1}{\omega C}\hat{i} = \hat{U}.$$

Вынеся \hat{i} за скобки, получим

$$\hat{i}\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] = \hat{U}. \quad (97.7)$$

Величина

$$\hat{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX \quad (97.8)$$

называется комплексным сопротивлением. В соответствии с формулами (97.2) его модуль равен полному сопротивлению (95.4), а аргумент определяется формулой (95.1), т. е. равен φ — сдвигу фаз между напряжением и током. Следовательно,

$$\hat{Z} = Ze^{j\varphi}. \quad (97.9)$$

С введением комплексного сопротивления формула (97.7) принимает вид

$$\hat{i}\hat{Z} = \hat{U}, \quad (97.10)$$

совпадающий с выражением закона Ома для постоянного тока.

Из соотношения

$$\hat{U} = \hat{i}\hat{Z} = \hat{i}Ze^{j\varphi}$$

вытекает, что вектор напряжения \hat{U} можно получить, умножив вектор силы тока \hat{i} на Z и повернув против часовой стрелки на угол φ . Это согласуется с рис. 204, б.

Представим себе последовательную цепь, отдельные участки которой характеризуются комплексными сопро-

тивлениями \hat{Z}_k (рис. 211). Согласно (97.10) падение напряжения на каждом из участков равно

$$\hat{U}_k = \hat{i} \hat{Z}_k.$$

Сумма всех \hat{U}_k должна быть равна напряжению \hat{U} , приложенному к цепи:

$$\hat{U} = \sum \hat{i} \hat{Z}_k = \hat{i} \sum \hat{Z}_k = \hat{i} \hat{Z}.$$

Таким образом, комплексное сопротивление \hat{Z} последовательной цепи равно сумме комплексных сопротивлений отдельных ее участков:

$$\hat{Z} = \sum \hat{Z}_k. \quad (97.11)$$

При параллельном соединении элементов цепи, каждый из которых характеризуется комплексным сопротивлением \hat{Z}_k (рис. 212), полный ток равен

$$\hat{i} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}},$$

где \hat{U} — приложенное напряжение, \hat{Z} — комплексное сопротивление цепи. Вместе с тем ток \hat{i} должен быть

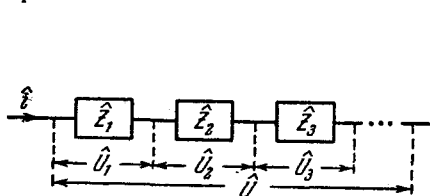


Рис. 211.

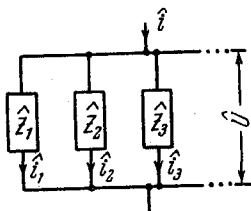


Рис. 212.

равен сумме токов \hat{i}_k , текущих по отдельным элементам цепи и определяемых выражением $\hat{i}_k = \hat{U} / \hat{Z}_k$,

$$\hat{i} = \sum \frac{\hat{U}}{\hat{Z}_k}.$$

Приравняв оба выражения для \hat{i} , получим формулу для вычисления комплексного сопротивления параллельной цепи

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \sum \frac{1}{\hat{Z}_k}. \quad (97.12)$$

Правила Кирхгофа в комплексной форме записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sum \hat{i}_k &= 0, \\ \sum \hat{Z}_k \hat{i}_k &= \sum \hat{\mathcal{E}}_k, \end{aligned} \right\} \quad (97.13)$$

где $\hat{\mathcal{E}}_k = \mathcal{E}_{mk} e^{j(\omega t + \alpha_k)}$ есть k -я э. д. с., действующая в данном контуре.

Все полученные в настоящем параграфе формулы остаются справедливыми, если вместо амплитудных взять действующие значения токов, напряжений и э. д. с.

§ 98. Резонанс токов

Рассмотрим цепь, образованную включенными параллельно индуктивностью и емкостью (рис. 213). Предположим, что активное сопротивление обеих ветвей настолько мало, что им можно пренебречь. В этом случае согласно формулам (97.4) и (97.5)

$$\left. \begin{aligned} \hat{i}_1 &= j\omega C \hat{U}; \\ \hat{i}_2 &= \frac{\hat{U}}{j\omega L} = -j \frac{\hat{U}}{\omega L} \end{aligned} \right\} \quad (98.1)$$

($\hat{U}_C = \hat{U}_L = \hat{U}$).

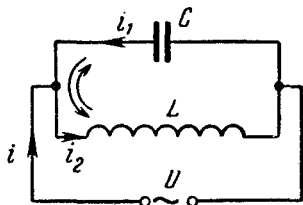


Рис. 213.

Из выражений (98.1) следует, что токи i_1 и i_2 находятся в противофазе (ток в индуктивности отстает от U на $\pi/2$, ток в емкости опережает U на $\pi/2$). Ток в подводящих проводах \hat{i} равен сумме токов \hat{i}_1 и \hat{i}_2 :

$$\hat{i} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 = j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \hat{U}.$$

При условии, что

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad (98.2)$$

ток \hat{i} в подводящих проводах будет отсутствовать, хотя токи \hat{i}_1 и \hat{i}_2 в отдельных цепях могут быть очень велики. Это явление называется резонансом токов. Для резонансной частоты из условия (98.2) получается такое же значение, как и при резонансе напряжений [см. формулу (95.7)].

При резонансе токи \hat{i}_1 и \hat{i}_2 одинаковы по амплитуде и, как уже отмечалось, противоположны по фазе. Следовательно, в контуре, образованном индуктивностью и емкостью, циркулирует ток, непрерывно перезаряжая обкладки конденсатора.

Соотношение между токами \hat{i}_1 и \hat{i}_2 можно изобразить наглядно с помощью векторной диаграммы. На диаграмме напряжений (см. рис. 204, б) векторы \hat{U} откладывались относительно оси токов. При построении диаграммы токов векторы \hat{i} нужно откладывать относительно оси напряжений. Выберем в качестве этой оси

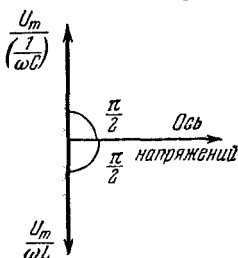


Рис. 214.

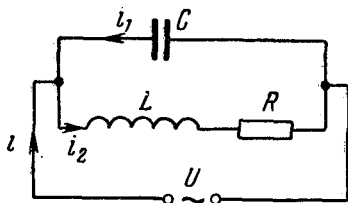


Рис. 215.

ось x (рис. 214). Ток в индуктивности отстает от напряжения на $\pi/2$ и потому изображается вектором, повернутым относительно оси напряжений по часовой стрелке на угол $\pi/2$. Ток в емкости опережает напряжение на $\pi/2$, соответственно он повернут относительно оси напряжений против часовой стрелки на угол $\pi/2$. При резонансе длины векторов обоих токов одинаковы, результирующий ток равен нулю.

Практически индуктивность (например, катушка) всегда обладает некоторым активным сопротивлением R^1) (на рис. 215 это сопротивление и сама индуктивность изображены раздельно). Следовательно, отставание тока от напряжения будет меньше $\pi/2$ — оно определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

¹⁾ Это относится также и к конденсатору; однако активное сопротивление в цепи конденсатора может быть сделано значительно меньше, чем в цепи индуктивности.

В этом случае векторы \hat{i}_1 и \hat{i}_2 не коллинеарны и сумма их не может быть равной нулю (рис. 216, а). Комплексные сопротивления обеих ветвей равны (см. рис. 215)

$$\hat{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C}, \quad \hat{Z}_2 = R + j\omega L.$$

Сопротивление всей цепи будем вычислять по формуле (97.12)

$$\frac{1}{\hat{Z}} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{(1 - \omega^2 LC) + j\omega CR}{R + j\omega L},$$

откуда

$$\hat{Z} = \frac{R + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega CR}.$$

Умножив числитель и знаменатель на величину, комплексно сопряженную знаменателю, получим

$$\hat{Z} = \frac{R + j[\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}. \quad (98.3)$$

Модуль \hat{Z} даст полное сопротивление параллельной цепи, а отношение реактивной и активной составляющих \hat{Z} — тангенс угла φ , определяющего сдвиг фаз между напряжением и током.

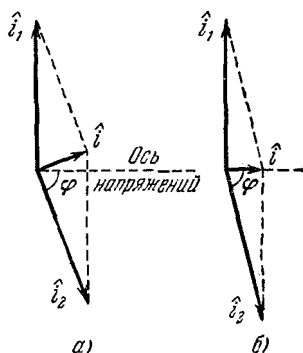


Рис. 216.

Можно показать, что максимум полного сопротивления Z (т. е. резонанс токов) достигается при условии, что реактивная составляющая \hat{Z} обращается в нуль и,

следовательно, полное сопротивление становится чисто активным (рис. 216, б). Резонансную частоту можно найти, приравняв нулю мнимую часть выражения (98.3)

$$\omega L (1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2 = 0.$$

Отсюда

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}. \quad (98.4)$$

При $R = 0$ эта формула переходит в (95.7).

Итак, резонанс токов характерен тем, что полное сопротивление цепи оказывается чисто активным и имеет наибольшую, возможную при данных параметрах цепи величину (в случае резонанса напряжений Z имеет наименьшую величину). При этом токи i_1 и i_2 значительно превышают текущий через источник ток i . Развиваемая источником мощность выделяется в активном сопротивлении цепи R .

Для тока частоты (98.4) контур с малым R имеет очень большое сопротивление, тем большее, чем меньше R (при $R \rightarrow 0$ сопротивление контура Z стремится к бесконечности).

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 99. Свободные колебания в контуре без активного сопротивления

Электрические колебания могут возникать в цепи, содержащей индуктивность и емкость. Такая цепь называется колебательным контуром. На рис. 217, *а* изображены последовательные стадии колебательного процесса в идеализированном контуре с активным сопротивлением, равным нулю.

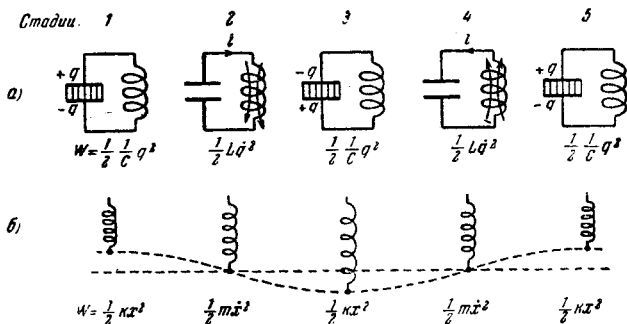


Рис. 217.

Для того чтобы вызвать колебания, можно присоединить отключенный от индуктивности конденсатор к источнику тока, вследствие чего на обкладках возникнут разноименные заряды величины q_m (стадия 1). Между обкладками возникнет электрическое поле, энергия которого равна $\frac{1}{2} \frac{1}{C} q_m^2$ [см. формулу (29.1)].

Если затем отключить источник тока и замкнуть конденсатор на индуктивность, емкость начнет разряжаться и в контуре потечет ток. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, но зато возникнет все возрастающая энергия магнитного поля, обусловленного током, текущим через индуктивность. Эта энергия равна $\frac{1}{2} Li^2$ [см. формулу (61.4)].

Так как активное сопротивление цепи равно нулю, полная энергия, слагающаяся из энергии электрического поля $\frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$ и энергии магнитного поля $\frac{1}{2} Li^2$, не расходуется на нагревание и будет оставаться постоянной. Поэтому в момент, когда напряжение на конденсаторе, а следовательно, и энергия электрического поля обращаются в нуль, энергия магнитного поля, а значит, и ток достигают наибольшего значения (стадия 2; начиная с этого момента ток течет за счет э. д. с. самоиндукции). В дальнейшем ток уменьшается и, когда заряды на обкладках достигнут первоначальной величины q_m , сила тока становится равной нулю (стадия 3). Затем те же процессы протекают в обратном порядке (стадии 4 и 5), после чего система приходит в первоначальное состояние (стадия 5) и весь цикл повторяется снова и снова. В ходе описанного процесса периодически изменяются (т. е. колеблются) заряд q на обкладках, напряжение U на конденсаторе и сила тока i , текущего через индуктивность. Колебания сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.

На рис. 217, б колебаниям в контуре сопоставлены колебания пружинного маятника. Сообщению зарядов обкладкам конденсатора соответствует выведение маятника внешней силой из положения равновесия и сообщение ему первоначального отклонения x_m . При этом возникает потенциальная энергия упругой деформации пружины, равная $\frac{1}{2} kx_m^2$ [см. т. I, формулу (62.3)]. Стадии 2 соответствует прохождение маятника через положение равновесия. В этот момент квазиупругая сила равна нулю и маятник продолжает двигаться по инерции. К этому времени энергия маятника полностью переходит в кинетическую и определяется выражением

$\frac{1}{2} m \dot{x}^2$. Сопоставление дальнейших стадий предоставляем читателю.

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что энергия электрического поля $\frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$ аналогична потенциальной энергии упругой деформации, а энергия магнитного поля $\frac{1}{2} L i^2$ аналогична кинетической энергии. Индуктивность L играет роль массы m , величина, обратная емкости $(1/C)$, — роль коэффициента жесткости k . Наконец, заряду q соответствует смещение маятника из положения равновесия x , а силе тока $i = \dot{q}$ — скорость \dot{x} . Как мы увидим ниже, аналогия между электрическими и механическими колебаниями распространяется и на описывающие их математические уравнения.

Во время колебаний внешнее напряжение к контуру не приложено. Поэтому падения напряжения на емкости $U_C = \frac{q}{C}$ и на индуктивности $U_L = L \frac{di}{dt}$ в сумме должны дать нуль

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Разделив это выражение на L и заменив $\frac{di}{dt}$ через \ddot{q} ($i = \dot{q}$), приходим к следующему уравнению:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (99.1)$$

Если ввести обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (99.2)$$

уравнение (99.1) принимает вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (99.3)$$

хорошо знакомый нам из учения о механических колебаниях [см. т. I, уравнение (62.6)]. Решением этого уравнения, как известно, является функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (99.4)$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой,

определяемой выражением (99.2). Эта частота называется собственной частотой контура (она соответствует собственной частоте гармонического осциллятора). Для периода колебаний получается так называемая *формула Томсона*:

$$T = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (99.5)$$

Напряжение на конденсаторе отличается от заряда множителем $1/C$:

$$U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (99.6)$$

Продифференцировав функцию (99.4) по времени, получим выражение для силы тока

$$i = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (99.7)$$

Сопоставляя формулы (99.4) и (99.7), заключаем, что в момент, когда ток достигает максимального значения, заряд (а также напряжение) обращается в нуль, и наоборот. Это соотношение между зарядом и током мы уже установили ранее, основываясь на энергетических соображениях.

Из формул (99.6) и (99.7) вытекает, что

$$U_m = \frac{q_m}{C}, \quad I_m = \omega_0 q_m.$$

Заменяя ω_0 по формуле (99.2), получим

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m. \quad (99.8)$$

Эту формулу можно получить также, исходя из того, что наибольшее значение энергии электрического поля $\left[\frac{1}{2} C U_m^2; \text{ см. (29.1)}\right]$ должно быть равно наибольшему значению энергии магнитного поля $\left(\frac{1}{2} L I_m^2\right)$.

§ 100. Свободные затухающие колебания

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением. Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего свободные колебания затухают. Урав-

нение колебаний можно получить, исходя из того, что сумма падений напряжения на емкости, индуктивности и активном сопротивлении должна быть равна нулю:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = 0.$$

Разделив это выражение на L и заменив i через \dot{q} , а $\frac{di}{dt}$ через \ddot{q} , получим

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (100.1)$$

Учтя, что $\frac{1}{LC}$ равно квадрату собственной частоты контура ω_0 [см. формулу (99.2)], и введя обозначение

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad (100.2)$$

уравнению (100.1) можно придать вид

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (100.3)$$

Последнее уравнение совпадает с дифференциальным уравнением затухающих механических колебаний [см. т. I, формулу (73.2)]. При условии, что $\beta^2 < \omega_0^2$, т. е.

$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, решение уравнения (100.3) имеет вид

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (100.4)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Подставляя значение (99.2) для ω_0 и (100.2) для β , находим, что

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (100.5)$$

Таким образом, частота затухающих колебаний меньше собственной частоты ω_0 . При $R = 0$ выражение (100.5) переходит в (99.2).

Разделив (100.4) на емкость C , получим напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q_{m0}}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) = U_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (100.6)$$

Чтобы найти силу тока, продифференцируем (100.4) по времени:

$$i = \dot{q} = q_{m0} e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)].$$

Умножим и разделим это выражение на $\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2} = \omega_0$:

$$i = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \left[-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \alpha) \right].$$

Введя угол ψ , определяемый условиями

$$\cos \psi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \sin \psi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0} \quad ^1),$$

можно написать

$$i = \omega_0 q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi). \quad (100.7)$$

Поскольку $\cos \psi < 0$, а $\sin \psi > 0$, $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$. Таким образом, при наличии в контуре активного сопротивления ток опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на $\pi/2$ (при $R = 0$ опережение составляло $\pi/2$).

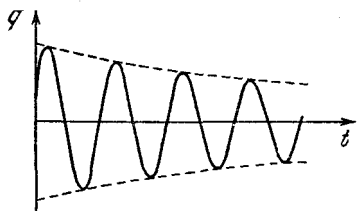


Рис. 218.

График функции (100.4) изображен на рис. 218. Графики для напряжения и силы тока имеют аналогичный вид.

Затухание колебаний принято характеризовать логарифмическим декрементом затухания [см. т. I, формулу (73.12)]

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T,$$

где $a(t)$ — амплитуда соответствующей величины (q , U или i). Легко проверить, что логарифмический декремент затухания обратен по величине числу колебаний N_e , совершаемых за время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз:

$$\lambda = \frac{1}{N_e}.$$

¹⁾ Этим условиям можно также придать вид

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\omega}{\beta}, \quad \cos \psi < 0.$$

Колебательный контур часто характеризуют его добротностью Q , которая определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (100.8)$$

Из (100.8) следует, что добротность контура тем выше, чем большее число колебаний успевает совершиться прежде, чем амплитуда уменьшится в e раз. Взяв вместо λ его значение βT , получим

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{1}{2\beta} \left(\frac{2\pi}{T} \right) = \frac{\omega}{2\beta}.$$

Если затухание невелико ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), можно положить $\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Тогда

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

[согласно (100.2) $2\beta = R/L$]. Таким образом, в случае не- сильного затухания

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (100.9)$$

Амплитуда силы тока в контуре убывает по закону $e^{-\beta t}$. Энергия W , запасенная в контуре, пропорциональна квадрату амплитуды силы тока (или квадрату амплитуды напряжения на конденсаторе); следовательно, W убывает по закону $e^{-2\beta t}$. Относительное уменьшение энергии за период равно

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = \frac{1 - e^{-2\beta T}}{1} = 1 - e^{-2\lambda}.$$

При незначительном затухании (т. е. при условии, что $\lambda \ll 1$) $e^{-2\lambda}$ можно приближенно заменить через $1 - 2\lambda$:

$$\frac{\Delta W}{W} = 1 - (1 - 2\lambda) = 2\lambda.$$

Заменяв в этом выражении λ через добротность контура Q в соответствии с формулой (100.8) и решив полученное уравнение относительно Q , получим

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}. \quad (100.10)$$

Итак, при слабом затухании добротность контура оказывается пропорциональной отношению энергии, запасенной в контуре, к убыли этой энергии за один период колебания.

В заключение отметим, что при $\beta^2 \geq \omega_0^2$, т. е. $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$, вместо колебаний происходит аperiodический разряд конденсатора. Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в аperiodический, называется критическим. Значение критического сопротивления R_k определяется условием $\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$, откуда

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (100.11)$$

§ 101. Вынужденные электрические колебания

Чтобы вызвать вынужденные колебания, нужно оказывать на систему внешнее периодически изменяющееся воздействие. В случае электрических колебаний это можно осуществить, если включить последовательно с элементами контура переменную э. д. с. или, разорвав контур, подать на образовавшиеся контакты переменное напряжение U . Последний случай рассмотрен подробно в предыдущей главе¹⁾ (см. рис. 204, а). Однако для того, чтобы провести до конца аналогию между электрическими и механическими колебаниями, мы рассмотрим вынужденные электрические колебания еще раз, придав уравнениям несколько иной вид.

Приравняем сумму падений напряжения на элементах контура приложенному напряжению

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = U_m \cos \omega t.$$

Перейдя от тока i к заряду q и используя обозначения (99.2) и (100.2), получим уравнение

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t,$$

¹⁾ В случае э. д. с. уравнения остаются такими же, нужно лишь функцию $U = U_m \cos \omega t$ заменить функцией $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t$.

которое совпадает с дифференциальным уравнением вынужденных механических колебаний [см. т. I, формулу (75.2)]. Частное решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (101.1)$$

где

$$q_m = \frac{\left(\frac{U_m}{L}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

[см. т. I, формулы (75.7) и (75.8)].

Подстановка в эти выражения значений (99.2) и (100.2) для ω_0^2 и β дает

$$q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (101.2)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}. \quad (101.3)$$

Общее решение получится, если к частному решению (101.1) прибавить общее решение соответствующего однородного уравнения. Это решение было получено в предыдущем параграфе [см. формулу (100.4)], оно содержит экспоненциальный множитель $e^{-\beta t}$, поэтому по прошествии с начала колебаний достаточного времени становится очень малым и им можно пренебречь. Следовательно, установившиеся вынужденные колебания описываются функцией (101.1). Заметим, что в предыдущей главе рассматривались лишь установившиеся токи и напряжения.

Разделив заряд q на емкость C , получим напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = U_{Cm} \cos(\omega t - \psi),$$

где

$$U_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (101.4)$$

Продифференцировав функцию (101.1) по t , найдем установившийся ток в контуре

$$i = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (101.5)$$

Амплитуда тока имеет значение

$$I_m = \omega q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (101.6)$$

совпадающее с выражением (95.2).

Вводя в (101.5) обозначение $\varphi = \psi - \pi/2$, мы придем к выражению для i , совпадающему с формулой (95.3). В соответствии с (101.3)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \\ &= \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы снова пришли к формуле (95.1).

Резонансная частота для заряда q и напряжения на конденсаторе U_C равна [см. т. I, формулу (75.11)]

$$\begin{aligned} \omega_q &= \omega_U = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0. \end{aligned} \quad (101.7)$$

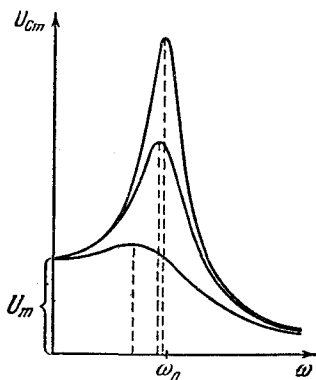


Рис. 219.

Резонансные кривые для U_C изображены на рис. 219 (резонансные кривые для q имеют точно такой вид). Они сходны с резонансными кривыми, получающимися для механических колебаний (см. т. I, рис. 189). При $\omega \rightarrow 0$ резонансные кривые стремятся к $U_{Cm} = U_m$ — напряжению, возникающему на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного напряжения величины U_m . Максимум при резонансе получается тем выше и острее, чем меньше $\beta = R/2L$, т. е. чем меньше активное сопротивление и больше индуктивность контура.

Резонансные кривые для силы тока изображены на рис. 220. Они соответствуют резонансным кривым для

скорости при механических колебаниях. Амплитуда силы тока (101.6) имеет максимальное значение при $\omega L - 1/\omega C = 0$. Следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура ω_0 . Отрезок, отсекаемый резонансными кривыми на оси I_m , равен нулю — при постоянном напряжении установившийся ток в цепи с конденсатором течь не может.

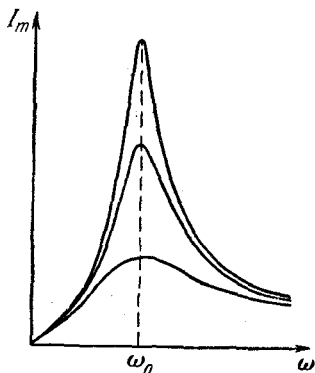


Рис. 220.

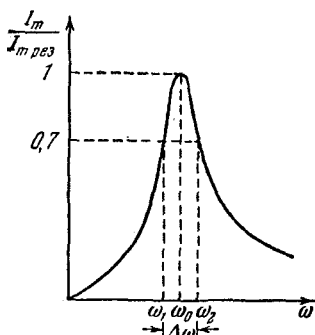


Рис. 221.

При малом затухании ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) резонансную частоту (101.7) для напряжения можно положить равной ω_0 :

$$\omega_U \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_U L - \frac{1}{\omega_U C} \approx 0.$$

Согласно формуле (101.4) отношение амплитуды напряжения на конденсаторе при резонансе $U_{C \text{ рез}}$ к амплитуде внешнего напряжения U_m будет в этом случае равно

$$\frac{U_{C \text{ рез}}}{U_m} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}} C \sqrt{R^2}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q,$$

где Q — добротность контура [см. формулу (100.9)].

Добротность контура характеризует также остроту резонансных кривых. Чтобы убедиться в этом, вычислим так называемую ширину резонансной кривой для силы тока по половине мощности. Под этой величиной

подразумевают разность частот $\Delta\omega$, для которых I_m^2 составляет 0,5 от резонансного значения ($I_m \approx 0,7 I_{m\text{рез}}$; рис. 221).

Согласно формуле (101.6) квадрат амплитуды силы тока равен

$$I_m^2 = \frac{U_m^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

При резонансе I_m^2 равно $I_{m\text{рез}}^2 = \frac{U_m^2}{R^2}$. Квадрат амплитуды I_m^2 составит 0,5 $I_{m\text{рез}}^2$ при частотах, удовлетворяющих условию

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2.$$

Раскрыв скобки, придем после несложных преобразований к следующему уравнению:

$$\frac{\omega^4}{\left(\frac{1}{LC}\right)^2} - 2 \frac{\omega^2}{\left(\frac{1}{LC}\right)} - R^2 \frac{C}{L} \frac{\omega^2}{\left(\frac{1}{LC}\right)} + 1 = 0.$$

В соответствии с формулой (100.9) $R^2 \frac{C}{L} = \frac{1}{Q^2}$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$. Поэтому можно написать

$$\frac{\omega^4}{\omega_0^4} - \left(2 + \frac{1}{Q^2}\right) \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1 = 0.$$

Решим это уравнение относительно ω^2/ω_0^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} &= 1 + \frac{1}{2Q^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2Q^2}\right)^2 - 1} = \\ &= 1 + \frac{1}{2Q^2} \pm \frac{1}{Q} \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}. \end{aligned}$$

При больших добротностях величинами, содержащими Q^2 в знаменателе, можно пренебречь по сравнению с 1. Тогда получится

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 \pm \frac{1}{Q} \approx \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 \pm \frac{1}{2Q}.$$

Таким образом, искомые значения частоты равны

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \quad \text{и} \quad \omega_2 = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q}\right).$$

Взяв разность $\omega_2 - \omega_1$, найдем ширину кривой $\Delta\omega$. Относительная ширина кривой $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ оказывается обратной добротности контура Q :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (101.8)$$

Напомним, что эта формула верна лишь при больших Q , т. е. в случае, когда затухание свободных колебаний в контуре мало.

Мы рассмотрели вынужденные колебания, возникающие при включении внешнего напряжения последовательно с элементами колебательного контура (см. рис. 204, а). Очевидно, что вынужденные колебания можно также осуществить, подключив источник напряжения параллельно колебательному контуру (см. рис. 215). Резонансная частота в этом случае определяется формулой (98.4).

Явление резонанса используется для выделения из сложного напряжения нужной составляющей. Пусть напряжение, приложенное к контуру, равно

$$U = U_{m1} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + U_{m2} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots$$

Настроив контур на одну из частот ω_1 , ω_2 и т. д. (т. е. подобрав соответствующим образом его параметры C и L), можно получить на конденсаторе напряжение, в Q раз превышающее величину данной составляющей, в то время как напряжение, создаваемое на конденсаторе другими составляющими, будет слабым. Такой процесс осуществляется, например, при настройке радиоприемника на нужную длину волны.

§ 102. Получение незатухающих колебаний

Для возбуждения незатухающих электрических колебаний применяются автоколебательные системы с электронными лампами, называемые ламповыми генераторами. Одна из простейших схем такого генератора приведена на рис. 222. Колебательный контур, в котором возбуждаются колебания, включен между катодом и

сеткой триода. В анодную цепь включена катушка L_a , индуктивно связанная с катушкой L контура. Батарея B_c служит для того, чтобы сместить рабочую точку лампы на середину прямолинейного участка характеристики (рис. 223). При возникновении колебаний в кон-

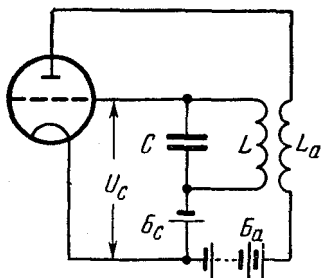


Рис. 222.

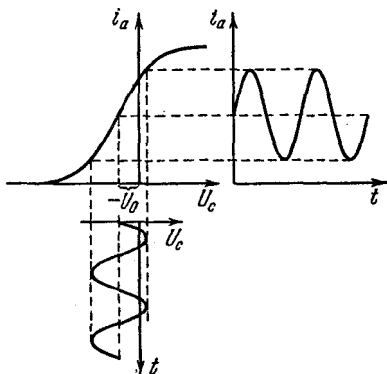


Рис. 223.

туре напряжение на сетке U_c складывается из напряжения батареи B_c , равного U_0 , и напряжения на конденсаторе $U_c = q/C$

$$U_c = U_0 + \frac{q}{C}. \quad (102.1)$$

На рис. 224 график этого напряжения сопоставлен с графиками для заряда q и силы тока $i = \dot{q}$ в контуре. Если колебания невелики, напряжение U_c будет оставаться в пределах прямолинейного участка характеристики. В этом случае между анодным током i_a и сеточным напряжением U_c имеет место линейная зависимость:

$$i_a = i_0 + S U_c,$$

где S — крутизна характеристики на прямолинейном участке, т. е. величина постоянная [см. формулу (75.2)]. Подставив сюда выражение (102.1) для U_c , получим

$$i_a = i_0 + S U_0 + S \frac{q}{C} = i_{\text{пост}} + \frac{S}{C} q. \quad (102.2)$$

Таким образом, при синусоидальных изменениях заряда q в катушке L_a кроме постоянной составляющей

тока $i_{\text{пост}}$ будет течь переменная составляющая $i_{\text{пер}} = \frac{S}{C} q$, изменения которой совершаются в такт с изменениями q (рис. 224, *а*). Эта составляющая будет наводить в катушке L переменную э. д. с. взаимной индукции

$$\mathcal{E}_i = -L_{12} \frac{di_a}{dt} = -\frac{L_{12}S}{C} \dot{q}, \quad (102.3)$$

где L_{12} — взаимная индуктивность катушек L и L_a .

Если переключить концы катушки L_a (что равносильно повороту ее на 180°), направление \mathcal{E}_i изменится на противоположное. На рис. 224, *д* и *е* показаны графики \mathcal{E}_i для обоих способов включения L_a . Как видно из рисунка, в случае *д*) \mathcal{E}_i совпадает по фазе с током в контуре и, следовательно, при достаточно сильной связи между катушками может поддерживать колебания незатухающими. Убыль энергии в контуре пополняется за счет источника тока B_a . При включении катушки L_a , соответствующем рис. 224, *е*, \mathcal{E}_i находится в противофазе с i , вследствие чего препятствует колебаниям в контуре.

Существо протекающих в генераторе процессов заключается в том, что колебательный контур воздействует на анодную цепь лампы, которая в свою очередь оказывает действие на контур. Такой способ получения колебаний называется обратной связью. Соответственно катушку L_a называют катушкой обратной связи.

Строгая теория лампового генератора (и вообще любой автоколебательной системы, в том числе и механической) очень сложна, так как приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям. Нелинейность является характерным свойством всех автоколебательных систем.

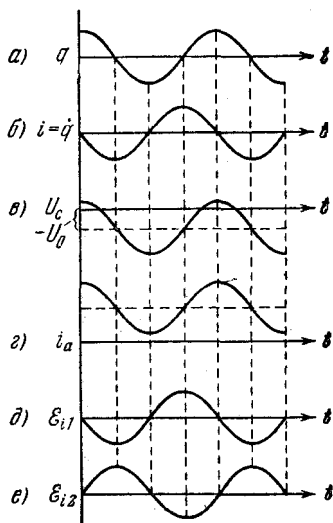


Рис. 224.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 103. Вихревое электрическое поле

Рассмотрим случай электромагнитной индукции, когда контур, в котором индуцируется ток, неподвижен, а изменения потока магнитной индукции обусловлены изменениями магнитного поля. Возникновение индукционного тока свидетельствует о том, что изменения магнитного поля вызывают появление в контуре сторонних сил, действующих на носители тока. Эти сторонние силы не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в контуре; они также не могут быть силами Лоренца, так как силы Лоренца работы над зарядом не совершают. Остается заключить, что индукционный ток обусловлен возникающим в контуре электрическим полем. Обозначим напряженность этого поля E_B ¹⁾. Согласно формуле (32.2) э. д. с. индукции равна циркуляции вектора E_B по контуру:

$$\mathcal{E}_i = \oint E_{Bt} dl. \quad (103.1)$$

В соответствии с формулой (56.3)

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S B_n dS, \quad (103.2)$$

где интеграл берется по произвольной поверхности, опирающейся на контур. Поскольку контур неподвижен, опе-

¹⁾ Это обозначение, равно как и применяемое в дальнейшем обозначение E_q , является вспомогательным. Впоследствии индексы B и q мы опустим.

рации дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами:

$$\frac{d}{dt} \int_S B_n dS = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS. \quad (103.3)$$

Вектор \mathbf{B} зависит как от времени, так и от координат. В правой части уравнения (103.3) имеется в виду производная по времени от \mathbf{B} в соответствующей неизменной точке поверхности. Поэтому в подынтегральном выражении применен символ частной производной по времени.

Произведя замену (103.3) в формуле (103.2) и приравняв затем выражения (103.1) и (103.2) для \mathcal{E}_i , получим

$$\oint E_{B_l} dl = - \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS. \quad (103.4)$$

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле обуславливает появление в пространстве поля \mathbf{E}_B , независимо от присутствия в этом пространстве проводящего контура. Наличие контура лишь позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование в соответствующих точках пространства электрического поля.

Итак, согласно идее Максвелла изменяющееся со временем магнитное поле порождает электрическое поле. Это поле \mathbf{E}_B существенно отличается от порождаемого неподвижными зарядами электростатического поля \mathbf{E}_q . Электростатическое поле потенциально, его линии напряженности начинаются и заканчиваются на зарядах. Циркуляция вектора \mathbf{E}_q по любому контуру равна нулю [см. формулу (9.2)]

$$\oint E_{q_l} dl = 0. \quad (103.5)$$

Согласно формуле (103.4) циркуляция вектора \mathbf{E}_B отлична от нуля. Следовательно, поле \mathbf{E}_B , как и магнитное поле, оказывается вихревым. Линии напряженности поля \mathbf{E}_B замкнуты.

Таким образом, электрическое поле может быть как потенциальным (\mathbf{E}_q), так и вихревым (\mathbf{E}_B). В общем случае электрическое поле может слагаться из поля \mathbf{E}_q ,

создаваемого зарядами, и поля E_B , обусловленного изменяющимся со временем магнитным полем. Сложив вместе выражения (103.5) и (103.4), получим для напряженности суммарного поля $E = E_q + E_B$ следующее соотношение:

$$\oint E_l dl = - \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS. \quad (103.6)$$

Интеграл в левой части берется по произвольному замкнутому контуру, в правой части — по произвольной поверхности, опирающейся на этот контур.

Выражение (103.6) является одним из основных уравнений электромагнитной теории Максвелла.

§ 104. Бетатрон

Вихревое электрическое поле используется в индукционном ускорителе электронов, называемом **бетатроном**. Этот прибор состоит из тороидальной вакуированной камеры, помещающейся между полюсами электромагнита специальной формы (рис. 225). Обмотка электромагнита питается переменным током с частотой порядка 100 гц. Возникающее при этом переменное магнитное поле выполняет две функции: во-первых, создает вихревое электрическое поле, ускоряющее электроны, и, во-вторых, удерживает электроны на орбите, совпадающей с осью камеры.

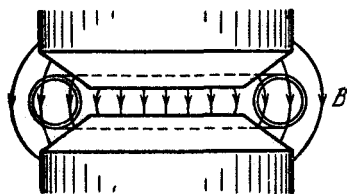


Рис. 225.

Чтобы удержать электрон на орбите постоянного радиуса, необходимо по мере возрастания его скорости увеличивать магнитную индукцию поля [согласно формуле (64.2) радиус орбиты пропорционален v/B]. Поэтому для ускорения могут быть использованы лишь 2-я и 4-я четверти периода тока, в начале которых ток в обмотке магнита равен нулю. Таким образом, бетатрон работает в импульсном режиме. В начале импульса в камеру подается из электронной пушки пучок электронов, который подхватывается вихревым электрическим полем и начинает со все воз-

растающей скоростью двигаться по круговой орбите. За время нарастания магнитного поля ($\sim 10^{-3}$ сек) электроны успевают сделать до миллиона оборотов и приобретают энергию, которая может достигать нескольких сотен Мэв. При такой энергии масса электрона в сотни раз превышает массу покоя, а скорость почти равна скорости света в пустоте c .

Для того чтобы ускоряемый электрон двигался по орбите постоянного радиуса r_0 , между магнитной индукцией поля на орбите и внутри нее должно выполняться простое соотношение, которое мы сейчас найдем. Вихревое поле направлено по касательной к орбите, по которой движется электрон. Следовательно, циркуляцию вектора \mathbf{E} по этой орбите можно представить в виде $2\pi r_0 E$. Вместе с тем согласно формулам (103.1) и (103.2) циркуляция вектора \mathbf{E} равна $-\frac{d\Phi}{dt}$. Знак «—» указывает направление \mathbf{E} . Нас будет интересовать лишь величина напряженности поля, поэтому знак «—» мы в дальнейшем опустим. Приравняв оба выражения для циркуляции, найдем, что

$$E = \frac{1}{2\pi r_0} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Уравнения движения электрона запишутся следующим образом:

$$\frac{d(mv)}{dt} = eE = \frac{e}{2\pi r_0} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (104.1)$$

$$\frac{mv^2}{r_0} = evB_{\text{орб}} \quad (104.2)$$

(последнее уравнение получается, если произведение массы электрона на его центростремительное ускорение приравнять лоренцевой силе; $B_{\text{орб}}$ — магнитная индукция поля на орбите).

Начав отсчет времени с момента, когда v и Φ равны нулю, и проинтегрировав уравнение (104.1) от 0 до t , получим

$$mv = \frac{e}{2\pi r_0} \Phi.$$

Магнитное поле перпендикулярно к плоскости орбиты. Поэтому можно положить $\Phi = \pi r_0^2 \bar{B}$, где \bar{B} — среднее

по площади орбиты значение магнитной индукции. Тогда имеем

$$mv = \frac{er_0}{2} \bar{B}.$$

Сопоставляя последнее соотношение с (104.2), найдем искомое условие

$$B_{\text{орб}} = \frac{1}{2} \bar{B}.$$

Таким образом, для того чтобы электрон все время двигался по орбите радиуса r_0 , магнитная индукция на орбите должна составлять половину среднего значения магнитной индукции внутри орбиты. Это достигается за счет изготовления полюсных наконечников в виде усеченных конусов (см. рис. 225).

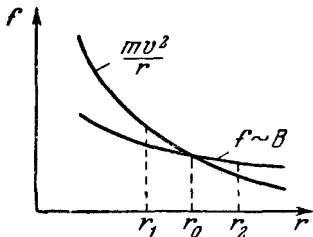


Рис. 226.

Для устойчивости электрона на орбите необходимо, чтобы при случайных радиальных отклонениях электрона возникали силы, возвращающие его снова на орбиту радиуса r_0 . Для этого магнитная индукция должна в окрестности орбиты убывать с

расстоянием r от центра медленнее, чем $1/r$ (рис. 226). Центробежное ускорение убывает по закону $1/r$. Следовательно, при переходе электрона на орбиту радиуса $r_1 < r_0$ лоренцева сила окажется недостаточной для сообщения электрону необходимого центробежного ускорения, вследствие чего он удалится от центра и вернется на орбиту радиуса r_0 . При переходе электрона на орбиту радиуса $r_2 > r_0$ сила Лоренца окажется больше, чем необходимо для сообщения ускорения v^2/r_2 , вследствие чего она вернет электрон на устойчивую орбиту радиуса r_0 .

Осевая устойчивость электрона обеспечивается «бочкообразностью» магнитного поля (см. рис. 225). Сила Лоренца перпендикулярна к линиям индукции \mathbf{B} . Следовательно, при отклонении электрона от плоскости орбиты (т. е. в осевом направлении) появляется составляющая силы, которая, как легко видеть из рис. 227, возвращает орбиту электрона в прежнюю плоскость.

В конце цикла ускорения включается дополнительное магнитное поле, которое отклоняет ускоренные электроны от стационарной орбиты и направляет их на специальную мишень, расположенную внутри камеры. Попадая на мишень, электроны испускают жесткое электромагнитное излучение (γ -лучи, рентгеновские лучи).

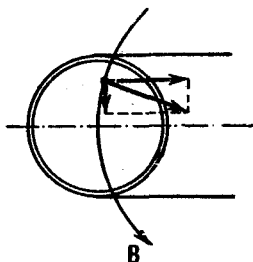


Рис. 227.

Применяются бетатроны главным образом в ядерных исследованиях. Небольшие ускорители на энергию до 50 Мэв нашли применение в промышленности как источники очень жесткого рентгеновского излучения, используемого для целей дефектоскопии массивных изделий.

§ 105. Ток смещения

Как было выяснено в § 103, из явления электромагнитной индукции вытекает, что наличие в пространстве изменяющегося магнитного поля приводит к возникновению вихревого электрического поля. Основная идея Максвелла заключается в том, что между электрическим и магнитным полями имеется и обратное соотношение, т. е. что изменяющееся со временем электрическое поле должно приводить к появлению магнитного поля. Эта идея оказалась исключительно плодотворной. Разработанная Максвеллом на ее основе электромагнитная теория получила блестящее экспериментальное подтверждение.

Для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим и возникающим магнитным полями Максвелл ввел в рассмотрение так называемый ток смещения. Рассмотрим цепь квазистационарного переменного тока, содержащую конденсатор (рис. 228). Движение свободных носителей заряда, т. е. ток проводимости, имеет место во всей цепи, кроме зазора между обкладками конденсатора. Следовательно, линии тока проводимости терпят на границах обкладок разрыв. Зато в пространстве между обкладками имеется переменное электрическое поле, которое можно

охарактеризовать смещением D . Максвелл предположил, что линии тока проводимости непрерывно переходят на границе обкладок в линии тока, названного им током смещения¹⁾.

Мгновенное значение силы тока равно $i = \dot{q}$. Плотность тока проводимости в непосредственной близости от поверхности обкладок определяется выражением

$$j_{\text{пр}} = \frac{\dot{q}}{S} = \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{S} \right) = \dot{\sigma},$$

где S — площадь обкладки, q — распределенный на ней заряд, σ — поверхностная плотность заряда.

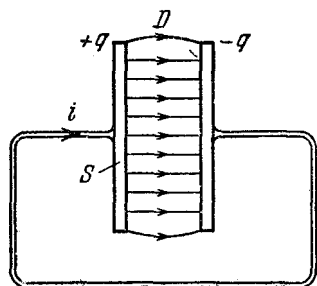


Рис. 228.

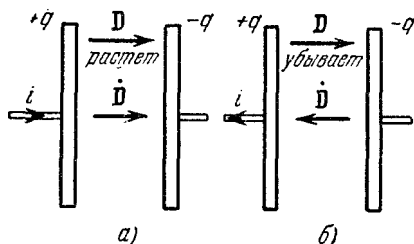


Рис. 229.

Чтобы линии тока смещения имели такую же густоту, как и линии тока проводимости, плотность тока смещения $j_{\text{см}}$ также должна быть равна $\dot{\sigma}$. Выразим $j_{\text{см}}$ через параметры электрического поля, имеющегося в зазоре. Согласно формулам (16.19) и (8.6) электрическое смещение в зазоре между обкладками равно $D = \epsilon_0 E_0 = \sigma$, откуда $\dot{\sigma} = \dot{D}$.

Таким образом, нужно положить

$$j_{\text{см}} = \dot{D}. \quad (105.1)$$

Рис. 229 поясняет, что направление вектора $j_{\text{пр}}$, а следовательно и вектора $j_{\text{см}}$, совпадает с направлением

¹⁾ Во времена Максвелла считалось, что электрические поля вызваны механическими натяжениями в гипотетической упругой среде, называемой мировым эфиром. Предполагалось, что эти натяжения приводят к смещению частиц эфира из положения равновесия.

вектора $\dot{\mathbf{D}}$. При указанных на рис. 229, а знаках зарядов и направлении тока i вектор $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ направлен слева направо. Вектор \mathbf{D} также направлен слева направо и растет по величине. Следовательно, приращение вектора \mathbf{D} , а значит и вектор $\dot{\mathbf{D}}$, имеет то же направление, что и $\mathbf{j}_{\text{пр}}$. При направлении тока, указанном на рис. 229, б, вектор \mathbf{D} убывает по величине. Следовательно, вектор $\dot{\mathbf{D}}$ направлен справа налево, т. е. опять так же, как и вектор $\mathbf{j}_{\text{пр}}$. На этом основании выражение (105.1) можно написать в векторном виде

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \dot{\mathbf{D}}. \quad (105.2)$$

Формулу (105.2), определяющую плотность тока смещения, Максвелл распространил на электрические поля любого вида¹⁾, в том числе и на вихревые поля. Из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно — способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле. Согласно Максвеллу при расчетах магнитных полей в формулы нужно подставлять полную плотность тока, состоящую из плотности тока проводимости и плотности тока смещения:

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{см}} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \dot{\mathbf{D}}. \quad (105.3)$$

В частности, циркуляция вектора \mathbf{H} по любому контуру [см. формулу (44.7)] должна быть равна

$$\oint H_l dl = \int_S (\mathbf{j}_{\text{полн}})_n dS = \int_S (\mathbf{j}_{\text{пр}} + \dot{\mathbf{D}})_n dS. \quad (105.4)$$

Уравнение (105.4) представляет собой второе основное уравнение теории Максвелла.

Согласно формуле (105.2) ток смещения имеется везде, где есть изменяющееся электрическое поле. Следовательно, он существует и внутри проводника, по которому течет переменный электрический ток. Однако внутри проводов $\mathbf{j}_{\text{см}}$ обычно бывает пренебрежимо мал по сравнению с $\mathbf{j}_{\text{пр}}$.

¹⁾ Под $\dot{\mathbf{D}}$ в этом случае следует понимать $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, поскольку \mathbf{D} может зависеть не только от времени, но и от координат.

В гауссовой системе выражение, определяющее ток смещения, имеет вид

$$j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \dot{D}. \quad (135.5)$$

§ 106. Электромагнитное поле

Согласно идеям Максвелла переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, в свою очередь переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным. Таким образом, электрическое и магнитное поля оказываются неразрывно связанными друг с другом — они образуют единое электромагнитное поле.

Анализ результатов фундаментального опыта Майкельсона¹⁾ и других опытных фактов привел Эйнштейна к заключению, что принцип относительности, установленный Галилеем для механических явлений (см. т. I, § 17), должен быть распространен и на все другие физические явления. Согласно принципу относительности, сформулированному Эйнштейном, *законы всех физических явлений, в том числе и электромагнитных, имеют одинаковый вид (т. е. описываются одинаковыми уравнениями) во всех инерциальных системах отсчета.*

Из принципа относительности вытекает, что раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл. Действительно, электростатическое поле создается системой неподвижных зарядов. Однако, если заряды неподвижны относительно некоторой инерциальной системы отсчета, то относительно других инерциальных систем эти заряды движутся и, следовательно, будут порождать не только электрическое, но и магнитное поле (движущийся заряд эквивалентен току). Неподвижный провод с постоянным током создает в каждой точке пространства постоянное магнитное поле. Однако относительно других инерциальных систем этот провод находится в движении. Поэтому создаваемое им магнитное поле в любой точке с данными координатами x , y , z будет меняться и, следовательно, порождать вихревое электрическое поле. Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы

¹⁾ Этот опыт будет изложен в Оптике.

отсчета оказывается «чисто» электрическим или «чисто» магнитным, относительно других систем отсчета будет представлять собой совокупность электрического и магнитного полей.

§ 107. Описание свойств векторных полей

Поток вектора через некоторую поверхность и циркуляция вектора по заданному контуру позволяют судить о характере векторного поля. Однако эти величины дают среднюю характеристику поля в пределах объема, охватываемого поверхностью, через которую определяется поток, или в окрестности контура, по которому берется циркуляция. Уменьшая размеры поверхности или контура (стягивая их в точку), можно прийти к величинам, которые будут характеризовать векторное поле в данной точке. Для того чтобы ввести эти величины, нам придется более глубоко вникнуть в смысл понятий потока и циркуляции.

Пусть нам дано поле вектора скорости несжимаемой неразрывной жидкости. Поток вектора скорости через некоторую поверхность дает, как мы знаем, объем жидкости, протекающей через эту поверхность в единицу времени. Возьмем в окрестности точки P воображаемую замкнутую поверхность S (рис. 230). Если в объеме V , ограниченном поверхностью, жидкость не возникает и не исчезает, то поток, вытекающий наружу через поверхность, будет, очевидно, равен нулю. Отличие потока от нуля будет указывать на то, что внутри поверхности имеются источники или стоки жидкости, т. е. точки, в которых жидкость поступает в объем (источники), либо удаляется из объема (стоки). Величина потока определяет суммарную алгебраическую мощность источников и стоков¹⁾. При преобладании источников над стоками величина потока будет положительной, при преобладании стоков — отрицательной.

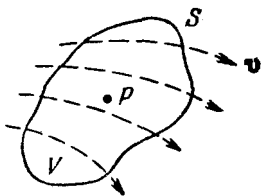


Рис. 230.

¹⁾ Под мощностью источника (стока) понимается объем жидкости, выделяемый (поглощаемый) в единицу времени. Сток можно рассматривать как источник с отрицательной мощностью.

Частное от деления потока $\Phi_{\text{жидк}}$ на величину объема, из которого поток вытекает, т. е.

$$\frac{\Phi_{\text{жидк}}}{V}, \quad (107.1)$$

назовем средней удельной мощностью источников, заключенных в объеме V . Чем меньше объем V , включающий в себя точку P , тем ближе это среднее к истинной удельной мощности в этой точке. В пределе при стремлении V к нулю, т. е. при стягивании объема V к точке P , выражение (107.1) даст истинную удельную мощность источников в точке P , которую называют дивергенцией (или расхождением) вектора \mathbf{v} (обозначается $\text{div } \mathbf{v}$). Итак, по определению

$$\text{div } \mathbf{v} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\Phi_{\text{жидк}}}{V}.$$

Аналогично определяется дивергенция любого вектора \mathbf{A} :

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\Phi_{\mathbf{A}}}{V} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{A}_n dS. \quad (107.2)$$

Интеграл берется по произвольной замкнутой поверхности S , ограничивающей объем V . Поскольку совершается переход $V \rightarrow P$, при котором S стремится к нулю, от формы поверхности выражение (107.2) зависеть не может.

Легко сообразить, что дивергенция определяется поведением векторной функции $\mathbf{A}(P)$ в окрестности данной точки, т. е. тем, каков характер изменения вектора \mathbf{A} (или его компонент A_x, A_y, A_z) при переходе от одной точки пространства к другой.

Из определения (107.2) следует, что дивергенция есть скалярная функция координат, определяющих положения точек в пространстве (кратко — функция точки). Определение (107.2) является самым общим, не зависящим от выбора координатной системы.

Найдем выражение для дивергенции в декартовой системе координат. Рассмотрим в окрестности точки $P(x, y, z)$ малый объем в виде параллелепипеда с ребрами, параллельными координатным осям (рис. 231) [напомним, что форма поверхности, по которой берется интеграл в выражении (107.2), может быть произволь-

ной]. Ввиду малости объема [согласно (107.2) мы будем его стремить к нулю] значения A_x, A_y, A_z в пределах каждой из шести граней параллелепипеда можно считать неизменными. Поток через всю замкнутую поверхность образуется из потоков, текущих через каждую из шести граней в отдельности.

Найдем поток через пару граней, перпендикулярных к оси x (на рис. 231 эти грани заштрихованы косой штриховкой и помечены цифрами 1 и 2). Внешняя нормаль \mathbf{n}_2 к грани 2 совпадает с направлением оси x . Следовательно, $A_{n2} = A_{x2}$ и поток через грань 2 равен $A_{x2}\Delta y\Delta z$ (индекс 2 указывает на то, что значение A_x берется в том месте, где расположена грань 2). Нормаль \mathbf{n}_1 к грани 1 имеет направление, противоположное оси x . Поэтому проекции

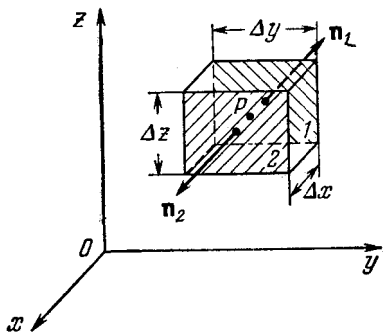


Рис. 231.

вектора на ось x и на \mathbf{n}_1 имеют противоположные знаки. Таким образом, $A_{n1} = -A_{x1}$, а поток через грань 1 равен $-A_{x1}\Delta y\Delta z$ (индекс 1 указывает на то, что значение A_x берется в том месте, где расположена грань 1). Суммарный поток через грани 1 и 2 определяется выражением

$$(A_{x2} - A_{x1}) \Delta y \Delta z. \quad (107.3)$$

Разность $A_{x2} - A_{x1}$ представляет собой приращение A_x при смещении вдоль оси x на Δx . Ввиду малости Δx это приращение можно представить в виде $\frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x$. Тогда (107.3) переходит в

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta V.$$

Путем аналогичных рассуждений можно получить для потоков через пары граней, перпендикулярных к осям y и z , выражения

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta V \quad \text{и} \quad \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta V.$$

Следовательно, полный поток через всю замкнутую поверхность определяется выражением

$$\Phi_A = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V.$$

Разделив это выражение на ΔV , найдем дивергенцию вектора \mathbf{A} в точке $P(x, y, z)$:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (107.4)$$

(предельный переход $V \rightarrow P$ мы предвосхитили, полагая A_x , A_y и A_z в пределах каждой из граней постоянными величинами).

Зная дивергенцию вектора \mathbf{A} в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через любую поверхность конечных размеров. Для этого разобьем объем, ограниченный поверхностью S , на большое (в пределе бесконечно большое) число малых (в пределе бесконечно малых) объемчиков (рис. 232). Согласно формуле (107.2) поток вектора \mathbf{A} , вытекающий из любого из этих объемчиков, может быть записан в виде

$$\text{поток} = \operatorname{div} \mathbf{A} \Delta V.$$

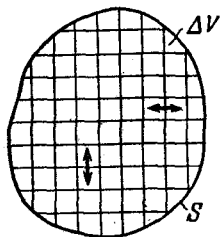


Рис. 232.

Если просуммировать это выражение по всем объемчикам, справа получится $\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV$, взятый по всему

объему, ограниченному поверхностью S , а слева, как легко убедиться, получится поток вектора \mathbf{A} через поверхность S . В самом деле, при суммировании каждый из потоков, текущих через грани, разделяющие два соседних объемчика, войдет дважды с противоположными знаками (значения A_n для соседних объемчиков одинаковы по абсолютной величине, но отличаются знаком). Поэтому потоки через внутренние перегородки взаимно уничтожаются, некомпенсированными останутся только потоки через внешние грани объемчиков, которые в сумме дадут поток через S .

Таким образом, мы пришли к соотношению

$$\oint_S A_n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV, \quad (107.5)$$

которое носит название теоремы Остроградского - Гаусса.

Обратимся снова к течению идеальной несжимаемой жидкости. Представим себе замкнутую линию — контур Γ . Предположим, что каким-то способом мы заморозим мгновенно жидкость во всем объеме, за исключением очень тонкого замкнутого канала постоянного сечения, включающего в себя контур Γ (рис. 233). В зависимости от характера течения (от характера поля вектора скорости) жидкость в образовавшемся канале окажется либо неподвижной, либо будет двигаться вдоль контура (циркулировать) в одном из двух возможных направлений.

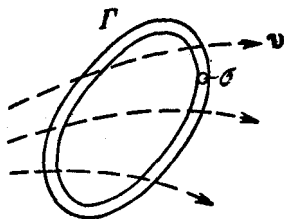


Рис. 233.

В качестве меры этого движения возьмем величину, равную произведению скорости жидкости в канале, умноженной на длину контура l . Эту величину называли циркуляцией вектора \mathbf{v} по контуру Γ ¹⁾. Итак,

$$\text{циркуляция } \mathbf{v} \text{ по } \Gamma = \oint \mathbf{v} d\mathbf{l}$$

(поскольку канал по предположению имеет постоянное сечение, модуль скорости $v = \text{const}$).

В момент затвердевания стенок у каждой из частиц жидкости в канале будет погашена составляющая скорости, перпендикулярная к стенке, и останется лишь составляющая скорости v_t , касательная к контуру. С этой составляющей связан импульс $d\mathbf{p}_t$, модуль которого для частицы жидкости, заключенной в отрезке канала длины dl , имеет величину $\rho \sigma v_t dl$ (ρ — плотность жидкости, σ — площадь поперечного сечения канала). Поскольку жидкость идеальна, действие стенок может изменить лишь направление $d\mathbf{p}_t$, но не его величину. Взаимодействие

¹⁾ Идея такого объяснения смысла циркуляции заимствована у Фейнмана (см. Фейнмановские лекции по физике, вып. 5, стр. 17, «Мир», 1966).

между частицами жидкости вызовет такое перераспределение импульса между ними, которое выровняет скорости всех частиц. При этом алгебраическая сумма импульсов не может измениться: импульс, приобретаемый одной из взаимодействующих частиц, равен импульсу, теряемому второй частицей. Это означает, что

$$\rho \sigma v l = \oint_{\Gamma} \rho \sigma v_l dl,$$

где v — скорость циркуляции, v_l — касательная составляющая скорости жидкости в объеме σdl в момент времени, предшествовавший затвердеванию стенок канала.

Сократив на $\rho \sigma$, получим, что

$$\text{циркуляция } v \text{ по } \Gamma = v l = \oint_{\Gamma} v_l dl.$$

Аналогично определяется циркуляция любого вектора \mathbf{A} по произвольному контуру Γ :

$$\text{циркуляция } \mathbf{A} \text{ по } \Gamma = \bar{A}_l l = \oint_{\Gamma} A_l dl, \quad (107.6)$$

где \bar{A}_l — среднее по контуру значение касательной составляющей вектора \mathbf{A} .

Можно подумать, что для отличия циркуляции от нуля векторные линии должны быть замкнутыми или хотя бы как-то изогнутыми в направлении обхода по контуру. Легко убедиться в ошибочности такого предположения. Рассмотрим ламинарное течение жидкости в реке. Скорость жидкости непосредственно у дна равна нулю и возрастает при приближении к поверхности воды (рис. 234). Линии тока (линии вектора \mathbf{v}) прямолинейны. Несмотря на это, циркуляция вектора \mathbf{v} по изображенному пунктиром контуру, очевидно, отлична от нуля.

Циркуляция характеризует свойства поля, усредненные по области с размерами порядка поперечника контура Γ . Чтобы получить характеристику свойств поля в точке P , нужно уменьшать размеры контура Γ , стягивая его в точку P . Однако сама циркуляция при этом обратится в нуль. Действительно, среднее значение A_l — конечная величина, а длина контура l в пределе равна

нулю. Следовательно, и произведение $\vec{A}dl$ обращается в нуль. Поэтому целесообразно в качестве характеристики поля вектора \vec{A} в точке P взять предел отношения циркуляции вектора \vec{A} по плоскому контуру Γ , стягивающемуся к точке P , к величине площади контура S ¹⁾:

$$\lim_{S \rightarrow P} \frac{\text{циркуляция } \vec{A} \text{ по } \Gamma}{S}. \quad (107.7)$$

Однако при нахождении предела (107.7) обнаруживается следующее осложнение: величина этого предела

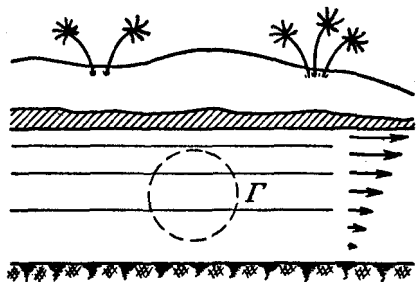


Рис. 234.

зависит не только от свойств поля в точке P , но также и от ориентации контура в пространстве, которая может быть задана направлением положительной нормали \vec{n} к плоскости контура (положительной считается нормаль, связанная с направлением обхода контура при интегрировании правилом правого винта). Определяя предел (107.7) в одной и той же точке P для разных направлений \vec{n} , мы будем получать различные значения, причем для противоположных направлений эти значения отличаются только знаком (изменение направления \vec{n} на противоположное эквивалентно изменению направления обхода по контуру во время интегрирования, что вызовет лишь изменение знака у циркуляции). Для какого-то направления нормали величина (107.7) в данной точке окажется максимальной.

¹⁾ В случае дивергенции берется отношение интеграла по поверхности к объему, охватываемому этой поверхностью. В данном случае берется отношение интеграла по контуру к поверхности, охватываемой этим контуром.

Таким образом, величина (107.7) ведет себя как проекция некоторого вектора на направление нормали к плоскости контура, по которому берется циркуляция. Максимальное значение величины (107.7) определяет модуль этого вектора, а направление положительной нормали \mathbf{n} , при котором достигается максимум, дает направление вектора. Этот вектор называется ротором (или вихрем) вектора \mathbf{A} . Обозначается он символом $\text{rot } \mathbf{A}$. Используя это обозначение, можно записать выражение (107.7) в виде

$$\lim_{S \rightarrow P} \frac{\text{циркуляция } \mathbf{A} \text{ по } \Gamma}{S} = (\text{rot } \mathbf{A})_n. \quad (107.8)$$

Под $(\text{rot } \mathbf{A})_n$ подразумевается проекция вектора $\text{rot } \mathbf{A}$ на положительную нормаль к площадке S , охватываемой контуром Γ .

Выражение (107.8) может служить определением вектора $\text{rot } \mathbf{A}$. Из него следует, что ротор есть векторная функция точки P .

Определение (107.8) является самым общим, не зависящим от выбора системы координат. Для того чтобы найти выражения для проекций вектора $\text{rot } \mathbf{A}$ на оси декартовой системы координат, нужно определить значения величины (107.8) для таких ориентаций площадки S , при которых нормаль \mathbf{n} к площадке совпадает с одной из осей x, y, z . Если, например, направить \mathbf{n} по оси x , то (107.8) превратится в $(\text{rot } \mathbf{A})_x$. Контур Γ расположен в этом случае в плоскости, параллель-

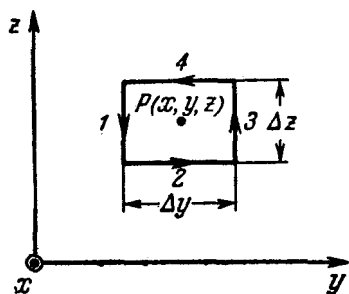


Рис. 235.

ной координатной плоскости yz . Возьмем этот контур в виде прямоугольника со сторонами Δy и Δz (рис. 235; ось x имеет на этом рисунке направление на нас; указанное на рисунке направление обхода связано с направлением оси x правилом правого винта). Имея в виду предельный переход $S \rightarrow P$, можно считать значения A_y и A_z на каждой из четырех сторон контура неизменными. Участок 1 контура противоположен по направле-

нию оси z . Поэтому A_l на этом участке совпадает с $-A_{z1}$ (индекс 1 указывает на то, что A_z берется в том месте, где расположен участок 1). Рассуждая аналогично, найдем, что A_l на участках 2, 3 и 4 равна соответственно A_{y2} , A_{z3} и $-A_{y4}$. В итоге получим для циркуляции значение

$$(A_{z3} - A_{z1}) \Delta z - (A_{y4} - A_{y2}) \Delta y. \quad (107.9)$$

Разность $A_{z3} - A_{z1}$ представляет собой приращение A_z при смещении вдоль оси y на Δy . Ввиду малости Δy это приращение можно представить в виде $\frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y$. Аналогично разность $A_{y4} - A_{y2}$ можно представить в виде $\frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z$. Подставив эти выражения в (107.9) и вынося общий множитель за скобки, получим

$$\text{циркуляция } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta S,$$

где ΔS — площадь контура. Разделив циркуляцию на ΔS , найдем выражение для проекции $\text{rot } \mathbf{A}$ на ось x :

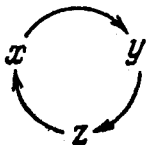
$$(\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (107.10)$$

(предельный переход $S \rightarrow P$ мы предвосхитили, предположив, что на каждом из участков контура A_y и A_z неизменны). Путем аналогичных рассуждений можно найти, что

$$(\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (107.11)$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (107.12)$$

Легко убедиться в том, что любое из выражений (107.10) — (107.12) может быть получено из предыдущего [для (107.10) предыдущим следует считать (107.12)] путем так называемой циклической перестановки координат, т. е. замены координат, осуществляемой по схеме:



Итак, ротор вектора \mathbf{A} определяется в декартовой системе координат следующим выражением:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (107.13)$$

Ниже мы укажем более изящный способ записи этого выражения.

Зная ротор вектора \mathbf{A} в каждой точке некоторой поверхности S , можно вычислить циркуляцию этого вектора по контуру, ограничивающему S . Для этого разобьем поверхность на очень малые элементы ΔS . Согласно (107.8) циркуляция вектора \mathbf{A} по контуру, ограничивающему ΔS , может быть представлена в виде

$$\text{циркуляция } \mathbf{A} = (\operatorname{rot} \mathbf{A})_n \Delta S,$$

где \mathbf{n} — положительная нормаль к элементу поверхности ΔS . Просуммировав эти выражения по всей поверхности S , справа получим

$$\int_S (\operatorname{rot} \mathbf{A})_n dS, \text{ слева — циркуляцию } \mathbf{A}$$

по контуру Γ . Действительно, при суммировании слагаемые $A_i \Delta l_i$, отвечающие отрезкам, разделяющим смежные элементы поверхности, взаимно уничтожатся. Например, для ΔS , лежащей слева от MN (рис. 236), этот участок при определении циркуляции проходится в направлении $N \rightarrow M$, а для ΔS , лежащей справа от MN , тот же участок проходится в направлении $M \rightarrow N$. Следовательно, отвечающие MN слагаемые $A_i \Delta l_i$ отличаются для смежных площадок лишь знаком и при сложении дают нуль. Некомпенсированными останутся только слагаемые $A_i \Delta l_i$ для внешних (по отношению ко всей поверхности S) участков отдельных контуров, которые в сумме дадут $\oint_{\Gamma} A_i dl_i$.

Таким образом, мы пришли к соотношению

$$\oint_{\Gamma} A_i dl_i = \int_S (\operatorname{rot} \mathbf{A})_n dS, \quad (107.14)$$

которое носит название теоремы Стокса.

Написание формул векторного анализа значительно упрощается и облегчается, если ввести в рассмотрение векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом ∇ (набла) и носящий название оператора набла или оператора Гамильтона. Под этим оператором подразумевается вектор с составляющими $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$. Следовательно,

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (107.15)$$

Сам по себе этот вектор смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании со скалярной или векторной функцией, на которую он символически умножается. Так, если умножить вектор ∇ на скаляр φ , то получится вектор

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (107.16)$$

который, как мы знаем (см. § 11), называется градиентом функции φ .

Если вектор ∇ умножить скалярно на вектор \mathbf{A} , получится скаляр

$$\nabla \mathbf{A} = \nabla_x A_x + \nabla_y A_y + \nabla_z A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (107.17)$$

который есть не что иное, как дивергенция вектора \mathbf{A} [см. (107.4)].

Наконец, если умножить ∇ на \mathbf{A} векторно, получится вектор с составляющими: $[\nabla \mathbf{A}]_x = \nabla_y A_z - \nabla_z A_y = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$ и т. д., которые совпадают с составляющими $\text{rot } \mathbf{A}$ [см. (107.10) — (107.12)]. Следовательно, воспользовавшись записью векторного произведения с помощью определителя, можно написать:

$$\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (107.18)$$

Пользуясь вектором ∇ , нужно помнить, что он является дифференциальным оператором, действующим на

все функции, стоящие справа от него. Поэтому при преобразовании выражений, в которые входит ∇ , нужно учитывать как правила векторной алгебры, так и правила дифференциального исчисления. Так, например, производная произведения функций φ и ψ равна

$$(\varphi\psi)' = \varphi'\psi + \varphi\psi'.$$

В соответствии с этим

$$\text{grad}(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \psi \text{grad} \varphi + \varphi \text{grad} \psi.$$

Градиент некоторой функции φ представляет собой векторную функцию. Поэтому к нему могут быть применены операции и дивергенции, и ротора:

$$\begin{aligned} \text{div grad} \varphi = \nabla(\nabla\varphi) &= (\nabla\nabla)\varphi = (\nabla_x^2 + \nabla_y^2 + \nabla_z^2)\varphi = \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi \end{aligned} \quad (107.19)$$

(Δ — оператор Лапласа),

$$\text{rot grad} \varphi = [\nabla, \nabla\varphi] = [\nabla\nabla]\varphi = 0, \quad (107.20)$$

так как векторное произведение вектора на самого себя равно нулю.

Электростатическое поле \mathbf{E} может быть представлено как градиент потенциала φ [см. формулу (11.3)]. Согласно (9.2) циркуляция этого поля для любого контура равна нулю, что согласуется с (107.20).

Ротор вектора \mathbf{A} является векторной функцией точки. Следовательно, к нему могут быть применены операции дивергенции и ротора:

$$\text{div rot} \mathbf{A} = \nabla[\nabla\mathbf{A}] = 0 \quad (107.21)$$

(из векторной алгебры известно, что смешанное произведение векторов равно объему параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах; если два из этих векторов совпадают, то объем параллелепипеда равен нулю),

$$\begin{aligned} \text{rot rot} \mathbf{A} &= [\nabla, [\nabla\mathbf{A}]] = \nabla(\nabla\mathbf{A}) - (\nabla\nabla)\mathbf{A} = \\ &= \text{grad div} \mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} \end{aligned} \quad (107.22)$$

[мы воспользовались формулой $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}\mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{B})$].

Из формулы (107.21) вытекает, что поле ротора не имеет источников, линии такого поля замкнуты, либо уходят в бесконечность. Подобным свойством обладают линии магнитного поля. Это позволяет представить поле вектора магнитной индукции \mathbf{B} как поле ротора некоторой векторной функции \mathbf{A}^1), которую называют векторным потенциалом

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (107.23)$$

Входить в дальнейшие подробности по поводу векторного потенциала мы не имеем возможности.

§ 108. Уравнения Максвелла

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии. Основным следствием теории Максвелла был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Теоретическое исследование свойств этих волн привело Максвелла к созданию электромагнитной теории света.

Основу теории образуют уравнения Максвелла. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

Первую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (103.6) и (44.1). Для удобства изложения напомним их еще раз

$$\oint E_t dl = - \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS, \quad (108.1)$$

$$\oint B_n dS = 0. \quad (108.2)$$

Первое из этих уравнений связывает значения \mathbf{E} с временными изменениями вектора \mathbf{B} и является по существу выражением закона электромагнитной индукции.

¹⁾ Во всех предыдущих формулах символом \mathbf{A} мы обозначали произвольный вектор. Векторный потенциал магнитного поля принято обозначать этим же символом \mathbf{A} .

Второе уравнение отражает то свойство вектора \mathbf{B} , что его линии замкнуты (или уходят в бесконечность).

Вторую пару уравнений Максвелла образуют уравнения (105.4) и (16.6):

$$\oint H_t dl = \int_S j_n dS + \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_n dS, \quad (108.3)$$

$$\oint D_n dS = \int_V \rho dV \quad (108.4)$$

(под j здесь и в дальнейшем понимается плотность тока проводимости).

Первое уравнение устанавливает связь между токами проводимости и смещения и порождаемым ими магнитным полем. Второе показывает, что линии вектора \mathbf{D} могут начинаться и оканчиваться на зарядах.

Уравнения (108.1) — (108.4) представляют собой уравнения Максвелла в интегральной форме. Они связывают значения \mathbf{E} или \mathbf{H} вдоль некоторого контура со значениями \mathbf{B} (соответственно \mathbf{D}) в точках опирающейся на контур поверхности. От уравнений в интегральной форме можно с помощью теорем векторного анализа перейти к уравнениям в дифференциальной форме, которые связывают значения \mathbf{E} или \mathbf{H} в некоторой точке с \mathbf{B} (соответственно \mathbf{D}) в той же самой точке пространства.

Применим теорему Стокса [см. (107.14)] к левой части формулы (108.1), взяв в качестве поверхности, по которой производится интегрирование функции $(\text{rot } \mathbf{E})_n$, ту же поверхность, по которой берется интеграл в правой части. Тогда уравнение (108.1) примет вид

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{E})_n dS = - \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS.$$

Оба интеграла берутся по одной и той же поверхности. Поэтому полученное равенство можно написать следующим образом:

$$\int_S \left(\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS = 0.$$

Это равенство должно выполняться для произвольно выбранной поверхности интегрирования S , что, очевидно,

возможно лишь в том случае, если подынтегральное выражение в любой точке пространства для произвольно ориентированной площадки dS будет равно нулю. Таким образом, мы приходим к выводу, что в каждой точке пространства выполняется равенство

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Применив теорему Стокса к формуле (108.3) и повторив те же самые рассуждения, найдем, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Теперь применим теорему Остроградского — Гаусса [см. (107.5)] к левой части формулы (108.4). В результате получим уравнение

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV.$$

При произвольном выборе объема, по которому производится интегрирование, полученное соотношение может выполняться лишь при условии, что подынтегральные выражения в обеих частях имеют в каждой точке пространства одинаковые значения, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

Применение теоремы Остроградского — Гаусса к формуле (108.2) дает

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Итак, в дифференциальной форме уравнения Максвелла выглядят следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (108.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (108.6)$$

(первая пара уравнений),

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (108.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (108.8)$$

(вторая пара уравнений).

При решении этих уравнений используется то обстоятельство, что между входящими в них величинами имеются соотношения

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (108.9)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (108.10)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (108.11)$$

Совокупность семи уравнений (108.5) — (108.11) образует основу электродинамики покоящихся сред.

Спроектировав уравнения (108.5) и (108.7) на координатные оси, получим вместо каждого из векторных уравнений три скалярных. Приняв во внимание формулы (107.10) — (107.12), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= - \frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= - \frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= - \frac{\partial B_z}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (108.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (108.13)$$

Уравнения (108.6) и (108.8) можно написать в скалярном виде, используя соотношение (107.4)

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (108.14)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho. \quad (108.15)$$

В гауссовой системе уравнения Максвелла имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (108.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho. \end{aligned} \right\} \quad (108.17)$$

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

§ 109. Волновое уравнение

В предыдущей главе мы выяснили, что переменное электрическое поле порождает магнитное, которое, вообще говоря, тоже оказывается переменным¹⁾. Это переменное магнитное поле порождает электрическое поле и т. д. Таким образом, если возбудить с помощью зарядов переменное электрическое или магнитное поле, в окружающем пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс будет периодическим во времени и в пространстве и, следовательно, представляет собой волну. Вывод о возможности существования электромагнитных волн вытекает, как мы сейчас покажем, из уравнений Максвелла.

Напишем уравнения Максвелла для однородной нейтральной ($\rho = 0$) непроводящей ($j = 0$) среды с постоянными проницаемостями ϵ и μ . В этом случае

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{H} \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

¹⁾ Для того чтобы возникшее магнитное поле было постоянным, необходимо соблюдение весьма специального условия: $\dot{\mathbf{D}} = \text{const.}$

Следовательно, уравнения (108.5) — (108.8) имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (109.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (109.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (109.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (109.4)$$

Применим к уравнению (109.1) операцию rot

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\mu\mu_0 \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right). \quad (109.5)$$

Символ rot означает дифференцирование по координатам. Меняя порядок дифференцирования по координатам и времени, можно написать $\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{H})$.

Произведя в уравнении (109.5) эту замену и подставив в получившееся выражение значение (109.3) для $\operatorname{rot} \mathbf{H}$, получим

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (109.6)$$

Применив операцию rot к уравнению (109.3) и производя аналогичные преобразования, придем к уравнению

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (109.7)$$

В соответствии с (107.22) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$. При условии, выражаемом уравнением (109.4), первый член этого равенства обращается в нуль. Следовательно, левая часть формулы (109.6) может быть записана в виде $-\Delta \mathbf{E}$. Опустив в получающейся формуле знак минус слева и справа, придем к уравнению

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

или, расписав $\Delta \mathbf{E}$,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}. \quad (109.8)$$

Сходным образом уравнение (109.7) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (109.9)$$

Заметим, что уравнения (109.8) и (109.9) неразрывно связаны друг с другом, так как они получены из уравнений (109.1) и (109.3), каждое из которых содержит и \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

представляет собой волновое уравнение [см. т. I, § 80)]. Всякая функция, удовлетворяющая такому уравнению, описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, дает фазовую скорость этой волны. Таким образом, уравнения (109.8) и (109.9) указывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (109.10)$$

Для вакуума по этой формуле получается

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек} = c$$

[см. значения (4.2) и (38.3) для ϵ_0 и μ_0].

Таким образом, в вакууме фазовая скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света.

В гауссовой системе

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (109.11)$$

§ 110. Плоская электромагнитная волна

Исследуем плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в однородной непроводящей среде ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$, ϵ и μ — постоянные). Направим ось x перпендикулярно к волновым поверхностям. Тогда \mathbf{E} и \mathbf{H} , а значит, и их составляющие не будут зависеть от координат y и z . Поэтому уравнения (108.12) — (108.15) упрощаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (110.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (110.2)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad (110.3)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (110.4)$$

Первое из уравнений (110.2) и уравнение (110.4) показывают, что E_x не может зависеть ни от t , ни от x . Первое из уравнений (110.1) и уравнение (110.3) дают тот же результат для H_x . Таким образом, отличные от нуля E_x и H_x могут быть обусловлены лишь постоянными однородными полями, накладывающимися на электромагнитное поле волны. Само поле волны не имеет составляющих вдоль оси x , т. е. векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны к направлению распространения волны — электромагнитные волны поперечны. В дальнейшем мы будем предполагать постоянные поля отсутствующими и полагать $E_x = H_x = 0$.

Два последних уравнения (110.1) и два последних уравнения (110.2) можно объединить в две независимые

группы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (110.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} &= \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (110.6)$$

Первая группа уравнений связывает составляющие E_y и H_z , вторая — E_z и H_y . Предположим, что первоначально было создано переменное электрическое поле E_y , направленное вдоль оси y . Согласно второму из уравнений (110.5) это поле создаст магнитное поле H_z , направленное вдоль оси z . В соответствии с первым уравнением (110.5) поле H_z создаст электрическое поле E_y и т. д. Ни поле E_z , ни поле H_y при этом не возникают. Аналогично, если первоначально было создано поле E_z , то согласно уравнениям (109.6) появится поле H_y , которое возбудит поле E_z и т. д. В этом случае не возникают поля E_y и H_z . Таким образом, для описания плоской электромагнитной волны достаточно взять одну из систем уравнений (110.5) и (110.6), положив составляющие, фигурирующие в другой системе, равными нулю.

Возьмем для описания волны уравнения (110.5), положив $E_z = H_y = 0$. Продифференцируем первое уравнение по x и произведем замену: $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_z}{\partial x}$. Подставив затем $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ из второго уравнения, получим волновое уравнение для E_y :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (110.7)$$

Продифференцировав по x второе уравнение (110.5), найдем после аналогичных преобразований волновое уравнение для H_z :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (110.8)$$

Напомним, что остальные составляющие \mathbf{E} и \mathbf{H} равны нулю, так что $E = E_y$ и $H = H_z$. Мы сохранили в уравнениях (110.7) и (110.8) индексы y и z при E и H для того, чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} направлены по взаимно перпендикулярным осям y и z .

Уравнения (110.7) и (110.8) представляют собой частный случай уравнений (109.8) и (109.9). Простейшим решением уравнения (110.7) будет функция

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha_1). \quad (110.9)$$

Решение уравнения (110.8) имеет аналогичный вид

$$H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (110.10)$$

В этих формулах ω — частота волны, k — волновое число, равное ω/v , α_1 и α_2 — начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$.

Подставим функции (110.9) и (110.10) в уравнения (110.5):

$$\begin{aligned} kE_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1) &= \mu\mu_0\omega H_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2), \\ kH_m \sin(\omega t - kx + \alpha_2) &= \epsilon\epsilon_0\omega E_m \sin(\omega t - kx + \alpha_1). \end{aligned}$$

Для того чтобы уравнения удовлетворялись, необходимо равенство начальных фаз α_1 и α_2 . Кроме того, должны соблюдаться соотношения:

$$\begin{aligned} kE_m &= \mu\mu_0\omega H_m, \\ \epsilon\epsilon_0\omega E_m &= kH_m. \end{aligned}$$

Перемножив эти два равенства, находим, что

$$\epsilon\epsilon_0 E_m^2 = \mu\mu_0 H_m^2.$$

Таким образом, колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят с одинаковой фазой ($\alpha_1 = \alpha_2$), а амплитуды этих векторов связаны соотношением

$$E_m \sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H_m \sqrt{\mu\mu_0}. \quad (110.11)$$

Из формулы (110.11) вытекает, что между значениями E_m и H_m для волны, распространяющейся в пустоте, имеется соотношение

$$\begin{aligned} \frac{E_m}{H_m} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = \\ &= \sqrt{(4\pi)^2 900} = 120\pi \approx 377. \end{aligned} \quad (110.12)$$

В гауссовой системе формула (110.11) имеет вид

$$E_m \sqrt{\epsilon} = H_m \sqrt{\mu}.$$

Следовательно, в пустоте $E_m = H_m$ (E_m измеряется в СГСЭ-единицах, H_m — в СГСМ-единицах).

Умножив уравнение (110.9) на орт оси y ($E_y \mathbf{j} = \mathbf{E}$), а уравнение (110.10) на орт оси z ($H_z \mathbf{k} = \mathbf{H}$), получим уравнения плоской электромагнитной волны в векторном виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_m \cos(\omega t - kx), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_m \cos(\omega t - kx) \end{aligned} \right\} \quad (110.13)$$

(мы положили $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$).

На рис. 237 показана «моментальная фотография» плоской электромагнитной волны. Как видно из рисунка, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. В фиксированной точке пространства векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} изменяются со временем по гармоническому закону. Они одновременно увеличиваются от нуля, затем через $1/4$ периода достигают наибольшего значения (причем, если \mathbf{E} направлен вверх, то \mathbf{H} направлен вправо; смотрим вдоль направления, по которому распространяется волна). Еще через $1/4$ периода оба вектора одновременно обращаются в нуль. Затем опять достигают наибольшего значения (но на этот раз \mathbf{E} направлен вниз, а \mathbf{H} — влево). И, наконец, по завершении периода колебания векторы снова обращаются в нуль. Такие изменения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} происходят во всех точках пространства, но со сдвигом по фазе, определяемым расстоянием между точками, отсчитанным вдоль оси x .

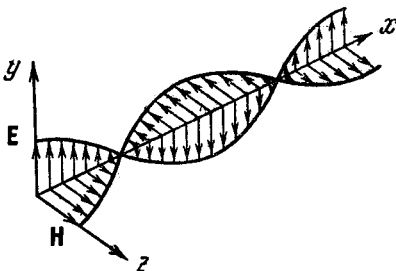


Рис. 237.

§ 111. Экспериментальное исследование электромагнитных волн

Экспериментальная проверка вывода теории Максвелла о существовании электромагнитных волн была осуществлена Герцем в 1888 г. Для получения волн Герц применил изобретенный им вибратор, состоящий из двух стержней, разделенных искровым промежутком (рис. 238).

В колебательном контуре, образованном конденсатором C и катушкой L (рис. 239, а), электрическое поле сосредоточено в зазоре между обкладками, а магнитное — внутри катушки. В окружающем конденсатор и катушку пространстве поля практически равны нулю, поэтому заметного излучения волн

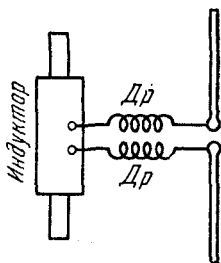


Рис. 238.

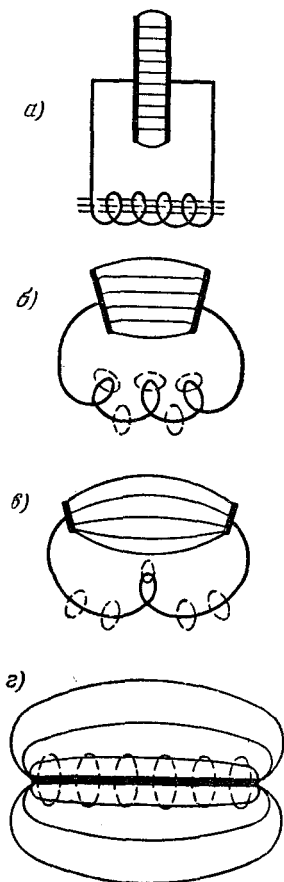


Рис. 239.

не происходит. Чтобы излучение играло заметную роль, нужно сделать области, в которых возникают поля, менее обособленными от окружающего пространства. Этого можно достигнуть, увеличивая расстояние между обкладками конденсатора и между витками ка-

тушки (рис. 239, б и в). В пределе мы придем к вибратору Герца (рис. 239, г). В процессе видоизменений, изображенных на рис. 239, а — г, сильно уменьшается емкость и индуктивность контура, что также выгодно, так как приводит к увеличению частоты колебаний [см. формулу (99.2)], а следовательно к уменьшению длины волны. С волнами же меньшей длины легче экспериментировать. Герц достиг частот порядка 10^8 гц и получал волны, длина которых составляла от 10 до 0,6 м.

Для возбуждения колебаний вибратор подключался к индуктору (рис. 238). Когда напряжение на искровом промежутке достигало пробивного значения, возникала искра, которая закорачивала обе половинки вибратора (в соответствии с этим на рис. 239, г разрыв посередине вибратора не показан). В результате возникали свободные затухающие колебания, которые продолжались до тех пор, пока искра не гасла. Для того чтобы возникающий при колебаниях высокочастотный ток не ответвлялся в обмотку индуктора, между вибратором и индуктором включались дроссели Dp , т. е. катушки с большой индуктивностью (сопротивление индуктивности переменному току равно ωL). После погасания искры вибратор снова заряжался от индуктора и весь процесс повторялся вновь. Таким образом, вибратор Герца возбуждал ряд цугов слабо затухающих волн.

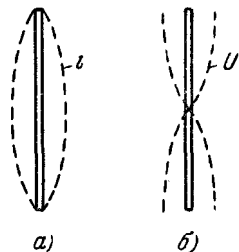


Рис. 240.

В вибраторе во время колебаний устанавливалась стоячая волна тока и напряжения. Сила тока i (рис. 240, а) была максимальна в середине вибратора (пучность тока) и обращалась в нуль на его концах (узлы тока). Напряжение U (рис. 240, б) в середине вибратора имело узел, на концах — пучности. Таким образом, вибратор аналогичен струне, колеблющейся с основной (т. е. наименьшей) частотой. Длина λ излучаемых вибратором волн приблизительно в два раза превышала длину вибратора. По этой причине подобный вибратор называют полуволновым. Заметим, что если каким-либо образом возбудить в вибраторе вынужденные колебания в два раза большей частоты, то распределение токов и напряжений будет иметь вид,

изображенный на рис. 241. В этом случае вибратор аналогичен струне, колеблющейся с частотой первого обертона.

Исследование излучаемой волны Герц осуществлял также при помощи полуволнового вибратора с небольшим искровым промежутком посередине. При размещении такого вибратора параллельно вектору напряженности электрического поля волны в нем возбуждались колебания тока и напряжения. Так как длина вибратора была равна $\lambda/2$, колебания в нем вследствие резонанса достигали такой интенсивности, что вызывали проскакивание в искровом промежутке небольших искр¹⁾.

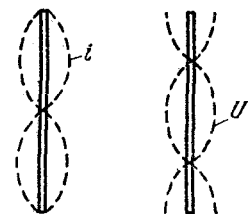


Рис. 241.

С помощью больших металлических зеркал и асфальтовой призмы (размером более 1 м и весом 1,2 т) Герц осуществил отражение и преломление электромагнитных волн и показал, что оба эти явления подчиняются законам, установленным в оптике для световых волн. Поместив излучающий вибратор в фокусе вогнутого зеркала, Герц получил направленную плоскую волну. На ее пути он расположил плоское зеркало и получил таким образом стоячую волну. Измерив расстояние между узлами и пучностями волны, Герц нашел длину волны λ . Произведение λ на частоту колебаний вибратора ν дало скорость электромагнитных волн, которая оказалась близкой к c . Располагая на пути волн решетку из параллельных друг другу медных проволок, Герц обнаружил, что при вращении решетки вокруг луча интенсивность волн, прошедших сквозь решетку, сильно изменяется. Когда проволоки, образующие решетку, были перпендикулярны к вектору E , волна проходила сквозь решетку без помех. При расположении проволок параллельно E волна сквозь решетку не проходила. Таким образом была доказана поперечность электромагнитных волн.

Опыты Герца были продолжены П. Н. Лебедевым, который в 1894 г. получил электромагнитные волны дли-

¹⁾ В современных демонстрациях в искровой промежуток включают небольшую лампочку. Яркость ее свечения указывает интенсивность волны.

ной 6 мм и исследовал прохождение их в кристаллах. При этом было обнаружено двойное преломление волн (см. Оптику).

В 1896 г. А. С. Попов впервые осуществил с помощью электромагнитных волн передачу сообщения на расстояние около 250 м (были переданы слова «Генрих Герц»). Тем самым было положено основание радиотехнике.

§ 112. Энергия электромагнитного поля

Возможность обнаружения электромагнитных волн (по проскакиванию искры, свечению лампочки и т. п.) указывает на то, что эти волны переносят энергию. Для переноса энергии волной была введена (см. т. I, § 82) векторная величина, называемая плотностью потока энергии. Она численно равна количеству энергии, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению, в котором течет энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии. Там же было показано, что плотность потока энергии можно получить, умножив плотность энергии на скорость волны [см. т. I, формулу (82.8)].

Плотность энергии электромагнитного поля w складывается из плотности энергии электрического поля [определяемой формулой (30.2)] и плотности энергии магнитного поля [определяемой формулой (61.8)]:

$$w = w_E + w_H = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

В данной точке пространства векторы E и H изменяются в одинаковой фазе¹⁾. Поэтому соотношение (110.11) между амплитудными значениями E и H справедливо и для их мгновенных значений. Отсюда следует, что плотность энергии электрического и магнитного полей каждый момент времени одинакова: $w_E = w_H$. Поэтому можно написать, что

$$w = 2w_E = \epsilon\epsilon_0 E^2.$$

¹⁾ Это справедливо только для непроводящей среды. В проводящей среде фазы E и H не совпадают.

Воспользовавшись тем, что $E \sqrt{\epsilon\epsilon_0} = H \sqrt{\mu\mu_0}$, выражению для плотности энергии электромагнитной волны можно придать вид

$$w = \sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0} EH. \quad (112.1)$$

В соответствии с формулой (109.10) скорость электромагнитной волны равна $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}$. Умножив плотность энергии w на скорость v , получим плотность потока энергии

$$S = wv = EH. \quad (112.2)$$

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Поэтому направление вектора $[\mathbf{EH}]$ совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен EH ($\sin \alpha = 1$). Следовательно, вектор плотности потока энергии можно представить как векторное произведение \mathbf{E} и \mathbf{H}

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]. \quad (112.3)$$

Вектор \mathbf{S} называется вектором Пойнтинга.

В гауссовой системе выражение для \mathbf{S} имеет вид

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]. \quad (112.4)$$

Поток энергии Φ_w , т. е. количество энергии, переносимое волной в единицу времени через некоторую поверхность S , равен [см. т. I, формулу (82.14)]

$$\Phi_w = \int_S S_n dS \quad (112.5)$$

(здесь S_n — нормальная составляющая вектора \mathbf{S} ; dS — элемент поверхности S).

В качестве примера на применение формулы (112.5) рассмотрим участок однородного цилиндрического проводника, по которому течет стационарный (т. е. не изменяющийся со временем) ток (рис. 242). Вначале будем считать, что на этом участке сторонние силы отсутствуют. Тогда согласно формуле (33.4) в каждой точке проводника выполняется соотношение

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}.$$

Стационарный (постоянный) ток распределяется по сечению провода с постоянной плотностью \mathbf{j} . Следовательно, \mathbf{E} в пределах изображенного на рис. 242 участка проводника будет однородным. Выделим мысленно внутри проводника цилиндрический объем радиуса r и длины l . В каждой точке боковой поверхности этого цилиндра вектор \mathbf{H} перпендикулярен к вектору \mathbf{E} и направлен по касательной к поверхности (см. рис. 242). Величина H равна $\frac{1}{2}jr$ [согласно теореме (44.7)

$2\pi rH = j\pi r^2$]. Таким образом, вектор (112.3) в каждой точке поверхности направлен к оси провода и имеет величину $S = EH = \frac{1}{2}Ejr$. Умножив S на боковую поверхность цилиндра, равную $2\pi rl$, найдем, что внутрь рассматриваемого нами объема втекает поток электромагнитной энергии (поток вектора \mathbf{S})

$$\begin{aligned}\Phi_S &= 2\pi rl \cdot S = 2\pi rl \cdot \frac{1}{2}Ejr = \\ &= Ej \cdot \pi r^2 l = Ej \cdot V, \quad (112.6)\end{aligned}$$

где V — объем цилиндра.

Согласно (34.5) Ej есть количество тепла, выделяющееся в единицу времени в единице объема проводника. Следовательно, равенство (112.6) указывает на то, что энергия, выделяющаяся в виде ленц-джоулева тепла, поступает в проводник через его боковую поверхность в виде энергии электромагнитного поля.

Отметим, что поток энергии Φ_S по мере проникновения в глубь проводника постепенно ослабляется [уменьшается и S (он пропорционален расстоянию от оси провода r), и поверхность, через которую течет поток] за счет поглощения энергии и превращения ее в тепло.

Теперь допустим, что в пределах рассматриваемого нами участка проводника действуют сторонние силы, поле которых однородно ($\mathbf{E}^* = \text{const}$). В этом случае согласно формуле (35.4) в каждой точке проводника имеет место соотношение

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) = \frac{1}{\rho}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*),$$

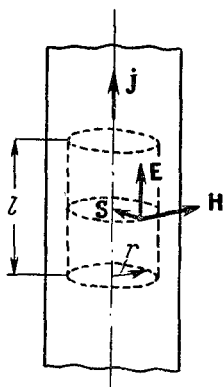


Рис. 242.

из которого вытекает, что

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} - \mathbf{E}^*. \quad (112.7)$$

Будем считать, что сторонние силы на рассматриваемом участке цепи не противятся, а способствуют прохождению тока. Это означает, что направление \mathbf{E}^* совпадает с направлением \mathbf{j} . Допустим, что выполняется соотношение $\rho \mathbf{j} = \mathbf{E}^*$. Тогда окажется, что напряженность электростатического поля \mathbf{E} в каждой точке равна нулю, и поток электромагнитной энергии через боковую поверхность отсутствует. В этом случае тепло выделяется за счет работы сторонних сил.

Если же имеет место соотношение $E^* > \rho j$, то, как следует из (112.7), вектор \mathbf{E} будет направлен противоположно вектору \mathbf{j} . В этом случае векторы \mathbf{E} и \mathbf{S} имеют направления, противоположные указанным на рис. 242. Следовательно, электромагнитная энергия не втекает, а наоборот вытекает через боковую поверхность проводника в окружающее его пространство.

Резюмируя, можно сказать, что в замкнутой цепи стационарного тока энергия от участков, где действуют сторонние силы, передается к другим участкам цепи не вдоль проводников, а через окружающее проводники пространство в виде потока электромагнитной энергии, характеризуемого вектором \mathbf{S} .

§ 113. Импульс электромагнитного поля

Падая на какое-либо тело, электромагнитная волна должна оказывать на него давление. Происхождение этого давления легко пояснить на примере проводящего тела ($\sigma \neq 0$). Пусть плоская волна падает по нормали на плоскую поверхность тела (рис. 243). Электрический вектор волны возбуждает в теле ток плотности $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Магнитное поле волны будет действовать на ток с силой, величину которой в расчете на единицу объема тела можно найти по формуле (47.2):

$$\mathbf{f}_{\text{ед. об}} = [\mathbf{j} \mathbf{B}] = \mu_0 [\mathbf{j} \mathbf{H}].$$

Направление этой силы, как видно из рис. 243, совпадает с направлением распространения волны.

Согласно вычислению Максвелла в случае, когда тело полностью поглощает падающую на него энергию, давление равно среднему (по времени) значению плотности энергии в падающей волне:

$$p = \bar{w} = \frac{e\epsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (113.1)$$

Если тело отражает волну, посылая в обратном направлении волну интенсивности $S = kS_0$ (S_0 — интенсивность, т. е. плотность потока энергии падающей волны, k — коэффициент отражения), то давление равно

$$p = (1 + k) \bar{w}, \quad (113.2)$$

где \bar{w} — среднее значение плотности энергии падающей волны. Для идеально отражающего тела $k = 1$ и $p = 2\bar{w}$.

Из того факта, что электромагнитная волна оказывает давление, вытекает, что поле электромагнитной волны обладает импульсом. Вычисления дают для импульса единицы объема (плотности импульса) поля в пустоте значение

$$K_{\text{ед.об}} = \frac{1}{c^2} S = \frac{1}{c^2} [EH]. \quad (113.3)$$

Наличие импульса заставляет приписать электромагнитному полю массу, связанную с импульсом соотношением $K = mc$ (поле в вакууме распространяется со скоростью c). Разделив модуль выражения (113.3) на c , получим массу единицы объема поля

$$m_{\text{ед. об}} = \frac{EH}{c^3}.$$

Выражение $\frac{EH}{c}$ дает плотность энергии поля w . Следовательно, можно написать, что

$$m_{\text{ед. об}} = \frac{w}{c^2}.$$

Полученное нами соотношение является частным случаем вытекающего из теории относительности

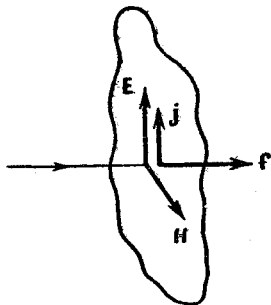


Рис. 243.

соотношения между массой и энергией:

$$W = mc^2, \quad (113.4)$$

согласно которому всякое изменение энергии системы (под которой понимается совокупность тел и полей) связано с изменением ее массы и, наоборот, изменение массы системы влечет за собой изменение ее энергии.

Если свет представляет собой, как предположил Максвелл, электромагнитную волну, он должен оказывать на тела давление. Правда, величина этого давления, вычисленная по формуле (113.1), оказывается очень малой. Так, например, на расстоянии 1 м от источника света силой в миллион свечей давление составляет всего лишь около 10^{-7} н/м² (10^{-4} дин/см²). Обнаружить и измерить световое давление удалось П. Н. Лебедеву. Осуществив опыты, потребовавшие большой изобретательности и мастерства, Лебедев измерил в 1900 г. давление света на твердые тела и в 1910 г. — на газы. Результаты измерений оказались в полном согласии с теорией Максвелла.

§ 114. Излучение диполя

Во время совершающихся в вибраторе Герца колебаний происходит периодическое изменение его дипольного электрического момента. Поэтому излучатели подобного вида называются также диполями. Вибратор Герца представляет собой полуволновой диполь (его длина l равна $\lambda/2$). Рассмотрим излучение диполя, длина которого мала по сравнению с длиной волны ($l \ll \lambda$). Такой диполь называется элементарным.

Простейший элементарный диполь образуют два точечных заряда $+q$ и $-q$, колеблющиеся в противофазе около некоторой точки O (рис. 244, а). Дипольный электрический момент такой системы изменяется со временем по закону

$$p = ql \cos \omega t \cdot n = p_m \cos \omega t, \quad (114.1)$$

где l — удвоенная амплитуда колебаний каждого из зарядов, n — единичный вектор, направленный вдоль оси диполя, $p_m = qln$.

Такой же электрический момент имеет система, образованная неподвижным положительным зарядом $+q$ и

колеблющимся около него с амплитудой l отрицательным зарядом $-q$ (рис. 244, б). Рассмотрение такой излучающей системы особенно важно потому, что к ней может быть сведено излучение электромагнитных волн электроном атома. Согласно классическим представлениям электрон движется в атоме вокруг ядра по эллиптической орбите. Движение по эллипсу можно разложить на два взаимно перпендикулярных колебания (см. т. I, § 71). Таким образом, излучение атома можно свести к излучению элементарного диполя [длина волны видимого света ($\sim 10^{-7}$ м) на много порядков больше диаметра орбиты ($\sim 10^{-10}$ м)].

В непосредственной близости от диполя картина электромагнитного поля носит очень сложный характер. Она сильно упрощается в так называемой волновой зоне диполя, которая начинается на расстояниях r , значительно превышающих длину волны ($r \gg \lambda$). Если волна распространяется в однородной изотропной среде, то волновой фронт в волновой зоне будет сферическим (рис. 245). Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в каждой точке взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к лучу, т. е. радиусу-вектору проведенному в данную точку из диполя (по сравнению с расстоянием до точек волновой зоны размерами диполя можно пренебречь).

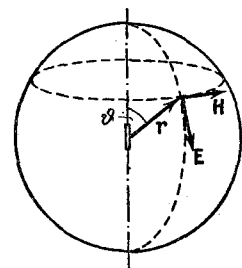


Рис. 245.

Назовем сечения волнового фронта плоскостями, проходящими через ось диполя, меридианами, а плоскостями, перпендикулярными к оси диполя, — параллелями. Тогда можно сказать, что вектор \mathbf{E} в каждой точке волновой зоны направлен по касательной к меридиану, а вектор \mathbf{H} — по касательной к параллели. Если смотреть вдоль луча \mathbf{r} , то мгновенная картина волны будет такой

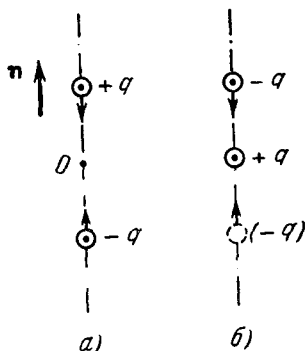


Рис. 244.

же, как на рис. 237, с тем отличием, что амплитуда при перемещении по лучу постепенно убывает.

В каждой точке векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} колеблются по закону $\cos(\omega t - kr)$. Амплитуды колебания \mathbf{E}_m и \mathbf{H}_m зависят от расстояния r до излучателя и от угла ϑ между направлением радиуса-вектора \mathbf{r} и осью диполя (рис. 245). Эта зависимость для вакуума имеет следующий вид:

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \sin \vartheta.$$

Среднее значение плотности потока энергии \bar{S} пропорционально произведению $E_m H_m$, т. е.

$$\bar{S} \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta. \quad (114.2)$$

Из этой формулы вытекает, что интенсивность волны изменяется вдоль луча (при $\vartheta = \text{const}$) обратно пропорционально квадрату расстояния от излучателя. Кроме того, она зависит от угла ϑ . Сильнее всего излучает диполь в направлениях, перпендикулярных к его оси ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$). В направлениях, совпадающих с осью ($\vartheta = 0$

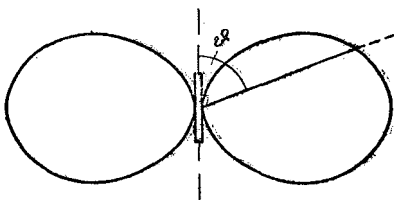


Рис. 246.

и π), электрический диполь не излучает. Зависимость интенсивности волны от угла ϑ очень наглядно изображается с помощью так называемой диаграммы направленности диполя (рис. 246). Эта диаграмма строится та-

ким образом, чтобы длина отрезка, отсекаемого ею на луче, проведенном из центра диполя, давала в известном масштабе интенсивность излучения под углом ϑ .

Энергия, излучаемая по всем направлениям в единицу времени, называется интенсивностью (или мощностью) излучения. Соответствующий расчет дает для интенсивности излучения элементарного диполя следующее выражение:

$$I = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{6\pi c^2} \ddot{\mathbf{p}}^2. \quad (114.3)$$

Согласно формуле (114.1) $\ddot{p}^2 = q^2 l^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$. Подставив это значение в формулу (114.3), получим

$$I = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{q^2 l^2 \omega^4}{6\pi c^2} \cos^2 \omega t. \quad (114.4)$$

Поскольку $\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$, средняя по времени интенсивность излучения равна

$$\bar{I} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{q^2 l^2 \omega^4}{12\pi c^2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{p_m^2 \omega^4}{12\pi c^2}.$$

Таким образом, средняя интенсивность излучения диполя пропорциональна квадрату амплитуды электрического момента диполя и четвертой степени частоты. Поэтому при малой частоте излучение электрических систем (например, линий передачи переменного тока промышленной частоты) бывает незначительным.

Если диполь образован системой из неподвижного и колеблющегося зарядов, l в формуле (114.4) означает амплитуду колебания, а величина $l^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$ равна квадрату ускорения w колеблющегося заряда. В этом случае формулу для интенсивности излучения можно записать следующим образом:

$$I = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{q^2 w^2}{6\pi c^2}. \quad (114.5)$$

Эта формула сохраняет свое значение и при произвольном движении заряда. Всякий заряд, движущийся с ускорением, возбуждает электромагнитные волны, причем мощность излучения дается формулой (114.5). Электроны, ускоряемые в бетатроне (см. § 104), также теряют энергию за счет излучения, обусловленного центростремительным ускорением $w_n = \frac{v^2}{r_0}$. Согласно формуле (114.5) количество теряемой на излучение энергии сильно растет с увеличением скорости электронов в бетатроне (пропорционально v^4). Поэтому возможное ускорение электронов в бетатроне ограничено пределом в 500 Мэв (при скорости, соответствующей этому значению, потери на излучение становятся равными энергии, сообщаемой электронам вихревым электрическим полем).

В отличие от случая, когда ускорение изменяется по гармоническому закону, при произвольном w излучение представляет собой не монохроматическую волну, а состоит из набора волн различных частот.

Согласно формуле (114.5) интенсивность обращается в нуль при $w = 0$. Следовательно, электрон, движущийся с постоянной скоростью, не излучает электромагнитных волн. Это, однако, справедливо лишь в том случае, если скорость электрона $v_{эл}$ не превышает скорости света

$$v_{св} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$
 в той среде, в которой движется электрон.

В случае $v_{эл} > v_{св}$ ¹⁾ наблюдается излучение, открытое в 1934 г. С. И. Вавиловым и П. А. Черенковым. Более подробно об этом излучении будет идти речь в Оптике.

¹⁾ Этот случай не может осуществиться при движении электрона в вакууме, так как согласно теории относительности скорость любых частиц не может превысить c .

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН В СИ И В ГАУССОВОЙ СИСТЕМЕ

В системе единиц СИ:
электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi (2,99776)^2 \cdot 10^9} \text{ ф/м} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ ф/м},$$

магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м}$.

В гауссовой системе единиц
электродинамическая постоянная

$$c = 2,99776 \cdot 10^{10} \text{ см/сек} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}.$$

Соотношения между единицами даны приближенно. Чтобы получить точные значения, нужно в величинах, приведенных в последнем столбце, заменить 3 на 2,99776 и 9 на $(2,99776)^2$.

Величина и ее обозначение	Единица измерения и ее обозначение		Соотношение между единицами
	СИ	гауссова система	
Сила f Работа A и энергия W Заряд q Напряженность электрического поля E Потенциал ϕ , разность потенциалов или напряжение U и э. д. с. \mathcal{E}	ньютон (н) джоуль (дж) кулон (к) вольт на метр (в/м) вольт (в)	дина (дин) эрг (эрг) СГСЭ-ед. СГСЭ-ед. СГСЭ-ед.	$1 \text{ н} = 10^5 \text{ дин}$ $1 \text{ дж} = 10^7 \text{ эрг}$ $1 \text{ к} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ-ед.}$ $1 \text{ СГСЭ-ед.} = 3 \cdot 10^4 \text{ в/м}$ $1 \text{ СГСЭ-ед.} = 300 \text{ в}$

Величина и ее обозначение	Единица измерения и ее обозначение		Соотношение между единицами
	СИ	гауссова система	
Электрический дипольный момент p	$\kappa \cdot м$	СГСЭ-ед.	$1 \kappa \cdot м = 3 \cdot 10^{11}$ СГСЭ-ед.
Вектор поляризации P	$\kappa/м^2$	СГСЭ-ед.	$1 \kappa/м^2 = 3 \cdot 10^5$ СГСЭ-ед.
Диэлектрическая восприимчивость κ	СИ-ед.	СГСЭ-ед.	$1 \text{ СГСЭ-ед.} = 4\pi$ СИ-ед.
Электрическое смещение (электрическая индукция) D	кулон на квадратный метр ($\kappa/м^2$)	СГСЭ-ед.	$1 \kappa/м^2 = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^5$ СГСЭ-ед.
Поток электрического смещения (поток электрической индукции) Φ	кулон (κ)	СГСЭ-ед.	$1 \kappa = 4\pi \cdot 3 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед.
Электрическая емкость C	фарада (ϕ)	сантиметр ($см$)	$1 \phi = 9 \cdot 10^{11}$ $см$
Сила тока i	ампер (a)	СГСЭ-ед.	$1 a = 3 \cdot 10^9$ СГСЭ-ед.
Плотность тока j	ампер на кв. метр ($a/м^2$)	СГСЭ-ед.	$1 a/м^2 = 3 \cdot 10^5$ СГСЭ-ед.
Электрическое сопротивление R	ом ($ом$)	СГСЭ-ед.	$1 \text{ СГСЭ-ед.} =$ $= 9 \cdot 10^{11}$ $ом$
Удельное сопротивление ρ	$ом \cdot м$	СГСЭ-ед.	$1 \text{ СГСЭ-ед.} =$ $= 9 \cdot 10^9$ $ом \cdot м$
Магнитная индукция B	тесла ($тл$)	гаусс ($гс$)	$1 тл = 10^4$ $гс$
Поток магнитной индукции Φ и потокосцепление Ψ	вебер ($вб$)	максвелл ($мкс$)	$1 вб = 10^8$ $мкс$
Магнитный момент p_m	$a \cdot м^2$	СГСМ-ед.	$1 a \cdot м^2 = 10^3$ СГСМ-ед.
Вектор намагничивания J	ампер на метр ($a/м$)	СГСМ-ед. (гаусс)	$1 \text{ СГСМ-ед.} =$ $= 10^3$ $a/м$

Величина и ее обозначение	Единица измерения и ее обозначение		Соотношение между единицами
	СИ	гауссова система	
Напряженность магнитного поля H Магнитная восприимчивость χ Индуктивность L и взаимная индуктивность L_{12}	ампер на метр (a/m) СИ-ед. генри ($гн$)	эрстед ($э$) СГСМ-ед. сантиметр ($см$)	$1 a/m = 4\pi \cdot 10^{-3} э$ $1 э = 79,6 a/m$ $1 \text{ СГСМ-ед.} = 4\pi \text{ СИ-ед.}$ $1 гн = 10^9 см$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА
В СИ И В ГАУССОВОЙ СИСТЕМЕ

Наименование	СИ	Гауссова система
Закон Кулона	$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$f = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
Напряженность электрического поля (определение)		$E = \frac{f}{q}$
Напряженность поля точечного заряда	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{er^2}$	$E = \frac{q}{er^2}$
Напряженность поля между заряженными плоскостями и вблизи поверхности заряженного проводника	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$	$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$
Потенциал (определение)		$\varphi = \frac{W_p}{q}$

Наименование	СИ	Гауссова система
Потенциал точечного заряда	$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{er}$	$\varphi = \frac{q}{er}$
Работа сил поля над зарядом	$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$	
Связь между E и φ	$E = -\text{grad } \varphi$	
Связь между φ и E	$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl$	
Связь между φ и E в однородном поле	$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$	
Циркуляция вектора E для электростатического поля	$\oint E_l dl = 0$	
Электрический момент диполя	$p = ql$	
Механический момент, действующий на диполь в электрическом поле	$M = [pE]$	
Энергия диполя в электрическом поле	$W = -pE$	
Дипольный момент «упругой» молекулы	$p = \beta\epsilon_0 E$	$p = \beta E$
Вектор поляризации (определение)	$P = \sum \frac{\Delta V}{\Delta V}$	
Связь между P и E	$P = \chi\epsilon_0 E$	$P = \chi E$
Связь между P и поверхностной плотностью связанных зарядов	$\sigma' = P_n = \chi\epsilon_0 E_n$	$\sigma' = P_n = \chi E_n$
Электрическое смещение (электрическая индукция) (определение)	$D = \epsilon_0 E + P$	$D = E + 4\pi P$

Наименование	СИ	Гауссова система
Связь между относительной диэлектрической проницаемостью ϵ и диэлектрической восприимчивостью κ	$\epsilon = 1 + \kappa$	$\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$
Связь между значениями κ в СИ ($\kappa_{\text{СИ}}$) и в гауссовой системе ($\kappa_{\text{ГС}}$)	$\kappa_{\text{СИ}} = 4\pi\kappa_{\text{ГС}}$	
Связь между D и E	$D = \epsilon\epsilon_0 E$	$D = \epsilon E$
Связь между D и E в вакууме	$D = \epsilon_0 E$	$D = E$
D поля точечного заряда	$D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}$	$D = \frac{q}{r^2}$
Теорема Гаусса для D	$\oint D_n dS = \sum q$	$\oint D_n dS = 4\pi \sum q$
Напряжение (определение)	$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$	
Емкость конденсатора (определение)	$C = \frac{q}{U}$	
Емкость плоского конденсатора	$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$	$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$
Энергия системы зарядов	$W = \frac{1}{2} \sum q\varphi$	
Энергия заряженного конденсатора	$W = \frac{CU^2}{2}$	
Плотность энергии электрического поля	$w = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$	$w = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$
Сила тока (определение)	$i = \frac{dq}{dt}$	
Плотность тока (определение)	$j = \frac{di}{dS_{\perp}}$	

Наименование	СИ	Гауссова система
Закон Ома	$i = \frac{1}{R} U$	
Закон Ома в дифференциальной форме	$j = \frac{1}{\rho} E$	
Закон Джоуля — Ленца	$Q = \int_0^t Ri^2 dt$	
Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме	$w = \rho j^2$	
Сила взаимодействия двух параллельных токов в вакууме (в расчете на единицу длины)	$f = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2i_1 i_2}{b}$	$f = \frac{2i_1 i_2}{b}$
Магнитный момент контура с током	$p_m = iS$	$p_m = \frac{1}{c} iS$
Магнитная индукция (определение)	$B = \frac{M_{\max}}{p_m}$	
Вектор намагничивания (определение)	$J = \frac{\sum p_m}{\Delta V}$	
Напряженность магнитного поля (определение)	$H = \frac{1}{\mu_0} B - J$	$H = B - 4\pi J$
Связь между J и H	$J = \chi H$	
Связь между относительной магнитной проницаемостью μ и магнитной восприимчивостью χ	$\mu = 1 + \chi$	$\mu = 1 + 4\pi\chi$
Соотношение между значениями χ в СИ ($\chi_{\text{СИ}}$) и в гауссовой системе ($\chi_{\text{ГС}}$)	$\chi_{\text{СИ}} = 4\pi\chi_{\text{ГС}}$	
Связь между B и H	$B = \mu\mu_0 H$	$B = \mu H$

Наименование	СИ	Гауссова система
Связь между B и H в вакууме	$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$	$\mathbf{B} = \mathbf{H}$
Закон Био — Савара	$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{i [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$	$d\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{i [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$
Напряженность магнитного поля прямого тока	$H = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{b}$	$H = \frac{1}{c} \frac{2i}{b}$
Напряженность магнитного поля в центре кругового тока	$H = \frac{i}{2r}$	$H = \frac{1}{c} \frac{2\pi i}{r}$
Напряженность поля соленоида	$H = ni$	$H = \frac{4\pi}{c} ni$
Циркуляция вектора H	$\oint H_i d\mathbf{l} = \sum i$	$\oint H_i d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum i$
Теорема Гаусса для B	$\oint \mathbf{B}_n dS = 0$	
Закон Ампера	$d\mathbf{f} = i[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$	$d\mathbf{f} = \frac{1}{c} i [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$
Сила Лоренца	$\mathbf{f} = e' [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$	$\mathbf{f} = \frac{e'}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$
Механический момент, действующий на магнитный момент в магнитном поле	$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}]$	
Энергия магнитного момента в магнитном поле	$W = -\mathbf{p}_m \mathbf{B}$	
Поток магнитной индукции (определение)	$\Phi = \int_S \mathbf{B}_n dS$	
Работа, совершаемая над контуром с током при перемещении его в магнитном поле	$A = i\Delta\Phi$	$A = \frac{1}{c} i\Delta\Phi$

Наименование	СИ	Гауссова система
Потокоосцепление или полный магнитный поток (определение)	$\Psi = \sum \Phi$	
Э. д. с. индукции	$\mathcal{E}_l = - \frac{d\Psi}{dt}$	$\mathcal{E}_l = - \frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt}$
Индуктивность (определение)	$L = \frac{\Psi}{i}$	$L = \frac{\Psi}{i/c} = c \frac{\Psi}{i}$
Индуктивность соленоида	$L = \mu_0 \mu n^2 l S$	$L = 4\pi \mu n^2 l S$
Э. д. с. самоиндукции (в отсутствие ферромагнетиков)	$\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}$	$\mathcal{E}_s = -\frac{1}{c^2} L \frac{di}{dt}$
Энергия магнитного поля тока	$W = \frac{Li^2}{2}$	$W = \frac{1}{c^2} \frac{Li^2}{2}$
Плотность энергии магнитного поля	$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}$	$w = \frac{\mu H^2}{8\pi}$
Энергия связанных контуров	$W = \frac{1}{2} \sum L_{lk} i_l i_k$	$W = \frac{1}{2c^2} \sum L_{lk} i_l i_k$
Плотность тока смещения (определение)	$j_{cm} = \dot{\mathbf{D}}$	$j_{cm} = \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}}$
Уравнения Максвелла в интегральной форме	$\oint E_l dl = - \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS$ $\oint_S B_n dS = 0$ $\oint H_l dl = \int_S j_n dS + \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_n dS$ $\oint_S D_n dS = \int_V \rho dV$	$\oint E_l dl = - \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_n dS$ $\oint_S B_n dS = 0$ $\oint H_l dl = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS + \frac{1}{c} \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)_n dS$ $\oint_S D_n dS = 4\pi \int_V \rho dV$

Наименование	СИ	Гауссова система
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$
Скорость электромагнит- ных волн	$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}}$	$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$
Соотношение между ам- плитудами векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в электромагнитной волне	$E_m \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu}$	$E_m \sqrt{\epsilon} = H_m \sqrt{\mu}$
Вектор Пойнтинга	$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}]$	$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}]$
Плотность импульса элек- тромагнитного поля	$\mathbf{K} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{E} \mathbf{H}]$	$\mathbf{K} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \mathbf{H}]$
Интенсивность излучения диполя	$I = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{2}{3c^2} \dot{\mathbf{p}}^2$	$I = \frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{p}}^2$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Авогадро число 300
Автоколебательная система 369
Акцептор 260
Ампер 15, 108, 124
— на метр 146
Ампера гипотеза 142, 170
— закон 124, 156
Ампер-виток 139
Ампер-секунда 125
Анион 296
Анод 269
Антиферромагнетизм 188, 189
Астона масс-спектрограф 232
Астоново темное пространство 326
- База транзистора 290
Баллистический метод измерения магнитной индукции 184, 198
Барьетта опыт 173
Бейнбриджа масс-спектрограф 233
Бетатрон 374, 415
Бю — Савара — Лапласа закон 129
Богуславского — Ленгмюра закон 270
Больцмана функция распределения 252, 254
Бора магнетон 174
— теория 170
Буша опыт 226
- Вавилова — Черенкова излучение 416
Валентность 299
Ван-де-Граафа генератор 86
Вебер 194
Вектор намагничивания 143
— плотности тока 107
— поляризации 53, 148
Векторная диаграмма 339, 354
Весы крутильные 13
Вибратор полуволновой 405
Видемана — Фрайца закон 244
Вихрь 388
Внешняя область короны 336
Волновая зона диполя 413
Волновое уравнение 399
Вольт 41
— на метр 19
Вольт-амперная характеристика 269, 288, 330
Вольтметр искровой 335
- Восприимчивость диэлектрическая 53
— магнитная 147, 179, 180, 182, 185
— атомная 169
— килоатомная 169
— молярная 169
— киломолярная 169
— удельная 169
Вторичные химические реакции 296
Выпрямитель германиевый 289
— кремниевый 289
— на газотроне 333
— полупроводниковый 289
— ртутный 332
— селеновый 289
Выпрямление тока 271, 289
— двухполупериодное 272
— однополупериодное 271
Вырождение 247
- Газотрон 332
Гальваномagnetное явление 262
Гальванометр баллистический 199
Гальванопластика 303
Гальваностегия 303
Гамильтона оператор 391
Гамма-лучи 377
Гаусс 130, 133, 147
Гаусса теорема для вектора \mathbf{B} 143
— — — \mathbf{D} 62, 63
— — — \mathbf{E} 28, 61
Генератор ламповый 369
— электростатический 86
Генри 202
— на метр 203
Герца вибратор 404, 412
— опыты 404
Гидратация ионов 296
Гиромагнитное отношение 171, 173
Гиромагнитные явления 171
Гистерезис 77
— магнитный 184, 188
Гистерезиса петля 77, 185, 217
— максимальная 185
Градиент 42, 391
— потенциала 42, 43
Грамм-эквивалент 299
- Давление световое 412
— электромагнитной волны 410

Двойное преломление электромагнитных волн 407
 Двойной электрический слой 265, 286
 Дейтерий 304
 Джоуля — Ленца закон 114, 243
 — — в дифференциальной форме 115
 Диаграмма направленности диполя 414
 Динамизм 176
 Динамика 170
 Дивергенция 57, 382, 384, 391
 — вектора \mathbf{B} 395
 — \mathbf{D} 395
 Диод вакуумный 269, 271
 — — двойной 272
 — кристаллический 284
 — плоскостной 285
 — полупроводниковый 284
 Диполь 20
 — жесткий 50
 — полувольновой 405
 — упругий 50
 — элементарный 412
 Диполя излучение 412
 — электрический момент 21
 Диссоциация электролитическая 292
 Диффузионная разность потенциалов 279
 Диэлектрик 12
 Домены сегнетоэлектрика 78
 — ферромагнетика 187
 Донор 259
 Дроссель 405
 Друде теория металлов 240
 Дуанты 235
 Дуга вольтова 330
 — с холодным катодом 331
 — термоэлектронная 331
 — электрическая 330
 Дырка 255, 257, 260

Единица заряда абсолютная электростатическая 14
 — — в СИ 16, 108, 125
 — напряженности магнитного поля 146, 147
 — электрического поля 19
 — электрического смещения 63
 Единицы емкости 89
 — индуктивности 202
 — магнитного момента 174
 — — потока 194
 — магнитной индукции 129, 130
 — потенциала 41
 — силы тока 108, 124
 — сопротивления 111
 Емкость 88, 339, 341
 — конденсатора 90
 — плоского конденсатора 91
 — сферического конденсатора 92
 — цилиндрического конденсатора 93
 — шара 89

Закон преломления линий магнитной индукции 153
 — — — электрического смещения 72
 — сохранения заряда 12
 — трех вторых 270
 — электромагнитной индукции 193, 393

Заряд индуцированный 84
 — пробный 18
 — свободный 60
 — связанный 60
 — точечный 13
 — удельный 219, 227, 230
 — — электрона 227
 — электрический 11
 — элементарный 11, 15, 16, 230, 300
 Защита магнитная 154
 — электростатическая 85
 Зеебека явление 277
 Зона валентная 249, 255
 — запрещенная 248, 255
 — проводимости 250, 255
 — разрешенная 248
 — энергетических уровней 246, 247

Излучение атома 413
 Изолятор 12, 250
 Изотоп 232
 Импульс электромагнитного поля 410
 — электромагнитной волны 411
 Индуктивность 202, 204, 339
 — взаимная 211, 215
 — соленоида 203
 Индукция взаимная 211
 — магнитная 128, 146
 — — остаточная 184
 — электрическая 61, 63
 — электромагнитная 190
 Интенсивность излучения 414
 Ионизационная камера 310, 313
 — — импульсная 313
 — — интегрирующая 315
 Ионизация 306
 — термическая 305, 323, 330
 — ударом 310, 323, 327
 Ионосфера 323
 Ионы 84, 86, 292, 305
 — Ланжевена 308
 Истечение с острия 84
 Источники 381

Катнон 296
 Катод 269
 — оксидный 271
 Катодная светящаяся пленка 326
 Катодное падение потенциала 327
 — пятно 331
 Католюминесценция 329
 Квадрат 23
 Квант действия 174
 — света 317
 Квантование момента импульса 175
 — энергии 246
 Кварц 79
 Кенотрон 271
 Килограмм-эквивалент 299
 Кирхгофа правила 117, 338, 353
 Клаузиуса — Мосотти формула 76
 Колебательный контур 357, 404
 — —, добротность 363, 367, 369
 — —, собственная частота 360
 Коллектор 290
 Конденсатор 89
 — плоский 32, 91
 —, соединенные параллельное 93
 —, — последовательное 94
 — сферический 35, 93
 — цилиндрический 34, 92

- Конденсатор электролитический 304
 Контактная разность потенциалов 274
 — — — внешняя 275
 — — — внутренняя 276, 278
 Контуры связанные 211, 215
 Концентрация носителей тока 263
 — эквивалентная 302
 Корона 336
 — дипольная 337
 Коронирование 87
 Коэффициент взаимной индукции 211
 — вторичной эмиссии 320
 — газового усиления 312, 315
 — диссоциации 294
 — мощности 348
 — Пельтье 282, 284
 — полезного действия источника то-
 ка 122
 — самоиндукции 202
 — теплопроводности 244
 — термо-э. д. с. 280, 282, 284
 — Томсона 284
 — электропроводности 112, 244
 Крайер анода 330
 Кратность вырождения 247
 Кривая намагничивания нулевая 184
 — — — основная 184
 Круксово темное пространство 326, 329
 Крутизна характеристика 273, 370
 Кулон 16, 108, 125
 — на квадратный метр 63
 Кулона закон 13, 14, 16, 73
 Кюри закон 180, 183
 — постоянная 180, 183
 Кюри — Вейсса закон 188
- Лампа двухэлектродная 269
 — пятиэлектродная 274
 — трехэлектродная 272
 — четырехэлектродная 274
 Лампы дневного света 332
 — люминесцентные 332
 — неоновые 329
 — ртутные дуговые 331
 — сверхвысокого давления 331
 — электронные 268
 Ланжевена теория парамагнетизма
 180
 Ларморова прецессия 177, 179
 — частота 177
 Лебедева опыты 406, 412
 Ленца правило 191, 200
 Ленц-джоулево тепло 114, 243, 409
 Линии напряженности 23
 Логарифмический декремент затуха-
 ния 362
 Лоренца сила 158, 193, 195, 219
 — теория металлов 240
 Лучи каналовые 330
 — катодные 329
 — положительные 330
 Люминофор 332
- Магнетики 142, 169
 Магнит постоянный 185
 Магнитное поле 126
 — — — движущегося заряда 131
 — — — кругового тока 133, 134
 — — — прямого тока 132
 — — — соленоида 139
 — — — тороида 141
- Магнитный момент атома 174
 — — — индуцированный 177
 — — — контура 127, 128
 — — — молекулы 174
 — — — электрона орбитальный 171
 — — — собственный 173
 Магнитомеханические явления 171,
 187
 Магнитоотрицательность 186
 Майкельсона опыт 380
 Максвелл 194
 Максвелла теория 374, 377, 379, 393
 — уравнения в дифференциальной
 форме 395
 — — — интегральной форме 393, 394
 Мандельштам и Папалекси опыт
 239
 Масс-спектрограмма 233
 Масс-спектрограф 233
 Масс-спектрометр 234
 Масса, зависимость от скорости 228
 — покоя 228
 — электромагнитного поля 411
 Металл 249
 Метастабильное состояние 317, 318
 Метатитанат бария 78, 79
 Метод магнитной фокусировки 226
 Механический момент электрона ор-
 битальный 171
 — — — собственный 173
 Микромикрофарада 89
 Микрофарада 89
 Милликена опыт 228
 Мировой эфир 378
 Молекулы неполярные 49
 — полярные 49, 292
 Молекулярные токи 142, 149
 Молизация ионов 293
 Молния 334
 Мощность излучения 414
 — источника 381
 — — — удельная 382
 — переменного тока 348
 — полезная 122
 — постоянного тока 122
 — тока удельная 115
- Намагничивание 142, 143
 — остаточное 185
 — спонтанное 187
 Направление запорное 289
 — обратное 289
 — пропускное 288
 — проходное 288
 — прямое 288
 Напряжение 111
 — действующее 348
 — обратное 288
 — прямое 287, 288
 Напряженность поля диполя 22
 — — — магнитного 145, 146
 — — — сторонних сил 110
 — — — электрического 18, 146
 Неупругие столкновения второго ро-
 да 318
 — — — первого рода 318
 Носители заряда 12, 106, 107, 238, 292,
 305
 — тока 106, 107, 238, 292, 305
- Области спонтанного намагничивания
 187

Области спонтанной поляризации 78
 — Гейгера 312
 — непрерывного разряда 313
 — пропорциональности 312
 — частичной пропорциональности 312
 Обратная связь 371
 Огни святого Эльма 337
 Окуполь 23
 Ом 111
 Ома закон 111, 242, 338, 351
 — — в дифференциальной форме 112
 — — для газов 308
 — — замкнутой цепи 116
 — — неоднородной цепи 116
 — — в дифференциальной форме 117
 — — электролитов 301
 Омо-метр 112
 Оператор Гамильтона 391
 — Лапласа 392
 — набла 42, 391
 Остроградского — Гаусса теорема 385
 Осциллограф 224

Падение напряжения 111
 Парамагнетизм 180
 Парамагнетики 170
 Паули принцип 247
 Пашена закон 334
 Пельтье тепло 282
 — явление 282, 283
 Пентод 274
 Печь индукционная 200
 Пикофарада 89
 Плазма 322, 328
 — высокотемпературная 323, 330
 — газоразрядная 323, 328, 332
 — изотермическая 323, 325
 Планка постоянная 174, 321
 Плотность заряда линейная 29
 — — объемная 29
 — — поверхностная 29
 — импульса электромагнитной волны 411
 — потока энергии 407, 408, 414
 — связанных зарядов объемная 57
 — — — поверхностная 58, 59
 — силы 158, 410
 — тока 107
 — — насыщения 270, 309
 — — полная 379
 — — проводимости 378, 379, 394
 — — смещения 379
 — энергии магнитного поля 209, 210, 218
 — — электрического поля 102
 — — электромагнитного поля 407
 p — n -переход 285, 289, 290
 Поверхностный эффект 201
 Поверхность эквипотенциальная 46
 Подвижность ионов в газах 308
 — — — электролитах 301
 — носителей тока 264, 301
 — электронов в металлах 301
 Пойнтинга вектор 408
 Поле вектора 22
 — — В 393
 — — скорости 23, 381
 — вихревое 138, 372
 — истинное 60, 142

Поле магнитное 126, 142
 — — микроскопическое 60, 142
 — — микроскопическое 60, 142
 — — однородное 32
 — — потенциальное 36, 137, 373
 — — размагничивающее 151
 — — соленоидальное 138
 — — электрическое 17
 — — электромагнитное 380
 Полный магнитный поток 197
 Положительная нормаль 127, 387
 Положительный столб 326—328
 Полупроводники 12, 250, 254
 — n -типа 258, 264
 — примесные 258
 — p -типа 260, 264
 — — собственные 255
 — — электронные 250
 Поляризация диэлектрика 52
 — — остаточная 77
 — — спонтанная 77
 Поляризуемость молекулы 50
 Попова опыты 407
 Порог области Гейгера 312
 — пропорциональной области 312
 Постоянная времени цепи 206, 314
 — магнитная 17, 125, 417
 — — электрическая 16, 17, 417
 — — электродинамическая 16, 17, 126, 417
 Потенциал 39, 40, 138
 — векторный 393
 — — выхода 267
 — — системы зарядов 40
 — — точечного заряда 39
 Поток вектора 25, 381
 — — — Пойнтинга 409
 — — — поляризации 58
 — — скорости 25, 381
 — — магнитной индукции 143, 190
 — — смещения 62
 — — энергии 408
 Потокосцепление 197
 Правило левой руки 156
 Прецессия электронной орбиты 177, 179
 Примесь акцепторная 260
 — — донорная 259
 Принцип относительности Галилея 380
 — — — Эйнштейна 380
 — — суперпозиции полей 20
 Пробой газового промежутка 335
 Проводник 12
 — второго рода 292
 — первого рода 292
 Проницаемость диэлектрическая 62, 63, 68, 77
 — — абсолютная 62
 — — относительная 62, 64, 68, 77
 — — магнитная 148, 185
 — — абсолютная 148
 — — относительная 148, 150, 185
 Пьезоэлектрики 79
 Пьезоэлектрический эффект обратный 80
 — — — поперечный 79
 — — — продольный 79
 — — — прямой 78, 79
 Работа выхода 267, 270
 — — — полная 267

Работа выхода эффективная 267
 — перемещения 217
 — перемещения проводника с током в магнитном поле 166
 Размагничивающий фактор 151
 Разряд аperiodический 364
 — газовый 305
 — дуговой 330, 332
 — искровой 334
 — кистевой 336
 — коронный 87, 336
 — несамостоятельный 305, 306
 — самостоятельный 305, 325
 — тлеющий 326
 Расхождение 382
 Рафинирование металлов 303
 Резерфорда опыты 170
 Резонанс напряжений 345
 — токов 353
 Резонансная частота 345, 353, 355, 367
 Резонансные кривые 366, 367
 Рекомбинация ионов 293, 306, 328
 — электронов и дырок 257, 286
 Рентгеновские лучи 377
 Рикке опыт 238
 Ричардсона формула 271
 Ротор 388, 390, 391

Самоиндукция 201
 Сантиметр, единица емкости 89
 —, — индуктивности 202
 Сверхпроводимость 113
 —, критическая температура 113
 —, критическое поле 113
 Сегнетова соль 77, 79
 Сегнетоэлектрики 77, 185
 Селектор скоростей 233
 Сетка 272, 333
 Сеточная характеристика 273
 Сила взаимодействия токов 124, 156
 — коэрцитивная 78, 185
 — лоренцева 158
 — сторонняя 109
 — термоэлектродвижущая 278
 — тока 106
 — — действующая 347
 — — эффективная 347
 Символический метод 348
 Синхротрон 236
 — протонный 236
 Синхрофазотрон 236
 Синхроциклотрон 236
 Система единиц абсолютная электромеханическая 15
 — — электростатическая 15
 — — гауссова 15, 126, 130
 — — международная 15, 16
 — — рационализованная 16
 Скин — эффект 201
 Скорость света 126, 399
 — электромагнитных волн 126, 399
 Соленоид 138
 Сольват 296
 Сольватация ионов 296
 Соотношение между массой и энергией 412
 Сопротивление активное 339
 — емкостное 342
 — индуктивное 341
 — комплексное 351

Сопротивление критическое 364
 — металлов, зависимость от температуры 113, 245, 254
 — остаточное 113
 — полное 344
 — реактивное 345
 — удельное 112
 — электрическое 111, 243
 Спин 173
 Стоки 381
 Стокса теорема 390
 Столетова опыты 184, 198
 Страты 327
 Стример 334, 335
 Суперпозиция полей магнитных 128
 — — электрических 20
 Счетчик газоразрядный 310
 — Гейгера — Мюллера 316
 — несамогасящийся 316
 — пропорциональный 310, 315
 — самогасящийся 316

Температура критическая сверхпроводника 113
 — электронов 325
 Теория металлов квантовая 246
 — — классическая 240
 Теплоемкость металлов 246, 254
 Термометр сопротивления 114
 Термопара 281
 Термоэлектрические явления 277
 Термоэлектродвижущая сила 278
 — — удельная 281
 Тесла 129, 133
 Тетрод 274
 Тиратрон 333
 Тлеющее свечение 326, 329
 Ток анодный 269
 — вихревой 200
 — индукционный 190
 — квазистационарный 338
 — насыщения 270, 309
 — обратный 288
 — переменный 338
 — постоянный 108
 — проводимости 377, 394
 — сеточный 272
 — смещения 377—380, 393, 394
 — электрический 106
 Толмена и Стюарта опыт 239
 Томсона метод парабол 230
 — опыт 225
 — формула 360
 — явление 284
 Торонд 140
 Точка Кюри антиферромагнитная 189
 — — сегнетоэлектрика 78
 — — ферромагнетика 188
 — Нееля 189
 Транзистор 284, 290
 Триод вакуумный 272
 — кристаллический 284
 — полупроводниковый 284, 290
 Туннельный эффект 321
 Тяжелая вода 304

Узел цепи 117
 Уровень энергетический 246
 — — акцепторный 260
 — — донорный 259
 — — локальный 259, 260
 Успокоитель электромагнитный 200

Фазотрон 236
Фарада 89
Фарадеево темное пространство 326
Фарадея закон электромагнитной индукции 193
— законы электролиза 298
— число 299
Ферми уровень 252, 255, 260, 261, 268, 275, 278, 286, 287
— функция распределения 252, 255
Ферриты 183, 201
Ферромагнетизм 183
Ферромагнетики 170, 183
— жесткие 186
— мягкие 186
Феррозлектрики 78
Фильтр скоростей 233
Фотоионизация 321, 335, 336
— ступенчатая 321
Фотон 317, 321
Фотоэффект 322
Фуко токи 200

Химический эквивалент 299
Холла постоянная 262, 263, 264
— эффект 262, 264

Циклическая перестановка координат 389

Циклотрон 235
Циркуляция 38, 381, 385, 386
Циркуляция вектора \mathbf{B} 136, 137
— — \mathbf{E} 38, 373
— — \mathbf{H} 146, 379
— — \mathbf{J} 145

Частицы элементарные 11
Частный цикл 185
Частота ларморовой прецессии 177

Шоттки эффект 266, 271
Штерна и Герлаха опыт 175

Эйнштейна и де-Хааса опыт 171
Электрические колебания 357
— — вынужденные 364
— — затухающие 360
— — свободные 357
Электрический ветер 84

Электрическое смещение 61, 146
Электродвижущая сила 109
— — взаимной индукции 211, 371
— — индукции 192, 197
— — самоиндукции 203
Емкость 88
Электронскровая обработка металлов 336
Электролиз 297
Электролит 292
Электромагнит 154
Электромагнитные волны 126, 393, 397
— — плоские 400
Электрометаллургия 303
Электрон 11, 238
— вторичный 320, 327
— заряд 228, 230
—, магнитный момент орбитальный 171
—, — — собственный 173, 187
—, масса 230
—, механический момент орбитальный 171
—, — — — собственный 173
—, спин 173, 247
—, удельный заряд 225, 226, 227
Электронвольт 41
Электроннолучевая трубка 224
Электронный газ 240
— умножитель 320
Электроны проводимости 240
— свободные 240
— —, концентрация 240
Электрополировка 303
Электросварка 331
Электрострикция 72, 80
Электрофильтр 337
Электрохимический эквивалент 298
Эмиссия автоэлектронная 321, 331
— вторичная электронная 320, 327
— термоэлектронная 268, 322, 330, 332
— фотоэлектронная 322
— холодная 321
Эмиттер 290
Энергия диполя в электрическом поле 51
— заряженного конденсатора 99
— — проводника 98
— магнитного момента в магнитном поле 163
— — поля связанных контуров 215
— — — тока 208
— системы зарядов 97
Эрстед 147