МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
„ЛЭТИ“ им. В. И. Ульянова (Ленина)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Часть II

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2019

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
„ЛЭТИ“ им. В. И. Ульянова (Ленина)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Часть II

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2019

УДК 519.677(07)
ББК В16я7
М 33

Авторы: А. Л. Белопольский, Т. В. Непомнящая, В. Л. Трегуб, С. И. Челкак, А. П. Щеглова.

М 33 Математический анализ в примерах и задачах: учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 2. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2019. 108 с.

ISBN 978-5-7629-2439-9 (Ч. 2)
ISBN 978-5-7629-2271-5

Является 2-й частью учебного пособия [1] и предназначено для самостоятельной работы студентов первого и второго курсов, изучающих дисциплину «Математический анализ».

Каждый раздел пособия содержит краткое изложение теории (без доказательств) и многочисленные примеры с подробными решениями. Дается много упражнений для самостоятельного решения студентами с ответами. Кроме того даются ссылки на учебники и учебные пособия, в которых можно найти доказательства приведенных утверждений. Пособие соответствует рабочим программам дисциплины «Математический анализ», читаемой кафедрой высшей математики студентам факультетов: электротехники и автоматики, электроники, экономики и менеджмента (1-й курс) и открытого факультета (1, 2-й курсы).

Предназначено для студентов всех направлений и специальностей факультетов электротехники и автоматики, электроники, экономики и менеджмента и открытого факультета.

УДК 519.677(07)
ББК В16я7

Рецензенты: кафедра высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД; д-р. физ.-мат. наук А. А. Груздков (СПбТИ(ТУ)).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629-2439-9 (Ч. 2)
ISBN 978-5-7629-2271-5

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие является 2-й частью учебного пособия [1], поэтому нумерация разделов продолжает нумерацию первой части (т. е. первый раздел имеет номер 4).

Учебное пособие предназначено для студентов первого курса, приступивших к изучению математического анализа. По мнению авторов, оно окажется полезным студентам в их самостоятельной работе. Приводятся многочисленные примеры с решениями и упражнения для самостоятельной работы студентов.

Учебное пособие состоит из трех разделов.

Раздел 4: «Интегральное исчисление функций одной вещественной переменной». С теорией изложенного материала можно познакомиться в учебном пособии [2, разд. 6, 7]. Для более углубленного изучения теории рекомендуется учебник [3, гл. 8 – 10, 13].

Раздел 5: «Числовые и степенные ряды». С теорией изложенного материала можно познакомиться в учебном пособии [2, разд. 10, 11]. Для более углубленного изучения теории рекомендуется учебник [3, гл. 11, 12].

Раздел 6: «Функции многих вещественных переменных». С теорией изложенного материала можно познакомиться в учебном пособии [4]. Для более углубленного изучения теории рекомендуется учебник [5, гл. 5]. При выполнении типового расчета рекомендуется учебное пособие [6, разд. 4].

Отметим некоторые стандартные обозначения, принятые в пособии. Множество натуральных чисел обозначается символом $\mathbb{N}$; множество целых чисел – $\mathbb{Z}$; множество вещественных чисел – $\mathbb{R}$; множество точек на плоскости – $\mathbb{R}^2$; множество точек в пространстве – $\mathbb{R}^3$; $\emptyset$ – пустое множество. Используются символы математической логики (кванторы): $\exists\ a$ – существует a, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ – для любых вещественных x. Знак $\bullet$ – конец примера, знак $\otimes$ – конец замечания.

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. Неопределенный интеграл

Определение. Основные правила интегрирования.

Напомним известное из школьного курса математики определение первообразной функции $f(x)$.

Определение 4.1. *Пусть функция f непрерывна на (a,b). Любая дифференцируемая на (a,b) функция G, такая, что $G'(x) = f(x)$ в каждой точке $x \in (a,b)$, называется первообразной к функции f на (a,b).*

Отметим, что если Φ – первообразная к f на (a, b), тогда:

1) для любой постоянной $C \in \mathbb{R}$ функция $\Phi + C$ есть первообразная к f на (a, b);

2) если G – тоже первообразная к f на (a, b), то существует постоянная $C \in \mathbb{R}$, такая, что $G = \Phi + C$.

Определение 4.2. *Множество всех первообразных функций к f на (a, b) называют неопределенным интегралом от функции f и обозначают $\int f(x)\,dx$, при этом $\int f(x)\,dx = G(x) + C$, где $G(x)$ – некоторая первообразная к функции $f(x)$ на (a, b), а константа $C \in \mathbb{R}$ (произвольная постоянная).*

Вспомнив основные формулы производных, можно составить следующую таблицу интегралов (в формулах постоянная $a \neq 0$):

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1. & 2.\ \displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \\
3.\ \displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. & 4.\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C. \\
5.\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = & \\
= \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C. & 6.\ \displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C. \\
7.\ \displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C. & 8.\ \displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C. \\
9.\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. & 10.\ \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.
\end{array}
\tag{4.1}
$$

Напомним основные правила интегрирования:

1. Свойство линейности интеграла. Для любых постоянных α и β

$$\int (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \pm \beta \int g(x)\,dx. \tag{4.2}$$

2. Если $\int f(t)dt = G(t) + C$, то

$$\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a}G(ax + b) + C. \tag{4.3}$$

Приведем несколько примеров на вычисление интегралов.

Пример 4.1. $\displaystyle\int (4x^3 - 3x^2 + 8)\,dx.$

Решение. Используем 1-ю формулу из (4.1) и правило (4.2):

$$\int (4x^3 - 3x^2 + 8)\,dx = \int 4x^3\,dx - \int 3x^2\,dx + \int 8\,dx =$$

$$= 4\int x^3\,dx - 3\int x^2\,dx + 8\int 1\,dx = x^4 - x^3 + 8x + C. \bullet$$

Пример 4.2. $\displaystyle\int \cos(3x - 8)\,dx.$

Решение. Для нахождения этого интеграла применим 7-ю формулу (4.1) и правило (4.3): $f(t) = \cos t$, $a = 3$, $b = -8$. Ясно, что $G(t) = \sin t$ и $\displaystyle\int \cos(3x - 8)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x - 8) + C.$ $\bullet$

Пример 4.3. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 2x}.$

Решение. В данном случае применим 2-ю формулу из (4.1) и правило (4.3) с $f(t) = \dfrac{1}{t}$, $a = -2$, $b = 5$. Учитывая, что $G(t) = \ln|t|$, получим $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 2x} = -\frac{1}{2}\ln|5 - 2x| + C.$ $\bullet$

Пример 4.4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}}.$

Решение. Применим 5-ю формулу из (4.1) и правило (4.3):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x + 1)^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\bigl((2x+1) + \sqrt{(2x + 1)^2 + 2^2}\bigr) + C = \frac{1}{2}\ln\bigl(2x+1+\sqrt{4x^2 + 4x + 5}\bigr) + C. \bullet$$

Замена переменной в неопределенном интеграле.

Пусть существует непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$, такая, что подынтегральная функция $f(x)$ может быть записана в виде $f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)$. Если известно, что $\displaystyle\int g(t)dt = G(t) + C$, то

$$\int f(x)\,dx = \int g\bigl(\varphi(x)\bigr)\varphi'(x)\,dx = G\bigl(\varphi(x)\bigr) + C. \tag{4.4}$$

Пример 4.5. $\displaystyle\int \sin^4 x \cos x\,dx.$

Решение. Обозначив $t = \varphi(x) = \sin x$, учитывая, что $\varphi'(x) = \cos x$, применим (4.4) с $g(t) = t^4$. Поскольку $\int t^4 dt = \dfrac{t^5}{5} + C$, то получим: $\int \sin^4 x \cos x \, dx = \dfrac{1}{5}\sin^5 x + C$. •

Пример 4.6. $\int x \, e^{-x^2} \, dx$.

Решение. По формуле (4.4)

$$\int xe^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{-x^2} \, dx = -\frac{1}{2}\int \left(-x^2\right)' e^{-x^2} \, dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C. \; \bullet$$

Пример 4.7. $\int \dfrac{dx}{x \ln^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int (\ln x)' \frac{1}{\ln^2 x} \, dx = -\frac{1}{\ln x} + C. \; \bullet$$

Пример 4.8. $\int \dfrac{x \, dx}{x^2 + 1}$.

Решение.

$$\int \frac{x \, dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x \, dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C. \; \bullet$$

Формулу замены переменной иногда называют подстановкой и записывают в виде

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \, d(\varphi(t)) + C.$$

В этой формуле предполагается, что $x = \varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция на некотором интервале изменения t, а $f(x)$ – непрерывная функция на соответствующем интервале или отрезке оси x.

Пример 4.9. $\int e^{x^3} x^2 \, dx$.

Решение.

$$\int e^{x^3} x^2 \, dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} 3x^2 \, dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} \, d(x^3) = \left(u = x^3\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\int e^u \, du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C. \; \bullet$$

Пример 4.10. $\int \dfrac{x^2 \, dx}{1 + x^6}$.

Решение.

$$\int \frac{x^2\,dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2} = \Big(u = x^3\Big) = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3) + C. \bullet$$

Пример 4.11. $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx.$

Решение.

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx = \int \ln^3 x\,d(\ln x) = (u = \ln x) = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C. \bullet$$

Пример 4.12. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sin^2(x^2)}.$

Решение.

$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2(x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sin^2(x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sin^2(x^2)} = \Big(u = x^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} u + C = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(x^2) + C. \bullet$$

Пример 4.13. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

Решение.

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4+1)}{\sqrt{1+x^4}} = \Big(u = x^4+1\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\sqrt{u} + C = \frac{1}{2}\sqrt{x^4+1} + C. \bullet$$

Пример 4.14. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^8}}.$

Решение.

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^8}} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3\,dx}{\sqrt{1+(x^4)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{\sqrt{1+(x^4)^2}} = \Big(u = x^4\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{4}\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left(x^4 + \sqrt{1+x^8}\right) + C. \bullet$$

Пример 4.15. $\displaystyle\int \frac{x\sin(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

Решение.

$$\int \frac{x\sin(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \sin(\sqrt{x^2+1})\,d(\sqrt{x^2+1}) = \Big(u=\sqrt{x^2+1}\Big) =$$

$$= \int \sin u\,du = -\cos u + C = -\cos\sqrt{x^2+1} + C. \bullet$$

Пусть требуется найти $\displaystyle\int f(x)\,dx$, где $f(x)$ определена на некотором промежутке X. Введем функцию $x=\varphi(u)$, определенную на некотором промежутке U:

$$x=\varphi(u): U \to X, \quad \varphi(U)=X.$$

Функцию $\varphi(u)$ предполагаем непрерывно дифференцируемой и имеющей обратную:

$$u=\varphi^{-1}(x): X \to U.$$

Справедлива формула

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du\Big|_{u=\varphi^{-1}(x)}. \tag{4.5}$$

Пример 4.16. $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+\sqrt{x}}$ определена при всех $x\geq 0$. Введем функцию $x=u^2$, определенную для всех $u\geq 0$. Тогда $u=\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Применив формулу (4.5), получим:

$$\int \frac{1-x^2}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1-u^4}{1+u}\,2u\,du\Big|_{u=\sqrt{x}} = 2\int \frac{-u^5+u}{u+1}\,du\Big|_{u=\sqrt{x}}.$$

Разделим многочлен $-u^5+u$ на $u+1$: $\dfrac{-u^5+u}{u+1} = -u^4+u^3-u^2+u$. Применив (4.2) и 1-ю формулу из (4.1) найдем:

$$2\int \frac{-u^5+u}{u+1}\,du\Big|_{u=\sqrt{x}} = -\frac{2}{5}u^5+\frac{1}{2}u^4-\frac{2}{3}u^3+u^2+C\Big|_{u=\sqrt{x}}.$$

Возвращаясь к переменой x, получим

$$\int \frac{1-x^2}{1+\sqrt{x}}\,dx = -\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{3/2}+x+C. \bullet$$

Пример 4.17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$.

Решение. В данном случае функция $\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$ определена при $x > 0$. Целесообразно рассмотреть функцию $x = u^6$, определенную при $u > 0$ и имеющую обратную $u = \sqrt[6]{x}$. Применив (4.5) получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})} = 6\int \frac{u^2 du}{1+u^2}\bigg|_{u=\sqrt[6]{x}} = 6\left(\int du - \int \frac{du}{1+u^2}\right)\bigg|_{u=\sqrt[6]{x}} =$$

$$= 6(u - \operatorname{arctg} u) + C\bigg|_{u=\sqrt[6]{x}} = 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C. \bullet$$

Интегрирование по частям.

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = u(x)v'(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, тогда

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx. \tag{4.6}$$

Формулу (4.6) называют формулой интегрирования по частям.

Имеются классы функций, которые легко интегрируются с помощью этой формулы, а именно:

$$\begin{array}{llll}
\text{а)} & \displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx; & \displaystyle\int x^n \sin(bx)\,dx; & \displaystyle\int x^n \cos(bx)\,dx; \\
\text{б)} & \displaystyle\int x^{\alpha} \ln x\,dx; & \displaystyle\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx; & \displaystyle\int x^n \arcsin x\,dx; \\
\text{в)} & \displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx; & \displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)\,dx, &
\end{array} \tag{4.7}$$

где $n \in \mathbb{N}$, α, a, $b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$.

Замечание 4.1. При взятии интегралов вида (4.7 а) в качестве функции $u(x)$ берут x^n, а в качестве $v'(x)$ – соответственно e^{ax}, $\sin(bx)$ или $\cos(bx)$.

Вычисляя интегралы вида (4.7 б), в качестве $u(x)$ берут, соответственно, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$ или $\arcsin x$, а в качестве $v'(x)$ – функции x^{α} или x^n. $\otimes$

Покажем как вычисляются интегралы вида (4.7) на примерах.

Пример 4.18. $\displaystyle\int (x+1)e^{2x}\,dx$.

Решение. Для нахождения этого интеграла обозначим $u(x) = x + 1$, $v'(x) = e^{2x}$. Тогда

$$\int (x+1)e^{2x}\,dx = \begin{pmatrix} u(x) = x+1; & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{2x}; & v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C. \bullet$$

Пример 4.19. $\int (x^2 + 2x)\ln x\,dx$.

Решение. В этом случае обозначим $u(x) = \ln x$ и $v'(x) = x^2 + 2x$. Используя (4.6) получим:

$$\int (x^2+2x)\ln x\,dx = \begin{pmatrix} u(x) = \ln x; & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 + 2x; & v(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + x\right)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + C. \bullet$$

При вычислении интегралов вида (4.7 в) двукратное применение интегрирования по частям приводит к уравнению относительно исходного интеграла.

Пример 4.20. $\int e^{2x}\cos x\,dx$.

Решение. Введем обозначения $u(x) = e^{2x}$, $v'(x) = \cos x$, тогда $u'(x) = 2e^{2x}$, $v(x) = \sin x$. По формуле (4.6) имеем:

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,dx. \tag{4.8}$$

Для нахождения $\int e^{2x}\sin x\,dx$ опять используем (4.6), обозначая $u(x) = e^{2x}$, $v'(x) = \sin x$, значит, $u'(x) = 2e^{2x}$, $v(x) = -\cos x$. Тогда имеем:

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx.$$

Таким образом, из (4.8) следует:

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x}\cos x\,dx.$$

Следовательно, $\int e^{2x}\cos x\,dx = \dfrac{1}{5}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C.$ $\bullet$

Пример 4.21. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

Решение.

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = \begin{pmatrix} u(x) = \operatorname{arctg} x; & u'(x) = 1/(1+x^2) \\ v'(x) = 1; & v(x) = x \end{pmatrix} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

(см. пример 4.8). •

Интегрирование простейших рациональных дробей.

Определение 4.3. *Правильные рациональные дроби вида*

1) $\dfrac{A}{x-a}$,

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\quad k \geqslant 2$,

3) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, $\quad p^2 - 4q < 0$, $k \in \mathbb{N}$

называют простейшими.

Известно, что всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей. Следовательно, для того чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь, достаточно научиться интегрировать простейшие дроби.

Пример 4.22. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}$, $\quad a \neq 0$.

Решение. Используя разложение правильной рациональной дроби на простейшие $\dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\left[\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right]$, формулы (4.2), (4.3) и 2-ю формулу из (4.1), получим:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\Big(\ln|x-a| - \ln|x+a|\Big) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C. \bullet$$

Пример 4.23. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+4x+10}dx$.

Решение. Найдем производную квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе: $(x^2+4x+10)' = 2x+4$. Следовательно,

$$\int \frac{2x+5}{x^2+4x+10}dx = \int \frac{(2x+4)+1}{x^2+4x+10}dx = \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+10} +$$

$$+\int \frac{dx}{x^2+4x+10} = \int \frac{(x^2+4x+10)'dx}{x^2+4x+10} + \int \frac{(x+2)'dx}{(x+2)^2+6} =$$

$$= \int \frac{d(x^2+4x+10)}{x^2+4x+10} + \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+6} =$$

$$= \ln(x^2+4x+10) + \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C. \bullet$$

Пример 4.24. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx.$

Решение. Нетрудно проверить справедливость равенства

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{(x^2+1)} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx =$$

$$= \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx. \tag{4.9}$$

Для нахождения оставшегося интеграла используем интегрирование по частям:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2} = \begin{pmatrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = \frac{x}{(1+x^2)^2}, & v = \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

Подставив значение $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$ в (4.9), получим

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C. \bullet$$

Если нужно проинтегрировать неправильную дробь, то, разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби.

Пример 4.25. $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x+1}\, dx.$

Решение. Разделим с остатком многочлен x^3+x на многочлен $x+1$: $\dfrac{x^3+x}{x+1} = x^2-x+2-\dfrac{2}{x+1}$. Следовательно, используя 1-ю и 2-ю формулы из (4.1) и правила (4.2) и (4.3) получим:

$$\int \frac{x^3+x}{x+1}\, dx = \int \left(x^2-x+2-\frac{2}{x+1}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x - 2\ln|x+1| + C. \bullet$$

Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

1. Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$. Интегралы такого типа берутся с помощью подстановки $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$. Вспомним следующие тригонометрические формулы:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Поскольку $x = 2\operatorname{arctg} t$, то $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$.

Пример 4.26. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\operatorname{tg}(x/2)| + C. \bullet$$

2. Рассмотрим интеграл вида $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$.

а) Если m, n – четные неотрицательные числа, то при интегрировании используются формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,\ \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Пример 4.27. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$.

Решение.

$$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C. \bullet$$

б) Если хотя бы одно из чисел m, n нечетно и положительно, то используется замена переменной.

Пример 4.28. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,d(\cos x) = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\,d(\cos x) = \big(u = \cos x\big) =$$

$$= -\int \frac{1-u^2}{u^4}\,du = -\int \frac{du}{u^4} + \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{3u^3} - \frac{1}{u} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C. \bullet$$

Упражнения. Найдите неопределенный интеграл.

4.1. $\int \frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x}}dx.$ **4.2.** $\int \sqrt{2x+1}(4x^2+4x+1)dx.$

4.3. $\int (x^2+1)(2x-3)dx.$ **4.4.** $\int (\sin 2x\cos 5x - \cos 2x \sin 5x)dx.$

4.5. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2+6x+9}}.$ **4.6.** $\int \frac{dx}{4x^2-4x+17}.$ **4.7.** $\int 3^{2x+1}dx.$

4.8. $\int \operatorname{tg} x\,dx.$ **4.9.** $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}+1}.$ **4.10.** $\int \cos^3 x \sin x\,dx.$ **4.11.** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$

4.12. $\int \frac{dx}{x\ln x}.$ **4.13.** $\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3)}\,dx.$ **4.14.** $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}.$ **4.15.** $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

4.16. $\int \frac{\cos x\,dx}{25+\sin^2 x}.$ **4.17.** $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}dx.$ **4.18.** $\int \cos(\cos x)\sin x\,dx.$

4.19. $\int x^2\sqrt[5]{5x^3+1}\,dx.$ **4.20.** $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^{12}}}dx.$ **4.21.** $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

4.22. $\int x^2\sin(x^3)\,dx.$ **4.23.** $\int \frac{e^x}{2e^x+1}dx.$ **4.24.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}.$

4.25. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}.$ **4.26.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}.$ **4.27.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx.$

4.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$ **4.29.** $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx.$ **4.30.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}.$

4.31. $\int \frac{3x^2+9x+4}{(x+1)^2(x+3)}\,dx.$ **4.32.** $\int \frac{x-2}{x^2+5x+4}\,dx.$

4.33. $\int \frac{2x-3}{x^2+6x+10}\,dx.$ **4.34.** $\int \frac{x^2+21x+14}{(x-2)(x^2+4x+8)}\,dx.$

4.35. $\int \frac{x^2-1}{x^4+3x^2+2}\,dx.$ **4.36.** $\int \frac{3x^3-2x^2+7x}{x^4-1}\,dx.$

4.37. $\int \frac{2x+4}{x^4+2x^2+1}\,dx.$ **4.38.** $\int \cos 3x \sin 5x\,dx.$ **4.39.** $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx.$

4.40. $\int \sin^4 x \cos^2 2x\,dx.$ **4.41.** $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin 2x}\,dx.$

4.42. $\int \frac{dx}{5\cos x - 3\sin x + 3}\,dx.$ **4.43.** $\int (x^2+3x)\ln x\,dx.$ **4.44.** $\int \arcsin x\,dx.$

4.45. $\int (x^2-4x+2)\cos(2x)\,dx$. **4.46.** $\int e^{3x}\cos(4x)\,dx$. **4.47.** $\int (x^2-4)e^{5x}\,dx$.

4.48. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$. **4.49.** $\int x^2\arcsin(2x)dx$. **4.50.** $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

4.51. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 2x}$. **4.52.** $\int (x+1)^2\sin x\,dx$. **4.53.** $\int \ln^2 x\,dx$.

4.2. Определенный интеграл

Определение определенного интеграла можно найти в учебном пособии [2] и в учебниках [3], [4]. Здесь кратко приводим необходимые определения и теоремы без доказательств.

Определение 4.4. *Если на отрезке $[a,b]$, где $a<b$, задана система точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, такая, что $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, то говорят, что задано разбиение отрезка $[a,b]$ на промежутки $[x_k, x_{k+1}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$. Разбиение обозначается буквой Π. Если, кроме того, в каждом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ выбрана точка $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, то говорят, что задано разбиение с отмеченными точками. Разбиение с отмеченными точками обозначается Π_ξ. Обозначим $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$. Число $d(\Pi) = \max\limits_{k=0,1,\ldots,n-1}\Delta x_k$ называется рангом разбиения Π.*

Определение 4.5. *Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – ограниченная функция. Число $S_{\Pi_\xi}(f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ называется интегральной суммой функции f, соответствующей разбиению с отмеченными точками Π_ξ.*

Определение 4.6. *Число J называется определенным интегралом от ограниченной функции f по отрезку $[a,b]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что для любого разбиения Π с $d(\Pi)<\delta$ справедливо неравенство $|S_{\Pi_\xi}(f)-J|<\varepsilon$.*

Определенный интеграл обозначается символом $J=\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Числа a и b называются, соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования, f называется подынтегральной функцией. Если определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ существует, то функция f называется интегрируемой на $[a,b]$.

Определение 4.7. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной на множестве X, если она имеет только конечное число точек разрыва, принадлежащих X, и эти точки являются либо точками устранимого разрыва, либо точками разрыва 1-го рода.*

Приведем без доказательства следующую важную теорему.

Теорема 4.1. (существования) *Если функция f кусочно-непрерывна на $[\,a, b\,]$, то она интегрируема на $[\,a, b\,]$.*

Для практического вычисления определенного интеграла обычно используют формулу Ньютона–Лейбница.

Теорема 4.2. (Ньютона–Лейбница) *Пусть G – некоторая первообразная на отрезке $[\,a, b\,]$ к кусочно-непрерывной функции f, тогда*

$$\int_a^b f(x)\;dx = G(b) - G(a)$$

(*формула Ньютона–Лейбница*).

Разность $G(b)-G(a)$ называется подстановкой и сокращенно записывается $G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$.

Определенный интеграл обладает следующими свойствами:

1. Для любых постоянных α и β

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{4.10}$$

2. Если $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{4.11}$$

3. Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{4.12}$$

При этом, если $f(x) < g(x)$ хотя бы в одной точке непрерывности функций f и g, то неравенство (4.12) строгое.

Пример 4.29. Вычислить $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x}$.

Решение. В этом примере подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x}$. Одной из первообразных на отрезке $[2,5]$ будет функция $G(x) = \ln|x| = \ln x$, и по формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int\limits_2^5 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_2^5 = \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{5}{2}. \bullet$$

Пример 4.30. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^2 \varphi \, d\varphi$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\pi/4} \sin^2(\varphi)\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} 1\, d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Здесь кроме формулы Ньютона–Лейбница использовано свойство (4.10). $\bullet$

В дальнейшем будем рассматривать только кусочно-непрерывные функции. Для всех кусочно-непрерывных функций определенный интеграл существует. Так как интеграл не меняется при изменении функции в конечном числе точек, то, в силу аддитивности определенного интеграла, интеграл от кусочно-непрерывной функции можно рассматривать как сумму интегралов от непрерывных функций.

Пример 4.31. Найти $\int\limits_0^3 \mathrm{sign}\,(x - x^3)\, dx$.

Решение. Напомним, что $\operatorname{sign} y = \begin{cases} -1, \ y < 0, \\ 0, \ y = 0, \\ 1, \ y > 0. \end{cases}$ Значит,

$$\operatorname{sign}(x - x^3) = \begin{cases} -1, \ x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty), \\ 0, \ x \in \{0, \pm 1\}, \\ 1, \ x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1). \end{cases}$$

Следовательно, по свойству (4.11)

$$\int\limits_0^3 \operatorname{sign}(x - x^3)\, dx = \int\limits_0^1 1\, dx + \int\limits_1^3 (-1)\, dx = x\Big|_0^1 + (-x)\Big|_1^3 = -1. \bullet$$

Пример 4.32. Сравнить числа $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin x\, dx}{x^3 + 1}$ и $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{x^3 + 1}$.

Решение. Так как $0 \le \sin x < 1$ при $x \in [0, \pi/2)$, то $\dfrac{\sin x}{x^3 + 1} \le \dfrac{1}{x^3 + 1}$ на всем промежутке интегрирования. Тогда по свойству (4.12)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{x^3 + 1} < \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^3 + 1}. \bullet$$

Замена переменной и интегрирование по частям.

Для определенных интегралов справедливы формула замены переменной и формула интегрирования по частям. Приведем эти формулы и проиллюстрируем их применение на примерах.

Пусть f – непрерывная функция на $[a, b]$, а $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ – непрерывно дифференцируемая функция и $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\, dt.$$

Эта формула используется также и «справа налево», т. е. имеющаяся подынтегральная функция представляется в виде $f(g(t))g'(t)$.

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид

$$\int\limits_a^b u'(x)v(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u(x)v'(x)\, dx.$$

Пример 4.33. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$.

Решение. Возьмем в качестве $g(x) = x^3$. Тогда $g'(x) = 3x^2$ и

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{1}{1+(x^3)^2}3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{12}. \bullet$$

Пример 4.34. $\int\limits_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\frac{dx}{x}$.

Решение. Возьмем $g(x) = \ln x$. Тогда $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ и

$$\int\limits_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\,\frac{dx}{x} = \int\limits_0^\pi \sin y\,dy = -\cos y\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2. \bullet$$

Обратите внимание на необходимость соблюдения всех условий при использовании формулы замены переменной. Так, в интеграле

$$I = \int\limits_{-1}^1 \frac{x^2\,dx}{(x^2+x+1)^3}$$

нельзя сделать замену $x = g(t) = \dfrac{1}{t}$, так как функция $h(t) = \dfrac{1}{t}$ на отрезке $[-1;1]$ не определена при $t = 0$. Формальное применение такой замены приводит к интегралу $I = -\int\limits_{-1}^1 \dfrac{t^6\,dt}{t^2(t^2+t+1)^3t^2} = -\int\limits_{-1}^1 \dfrac{t^2dt}{(t^2+t+1)^3} = -I$, что означало бы, что исходный интеграл равен 0. Но это очевидно неверно, так как $f(x) \geq 0$.

Пример 4.35. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 t\,dt$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 t\,dt = -\int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\,d(\cos t) = (x=\cos t) = -\int\limits_1^{0} (1-x^2)\,dx =$$

$$= -\int\limits_0^{1} (x^2-1)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3}+1 = \frac{2}{3}. \bullet$$

Пример 4.36. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx.$

Решение.

$$\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = -\int\limits_1^2 e^{1/x}\,d(1/x) = -\int\limits_1^{1/2} e^u\,du = -e^u\Big|_1^{1/2} = e-\sqrt{e}. \bullet$$

Пример 4.37. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{1+x^8}.$

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{1+x^8} = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{d(x^4)}{1+(x^4)^2} = \left(u=x^4\right) = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,u\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16}. \bullet$$

Пример 4.38. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sin(\mathrm{arctg}\,x)}{1+x^2}\,dx.$

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin(\mathrm{arctg}\,x)}{1+x^2}\,dx = \int\limits_0^1 \sin(\mathrm{arctg}\,x)\,d(\mathrm{arctg}\,x) = (u=\mathrm{arctg}\,x) =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \sin u\,du = -\cos u\Big|_0^{\pi/4} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}. \bullet$$

Пример 4.39. $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{ctg}\,x\,dx.$

Решение.

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\,dx = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d(\sin x)}{\sin x} = (u = \sin x) = \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{du}{u} =$$

$$= \ln u \Big|_{\sqrt{2}/2}^{1} = -\ln(\sqrt{2}/2) = \frac{1}{2}\ln 2\,. \bullet$$

Пример 4.40. $\displaystyle\int\limits_{1}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Решение.

$$\int\limits_{1}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int\limits_{1}^{4} e^{\sqrt{x}}\,d(\sqrt{x}) = \big(u = \sqrt{x}\big) = 2\int\limits_{1}^{2} e^{u}\,du = 2e^{u}\Big|_{1}^{2} = 2(e^2 - e). \bullet$$

Пример 4.41. $\displaystyle\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$

Решение.

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{ctg}^3 x\,dx = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\,dx = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^3 x}\,dx =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} - \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{d(\sin x)}{\sin x} = (u = \sin x) = \int\limits_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u^3} - \int\limits_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u} =$$

$$= -\frac{1}{2u^2}\Big|_{1/2}^{\sqrt{2}/2} - \ln u\Big|_{1/2}^{\sqrt{2}/2} = 2 - 1 + \ln\sqrt{2} - \ln 2 = 1 - \ln\sqrt{2}. \bullet$$

Пример 4.42. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^6+1}}.$

Решение.

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{x^5\,dx}{\sqrt{x^6+1}} = \int\limits_{0}^{1} \frac{d(x^6+1)}{6\sqrt{x^6+1}} = \Big(u = x^6 + 1\Big) = \frac{1}{6}\int\limits_{1}^{2} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{u}}{3}\Big|_{1}^{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{3}. \bullet$$

Пример 4.43. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x + 1}$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x + 1} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x + 1} = (u = \sin x) = \int\limits_0^{1} \frac{du}{u^2 + 1} = \operatorname{arctg} u \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \bullet$$

Пример 4.44. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{1 - 5\cos^2 x}$.

Решение. Рассмотрим $x = g(t) = \operatorname{arctg} t$. Тогда $g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, и, учитывая, что $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$, получаем:

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{1 - 5\cos^2 x} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1 - 5\cos^2(\operatorname{arctg} t)} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1 - \frac{5}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2-5} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{t-2} - \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{t+2} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left|\frac{t-2}{t+2}\right| \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} \ln \left|-\frac{1}{3}\right| - \frac{1}{4} \ln |-3| = -\frac{1}{2} \ln 3. \bullet$$

Пример 4.45. $\int\limits_0^1 xe^x\,dx$.

Решение. Примем $u(x) = x$ и $v'(x) = e^x$. Тогда $u'(x) = 1$ и $v(x) = e^x$. Интегрируя по частям, получим:

$$\int\limits_0^1 xe^x\,dx = xe^x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\,dx = e - \int\limits_0^1 e^x\,dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1. \bullet$$

Пример 4.46. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Примем $u(x) = x$ и $v'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Тогда $u'(x) = 1$ и $v(x) = \operatorname{tg} x$. Получаем:

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\operatorname{tg} x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx = \left(\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) - \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx =$$

$$= \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) + \int\limits_{\sqrt{3}/2}^{1/2} \frac{dy}{y} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{18} + \ln|y|\,\Bigg|_{\sqrt{3}/2}^{1/2} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{18} - \ln\sqrt{3}.$$

Здесь использована замена переменной $y = \cos x$. ●

Упражнения. Вычислите интегралы.

4.54. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx$. **4.55.** $\displaystyle\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$. **4.56.** $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.57. $\displaystyle\int\limits_2^3 3^{4x}\,dx$. **4.58.** $\displaystyle\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x\,dx$. **4.59.** $\displaystyle\int\limits_{1/2}^1 \frac{7^{1/x}\,dx}{x^2}$. **4.60.** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$.

4.61. $\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{x^3\,dx}{1+x^4}$. **4.62.** $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{x+2}{\sqrt{x}}\,dx$. **4.63.** $\displaystyle\int\limits_2^3 (2^x+3^x)^2\,dx$. **4.64.** $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

4.65. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$. **4.66.** $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$. **4.67.** $\displaystyle\int\limits_{1/2}^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$.

4.68. $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$. **4.69.** $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx$. **4.70.** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx$.

4.71. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$. **4.72.** $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \arccos x\,dx$. **4.73.** $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,dx$.

4.74. $\displaystyle\int\limits_1^2 x\ln x\,dx$. **4.75.** $\displaystyle\int\limits_{\pi^2}^{4\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx$. **4.76.** $\displaystyle\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$.

4.77. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/3} e^{4x}\cos 2x\,dx$. **4.78.** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} (x^2+2)\sin 3x\,dx$.

4.79. $\int\limits_0^1 (x^3+3x^2+5x)e^x dx$. **4.80.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}/2} x^2 \arcsin x\,dx$. **4.81.** $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/6} \dfrac{3x+1}{\sin^2(2x)}\,dx$.

4.82. $\int\limits_5^{21} \dfrac{\sqrt{x+4}}{x^2}\,dx$. **4.83.** $\int\limits_0^1 x(2-x^2)^{12}\,dx$. **4.84.** $\int\limits_1^e (x\ln x)^2\,dx$.

4.85. $\int\limits_0^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$. **4.86.** $\int\limits_{-2}^{-1} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **4.87.** $\int\limits_1^3 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\,dx$.

4.88. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$. **4.89.** $\int\limits_0^{\pi} (x\sin x)^2\,dx$.

4.90. $\int\limits_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx$. **4.91.** $\int\limits_0^2 |1-x|\,dx$. **4.92.** $\int\limits_0^3 |x^2-5x+6|\,dx$.

4.93. Найти интеграл от кусочно-непрерывной функции $\int\limits_0^{\pi} x\,\mathrm{sign}\,(\cos x)\,dx$.

Сравните числа A и B.

4.94. $A = \int\limits_0^1 \dfrac{x^5}{x^3+1}\,dx$, $B = \int\limits_0^1 \dfrac{x^4}{x^3+1}\,dx$.

4.95. $A = \int\limits_{-\pi/2}^{0} (x^2+1)\sqrt{\cos x}\,dx$, $B = \int\limits_0^{\pi/2} (x^2+1)\sqrt{\cos x}\,dx$.

4.96. $A = \int\limits_0^1 \sqrt[3]{x^2+1}\,dx$, $B = \int\limits_0^1 \sqrt[5]{x^2+1}\,dx$. **4.97.** $A = \int\limits_0^{\pi/4} \dfrac{\sin x}{x+1}dx$,

$B = \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin x}{x+1}dx$. **4.98.** $A = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \dfrac{\sin x}{x}dx$, $B = \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \dfrac{\sin x}{x}dx$.

4.3. Несобственные интегралы

Несобственный интеграл по бесконечному промежутку.

Определение 4.8. *Пусть f — кусочно-непрерывная функция, определенная при всех $x \in [a, +\infty)$. Несобственным интегралом от этой функции по промежутку $[a, +\infty)$ называется*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx. \tag{4.13}$$

Если этот предел существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и его значение равно этому пределу.

Если же предел (4.13) *не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.*

Если $f(x)$ неотрицательная функция, то у несобственного интеграла есть простая геометрическая интерпретация.

А именно, $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ равен площади подграфика (рис. 4.1). В пределе при $A \to +\infty$ получим площадь неограниченной фигуры. Сходимость интеграла означает, что эта площадь конечна.

Аналогично определяется несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ для кусочно-непрерывной функции f на $(-\infty, a]$.

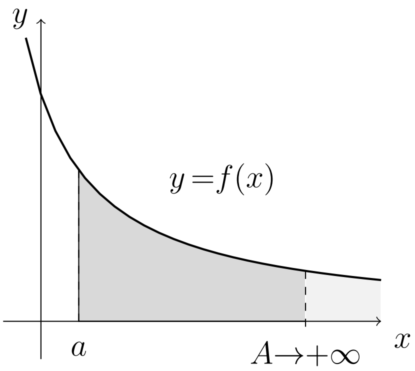

Рис. 4.1

Пример 4.47. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx.$

Решение. По определению

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^A \sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty} (-\cos x)\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty} (1 - \cos A).$$

Данного предела не существует, поэтому интеграл расходится. •

Пример 4.48. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. Функция $\frac{1}{x^\alpha}$ непрерывна на $[1, +\infty)$. Найдем:

$$\int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^A, & \alpha \neq 1, \\ \ln|x|\Big|_1^A, & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{A^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1, \\ \ln A, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha \leq 1, \end{cases}$$

значит, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ (при этом его значение равно $1/(\alpha - 1)$) и расходится при $\alpha \leq 1$. •

Пример 4.49. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ непрерывна на $[0, +\infty)$. Вычислим:

$$\lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^A \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^A = \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty} \ln(1+A^2) = +\infty.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$ расходится. •

Пример 4.50. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^4}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$ непрерывна на $[0, +\infty)$. Найдем:

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^A \frac{x\,dx}{1+x^4} = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)\Big|_0^A = \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}(A^2) = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится и $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4}$. •

Естественно, при вычислении несобственных интегралов используются основные приемы интегрирования: замена переменной в интеграле и интегрирование по частям.

Формула замены переменной в несобственном интеграле.

Пусть f – непрерывная функция на $[a,+\infty)$, $g:[\alpha,\beta)\to[a,+\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $g(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0} g(t) = +\infty$. Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

Заметим, что α и β могут быть как вещественными числами, так и символами $\pm\infty$. Более того, в результате замены переменной несобственный интеграл может стать «обычным» интегралом от непрерывной функции на отрезке. В этом случае сразу можно утверждать, что интеграл сходится.

Пример 4.51. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^x\,dx}{(1+e^x)^2}$.

Решение.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^x\,dx}{(1+e^x)^2} = \begin{pmatrix} e^x = t, \\ x = \ln t = g(t), \\ x'(t) = \dfrac{1}{t} = g'(t) \end{pmatrix} = \int\limits_1^{+\infty}\frac{t\,dt}{t(1+t)^2} = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^2} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{-1}{1+t}\right)\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{-1}{1+A}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \bullet$$

Пример 4.52. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}(1+e^{-3x})e^{-x}dx$.

Решение. Сделаем замену $e^{-x}=t$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, получим

$$\int\limits_0^{+\infty}(1+e^{-3x})e^{-x}dx = \begin{pmatrix} e^{-x}=t, \\ x=-\ln t, \\ x'(t)=-\dfrac{1}{t} \end{pmatrix} = -\int\limits_1^0(1+t^3)dt = \int\limits_0^1(1+t^3)dt = 5/4.$$

Последний интеграл не является несобственным. •

Формула интегрирования по частям.

Пусть u и v – непрерывно дифференцируемые функции на $[a,+\infty)$. Если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} v(x)u'(x)\,dx$ и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x)$, то справедлива формула интегрирования по частям (см. [2], теорема 7.3)

$$\int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}(u(x)v(x)) - u(a)v(a) - \int\limits_a^{+\infty} v(x)u'(x)\,dx.$$

Отметим, что используется обозначение

$$u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(u(x)v(x)) - u(a)v(a).$$

Пример 4.53. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx.$

Решение. Используем формулу интегрирования по частям (см. [1]):

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \begin{pmatrix} u(x)=x, \\ v'(x)=e^{-x}, \\ u'(x)=1, \\ v(x)=-e^{-x} \end{pmatrix} = \lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)+0\cdot(e^0)+\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^A = -\lim_{A\to+\infty} e^{-A}+1 = 1. \bullet$$

Пример 4.54. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx \ (a>0).$

Решение. Используем 2 раза формулу интегрирования по частям:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \begin{pmatrix} u(x) = e^{-ax}, \\ v'(x) = \cos(bx), \\ u'(x) = -ae^{-ax}, \\ v(x) = \dfrac{\sin(bx)}{b} \end{pmatrix} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-ax}\sin(bx)}{b}\right) +$$

$$+\frac{a}{b}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx = \begin{pmatrix} u(x) = e^{-ax}, \\ v'(x) = \sin(bx), \\ u'(x) = -ae^{-ax}, \\ v(x) = \dfrac{-\cos(bx)}{b} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{a}{b}\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-e^{-ax}\cos(bx)}{b}\right) + \frac{1}{b} - \frac{a}{b}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx\right).$$

Следовательно, получаем относительно I линейное уравнение $I = \dfrac{a}{b^2} - \dfrac{a^2}{b^2}\,I$. Значит, $I = \dfrac{a}{a^2+b^2}$. ●

Иногда встречаются несобственные интегралы, в которых подынтегральная функция задана на всей числовой оси $\mathbb{R}$.

Определение 4.9. *Пусть функция f кусочно-непрерывна на $\mathbb{R}$. Если существует такое $a \in \mathbb{R}$, что несобственные интегралы* $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходятся, то говорят, что сходится несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, *и полагают по определению*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Если же существует такое $a \in \mathbb{R}$, что хотя бы один из несобственных интегралов $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится, то говорят, что* *несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится.*

Часто для практических целей достаточно просто знать, сходится ли данный несобственный интеграл или расходится. А нахождение первообразной для подынтегральной функции затруднительно или невозможно. В этом случае сходимость или расходимость несобственного интеграла устанавливается с помощью различных признаков.

Наиболее просто сходимость или расходимость несобственного интеграла устанавливается в случае, когда $f(x)$ неотрицательна на промежутке интегрирования.

Теорема 4.3. (Признак сравнения) *Пусть функции f и g кусочно-непрерывны на $[a,+\infty)$ и пусть $0 \le f(x) \le g(x)$ для любого $x \in [a,+\infty)$. Тогда:*

1) *если сходится* $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$, *то сходится* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$; *при этом*

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \le \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx;$$

2) *если расходится* $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, *то расходится* $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$.

Пример 4.55. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$

Решение. Разобьем исходный интеграл на 2 интеграла:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int\limits_{0}^{1} e^{-x^2}dx + \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Первый интеграл представляет собой обычный определенный интеграл. Для любого $x \in [1,+\infty)$ справедлива оценка $e^{-x^2} \le e^{-x}$.

Так как $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x}dx = \dfrac{1}{e}$, то по признаку сравнения интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ тоже сходится. •

Пример 4.56. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Решение. Так как для любого $x \in [1, +\infty)$ справедлива оценка $1+x^4 \geq$ $\geq x^4$, то $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq \dfrac{1}{x^2}$. Поскольку $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится (см. пример 4.48 при $\alpha = 2$), то по признаку сравнения интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ сходится. •

Пример 4.57. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$.

Решение. Для любого $x \in [1, +\infty)$ справедлива следующая оценка: $\dfrac{2+\sin x}{\sqrt{x}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Поскольку интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится (см. пример 4.48 при $\alpha = \dfrac{1}{2}$), то по признаку сравнения интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ также расходится. •

Теорема 4.4. (Предельный признак сравнения) *Пусть функции* f *и* g *кусочно-непрерывны на* $[a, +\infty)$ *и для любого* $x \in [a, +\infty)$ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$. *Если существует конечный* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, *то интегралы* $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *и* $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

В качестве функции сравнения $g(x)$ часто берется функция $\dfrac{1}{x^\alpha}$.

Пример 4.58. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}+x+x^2}$.

Решение. Для подынтегральной функции $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}+x+x^2}$ рассмотрим в качестве функции сравнения функцию $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ и найдем такое α, чтобы $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+\sqrt{x}+x+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^{3/2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}.$$

Очевидно, что при $\alpha = 2$ этот предел будет равен 1. Следовательно, исходный интеграл и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ ведут себя одинаково. Из примера 4.48 следует, что исходный интеграл сходится. ●

Пример 4.59. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2+x^{1/3}+x^{1/2}+x}$.

Решение. Для подынтегральной функции $f(x) = \dfrac{1}{2+x^{1/3}+x^{1/2}+x}$ в качестве функции сравнения возьмем функцию $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Вычислим предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2+x^{1/3}+x^{1/2}+x} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, исходный интеграл ведет себя так же, как интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x}$.

Но так как $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x}$ расходится (см. пример 4.48), получается, что исходный интеграл тоже расходится. ●

Определение 4.10. *Если несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ *сходится, то говорят, что несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx$ *сходится абсолютно, и функция* f *называется абсолютно интегрируемой на* $[a,+\infty)$.

Можно показать, что если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он и просто сходится. Обратное утверждение неверно.

Пример 4.60. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$.

Решение. Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx$. Поскольку для любого $x \in \mathbb{R}$ $|\sin x| \le 1$, то $\frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$. Так как $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится (см. пример 4.48), то исходный интеграл абсолютно сходится, а значит, он сходится в обычном смысле. ●

Упражнения. Вычислить следующие несобственные интегралы или доказать их расходимость.

4.99. $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 e^x\,dx$. **4.100.** $\int\limits_1^{+\infty} x\ln x\,dx$. **4.101.** $\int\limits_1^{+\infty} x^{-2}e^{-1/x}\,dx$.

4.102. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^5 x}$. **4.103.** $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$. **4.104.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

4.105. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$. **4.106.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+1}$. **4.107.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$.

4.108. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+2)^3}}$. **4.109.** $\int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-x^3}\,dx$. **4.110.** $\int\limits_0^{+\infty} x\sin 2x\,dx$.

4.111. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $a \ne 0$. **4.112.** $\int\limits_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}\,dx$. **4.113.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$.

4.114. $\int\limits_0^{+\infty} (x^2+3x+5)e^{-2x}\,dx$. **4.115.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}}\,dx$. **4.116.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$.

4.117. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx$. **4.118.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx$. **4.119.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

4.120. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx$. **4.121.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

Исследовать несобственные интегралы на сходимость.

4.122. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2+2x^3}$. **4.123.** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^3+3x+1}\,dx$.

4.124. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{x^3+3x^2+x+2}\,dx$. **4.125.** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

4.126. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)(x+3)}}$. **4.127.** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(1/\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$.

4.128. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\cos^4 x}$. **4.129.** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2 dx}{x^2+1}$. **4.130.** $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \big(1-\cos(1/x)\big)dx$.

4.131. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{x}}$. **4.132.** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{(3+4\cos x)dx}{\sqrt[5]{x}}$. **4.133.** $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty} \frac{\sin^3 x\,dx}{x^2\ln x}$.

Исследовать сходимость интегралов при различных значениях параметров.

4.134. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^\alpha}$. **4.135.** $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$. **4.136.** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx$, $\alpha \geq 0$.

4.137. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{(1+x^4)^\alpha}$. **4.138.** $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)\,dx}{1+x^\beta}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$.

4.139. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{(x+1)^\alpha}$, $\alpha \geq 0$. **4.140.** $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln x}$, $\alpha \geq 0$.

Несобственный интеграл по конечному промежутку.

Определение 4.11. *Пусть функция f кусочно-непрерывна на $[a,b)$ и не ограничена в окрестности точки b. Если существует конечный*

$$\lim_{\epsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

то говорят, что несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится и его зна-

чение равно этому пределу, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если $\lim\limits_{\epsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ *не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится* (рис. 4.2).

Пусть функция f кусочно-непрерывна на $(a,b]$ и не ограничена в окрестности точки a. Если существует конечный $\lim\limits_{\epsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$, *то говорят, что несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится и его значение равно этому пределу, т. е.*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Если же $\lim\limits_{\epsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ *не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится* (рис. 4.3).

Замечание 4.2. Отметим, что если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и ограничена на $[a,b)$, то после доопределения (при необходимости) $f(x)$ в точке b функция $f(x)$ будет кусочно-непрерывной на $[a,b]$ и, следовательно, интегрируема на $[a,b]$. Так как интеграл является непрерывной функцией своего верхнего предела, то в этом случае

$$\lim_{\beta\to b-0}\int\limits_a^{\beta} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

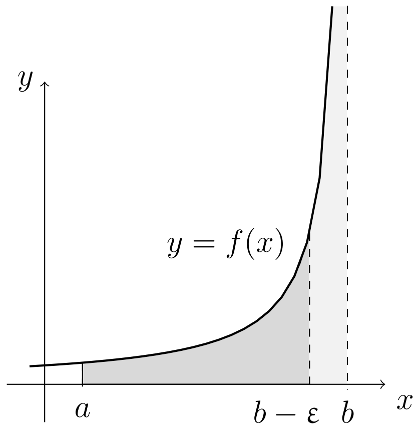

Рис. 4.2

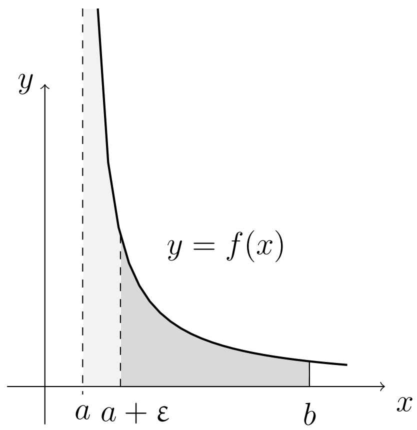

Рис. 4.3

Это позволяет считать обычный определенный интеграл частным случаем несобственного интеграла (по конечному промежутку), который, очевидно, следует считать в этом случае сходящимся. $\otimes$

Пример 4.61. $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{1}{(x-a)^l}\,dx.$

Решение. Вычислим интеграл:

$$\int\limits_\alpha^b \frac{1}{(x-a)^l}\,dx = \begin{cases} \left.\dfrac{(x-a)^{1-l}}{1-l}\right|_\alpha^b & \text{при } l \neq 1, \\ \ln|x-a|\Big|_\alpha^b & \text{при } l = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-l} - (\alpha-a)^{1-l}}{1-l} & \text{при } l \neq 1, \\ \ln|b-a| - \ln|\alpha-a| & \text{при } l = 1. \end{cases}$$

Значит, $\displaystyle\lim_{\alpha\to a+0}\int\limits_\alpha^b \frac{1}{(x-a)^l}\,dx = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-l}}{1-l} & \text{при } l < 1, \\ +\infty & \text{при } l \geq 1 \end{cases}$ и, следовательно,

$\displaystyle\int\limits_a^b \frac{1}{(x-a)^l}\,dx$ сходится при $l<1$ (в этом случае $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{1}{(x-a)^l}\,dx = \frac{(b-a)^{1-l}}{1-l}$), а при $l \geq 1$ этот интеграл расходится. $\bullet$

Пример 4.62. $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\, dx.$

Решение. Так как

$$\lim_{\alpha\to 0+0} \int\limits_\alpha^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\, dx = \lim_{\alpha\to 0+0} \int\limits_\alpha^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \lim_{\alpha\to 0+0} \ln|\sin x|\Big|_\alpha^{\pi/2} =$$

$$= -\lim_{\alpha\to 0+0} \ln|\sin x| = +\infty,$$

то исходный интеграл расходится. •

Пример 4.63. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta\to 1-0} \int\limits_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta\to 1-0} \arcsin x\Big|_0^\beta = \lim_{\beta\to 1-0} \arcsin\beta = \frac{\pi}{2}. \bullet$$

Как и для несобственных интегралов по бесконечному промежутку, при вычислении несобственных интегралов по конечному промежутку используются основные приемы интегрирования: замена переменной в интеграле и интегрирование по частям.

Формула замены переменной в интеграле.

Пусть функция f непрерывна на $(a, b]$, функция $u : (\alpha, \beta] \to (a, b]$ непрерывно дифференцируема (α может быть $-\infty$) и $\lim\limits_{t\to\alpha+0} u(t) = a$, $u(\beta) = b$. Тогда, если сходится интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\, dt$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$, при этом

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\, dt.$$

Если же расходится интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\, dt$, то расходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Формула интегрирования по частям. Пусть u и v непрерывно дифференцируемы на $(\,a, b\,]$. Если несобственный интеграл $\int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx$ сходится и существует $\lim\limits_{x\to a+0} u(x)v(x)$, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - \lim_{x\to a+0}(u(x)v(x)) - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

Пример 4.64. $\int\limits_1^e \dfrac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_1^e \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx = \begin{pmatrix} \ln x = t, \\ x = e^t, \\ x' = e^t \end{pmatrix} = \int\limits_0^1 \frac{\ln t\, e^t}{e^t} dt = \int\limits_0^1 \ln t\,dt = \lim_{\alpha\to 0+0}\left(\int\limits_\alpha^1 \ln t\,dt\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0+0}\left(t\ln t\Big|_\alpha^1 - \int\limits_\alpha^1 t\,\frac{1}{t}\,dt\right) = \lim_{\alpha\to 0+0}(-\alpha\ln\alpha - (1-\alpha)) = -1. \bullet$$

Пример 4.65. $\int\limits_0^1 \dfrac{x\,dx}{(1-x^2)^2}$.

Решение. Замена переменных $1 - x^2 = t$, т. е. $x = \sqrt{1-t}$, $x' = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$, приводит исходный интеграл к виду

$$-\frac{1}{2}\int\limits_1^0 \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t}}\,\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2}.$$

Далее, так как

$$\lim_{\alpha\to 0+0}\int\limits_\alpha^1 \frac{dt}{t^2} = \lim_{\alpha\to 0+0}\left(-\frac{1}{t}\Big|_\alpha^1\right) = \lim_{\alpha\to 0+0}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = +\infty,$$

то интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2}$ расходится и, следовательно, исходный интеграл также расходится. •

Для несобственного интеграла по конечному промежутку от неотрицательной функции сходимость или расходимость можно установить, сравнивая его с каким-нибудь другим несобственным интегралом от неотрицательной функции, для которой известно поведение соответствующего несобственного интеграла (см. теоремы 7.9 и 7.10 из [2]).

Признак сравнения.

Пусть функции f и g кусочно-непрерывны на $(a, b]$ и $0 \le f(x) \le g(x)$ для любого $x \in (a, b]$, тогда:

1) если сходится $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, то сходится $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, при этом

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx;$$

2) если расходится $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то расходится $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Аналогичная теорема справедлива и для случая, когда функции заданы на $[a, b)$.

Пример 4.66. $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$.

Решение. Так как при $x \in (0, 1]$ справедлива оценка $\frac{e^x}{x} \ge \frac{1}{x} > 0$ и поскольку интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится (см. пример 4.61), то исходный интеграл также расходится.

Пример 4.67. $\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Так как для любого $x \in (0, 1]$ справедливо неравенство

$0 \le \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ и интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится (см. пример 4.61), то исходный интеграл сходится. Покажите, что $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \operatorname{erf}(1)\sqrt{\pi}$, где $\operatorname{erf}(x) = \displaystyle = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dx$ – функция ошибок (см. [1, 7.4]). ●

Предельный признак сравнения.

Пусть f и g кусочно-непрерывны на $(a, b]$ и $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ для любого $x \in (a, b]$. Если существует конечный $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, то $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\displaystyle\int\limits_a^b g(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Пусть f и g кусочно-непрерывны на $[a, b)$ и $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ для любого $x \in [a, b)$. Если существует конечный $\displaystyle\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, то (см. [2], теорема 7.10) $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\displaystyle\int\limits_a^b g(x)\,dx$ (см.[2], теорема 7.10).

Пример 4.68. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx.$

Решение. Для подынтегральной функции $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}}$ рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{1}{x^{5/6}}$. Вычислим $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \ne 0$. Поскольку интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{5/6}}$ сходится (см. пример 4.61), то исходный интеграл тоже сходится. ●

Пример 4.69. $\int\limits_0^1 \frac{x}{\operatorname{tg}(x^2)}\,dx.$

Решение. Для подынтегральной функции $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg}(x^2)}$ функция $g(x) = \frac{1}{x}$ является функцией сравнения, так как

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+0}\frac{x^2}{\operatorname{tg}(x^2)} = 1 \neq 0.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится (см. пример 4.61), то исходный интеграл тоже расходится. $\bullet$

Пример 4.70. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$

Решение. Для подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ функция $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ является функцией сравнения, так как

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-0}\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \neq 0.$$

Поскольку интеграл $\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ сходится (см. пример 4.61), то сходится и исходный интеграл. $\bullet$

Приведем пример, когда при замене переменной несобственный интеграл по конечному промежутку переходит в интеграл по бесконечному промежутку.

Пример 4.71. $\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx.$

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} = t, \quad x = \frac{1}{t}, \\ x' = -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} = \int\limits_{+\infty}^1 \sin t\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt.$$

В примере 4.60 было показано, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ сходится, т. е. исходный интеграл тоже сходится. Покажите, что $\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = \sin(1) - \mathrm{Ci}(1)$, где $\mathrm{Ci}(x) = -\int\limits_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt$ – интегральный косинус (см. [1, 7.4]). •

Определение 4.12. *Пусть функция f кусочно-непрерывна на $[a, b] \setminus \{c\}$, где $c \in (a, b)$, и не ограничена в окрестности точки c.*

Если сходятся несобственные интегралы $\int\limits_a^c f(x)\, dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\, dx$, то говорят, что сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$, и полагают $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx$. При этом функция f называется интегрируемой на $[a, b]$.

Если же хотя бы один из несобственных интегралов $\int\limits_a^c f(x)\, dx$ или $\int\limits_c^b f(x)dx$ расходится, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится.

Пример 4.72. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$.

Решение. Так как функция $\frac{1}{x}$ непрерывна на $[-1, 1] \setminus \{0\}$ и не ограничена в окрестности нуля, то этот интеграл представляет собой несобственный интеграл. Интеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ расходится (см. пример 4.61), значит, и исходный интеграл расходится. •

Пример 4.73. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt[3]{x^4}}\, dx.$

Решение. Так как функция $\frac{\arcsin x}{\sqrt[3]{x^4}}$ непрерывна на $[-1, 1] \setminus \{0\}$ и не ограничена в окрестности нуля, то исходный интеграл представляет собой несобственный интеграл. Исследуем интеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\arcsin x}{\sqrt[3]{x^4}}\, dx$. Поскольку функция $\frac{\arcsin x}{\sqrt[3]{x^4}}$ эквивалентна при $x \to 0$ функции $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, а $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится (см. пример 4.61), то по предельному признаку получаем, что интеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\arcsin x}{\sqrt[3]{x^4}}\, dx$ сходится. Аналогично доказывается (покажите это), что интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt[3]{x^4}}\, dx$ также сходится, а значит, сходится и исходный интеграл. Покажите, что $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt[3]{x^4}}\, dx = 0$. ●

Пример 4.74. $\int\limits_{0}^{5\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}.$

Решение. Поскольку функция $\frac{1}{1 + \sin x}$ непрерывна на множестве $[0, 5\pi/2] \setminus \{3\pi/2\}$ и не ограничена в окрестности точки $\frac{3\pi}{2}$, то исходный интеграл является несобственным. Исследуем $\int\limits_{0}^{3\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$:

$$\int\limits_{0}^{3\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin x} + \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x} =$$

$$= \left(\begin{array}{ll} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t, & x = 2\operatorname{arctg} t, \\ x' = \dfrac{2}{1+t^2}, & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{array} \right) = 2\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+2t} + \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{1+t^2+2t} \right);$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)^2} = \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{1}{t+1}\Big|_0^A \right) = \lim_{A\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{A+1} \right) = 1.$$

Покажите, что $\int\limits_{-\infty}^{-1} \dfrac{dt}{(t+1)^2}$ расходится и, значит, исходный интеграл тоже расходится. •

Замечание 4.3. Отметим, что при замене переменных интеграл по бесконечному промежутку может превращаться в несобственный интеграл по конечному промежутку. Например, если в интеграле

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^{3/4}}$$

сделать замену: $y = \operatorname{tg} t$: $[0, \pi/2) \to [0, +\infty)$; $y' = \dfrac{1}{\cos^2 t}$; $1 + \operatorname{tg}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, то приходим к равенству

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+y^2)^{3/4}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\cos t}}.$$

Покажите, что последний интеграл сходится. ⊗

Упражнения. Вычислить несобственные интегралы.

4.141. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} e^{1/\sin x} \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}\, dx.$ **4.142.** $\int\limits_0^{\pi/2} e^{1/\sin x} \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}\, dx.$ **4.143.** $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{1/x}}{x^2}\, dx.$

4.144. $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{e^{1/x}}{x^2}\, dx.$ **4.145.** $\int\limits_0^1 \cos(\ln x)\, dx.$ **4.146.** $\int\limits_{-\ln 2}^{0} \dfrac{dx}{\sqrt{1-e^x}}.$

4.147. $\int\limits_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\, dx.$ **4.148.** $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx.$ **4.149.** $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x+x^2}.$

4.150. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$. **4.151.** $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\ln^2 x}$. **4.152.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

4.153. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. **4.154.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **4.155.** $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

4.156. $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2}$. **4.157.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$. **4.158.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sin^2 x}\,dx$.

4.159. $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$. **4.160.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$. **4.161.** $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$.

Исследовать на сходимость интегралы.

4.162. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$. **4.163.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x+1}}$. **4.164.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\ln x)\,dx}{x}$.

4.165. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1/x)\,dx}{\sqrt{x}}$. **4.166.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **4.167.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin x - x}$.

4.168. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+3\sqrt{x})}{e^{2x}-1}\,dx$. **4.169.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{e^{x^2}-\cos x}$.

При всех $n \in \mathbb{N}$ исследовать на сходимость интегралы (где можно, вычислить).

4.170. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-1)^{n+1}(x-2)^{n+1}}}$. **4.171.** $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n\,dx$.

При всех $\alpha \in \mathbb{R}$ исследовать на сходимость интегралы.

4.172. $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \ln x\,dx$. **4.173.** $\displaystyle\int_0^1 \sin(x^\alpha)\,dx$. **4.174.** $\displaystyle\int_0^1 \sin(\operatorname{ctg}^\alpha(x))\,dx$.

4.175. $\displaystyle\int_0^\pi (\sin x)^\alpha \ln\sin x\,dx$. **4.176.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx$. **4.177.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^\alpha}$.

4.4. Приложение определенного интеграла

В учебном пособии [1] описано применение интегралов к вычислению площадей и длин кривых.

Вычисление площади криволинейной трапеции.

Пусть на промежутке $[a, b]$ определена непрерывная положительная функция f. Криволинейной трапецией назовем фигуру на плоскости, ограниченную сверху графиком функции f, снизу – осью Ox, а по бокам – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$.

Пример 4.75. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.

Решение. В соответствии с формулой на с. 56 пособия [2] искомая площадь криволинейной трапеции вычисляется как интеграл:

$$\int\limits_e^{e^2} \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_e^{e^2} = 2e^2 - e^2 - e + e = e^2. \bullet$$

Пример 4.76. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x$ и прямой $y = 2x$.

Решение. Найдем точки пересечения данных кривых. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 2x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x = 2x, \\ y = 2x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4, \end{array}\right. \\ y = 2x; \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = 8. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, данные кривые пересекаются в точках $(0; 0)$ и $(4; 8)$ (рис. 4.4). Следовательно, площадь рассматриваемой фигуры может быть вычислена как разность площадей криволинейных трапеций, т. е. как разность интегралов:

$$\int\limits_0^4 2x\,dx - \int\limits_0^4 (x^2 - 2x)\,dx = \frac{32}{3}. \bullet$$

Заметим, что аналогично можно найти площадь неограниченной фигуры. В этом случае придется вычислять несобственный интеграл.

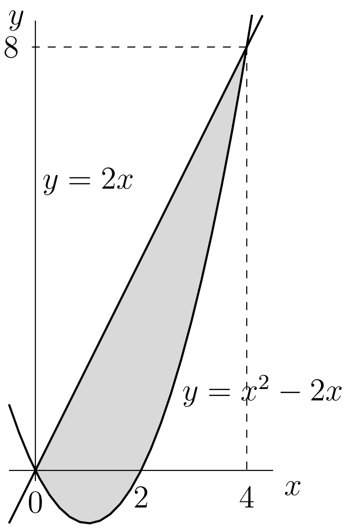

Рис. 4.4

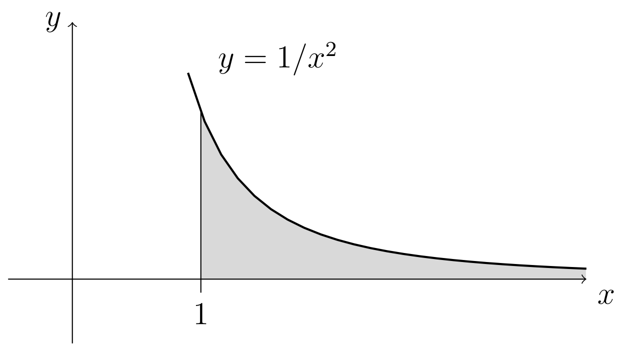

Рис. 4.5

Пример 4.77. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x = 1$ и $y = 0$.

Решение. Площадь неограниченной криволинейной трапеции (рис. 4.5) равна несобственному интегралу

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^{+\infty} = 1. \bullet$$

Пример 4.78. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 1$ и $y = 0$.

Решение. Так как интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ расходится (см. пример 4.48), то данные кривые ограничивают фигуру бесконечной площади. $\bullet$

Упражнения.

4.178. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$.

4.179. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$.

4.180. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \dfrac{27}{x^2+9}$ и $y = \dfrac{x^2}{6}$.

4.181. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

4.182. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $y = a$ и окружностями $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 - 2ay = a^2$ $(a > 0)$.

4.183. Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой $x^2 - y^2 = a^2$ и параболой $y^2 = \dfrac{3}{2}ax$ $(a > 0)$.

4.184. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$, $x = 0$.

4.185. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \arcsin x$ и прямыми $x = 0$, $y = \dfrac{\pi}{2}$.

4.186. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \dfrac{1}{(x-3)^3}$ и прямыми $x = 5$, $y = 0$.

4.187. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = \dfrac{x^5}{2-x}$, ее асимптотой и прямой $y = 0$.

Вычисление площади криволинейного сектора.

Пусть имеется фигура, ограниченная кривой $r = f(\varphi)$, где f — непрерывная функция, и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$. Такую фигуру будем называть криволинейным сектором (рис. 4.6).

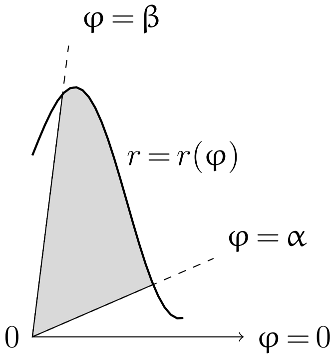

Рис. 4.6

Заметим, что угол φ в полярной системе координат изменяется от 0 до 2π. Если в формулировке задания явно не указывается область изменения φ, то она берется наибольшей, отвечающей условию $r \geq 0$.

Площадь такой фигуры можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi. \tag{4.14}$$

Пример 4.79. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a(1 + \sin\varphi)$, $\quad a > 0$.

Решение. В соответствии с (4.14) вычислим:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\sin\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\sin\varphi + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\varphi - 2\cos\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2}(2\pi + \pi) = \frac{3\pi a^2}{2}. \bullet$$

Пример 4.80. Найти площадь фигуры, ограниченной дугами окружностей $r = 2a\cos\varphi$ и $r = 2a\sin\varphi$, находящейся в первой четверти $(0 \le \le \varphi \le \pi/2)$.

Решение. Окружности пересекаются при $\varphi = \pi/4$. Следовательно, искомую площадь можно вычислить как сумму интегралов:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4}(2a\sin\varphi)^2 d\varphi + \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}(2a\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{4a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi +$$

$$+\frac{4a^2}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = a^2\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} + a^2\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2(\pi-2)}{2}. \bullet$$

Пример 4.81. Найти площадь фигуры, ограниченной витком логарифмической спирали $r = e^{\varphi}$ и осью OX.

Решение. Искомая площадь может быть найдена как интеграл:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(e^{\varphi})^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}e^{2\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{4}e^{2\varphi}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{4}\left(e^{4\pi} - 1\right). \bullet$$

Упражнения. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат.

4.188. $r = a\sin 5\varphi$ $(a > 0)$. **4.189.** $r^2 = 2\cos 2\varphi$; $r = 1$ $(r \ge 1)$.
4.190. $r^2 = a^2\sin\varphi$. **4.191.** $r = \sqrt{3}\sin\varphi$; $r = 1 - \cos\varphi$, $(r \ge 1 - \cos\varphi)$.
4.192. $r = a\sin 2\varphi$ $(a > 0,\ \ 0 \le \varphi \le \pi)$.

Вычисление длины дуги кривой.

Пусть задана кривая $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$. Функции φ и ψ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$, и $\varphi'^{\,2}(t) + \psi'^{\,2}(t) \ne 0$. Тогда длину этого участка кривой можно вычислить по формуле

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^{\,2}(t) + \psi'^{\,2}(t)}\,dt. \qquad (4.15)$$

В ситуации, когда кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, заданная на отрезке $[a, b]$, следствием последней формулы является:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^{\,2}(x)}\, dx. \tag{4.16}$$

Если кривая задана уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, длина участка кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^{\,2}(\varphi)}\, d\varphi. \tag{4.17}$$

Пример 4.82. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от точки $(0; 0)$ до точки $(1; 1)$.

Решение. Введем параметризацию параболы: $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$

Согласно (4.15) длину кривой L можно найти вычислив интеграл:

$$L = \int_0^1 \sqrt{((t^2)')^2 + ((t^3)')^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, dt = \int_0^1 \sqrt{4 + 9t^2}\; t\, dt =$$

$$= \frac{1}{18} \int_4^{13} \sqrt{z}\, dz = \frac{1}{18}\, \frac{2\sqrt{z^3}}{3}\bigg|_4^{13} = \frac{1}{27}(\sqrt{13^3} - 8). \bullet$$

Пример 4.83. Найти длину астроиды $x = \cos^3 t$; $y = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Решение. Кривая задана в параметрическом виде, следовательно, длина кривой равна интегралу:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\big((\cos^3 t)'\big)^2 + \big((\sin^3 t)'\big)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 3\int_0^{2\pi} |\sin t \cos t|\, dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} |\sin 2t|\, dt = 4 \cdot \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} |\sin 2t|\, dt = -6\, \frac{\cos 2t}{2}\bigg|_0^{\pi/2} = 6. \bullet$$

Пример 4.84. Найти длину кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Решение. Длину кривой, заданной в полярной системе координат, вычислим по формуле (4.17). В данном случае получим:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= -4a\cos\frac{\varphi}{2}\bigg|_0^{2\pi} = 8a. \bullet$$

Пример 4.85. Найти длину дуги параболы $y = x^2$ от точки $(0; 0)$ до точки $(1; 1)$.

Решение. Для нахождения длины дуги в данном случае используем формулу (4.16):

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (x^2)'^{\,2}}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx =$$

$$= \left(\frac{x\sqrt{1+4x^2}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2x + \sqrt{1+4x^2})\right)\bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln 7. \bullet$$

Упражнения.

4.193. Найти длину дуги параболы $y = x^2 - 5x + 6$ между точками ее пересечения с осью Ox.

4.194. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t), \\ y = a(3\sin t - \sin 3t), \end{cases}$ $t \in [0, \pi/2]$.

4.195. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \end{cases}$ $t \in [0, 1]$.

4.196. Найти длину кривой $\begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6}, \\ y = 4 - \dfrac{t^4}{4} \end{cases}$ между точками ее пересечения с осями координат.

4.197. Найти длину кривой $r = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

4.198. Найти длину дуги спирали Архимеда $r = 5\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Ответы к упражнениям разд. 4

4.1. $\frac{2}{5}x^{5/2}+2x^{3/2}-2x^{1/2}+C$. **4.2.** $\frac{1}{7}(2x+1)^{7/2}+C$. **4.3.** $x^4/2-x^3+x^2-3x+C$.
4.4. $\frac{1}{3}\cos 3x + C$. **4.5.** $\frac{5}{3}(x+3)^{3/5} + C$. **4.6.** $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{4}\right) + C$.
4.7. $\frac{3^{2x+1}}{2\ln 3}+C$. **4.8.** $-\ln|\cos x|+C$. **4.9.** $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C$. **4.10.** $-\frac{\cos^4 x}{4}+C$.
4.11. $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$. **4.12.** $\ln|\ln x|+C$. **4.13.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x^3)+C$. **4.14.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)+C$.
4.15. $2\sin\sqrt{x} + C$. **4.16.** $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{5}\right) + C$. **4.17.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$.
4.18. $-\sin(\cos x) + C$. **4.19.** $\frac{1}{18}(5x^3+1)^{6/5} + C$. **4.20.** $\frac{1}{6}\arcsin(x^6) + C$.
4.21. $-\operatorname{arctg}(\cos x) + C$. **4.22.** $-\frac{1}{3}\cos(x^3) + C$. **4.23.** $\frac{1}{2}\ln(2e^x+1) + C$.
4.24. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right| + C$. *Указание:* сделайте замену $t = \sqrt{4-x^4}$.
4.25. $2\ln(\sqrt{x}+1) + C$. *Указание:* сделайте замену $t = \sqrt{x}$.
4.26. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3+e^x}+\sqrt{3}}{\sqrt{3+e^x}-\sqrt{3}}\right| + C$. **4.27.** $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}) + C$.
4.28. $\arcsin\frac{x-2}{2} + C$. **4.29.** $5\arcsin\frac{x-1}{2} - 2\sqrt{3+2x-x^2} + C$.
4.30. $\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+8}| + C$. **4.31.** $2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \ln|x+3| + C$.
4.32. $2\ln|x+4| - \ln|x+1| + C$. **4.33.** $\ln(x^2+6x+10) - 9\operatorname{arctg}(x+3) + C$.
4.34. $3\ln|x-2| - \ln(x^2+4x+8) + \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}$.
4.35. $\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} - 2\operatorname{arctg} x + C$.
4.36. $2\ln|x-1|+3\ln|x+1|-\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg} x+C$. **4.37.** $\frac{2x-1}{x^2+1}+2\operatorname{arctg} x+C$.
Указание: воспользуйтесь интегралом, полученным в примере 4.24.
4.38. $-\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$. **4.39.** $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$.
4.40. $\frac{7x}{32} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin 6x + \frac{1}{256}\sin 8x + C$.
4.41. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x - 1 - \sqrt{2}}\right|+C$. **4.42.** $\frac{1}{5}\big(\ln\big|\operatorname{tg}(x/2)+4\big|-\ln\big|\operatorname{tg}(x/2)-1\big|\big)+C$.
4.43. $(3x^2/2+x^3/3)\ln x - 3x^2/4 - x^3/9 + C$. **4.44.** $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.
4.45. $(x^2/2-2x+3/4)\sin 2x + (x/2-1)\cos 2x + C$.

4.46. $\dfrac{e^{3x}}{25}\big(4\sin 4x+3\cos 4x\big)+C$. **4.47.** $\dfrac{e^{5x}}{125}(25x^2-10x-98)+C$.
4.48. $x^{2/3}\left(\dfrac{3}{2}\ln x-\dfrac{9}{4}\right)+C$. **4.49.** $\dfrac{x^3}{3}\arcsin(2x)+\dfrac{2x^2+1}{36}\sqrt{1-4x^2}+C$.
4.50. $(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$. **4.51.** $\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}(2x)+\dfrac{1}{4}\ln\big|\cos(2x)\big|+C$.
4.52. $(-x^2-2x+1)\cos x+2(x+1)\sin x+C$.
4.53. $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$. **4.54.** $1/2$. **4.55.** $\pi/6$. **4.56.** $\pi/3$. **4.57.** $\dfrac{131\,220}{\ln 3}$.
4.58. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{6}$. **4.59.** $\dfrac{42}{\ln 7}$. **4.60.** $\ln\sqrt{2}$. **4.61.** $\dfrac{\ln 41}{4}$. **4.62.** $\dfrac{16\sqrt{2}-14}{3}$.
4.63. $\dfrac{48}{\ln 4}+\dfrac{360}{\ln 6}+\dfrac{648}{\ln 9}$. **4.64.** $\dfrac{1}{6}$. **4.65.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$. **4.66.** $2-\pi/2$.
4.67. $\dfrac{3\pi^2}{16}$. **4.68.** $\dfrac{\ln 3}{2}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **4.69.** $\dfrac{1-\ln 2}{2}$. **4.70.** π. **4.71.** 4π. **4.72.** $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$.
4.73. $\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **4.74.** $-\dfrac{3}{4}+\ln 4$. **4.75.** -6π. **4.76.** $e-2$.
4.77. $\dfrac{\sqrt{3}-2}{20}e^{4\pi/3}+\dfrac{1}{5}e^{-2\pi}$. **4.78.** $\dfrac{\pi^2}{3}+\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{16}{27}$. **4.79.** $e+5$. **4.80.** $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{24}-\dfrac{5}{72}$.
4.81. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\pi\sqrt{3}}{24}+\dfrac{3\ln 3}{8}$. **4.82.** $\dfrac{\ln 5+\ln 3-\ln 7}{4}+\dfrac{38}{105}$. **4.83.** $\dfrac{8191}{26}$.
4.84. $\dfrac{5e^3-2}{27}$. **4.85.** $-\dfrac{1863}{28}$. **4.86.** $-\pi/3$. **4.87.** $5\pi/6+1-\sqrt{3}$. **4.88.** $1/6$.
4.89. $\dfrac{\pi^3}{6}-\dfrac{\pi}{4}$. **4.90.** $\dfrac{3}{5}(e^{\pi}-1)$. **4.91.** 1. **4.92.** $29/6$. **4.93.** $-\pi^2/4$. **4.94.** $A<B$.
4.95. $A=B$. **4.96.** $A>B$. **4.97.** $A<B$. **4.98.** $A>B$. **4.99.** 2.
4.100. Расходится. **4.101.** $1-1/e$. **4.102.** $1/4$. **4.103.** Расходится. **4.104.** $\pi/4$.
4.105. $1/2$. **4.106.** Расходится. **4.107.** $1-\ln 2$. **4.108.** $\sqrt{6}/6$. **4.109.** $1/3$.
4.110. Расходится. **4.111.** Расходится. **4.112.** $1/2$. **4.113.** $1-e^{-\pi/2}$.
4.114. 3.5. **4.115.** Расходится. **4.116.** $\pi/4+\ln\sqrt{2}$. **4.117.** Расходится.
4.118. Расходится. **4.119.** 0. **4.120.** 2. **4.121.** 0. **4.122.** Сходится. **4.123.** Сходится. **4.124.** Расходится. **4.125.** Расходится. **4.126.** Сходится. **4.127.** Расходится. **4.128.** Расходится. **4.129.** Сходится абсолютно. **4.130.** Сходится. **4.131.** Сходится условно. **4.132.** Расходится. **4.133.** Сходится абсолютно. **4.134.** Сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\le 1$. **4.135.** Сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\le 1$. **4.136.** Сходится при $0\le\alpha<1$, расходится при $\alpha\ge 1$. **4.137.** Сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\le 1$. **4.138.** Сходится абсолютно при $\beta>1$, сходится условно при $0<\beta\le 1$, расходится при $\beta=0$. **4.139.** Сходится абсолютно при $\alpha>1$, сходится условно при $0<\alpha\le 1$, расходится при $\alpha=0$. **4.140.** Сходится при $\alpha>1$, расхо-

дится при $0 < \alpha \le 1$. **4.141.** $1/e$. **4.142.** Расходится. **4.143.** Расходится. **4.144.** 1. **4.145.** 1/2. **4.146.** $\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$. **4.147.** 2. **4.148.** 3/2. **4.149.** Расходится. **4.150.** 3/2. **4.151.** Расходится. **4.152.** $\pi/2$. **4.153.** Расходится. **4.154.** 0. **4.155.** 3/2. **4.156.** Расходится. **4.157.** π. **4.158.** 1. **4.159.** $1-\cos 1$. **4.160.** $\dfrac{20\sqrt{2}-16}{9}$. **4.161.** $-1/4$. **4.162.** Расходится. **4.163.** Расходится. **4.164.** Расходится. **4.165.** Сходится абсолютно. **4.166.** Сходится. **4.167.** Расходится. **4.168.** Сходится. **4.169.** Расходится. **4.170.** Расходится при при всех n. **4.171.** Сходится при всех n, интеграл равен $(-1)^n n!$. **4.172.** $-\dfrac{1}{(\alpha+1)^2}$ при $\alpha > -1$, расходится при $\alpha \le -1$. **4.173.** Сходится при всех $\alpha \in \mathbb{R}$. *Указание:* при $\alpha < 0$ сделайте замену $t = x^{\alpha}$, получившийся интеграл сходится абсолютно. **4.174.** Сходится при всех $\alpha \in \mathbb{R}$. **4.175.** Сходится при $\alpha > -1$, расходится при $\alpha \le -1$. **4.176.** Сходится при $\alpha > -1$, расходится при $\alpha \le -1$. **4.177.** Сходится абсолютно при $1 < \alpha < 2$, сходится условно при $0 < \alpha \le 1$, расходится при $\alpha \le 0$ или $\alpha \ge 2$. **4.178.** 16/3. **4.179.** 9/2. **4.180.** $9\pi/2 - 3$. **4.181.** πab. **4.182.** a^2. **4.183.** $a^2\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \ln(2+\sqrt{3})\right)$. **4.184.** $2\ln 2 - 0.5$. **4.185.** 1. **4.186.** 1/8. **4.187.** $5\pi/2$. **4.188.** $\pi a^2/4$. **4.189.** $\sqrt{3} - \pi/3$. **4.190.** a^2. **4.191.** $3\sqrt{3}/4$. **4.192.** $\pi a^2/4$. **4.193.** $\dfrac{\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)}{2}$. **4.194.** $6a$. **4.195.** $\sqrt{2}(e-1)$. **4.196.** $\dfrac{17\sqrt{17}-1}{6}$. **4.197.** $8a/3$. **4.198.** $5\pi\sqrt{4\pi^2+1} - 2.5\ln\left(\sqrt{4\pi^2+1} - 2\pi\right)$.

5. ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

5.1. Понятие числового ряда. Сходимость ряда

Пусть задана последовательность чисел a_n, $n = 1, 2, \ldots$. По этой последовательности построим новую последовательность S_n по правилу

$$S_1 = a_1,\ \ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots\ .$$

Определение 5.1. *Последовательность $\{S_n\}$ называется числовым рядом последовательности $\{a_n\}$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются первым, вторым, ..., n-м членами ряда, а числа $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – первой, второй, ..., n-й частичными суммами ряда. Числовой ряд обозначается символами $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ или $\sum\limits_{n\ge 1} a_n$.*

Иногда члены ряда удобнее нумеровать начиная с некоторого числа m. Такой ряд обозначают $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+n} + \cdots$, $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n$ или $\sum\limits_{n \geq m} a_n$.

Определение 5.2. *Если существует конечный* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, *то говорят, что ряд сходится, число* S *называют суммой ряда и пишут* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S$. *В противном случае ряд называют расходящимся и символу ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *никакого численного значения не присваивают.*

Пример 5.1. Пусть $b_n = bq^{n-1}$ – геометрическая прогрессия. Тогда соответствующий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} bq^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Решение. Известно, что $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \dfrac{b(1-q^n)}{1-q}$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} bq^{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b(1-q^n)}{1-q}$. При $|q| \geq 1$ этот предел не существует, т. е. ряд расходится. При $|q| < 1$ предел существует и равен $b/(1-q)$, откуда получаем формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, известную из школьного курса математики:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} bq^{n-1} = \frac{b}{1-q}, \qquad |q| < 1. \quad \bullet \tag{5.1}$$

Пример 5.2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ расходится.

Решение. По свойству логарифма

$$S_n = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

Так как $\lim S_n = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ расходится.$\bullet$

Пример 5.3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \cos\dfrac{\pi n}{2}$ расходится.

Решение. Очевидно, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \cos\dfrac{\pi n}{2} = 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + \ldots$. Частичные суммы этого ряда образуют последовательность

$S_1 = 0$, $S_2 = S_3 = -1$, $S_4 = S_5 = 0$, $S_6 = S_7 = -1, \ldots$, которая не имеет предела, т. е. ряд расходится. ●

Следующие теоремы помогают устанавливать сходимость или расходимость рядов.

Теорема 5.1. (Необходимый признак сходимости ряда) *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Следствие 5.1. (Достаточный признак расходимости ряда) *Если* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится.*

Предложение 5.1. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *сходятся, то для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ *также сходится и*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Легко показать, что конечное число первых членов ряда не влияет на его сходимость, т. е. справедливо следующее предложение.

Предложение 5.2. *Для сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $n_0 \in \mathbb{N}$ *сходился ряд* $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$.

Упражнения. Исследуйте на сходимость ряды. Если ряд сходится, найдите его сумму.

5.1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3}{4^n}$. **5.2.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{2}{3^n} - \dfrac{1}{4^n}\right)$. **5.3.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3}{2^{2n-1}}$. **5.4.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n - 5 \cdot 2^n}{7^n}$.

5.5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2n+1}$. **5.6.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$. **5.7.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin \dfrac{\pi n}{4}$. **5.8.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

5.9. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n a_{n+1}}$, где $a_n = a + (n-1)d$ — арифметическая прогрессия.

5.10. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Можно ли утверждать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится?

5.2. Ряды с положительными членами

Начнем изучение рядов со случая, когда $a_n \geq 0$ при всех n. Тогда S_n является монотонно возрастающей последовательностью. Поэтому для сходимости ряда достаточно ограниченности последовательности S_n (теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности).

Следующие теоремы позволяют заменять изучаемый ряд другим (более простым).

Теорема 5.2. (Признак сравнения) *Пусть* $0 \leq a_n \leq b_n$ *для всех* $n \geq 1$. *Тогда:*

1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *также сходится, т. е. из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами. Кроме того справедливо неравенство* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *также расходится, т. е. из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами.*

Обычно теорему сравнения удобнее применять в следующей предельной форме.

Теорема 5.3. (Предельный признак сравнения) *Если для всех* $n \geq 1$ *справедливо* $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ *и существует конечный* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} > 0$, *то ряды* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

В частности, если $a_n \sim b_n$ при $n \to +\infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Некоторый недостаток применения теоремы сравнения в предельной форме состоит в том, что в этом случае нет никакой информации о сумме ряда.

Замечание 5.1. В силу предложения 5.2 в теоремах 5.2 и 5.3 достаточно требовать, чтобы условия выполнялись при $n \geq n_0$, т. е. начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$, не обязательно первого. $\otimes$

В некоторых случаях исследование сходимости ряда с положительными членами можно заменить на исследование сходимости несобственного интеграла.

Теорема 5.4. (Интегральный признак сравнения) *Пусть функция f непрерывна, положительна, не возрастает на $[1,+\infty)$ и $a_n = f(n)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. Если ряд и интеграл сходятся, то для любого $n \in \mathbb{N}$ верна оценка*

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \le S - S_n \le \int\limits_{n}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пример 5.4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n - n}{3^n}$.

Решение. Так как $a_n > 0$ и $a_n = \dfrac{2^n - n}{3^n} \le \dfrac{2^n}{3^n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ сходится (см. пример 5.1), то изучаемый ряд сходится и в силу теоремы 5.2 и (5.1) его сумма $S \le \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{2/3}{1-2/3} = 2$. •

Пример 5.5. (Ряд Дирихле) При каких значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $x \in [1,+\infty)$. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 5.4, поэтому достаточно рассмотреть поведение интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$. Как было показано (см. пример 4.48), несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. •

Замечание 5.2. При $\alpha = 1$ получается ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$, который называется *гармоническим рядом.* Пример 5.5 показывает, что гармонический ряд расходится. ⊗

Пример 5.6. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{4n^2 - 3}$.

Решение. Пусть $a_n = \dfrac{1}{4n^2 - 3}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{4n^2 - 3} = 4$ и по теореме 5.3 рассматриваемый ряд ведет себя так же, как ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$, который сходится (см. пример 5.5). Следовательно, данный ряд тоже сходится. ●

Пример 5.7. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2^n + \sin n)(n^2+1)}{(2^n+1)(n^4+3n^3+1)}$.

Решение. Заметим, что $\dfrac{(2^n + \sin n)(n^2+1)}{(2^n+1)(n^4+3n^3+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ при $n \to +\infty$ (проверьте!). Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 5.5), то по теореме 5.3 сходится и рассматриваемый ряд. ●

Пример 5.8. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, $x \in [2, +\infty)$. Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 5.4. Так как несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{1}{x \ln x} dx = \dfrac{\ln(\ln x)}{2}\Bigg|_2^{+\infty} = +\infty$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ расходится. ●

Пример 5.9. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n^2+1)}$.

Решение. Заметим, что $\dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n^2+1)} \sim \dfrac{1}{4n \ln^2 n}$ при $n \to +\infty$. По теореме 5.3 и предложению 5.2 достаточно исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n^2}$. Применим интегральный признак сравнения: несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{1}{x \ln^2 x} dx = -\dfrac{1}{\ln x}\Bigg|_2^{+\infty} = \dfrac{1}{\ln 2}$ сходится. Следовательно, данный ряд также сходится. ●

Пример 5.10. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$.

Решение. Нетрудно видеть, что $\ln n = o(n^{\alpha})$ при $n \to +\infty$ для всех $\alpha > 0$ (проверьте!). Возьмем $\alpha = 1/2$. Тогда $\ln n = o(\sqrt{n})$ при $n \to +\infty$, следовательно, существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что $\ln n \le \sqrt{n}$ для всех $n \ge n_0$. Поэтому $\dfrac{\ln n}{n^2} \le \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ для всех $n \ge n_0$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится (см. пример 5.5), то по теореме 5.2 и предложению 5.2 исходный ряд тоже сходится.●

Упражнения. Исследуйте ряды на сходимость.

5.11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$. **5.12.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n\ln n}{n^2+1}$. **5.13.** $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{2}{n(n^2-1)}$.

5.14. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+3}{n\ln n+5}$. **5.15.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3+2n^2\ln n}{3n^6-n^5}$. **5.16.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n\sqrt{n}+1}{n^3\sqrt{n^2-1}+3\sqrt{n}}$.

5.17. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n(2^n-1)}{5^n+3^n+n^2}$. **5.18.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n+n+\ln n}{3^n+2^n+\cos(n^3)}$.

5.19. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n\ln n}{(n\ln n+1)^2}$. **5.20.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(\sqrt[3]{n}+2)^6}$. **5.21.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n+\ln n+3}{3^n+n^5}$.

5.22. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n+2)(2^n+n^2)}{(n2^n+1)^2}$. **5.23.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{n-1}$. **5.24.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+3}{n\ln n+4}$.

5.25. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+4}{(\sqrt{n}\ln n+1)^5}$. **5.26.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+\cos n}{(n^2+n\ln n+1)^2}$.

5.27. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{2^n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. **5.28.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

5.29. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. **5.30.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\dfrac{n^2+1}{n^2}$. **5.31.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

5.32. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\dfrac{2}{n}\right)$. **5.33.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(e^{1/n}-1\right)$. **5.34.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(e^{1/n}-1/n-1\right)$.

5.35. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln^3 n}{n}$. **5.36.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{0.9}\ln n}$. **5.37.** $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2\ln n}$. **5.38.** $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{n}{\ln^{100} n}$.

5.39. При каких значениях параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$?

5.3. Ряды с произвольными вещественными членами

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Вместе с ним рассмотрим ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Теорема 5.5. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, *то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, *называемый в этом случае абсолютно сходящимся.*

Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ называют сходящимся условно.

Пример 5.11. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2(-1)^n+1}{n\sqrt{n}}$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left|2(-1)^n+1\right|}{n\sqrt{n}}$. Так как $\left|2(-1)^n+1\right| = 3$ при четном n и $\left|2(-1)^n+1\right| = 1$ при нечетном n, то $\dfrac{\left|2(-1)^n+1\right|}{n\sqrt{n}} \leq \dfrac{3}{n\sqrt{n}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3}{n\sqrt{n}}$ сходится (см. пример 5.5), следовательно, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{2(-1)^n+1}{n\sqrt{n}}\right|$, т. е. рассматриваемый ряд сходится абсолютно. •

Пример 5.12. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|(-1)^{n+1}|}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$. Так как гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right|$. Следовательно, абсолютной сходимости нет. Для исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ рассмотрим его частичные суммы S_{2k} с четными номерами. Тогда

$$S_{2(k+1)} = S_{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > S_{2k}.$$

Кроме того,

$$S_{2k} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2k-1}\right) - \frac{1}{2k} < 1.$$

Следовательно, S_{2k} – монотонно возрастающая, ограниченная сверху последовательность и существует конечный предел $\lim\limits_{k\to+\infty} S_{2k} = S$. Далее,

$$S_{2k+1} = S_{2k} + \frac{1}{2k+1} \text{ и } \lim_{k\to+\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} S_{2k}.$$

Таким образом, существует предел $\lim\limits_{k\to+\infty} S_k = S$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится условно. Можно показать, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$. •

Выбирая в теореме сравнения в качестве ряда сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ (геометрическую прогрессию), поведение которого известно, устанавливаются следующие признаки абсолютной сходимости рядов.

Теорема 5.6. (Признак Даламбера) *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = D \in [0, +\infty]$, *то при* $D < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится абсолютно, при* $D > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится.*

Теорема 5.7. (Признак Коши) *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K \in [0, +\infty]$, *то при* $K < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *сходится абсолютно, при* $K > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *расходится.*

Если $D = 1$ или $K = 1$, то теоремы 5.6 и 5.7 не позволяют судить о сходимости ряда. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, для которых $K = 1$ или $D = 1$. Например, для ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ при любом α имеем $K = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^\alpha}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\alpha \ln n/n} = e^0 = 1$ и $D = \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha (n+1)^\alpha = \lim \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1$. Однако при $\alpha > 1$ ряд Дирихле сходится, а при $\alpha \le 1$ расходится (см. пример 5.5).

Пример 5.13. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^4}{2^n}$.

Решение. Имеем $a_n = \dfrac{n^4}{2^n}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^4 2^n}{2^{n+1} n^4} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^4 = \dfrac{1}{2} < 1$. Ряд сходится по признаку Даламбера. •

Пример 5.14. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-2)^n}{n!}$.

Решение. Имеем $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n!}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1}n!}{(n+1)!2^n} =$ $= 2\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 < 1$. Ряд сходится по признаку Даламбера. •

Пример 5.15. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$.

Решение. Здесь $a_n = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2n+1} =$ $= \dfrac{1}{2} < 1$. Ряд сходится по признаку Коши.

Пример 5.16. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n n!}{n^n}$.

Решение. Имеем $a_n = \dfrac{(-1)^n n!}{n^n}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} =$ $= \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1} < 1$. Ряд сходится по признаку Даламбера.

Упражнения. Исследуйте ряды на сходимость.

5.40. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^3\sqrt{n}}{n^2+3n+1}$. **5.41.** $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\cos(3n)}{n\ln^5 n}$. **5.42.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

5.43. При каких значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha}e^{-n}$?

5.44. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$. **5.45.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$. **5.46.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$. **5.47.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$.

5.48. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(\pi n/4)}{n^2+1}$. **5.49.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. **5.50.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{(2+1/n)^n}$.

5.51. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{n^2}$. **5.52.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln(n^2+1)}{2^n+n^2}$. **5.53.** $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

5.54. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{(n+1)/2}}$. **5.55.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^{\ln^3 n - n}$. **5.56.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!+n^7+3}{(2n)!+n^4}$.

5.57. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n n! + 2^n(n-1)!}{(n-1)^n}$. **5.58.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2ne^n + \operatorname{arctg}(n^3)}{n!+(n-1)!+n^2+7}$.

5.59. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \arcsin\left(\dfrac{2^n-1}{3^n+1}\right)$.

Наиболее просто исследуются ряды со знакочередующимися членами, а именно ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$, где $a_n \geq 0$. Для них справедлива теорема.

Теорема 5.8. (Признак Лейбница) *Если для любого $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} \leq a_n$ и $\lim a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится, его сумма $S \in [0, a_1]$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.*

Таким образом, для знакочередующихся рядов с монотонно убывающим до нуля общим членом необходимый признак сходимости оказывается и достаточным. Отметим, что признак Лейбница не имеет отношения к абсолютной сходимости ряда.

С помощью признака Лейбница сразу устанавливается сходимость ряда, рассмотренного в примере 5.12, так как ясно, что последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$ монотонно сходится к нулю.

Пример 5.17. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$.

Решение. Ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Таким образом, при $p > 1$ исходный ряд сходится абсолютно. При $p \leq 0$ очевидно

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p} = \lim_{n\to+\infty} n^{-p} = \begin{cases} +\infty & \text{при } p < 0, \\ 1 & \text{при } p = 0 \end{cases}$$

и не выполняется необходимый признак сходимости ряда. Наконец, при $0 < p \leq 1$ ясно, что $\dfrac{1}{(n+1)^p} < \dfrac{1}{n^p}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^p} = 0$. Таким образом, в этом случае ряд сходится по признаку Лейбница. В итоге, при $p \leq 0$ ряд расходится, при $0 < p \leq 1$ ряд сходится условно, при $p > 1$ – сходится абсолютно. •

Ряды, удовлетворяющие условиям признака Лейбница, допускают простую оценку остатка ряда: остаток ряда по модулю не превосходит первого его члена. Точнее, если последовательность a_n положительна и монотонно стремится к нулю, то

$$|S - S_N| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n a_n\right| \leq |a_{N+1}|.$$

Пример 5.18. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)2^n}$ и найти его сумму с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Решение. Абсолютная сходимость ряда устанавливается, например, с помощью признака Даламбера. Кроме того, ряд удовлетворяет всем условиям признака Лейбница и, значит, $S = S_N + R_N$, $|S - S_N| = |R_N| \le a_{N+1} = \frac{1}{N(N+1)2^{N+1}}$. Последовательность $a_n = \frac{1}{n(n-1)2^n}$ монотонно убывает и последовательно находим:

$$a_2 = \frac{1}{8} = 0.1250000, \quad a_3 = \frac{1}{48} = 0.0208333, \quad a_4 = \frac{1}{192} = 0.0052083,$$
$$a_5 = \frac{1}{640} = 0.0015625, \quad a_6 = \frac{1}{1920} = 0.0005208, \quad a_7 = \frac{1}{5378} = 0.0001860,$$
$$a_8 = \frac{1}{14336} < 10^{-4}.$$

Таким образом, с точностью 10^{-4} получим $S \approx S_7 = 0.1081478$. Точное значение суммы рассматриваемого ряда $S = \frac{1}{2}\left(3\ln\frac{3}{2} - 1\right) = 0.10819711$. •

Упражнения. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов.

5.60. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$. **5.61.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n+\ln n}$. **5.62.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$.

5.63. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+101}{3n+1}\right)^n$. **5.64.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+2}{n\sqrt{n}}$.

5.65. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+2}{n^2\sqrt{n}}$. **5.66.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n+n}{n!+\ln n}$.

5.67. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+(-1)^n}$. **5.68.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$.

5.69. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n(\cos n+2)}{n\sqrt{n}+3}$. **5.70.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \frac{\sqrt{n}}{n+4}$.

5.71. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln^2 n}{n}$.

Доказать сходимость рядов и найти их суммы с точностью ε.

5.72. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{4^n(n+1)}$, $\varepsilon = 10^{-3}$. **5.73.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{7^n}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

5.74. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{(n^2+1)10^n}$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

Доказать, что к данному ряду не применим признак Лейбница. Исследовать ряд на сходимость.

5.75. $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} + \ldots$.

5.76. $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots$.

5.77. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} + \ldots$.

5.4. Степенные ряды

Рассмотрим случай, когда члены ряда являются не числами, а функциями вещественной переменной x: $a_n = u_n(x)$. Следовательно, рассматривается ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

Естественно считать, что все функции $u_n(x)$ имеют общую область определения X. Тогда при различных значениях $x \in X$ получаются числовые ряды, которые могут как сходиться, так и расходиться.

Определение 5.3. *Множество* $D_{\text{сх}} = \{x \in X : \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *сходится*$\}$ *называется областью сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Центральная задача теории функциональных рядов – нахождение области сходимости ряда. В общем случае эта задача чрезвычайно трудна. Ограничимся рассмотрением только случая, когда $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, т. е. рядов вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad x_0, a_n \in \mathbb{R},$$

называемых степенными рядами.

Рассмотрим случай $x_0 = 0$. Справедлива теорема.

Теорема 5.9. (Абеля) *Если сходится ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_1^n$ *и* $|x| < |x_1|$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *сходится абсолютно.*

Из теоремы Абеля нетрудно получить теорему, описывающую область сходимости произвольного степенного ряда.

Теорема 5.10. *У любого степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ *существует радиус сходимости, т. е. такое число* $R_{\text{сх}} \in [0, +\infty]$, *что ряд*

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *сходится абсолютно при всех* $|x-x_0| < R_{\text{сх}}$ *и расходится при* $|x-x_0| > R_{\text{сх}}$.

Замечание 5.3. Предыдущая теорема показывает, что область сходимости $D_{\text{сх}}$ содержит интервал $(x_0-R_{\text{сх}}, x_0+R_{\text{сх}})$, называемый интервалом сходимости степенного ряда, и, возможно, еще содержит точки $x = x_0-R_{\text{сх}}$ и $x = x_0 + R_{\text{сх}}$. $\otimes$

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда целесообразно использовать признаки Даламбера и Коши. Покажем это на нескольких примерах.

Пример 5.19. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x+3)^n}{2^n+n^2}$.

Решение. Используя признак Даламбера найдем радиус сходимости ряда. Обозначим $a_n = (-1)^n\dfrac{(x+3)^n}{2^n+n^2}$, тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x+3|^{n+1}(2^n+n^2)}{(2^{n+1}+(n+1)^2)|x+3|^n} =$$

$$= |x+3|\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n+n^2}{2\cdot 2^n+n^2+2n+1} = \frac{|x+3|}{2}.$$

Если $\dfrac{|x+3|}{2} < 1$, то ряд сходится абсолютно, если $\dfrac{|x+3|}{2} > 1$ – расходится. Таким образом, рассматриваемый ряд сходится абсолютно при $|x+3| < 2$ и расходится при $|x+3| > 2$. Значит, радиус сходимости этого ряда $R_{\text{сх}} = 2$.

При $|x+3| = 2$, т.е. при $x = -1$ или $x = -5$ ряд нужно изучать отдельно. Пусть $x = -1$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x+3)^n}{2^n+n^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{2^n+n^2}$, а так как $\dfrac{2^n}{2^n+n^2} \to 1$ при $n \to +\infty$, то не выполнен необходимый признак сходимости (см. следствие 5.1 из теоремы 5.1) и ряд расходится.

Аналогично, при $x = -5$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x+3)^n}{2^n+n^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n}{2^n+n^2}$ ряд также расходится. В итоге, при $x \in (-5,-1)$ ряд сходится абсолютно, при $x \in (-\infty,-5] \cup [-1,+\infty)$ – расходится. Область сходимости этого ряда $D_{\text{сх}} = (-5,-1)$. $\bullet$

Пример 5.20. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x-4)^n}{n+1}$.

Решение. Применение к данному ряду признака Даламбера дает:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x-4|^{n+1}(n+1)}{(n+2)|x-4|^n}=|x-4|\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}=|x-4|.$$

Значит, при $|x-4|<1$ исходный ряд абсолютно сходится, при $|x-4|>1$– расходится, $R_{\text{сх}}=1$. В граничных точках изучим ряд отдельно. При $x-4=1$, т. е. при $x=5$, получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$, сходящийся условно по признаку Лейбница. При $x-4=-1$, т. е. при $x=3$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n+1}$ расходится. Таким образом, рассматриваемый ряд при $x\in(3,5)$ сходится абсолютно, при $x=5$ сходится условно и при $x\in(-\infty,3]\cup(5,+\infty)$ расходится. Область сходимости этого ряда $D_{\text{сх}}=(3,5]$. •

Пример 5.21. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n(x+2)^n}{n^n}$.

Решение. Применение к данному ряду признака Коши дает:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{3^n(x+2)^n}{n^n}\right|}=|x+2|\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0<1$$

при всех значениях x. Значит, ряд абсолютно сходится при всех $x\in\mathbb{R}$, т. е. $R_{\text{сх}}=+\infty$, $D_{\text{сх}}=\mathbb{R}$. •

По определению, для любого $x\in D_{\text{сх}}$ степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ сходится. Таким образом, возникает функция $S(x):D_{\text{сх}}\to\mathbb{R}$, в каждой точке равная сумме соответствующего числового ряда

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n,\quad x\in D_{\text{сх}}.$$

Отметим важное свойство суммы степенного ряда.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}=a_1+2a_2(x-x_0)+\dots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\dots\ ,$$

полученный из исходного почленным дифференцированием, и ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}=a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x-x_0)^2+\dots+\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+\dots\ ,$$

полученный из исходного почленным интегрированием. Приведем без доказательства следующий важный результат.

Теорема 5.11. *Для рядов* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ *радиусы сходимости совпадают. Сумма степенного ряда* $S(x)$ *дифференцируема и интегрируема в интервале сходимости* $|x-x_0| < R_{\text{сх}}$, *и справедливы равенства* $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ *и* $\int\limits_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$.

Теорему можно кратко сформулировать так: в интервале сходимости степенной ряд можно дифференцировать и интегрировать почленно. В частности, если $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ (т. е. $x_0 = 0$), то для всех $x \in (-R_{\text{сх}}, R_{\text{сх}})$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}, \tag{5.2}$$

$$\int\limits_{0}^{x} S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{5.3}$$

Важно отметить, что при $x = \pm R_{\text{сх}}$ теорема может быть не верна.

Пример 5.22. Найти суммы рядов $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

Решение. Найдем радиус сходимости первого ряда. Применяя признак Коши, получаем $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x^n|} = |x| < 1$, т. е. $R_{\text{сх}} = 1$.

Для произвольного $x \in (-1, 1)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с $b_1 = 1$ и $q = x$, поэтому по формуле (5.1)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}. \tag{5.4}$$

Дифференцируя это равенство при $x \in (-1, 1)$, по формуле (5.2) получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{5.5}$$

Интегрируя равенство (5.4) при $x \in (-1, 1)$, по формуле (5.3) получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \int\limits_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x). \qquad (5.6)$$

Отметим, что при $x = \pm 1$ ряды (5.4) и (5.5) расходятся, а ряд (5.6) расходится при $x = 1$ (гармонический ряд) и сходится при $x = -1$ (признак Лейбница). Подставляя в (5.6) $x = -1$ получаем $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2$ (см. пример 5.12). •

Пример 5.23. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n}$ и найти его сумму.

Решение. Обозначим $t = -x/2$, тогда по формуле (5.4)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n - 1 = \frac{1}{1-t} - 1 = -\frac{x}{x+2}.$$

Так как область сходимости ряда (5.4) $-x/2 = t \in (-1, 1)$, получаем $D_{\text{сх}} = (-2, 2)$. Заметим, что функция $-\frac{x}{x+2}$ определена при всех $x \neq -2$, однако формула

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} = -\frac{x}{x+2}$$

справедлива только при $x \in (-2, 2)$, т. е. только на области сходимости ряда. •

Пример 5.24. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\frac{(x+1)^{2n}}{3^n}$ и найти его сумму.

Решение. Обозначим $t = (x+1)^2/3$, тогда по формуле (5.5)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{(x+1)^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n = t\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \frac{t}{(1-t)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)^2/3}{\big(1-(x+1)^2/3\big)^2} = \frac{3(x+1)^2}{(x^2+2x-2)^2}.$$

Так как область сходимости ряда $(x+1)^2/3 = t \in (-1, 1)$, получаем $(x+1)^2 < 3$, т. е. $D_{\text{сх}} = (-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$. •

Упражнения. Найти область сходимости степенного ряда.

5.78. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n+1}$. **5.79.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$. **5.80.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n+1}}{9^n+n^2}$.

5.81. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^{n+1}(x+2)^n$. **5.82.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$. **5.83.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{n^2}(x-1)^n$. **5.84.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$.

5.85. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n\sqrt{n}}$. **5.86.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{a^n+b^n}$, $0<a<b$. **5.87.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}(x-2)^n$.

5.88. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$, $\quad (2n)!! = 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n$, $(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)$.

5.89. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$. **5.90.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n+(-1)^n}{n}(x-3)^n$. **5.91.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

Исследовать степенные ряды и найти их суммы.

5.92. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x-2)^{2n+1}}{4^n}$. **5.93.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\dfrac{(x-5)^{3n}}{3^{2n}}$. **5.94.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\dfrac{x^{3n}}{2^n}$.

5.95. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (n-3)\dfrac{x^n}{3^n}$. **5.96.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$. **5.97.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$.

5.5. Ряд Тейлора

В 5.4 было показано, что в области сходимости степенного ряда естественным образом возникает связанная с ним функция — сумма этого ряда. Представляет интерес и обратная задача: представить заданную функцию суммой степенного ряда.

Можно показать, что если некоторая функция $f(x)$ является суммой степенного ряда, то $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале сходимости этого ряда (не путайте с областью сходимости!, см. замечание 5.3). В противном случае представление в виде суммы степенного ряда невозможно.

Если все-таки $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, то $f(x_0) = a_0$,
$f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ и, значит, $f'(x_0) = a_1$. Продолжая дифференцирование (что возможно, так как $f(x)$ бесконечно дифференцируема) получим, что $f^{(k)}(x_0) = k!\,a_k$ при всех k. Значит, если $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, то $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{5.7}$$

Ряд (5.7) называется рядом Тейлора функции $f(x)$ с центром в точке x_0. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.12. *Если функция f и все ее производные ограничены в совокупности на некотором интервале $I = (x_0 - R, x_0 + R)$, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in I$ и для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$, то функция f представляется в каждой точке $x \in I$ сходящимся к ней рядом Тейлора, т. е. справедлива формула* (5.7).

Эта теорема позволяет получить ряды Тейлора для основных элементарных функций:

1. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$
2. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$
3. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$ $x \in \mathbb{R}.$
4. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots =$
   $= 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \quad |x| < 1, \ \alpha \in \mathbb{R}.$
5. $\ln(x+1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots,$ $x \in (-1, 1].$

Эти 5 основных результатов позволяют находить разложения в степенные ряды и многих других функций.

Пример 5.25. Разложить в степенной ряд с центром $x_0 = 0$ функцию $f(x) = \sin^3 x$; найти $(\sin^3 x)^{(21)}(0)$.

Решение. Используя элементарные тригонометрические формулы, получим

$$\sin^3 x = \sin x \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin x - \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)\right) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

Следовательно,

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1 - 3^{2n}}{4(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует, что $(\sin^3 x)^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \dfrac{3}{4}(1 - 3^{2n})$. Значит, $(\sin^3 x)^{(21)}(0) = \dfrac{3 - 3^{21}}{4}$. •

Пример 5.26. Найти разложение в степенной ряд с центром $x_0 = 0$ функции $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{1-2x}}$; указать область справедливости этого разложения.

Решение. Из основного разложения для функции $(1+t)^\alpha$ получим при $t = -2x$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x}} = (1+t)^{-1/2} =$$

$$= 1 - \frac{t}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{t^2}{2} + ... + \frac{(-1/2)(-3/2)...(-1/2-n+1)}{n!}t^n + ... =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{3t^2}{8} - \frac{15}{48}t^3 + ... + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2^n n!}t^n + ... =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}t^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n, \quad |-2x| < 1,$$

так как $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1) = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (2n-1)2n}{2 \cdot ... \cdot (2n)} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

Далее,

$$\frac{x+1}{\sqrt{1-2x}} = (x+1)\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n\right] =$$

$$= 1 + x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^{n+1} =$$

$$= 1 + x + x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}((n-1)!)^2}x^n =$$

$$= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} + \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}((n-1)!)^2}\right]x^n =$$

$$= 1 + 2x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(3n-1)(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!(n!)}x^n, \quad |x| < \frac{1}{2}. \bullet$$

Упражнения. Используя стандартные разложения и, возможно, дифференцирование и интегрирование степенных рядов, получить разложения с центром $x_0 = 0$ следующих функций и указать область их справедливости.

5.98. $f(x) = \dfrac{x}{1+x-2x^2}$. **5.99.** $f(x) = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

5.100. $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. **5.101.** $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

5.102. $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$. **5.103.** $f(x) = \cos^4 x$.

5.104. $f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3)$. **5.105.** $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

5.106. $f(x) = (1+x)e^{-x}$. **5.107.** $f(x) = e^x \cos x$. **5.108.** $f(x) = e^x \sin x$.

5.109. $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$. **5.110.** $f(x) = \arcsin x$.

5.111. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. **5.112.** $f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

5.113. $f(x) = \displaystyle\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. **5.114.** $f(x) = \displaystyle\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. **5.115.** $f(x) = \displaystyle\int\limits_0^x e^{-t^2} dt$.

Ответы к упражнениям разд. 5

5.1. 1. **5.2.** 2/3. **5.3.** 2. **5.4.** −1.25. **5.5.** Расходится.
5.6. Расходится. *Указание:* $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $S_n = \sqrt{n+1} - 1$.
5.7. Расходится. **5.8.** 1. *Указание:* $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
5.9. $\dfrac{1}{ad}$. *Указание:* $\dfrac{1}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$. **5.10.** Нет, см. пример 5.2.
5.11. Расходится. **5.12.** Расходится. **5.13.** Сходится. **5.14.** Расходится. **5.15.** Сходится. **5.16.** Сходится. **5.17.** Сходится. **5.18.** Сходится. **5.19.** Расходится. **5.20.** Сходится. **5.21.** Сходится. **5.22.** Сходится. **5.23.** Расходится. **5.24.** Расходится. **5.25.** Сходится. **5.26.** Сходится. **5.27.** Расходится. **5.28.** Сходится. **5.29.** Сходится. **5.30.** Сходится. **5.31.** Расходится. **5.32.** Сходится. **5.33.** Расходится. **5.34.** Сходится. **5.35.** Расходится. **5.36.** Расходится. **5.37.** Сходится. **5.38.** Расходится. **5.39.** При $\alpha < 1$ расходится при всех β; при $\alpha = 1$ расходится при $\beta \le 1$, сходится при $\beta > 1$; при $\alpha > 1$ сходится при всех β. **5.40.** Сходится абсолютно. **5.41.** Сходится абсолютно. **5.42.** Сходится. **5.43.** Сходится при всех $\alpha \in \mathbb{R}$. **5.44.** Сходится. **5.45.** Расходится. **5.46.** Сходится. **5.47.** Сходится. **5.48.** Сходится абсолютно. **5.49.** Сходится. **5.50.** Сходится. **5.51.** Сходится. **5.52.** Сходится. **5.53.** Сходится. **5.54.** Сходится. **5.55.** Сходится. **5.56.** Сходится. **5.57.** Расходится. **5.58.** Сходится. **5.59.** Сходится. **5.60.** Сходится условно. **5.61.** Сходится условно.

5.62. Расходится. **5.63.** Сходится абсолютно. **5.64.** Расходится. **5.65.** Сходится условно. **5.66.** Сходится абсолютно. **5.67.** Сходится условно. **5.68.** Сходится условно. **5.69.** Сходится абсолютно. **5.70.** Сходится условно. **5.71.** Сходится условно. **5.72.** $S \approx S_4 = 0.092$. **5.73.** $S \approx S_4 = 0.0192$. **5.74.** $S \approx S_5 = 0.046278$. **5.75.** Сходится абсолютно. **5.76.** Сходится условно. **5.77.** Расходится. **5.78.** Сходится абсолютно при $x \in (-1, 3)$, расходится при $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. **5.79.** Сходится абсолютно при $x \in [-1, 3]$, расходится при $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. **5.80.** Сходится абсолютно при $x \in (-4, 2)$, расходится при $x \in (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$. **5.81.** Сходится абсолютно при $x \in \left(-\dfrac{7}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$, расходится при $x \in \left(-\infty, -\dfrac{7}{3}\right] \cup \left[-\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$. **5.82.** Сходится абсолютно при $x \in (-1, 1)$, расходится при $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. **5.83.** Сходится только в точке $x = 1$. **5.84.** Сходится абсолютно при $x \in (-1, 1)$, расходится при $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. **5.85.** Сходится абсолютно при $x \in [-1, 1]$, расходится при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. **5.86.** Сходится абсолютно при $x \in (-b, b)$, расходится при $x \in (-\infty, -b] \cup [b, +\infty)$. **5.87.** Сходится абсолютно при $x \in [1, 3]$, расходится при $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. **5.88.** Сходится абсолютно при $x \in [-1, 1]$, расходится при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. **5.89.** Сходится абсолютно при $x \in (-1, 1)$, расходится при $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. **5.90.** Сходится абсолютно при $x \in \left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$, сходится условно при $x = \dfrac{8}{3}$, расходится при $x \in \left(-\infty, \dfrac{8}{3}\right) \cup \left[\dfrac{10}{3}, +\infty\right)$. **5.91.** Сходится абсолютно при $x \in (-4, 4)$, расходится при $x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$. **5.92.** $S(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x(4-x)}$, $D_{\text{сх}} = (0, 4)$. **5.93.** $S(x) = -\dfrac{(x-5)^3}{(x-5)^3 + 9}$, $D_{\text{сх}} = (5 - \sqrt[3]{9}, 5 + \sqrt[3]{9})$. **5.94.** $S(x) = \dfrac{4}{(2 - x^3)^2}$, $D_{\text{сх}} = (-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$. **5.95.** $S(x) = \dfrac{3x(x-2)}{(x-3)^2}$, $D_{\text{сх}} = (-3, 3)$.

5.96. $S(x) = \dfrac{x^2 + x}{(1-x)^3}$, $D_{\text{сх}} = (-1, 1)$.

Указание. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$.

5.97. $S(x) = \dfrac{(1-x)\ln(1-x)}{x} + 1$ при $x \in [-1, 0) \cup (0, 1)$; $S(0) = 0$; $S(1) = 1$, $D_{\text{сх}} = [-1, 1]$. *Указание:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

5.98. $\dfrac{x}{1+x-2x^2} = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}[1+(-1)^{n+1}2^n]x^n \ |x| < \dfrac{1}{2}$.

5.99. $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}$. **5.100.** $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}$.

5.101. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x| < 1$.

5.102. $\dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin\dfrac{2\pi(n+1)}{3}x^n = 1 - x + x^3 - x^4 + \ldots,\ |x| < 1$.

5.103. $\cos^4 x = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n 2^{2n-1}(1+2^{2n-2})\dfrac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}$.

5.104. $\ln(1+x+x^2+x^3) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{4n}}{n},\ |x| < 1$.

Указание. $1+x+x^2+x^3 = \dfrac{1-x^4}{1-x}$. **5.105.** $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x| < 1$.

5.106. $(1+x)e^{-x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n-1)\dfrac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$.

5.107. $e^x \cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{n/2}\cos\dfrac{\pi n}{4}\dfrac{x^n}{n!} = 1 + x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{x^5}{30} + \dfrac{8}{7!}x^7 + \ldots,\ x \in \mathbb{R}$.

5.108. $e^x \sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{n/2}\sin\dfrac{\pi n}{4}\dfrac{x^n}{n!} = x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{4}{5!}x^5 - \dfrac{8}{6!}x^6 - \dfrac{8}{7!}x^7 + \ldots,$ $x \in \mathbb{R}$. **5.109.** $(1+x^2)\operatorname{arctg} x = x + 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{4n^2-1}x^{2n+1},\ |x| < 1$.

5.110. $\arcsin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x| < 1$.

5.111. $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}\dfrac{1}{2n-1}x^{2n},\ |x| < 1$.

5.112. $(1-x)^2\operatorname{ch}\sqrt{x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{16n^4 - 48n^3 + 36n^2 - 8n + 1}{(2n)!}x^n,\ x \in \mathbb{R}_+$.

5.113. $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \ x \in \mathbb{R}.$

5.114. $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(4n+1)} x^{4n+1}, \ |x| < 1.$

5.115. $\int\limits_0^x e^{-t^2} dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \ x \in \mathbb{R}.$

6. ФУНКЦИИ МНОГИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

6.1. Понятие функции многих вещественных переменных. Область определения функции. Линии и поверхности уровня

Рассмотрим функции двух типов. Областью определения этих функций будет либо пространство $\mathbb{R}^n$, либо множество $D \subset \mathbb{R}^n$. Напомним, что пространство $\mathbb{R}^n$ — это n-мерное линейное векторное пространство, элементами которого являются матрицы-столбцы $\vec{x} = [x_1, \ \ldots, \ x_n]^\top$. Для практических целей целесообразно рассматривать ситуации $n = 2$ или $n = 3$. Элементы пространства $\mathbb{R}^n$, $\vec{x} = [x_1, \ \ldots, \ x_n]^\top$ удобно называть точками $x\left(x_1, \ \ldots, \ x_n\right)$.

Определение 6.1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$. Правило f, по которому каждому упорядоченному набору $(x, y) \in D$ ставится в соответствие единственное действительное число u, называется функцией двух действительных переменных с областью определения D и множеством значений из $\mathbb{R}$. Записывается так: $u = f(x, y)$.*

Определение 6.2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$. Правило f, по которому каждому упорядоченному набору $(x, y, z) \in D$ ставится в соответствие единственное действительное число u, называется функцией трех действительных переменных с областью определения D и множеством значений из R. Записывается так: $u = f(x, y, z)$.*

Определение 6.3. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$. Правило f, по которому каждой точке $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ ставится в соответствие единственное вещественное число $u \in \mathbb{R}$, называется функцией n вещественных переменных с областью определения D и множеством значений в $\mathbb{R}$. При этом используется обозначение $f : D \to \mathbb{R}$, а $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется значением функции f в точке $(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Будем использовать термин «функция класса $\vec{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$», включая обе возможности: областью определения является все пространство $\mathbb{R}^n$ или некоторое его подмножество D.

Определение 6.4. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$. Правило, по которому каждой точке (x, y, z) ставится в соответствие вектор $\vec{f} = [f_1, \ \dots, \ f_m] \in R^m$, будем называть функцией $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Здесь функции $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Итак, для задания вектор-функции $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ достаточно задать упорядоченный набор из m функций $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

Определение 6.5. *Графиком функции двух переменных $f : D \to \mathbb{R}$ называется такое подмножество $\Gamma(f)$ пространства $\mathbb{R}^3$, что*
$$\Gamma(f) = \Big\{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, u = f(x, y)\Big\}.$$

Определение 6.6. *Графиком функции трех переменных $f : D \to \mathbb{R}$ называется такое подмножество $\Gamma(f)$ пространства $\mathbb{R}^4$, что*
$$\Gamma(f) = \Big\{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y, z) \in D, u = f(x, y, z)\Big\}.$$

Определение 6.7. *Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек на плоскости XOY, в которых функция сохраняет постоянное значение, т. е. $z = c$, где $c =$* const (рис. 6.1).

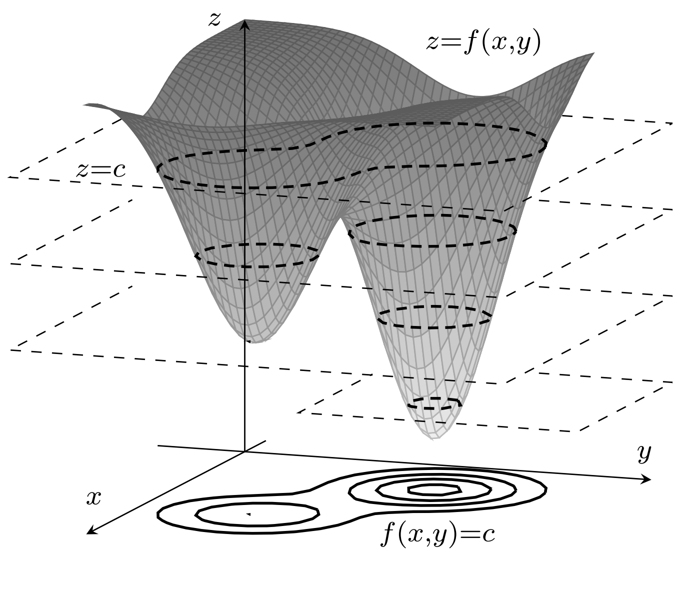

Рис. 6.1

Определение 6.8. *Поверхностью уровня функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ называется множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, в которых функция сохраняет постоянное значение, т.е. $u = c$, где $c = \text{const}$.*

Пример 6.1. Найти область определения функции $z = \arcsin(2x - y)$.

Решение. Аргумент арксинуса должен принадлежать отрезку $[-1; 1]$. Отсюда $-1 \le 2x - y \le 1$, т. е. $2x - 1 \le y \le 2x + 1$. Следовательно, область определения — полоса плоскости, заключенная между прямыми $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 1$.●

Пример 6.2. Найти область определения и построить график функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение. Областью определения D данной функции является множество точек (x, y) плоскости XOY, таких, что их координаты удовлетворяют неравенству $4 - x^2 - y^2 \ge 0$. Это точки круга с центром в начале координат, радиус которого равен 2.

Графиком данной функции является множество точек пространства $\mathbb{R}^3$: $\Gamma(z) = \Big\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \ge 0\Big\}$ — верхняя полусфера радиуса 2 с центром в начале координат.●

Пример 6.3. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$.

Решение. Областью определения данной функции служит множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Выделим в выражении для заданной функции полный квадрат: $z = (x - 2)^2 + (y + 3)^2$. Линии уровня имеют уравнения: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = c$. На плоскости XOY линии уровня представляют собой концентрические окружности с центром в точке $(2, -3)$ и радиуса $\sqrt{c}$, $c \ge 0$.

При $c = 0$ линия уровня представляет собой точку $(2, -3)$.

Заметим, что графиком данной функции в пространстве $\mathbb{R}^3$ является множество точек кругового параболоида с вершиной $(2, -3, 0)$, для которого линии уровня — проекции на плоскость XOY линий его пересечения с плоскостями $z = c$. ●

Пример 6.4. Построить линии уровня функции $z = xy$.

Решение. Областью определения данной функции является множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Линии уровня имеют уравнения $xy = c$.

При $c > 0$ линии уровня представляют собой гиперболы, ветви которых расположены в первой и третьей координатных плоскостях. При $c < 0$ линии уровня представляют собой гиперболы, ветви которых расположены во второй и четвертой координатных плоскостях. При $c = 0$ линия уровня — две пересекающиеся прямые (координатные оси). ●

Пример 6.5. Найти поверхности уровня функции $u = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{36}$.

Решение. Поверхностями уровня будут поверхности $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{36} = c$, т. е. эллипсоиды с полуосями $3\sqrt{c}$, $2\sqrt{c}$, $6\sqrt{c}$, $c \geq 0$. •

Упражнения. Найти и изобразить на плоскости область определения следующих функций, построить линии уровня.

6.1. $z = 4x - 5y$. **6.2.** $z = \dfrac{4x-1}{y+2}$. **6.3.** $z = e^x y$. **6.4.** $z = \dfrac{\ln(x+1)}{y}$.
6.5. $z = \dfrac{y}{x^2+1}$. **6.6.** $z = e^{(x^2+y^2)/2x}$. **6.7.** $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$.

Найти и изобразить в пространстве поверхности уровня функции трех переменных.

6.8. $u = x + 2y + 3z$. **6.9.** $u = e^{2x-3y+4z}$. **6.10.** $u = 2x^2 + y^2 + z - 2$.
6.11. $u = \dfrac{2z}{x^2+y^2+1}$. **6.12.** $u = \dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}$.
6.13. $u = \ln(x^2+1) - \ln(y^2+z^2+1)$.

6.2. Предел функции нескольких переменных

Для определения понятия предела необходимо понятие окрестности как в области определения функции, так и во множестве ее значений.

Определение 6.9. *Окрестностью $K_\delta(x^0, y^0)$ радиуса $\delta > 0$ точки $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$ называется множество точек (x, y), для которых справедливо неравенство $\sqrt{(x-x^0)^2 + (y-y^0)^2} < \delta$.*

Множество $\overset{\circ}{K}_\delta(x^0, y^0) = K_\delta(x^0, y^0) \backslash \{(x^0, y^0)\}$ называется проколотой окрестностью радиуса $\delta > 0$ точки (x^0, y^0).

Определение 6.10. *Точка $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$ называется предельной точкой множества $D \subset \mathbb{R}^2$, если в любой проколотой окрестности (x^0, y^0) найдется точка, принадлежащая D.*

Определение 6.11. *Пусть задана функция $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и точка (x^0, y^0) — предельная точка D. Число A называется пределом функции $u = f(x, y)$ в точке (x^0, y^0), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $(x, y) \in \overset{\circ}{K}_\delta(x^0, y^0) \cap D$ выполнено неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Обозначается так:*

$$\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)} f(x, y) = A.$$

Остаются справедливыми многие теоремы о пределах из одномерного анализа, например: о единственности предела, о пределах суммы, произведения, композиции (если эти операции определены) двух функций. Однако сами по себе указанные теоремы не дают способа вычисления предела. Исчерпывающего алгоритма вычисления пределов не существует. На практике приходится выбирать способ, подходящий для конкретного задания. Это может быть использование замечательных пределов, формулы Тейлора или теоремы Лопиталя.

Один из возможных подходов к изучению пределов связан с рассмотрением сужений функций на лучи с началом в точке (x^0, y^0). Ограничимся случаем функции на $\mathbb{R}^2$. При этом прямая, проходящая через фиксированную точку $a_0 = (x^0, y^0)$, может быть задана следующим параметрическим уравнением в векторной форме: $\vec{a} = \vec{a}_0 + t\vec{e}$, $t \in \mathbb{R}$, где $\vec{e}$ — направляющий вектор прямой. Луч описывается этим же уравнением, но только при $t \in [0; +\infty)$. Сужением функции f на луч является функция $h_{\vec{e}}(t) = f(\vec{a}_0 + t\vec{e})$, $t \geq 0$. Возникает вопрос: как этот предел связан с $\lim\limits_{\vec{a}\to\vec{a}_0} f(\vec{a})$?

Теорема 6.1. *Если существует* $\lim\limits_{\vec{a}\to\vec{a}_0} f(\vec{a}) = A$*, то для любого направления* $\vec{e}$

$$\lim_{t\to+0} h_{\vec{e}}(t) = A.$$

Эта теорема определяет необходимое условие существования предела и, значит, достаточное условие несуществования. Невыполнения условия одинаковости предела по любому направлению достаточно, чтобы утверждать несуществование

$$\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)} f(x, y).$$

Отметим, что выполнения условия одинаковости предела функции $f(x, y)$ для любого направления еще не достаточно, чтобы утверждать, что существует

$$\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)} f(x, y),$$

поскольку одно и то же значение предела должно получаться при любом способе приближения точки (x, y) к точке (x^0, y^0). Ниже приведем соответствующий пример.

Пример 6.6. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

Решение. При непосредственной подстановке получаем неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$. Сделаем замену $xy = s$. В результате предел функции двух переменых заменяется пределом функции одной переменной $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\sin s}{s} = 1$. •

Пример 6.7. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Решение. При непосредственной подстановке получаем неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$. Проверим, чему будет равен предел, если приближаться к точке $(0;0)$ по прямым вида $y = kx$. Сделав замену $y = kx$ получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x(kx)}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{2k}{(1+k^2)}.$$

Результат зависит от коэффициента k, т. е. по разным направлениием получаем разное предельное значение. Следовательно, исходный предел не существует. •

Пример 6.8. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Решение. При непосредственной подстановке получаем неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$. Если приближаться к точке $(0,0)$ по прямым $y = kx$, то получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx}{k^2+x^2} = 0,$$

т. е. по всем направлениям предел одинаковый. Однако если приближаться к точке $(0,0)$ по параболе $y = x^2$, то получим

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, исходного предела не существует. •

Упражнения. Вычислить пределы или доказать, что они не существуют.

6.14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1+xy)}{\operatorname{tg}(xy)}$. **6.15.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$. **6.16.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{5x}{x+y^3}$.

6.17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$. **6.18.** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{\sin(\pi x)}{\sin(\pi y)}$. **6.19.** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -1}} \dfrac{x+2y}{x^2+xy-2y^2}$.

6.3. Дифференцируемость, частные производные. Матрица Якоби. Матрица Гессе

Пусть имеется функция $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и (x^0, y^0) — предельная точка множества D.

Определение 6.12. *Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке (x^0, y^0), если существует матрица-строка $A = [A_1, A_2]$, такая, что справедливо равенство*

$$f(x,y) = f(x^0,y^0) + A_1(x-x^0) + A_2(y-y^0) + o\left(\sqrt{(x-x^0)^2+(y-y^0)^2}\right). \tag{6.1}$$

Используя умножение матриц, равенство (6.1) можно переписать в виде

$$f(x,y) = f(x^0,y^0) + A\begin{bmatrix} x-x^0 \\ y-y^0 \end{bmatrix} + o\left(\sqrt{(x-x^0)^2+(y-y^0)^2}\right).$$

Определение 6.13. *Если у функции одной переменной $f_1(x) = f(x, y^0)$ существует производная $f_1'(x^0)$, то она называется частной производной функции f по переменной x в точке (x^0, y^0) и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0)$, т. е. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0) = \lim\limits_{x\to x^0} \dfrac{f(x,y^0)-f(x^0,y^0)}{x-x^0}$.*

Аналогично определяется частная производная функции f по переменной y. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.2. *Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x^0, y^0), то она имеет в этой точке частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)$. При этом в (6.1) $A_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0)$, $A_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)$.*

Для функции $f : R^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ через f' обозначают строку Якоби $f' = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right]$. Отметим, что существование частных производных в точке (x^0, y^0) является необходимым, но не достаточным условием для дифференцируемости функции $f(x,y)$. Используя введенное понятие строки

Якоби, равенство (6.1) можно переписать в виде

$$f(x,y) = f(x^0,y^0) + f'(x^0,y^0)\begin{bmatrix} x-x^0 \\ y-y^0 \end{bmatrix} + o\left(\sqrt{(x-x^0)^2+(y-y^0)^2}\right).$$

Последнее равенство называется формулой Тейлора первого порядка для функции двух переменных.

Пусть $\vec{f}(\vec{x})$ — функция из класса $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ и $\vec{a}_0$ — предельная точка ее области определения.

Определение 6.14. *Вектор-функция $\vec{f}(\vec{a})$ дифференцируема в точке $\vec{a}_0 = [x^0, y^0]^\top$, если существует матрица A размера $m \times 2$, такая, что справедливо равенство*

$$\vec{f}(\vec{a}) = \vec{f}(\vec{a}_0) + A(\vec{a}-\vec{a}_0) + \vec{o}\left(\sqrt{(x-x^0)^2+(y-y^0)^2}\right),$$

где $\vec{a} = [x,y]^\top$, $\vec{o}\left(\sqrt{(x-x^0)^2+(y-y^0)^2}\right)$ — вектор-функция, составленная из m скалярных бесконечно малых функций.

Это определение естественным образом можно обобщить для функций произвольного числа переменных.

Пусть $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a}_0 = [x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0]^\top$ — предельная точка D и существуют частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a}_0)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Определение 6.15. *Матрица размера $m \times n$ вида*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{a}_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}_0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{a}_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}_0) \end{bmatrix}$$

называется матрицей Якоби вектор-функции $\vec{f}$ и обозначается $\vec{f}\,'(\vec{a}_0)$.

Как и в случае функции двух переменных, существование всех частных производных в точке $\vec{a}_0$ еще не обеспечивает дифференцируемость вектор-функции. Следующая теорема дает достаточное условие дифференцируемости.

Теорема 6.3. *Пусть $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a}_0$ — внутренняя точка множества D. Если у функции $\vec{f}(\vec{a})$ существуют все частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ в некоторой окрестности точки $\vec{a}_0$*

и все они непрерывны в точке $\vec{a}_0$*, то функция* $\vec{f}(\vec{a})$ *дифференцируема в точке* $\vec{a}_0$*. В этом случае справедлива формула, аналогичная* (6.1)*:*

$$\begin{aligned}\vec{f}(\vec{a}) =&\vec{f}(\vec{a}_0) + \vec{f}\,'(\vec{a}_0)(\vec{a}-\vec{a}_0)+\\ &+\vec{o}\left(\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+...+(x_n-x_n^0)^2}\right).\end{aligned} \tag{6.2}$$

Равенство (6.2) носит название формулы Тейлора первого порядка для функции $\vec{f}$ в точке $\vec{a}_0$. Нетрудно видеть, что (6.1) есть частный случай (6.2) при $n=2$, $m=1$.

Пример 6.9. Найти частные производные функции $f(x,y) = x^3y+x^2y^2+y^3$ в точке $(x_0,y_0) = (2,1)$. Написать формулу Тейлора в этой точке.

Решение.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\left(x^3y+x^2y^2+y^3\right)}{dx} = 3x^2y+2xy^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 3\cdot 2^2\cdot 1+2\cdot 2\cdot 1^2 = 16.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\left(x^3y+x^2y^2+y^3\right)}{dy} = x^3+2x^2y+3y^2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 19.$$

Функции $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ существуют и непрерывны в окрестности точки $(2,1)$, поэтому функция f дифференцируема в этой точке. Поскольку $f(2,1) = 13$, то по формуле (6.1) получаем

$$f(x,y) = 13+16(x-2)+19(y-1)+o\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\right).$$

Следовательно, при значениях x, близких к 2, и значениях y, близких к 1, справедлива приближенная формула $f(x,y)\approx 13+16(x-2)+19(y-1)$. •

Пример 6.10. Найти матрицу Якоби вектор-функции $\vec{f}(x,y,z) = \begin{bmatrix}2xy-z^2\\ x^2y/z\end{bmatrix}$ в точке $a_0 = (2,-3,1)$. Написать формулу Тейлора.

Решение. Вычислим матрицу Якоби

$$\vec{f}\,'(x,y,z) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}(2xy-z^2) & \dfrac{\partial}{\partial y}(2xy-z^2) & \dfrac{\partial}{\partial z}(2xy-z^2)\\ \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2y/z) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2y/z) & \dfrac{\partial}{\partial z}(x^2y/z)\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}2y & 2x & -2z\\ 2xy/z & x^2/z & -x^2y/z^2\end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\vec{f}(2,-3,1) = \begin{bmatrix} -13 \\ -12 \end{bmatrix}, \qquad \vec{f}\,'(2,-3,1) = \begin{bmatrix} -6 & 4 & -2 \\ -12 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

и по формуле (6.2) получим

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{bmatrix} -12 \\ 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 4 & -2 \\ -12 & 4 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-2 \\ y+3 \\ z-1 \end{bmatrix} + \\ + \vec{o}\left(\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2}\right). \bullet$$

Определение 6.16. *Рассмотрим вещественную скалярную функцию двух вещественных переменных $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Пусть также в окрестности $K_\delta(\vec{a}_0)$ точки $\vec{a}_0 = [x^0, y^0]^\top$ существует частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g(x,y)$. Если существуют частные производные $\dfrac{\partial g}{\partial x}(\vec{a}_0)$ и $\dfrac{\partial g}{\partial y}(\vec{a}_0)$, то говорят, что функция f имеет в точке $\vec{a}_0$ частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}_0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}_0)$.*

Пусть в окрестности точки $\vec{a}_0$ существует частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = h(x,y)$. Если существуют частные производные $\dfrac{\partial h}{\partial x}(\vec{a}_0)$ и $\dfrac{\partial h}{\partial y}(\vec{a}_0)$, то говорят, что функция f имеет в точке $\vec{a}_0$ частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a}_0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a}_0)$.

Для функций $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ частные производные второго порядка определяются аналогично.

Определение 6.17. *Если функция $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ имеет в точке $\vec{a}_0$ все частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}_0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a}_0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}_0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a}_0)$, то квадратная матрица*

$$H(\vec{a}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a}_0) \end{bmatrix}$$

называется матрицей Гессе функции f в точке $\vec{a}_0$.

Теорема 6.4. *Пусть у функции* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *в окрестности* $K_\delta(\vec{a}_0)$ *существуют частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *и производные* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *непрерывны в точке* $\vec{a}_0$. *Тогда*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a}_0).$$

В силу этой теоремы матрица Гессе симметрична.

Определение 6.18. *Пусть у функции* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *в точке* $\vec{a}_0$ *существуют частные производные второго порядка. Квадратная матрица*

$$H(\vec{a}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\vec{a}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a}_0) & \dfrac{\partial f^2}{\partial y \partial z}(\vec{a}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(\vec{a}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(\vec{a}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\vec{a}_0) \end{bmatrix}$$

называется матрицей Гессе функции f *в точке* $\vec{a}_0$.

Пример 6.11. Пусть $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + y^3$. Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(x^3y + x^2y^2 + y^3)}{\partial x} = \frac{\partial(3x^2y + 2xy^2)}{\partial x} = 6xy + 2y^2, \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(x^3y + x^2y^2 + y^3)}{\partial y} = \frac{\partial(x^3 + 2x^2y + 3y^2)}{\partial x} = \\
&= 3x^2 + 4xy = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}, \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial(x^3y + x^2y^2 + y^3)}{\partial y} = \frac{\partial(x^3 + 2x^2y + 3y^2)}{\partial y} = 2x^2 + 6y.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy + 2y^2 & 3x^2 + 4xy \\ 3x^2 + 4xy & 2x^2 + 6y \end{bmatrix}. \bullet$$

Пример 6.12. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2}) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \equiv 0,$$

т. е. данная функция удовлетворяет уравнению. ●

Упражнения. Найти частные производные по всем независимым переменным.

6.20. $u = 2x^3y - 4xy^5z^4 + e^{2z}$. **6.21.** $z = x^2y\sin(x) - 3y^2$.
6.22. $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$. **6.23.** $z = \arcsin(x + y)$.
6.24. $z = e^{2x}(x^2 + y^2 + 2y)$. **6.25.** $u = \ln(x + xy - y^2) - z^2y$.
6.26. $z = \ln(\cos(x/y))$. **6.27.** $z = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$. **6.28.** $z = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$.

Найти матрицу Якоби вектор-функции.

6.29. $\vec{f}(x,y) = \begin{bmatrix} x^2\cos y \\ y\sin x \end{bmatrix}$. **6.30.** $\vec{f}(x,y) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+2y} \\ y/x^2 \\ (2x-y)^2 \end{bmatrix}$.

6.31. $\vec{f}(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2yz^3 \\ (x^2+y)/z \end{bmatrix}$. **6.32.** $\vec{f}(x,y,z) = \begin{bmatrix} x\ln(yz+1) \\ ye^x \\ xze^{2y} \end{bmatrix}$.

Написать формулу Тейлора первого порядка для функции в заданной точке.

6.33. $f(x,y) = (x^2+1)\cos 2y, \quad (x^0,y^0) = (-1,\pi)$.
6.34. $f(x,y) = \ln(xy-2) + \sqrt{2x-y-1}, \quad (x^0,y^0) = (3,1)$.
6.35. $f(x,y,z) = \dfrac{x^2-3y}{z^3-1}, \quad (x^0,y^0,z^0) = (2,1,-1)$.
6.36. $f(x,y,z) = (x+2y)^z, \quad (x^0,y^0,z^0) = (-1,1,2)$.

Найти матрицу Гессе функции.

6.37. $f(x,y) = x^2y - 4xy$. **6.38.** $f(x,y) = (x^2-y)\ln(y^2+1)$.
6.39. $f(x,y,z) = 2x^3z - xy^2z$. **6.40.** $f(x,y,z) = \dfrac{x+2y}{z}$.

Найти строку Якоби и матрицу Гессе функций.

6.41. $f(x,y) = 3xy^2 + 4xy^3 + 7$. **6.42.** $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$. **6.43.** $f(x,y) = x^y$.

Проверить, удовлетворяет ли функция $u(x,y)$ уравнению.

6.44. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = e^x(x\cos(y) - y\sin(y))$.

6.45. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

6.46. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u = \dfrac{y}{x}$.

6.47. $(x-y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - ux = 0, \quad u = \cos(y) + (y-x)\sin(y)$.

6.48. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u = xe^{-y/x}$.

6.49. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad u = \operatorname{arctg}(2x-y)$.

6.4. Градиент. Производная по направлению

Пусть задана функция двух вещественных переменных $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Градиентом функции f в точке $\vec{a}_0 = [x^0, y^0]^\top$ называется вектор

$$f'(\vec{a}_0)^\top = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}_0) \end{bmatrix} = \operatorname{grad}\, f(\vec{a}_0) = \nabla f(\vec{a}_0).$$

Как уже отмечалось, у функции f может существовать $\nabla f(\vec{a}_0)$, но в точке $\vec{a}_0$ она может быть не дифференцируема.

Если задана функция трех вещественных переменных $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, то, аналогично, градиентом f в точке $\vec{a}_0 = [x^0, y^0, z^0]$ называется вектор

$$f'(\vec{a}_0)^\top = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}_0) \end{bmatrix} = \operatorname{grad}\, f(\vec{a}_0) = \nabla f(\vec{a}_0).$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ поверхность уровня некоторой функции трех переменных $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, т. е. рассмотрим поверхность, задаваемую уравнением $f(x,y,z) = c$, $c = \text{const}$. Зафиксируем на этой поверхности точку $a_0 = (x^0, y^0, z^0)$ и рассмотрим множество кривых, проходящих через данную точку и лежащих на данной поверхности.

Определение 6.19. *Касательной плоскостью к поверхности в данной точке называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку* (*рис.* 6.2).

Определение 6.20. *Нормалью к поверхности в точке называют прямую, проходящую через данную точку поверхности перпендикулярно касательной плоскости в этой точке* (*рис.* 6.2).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.5. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a_0 = (x^0, y^0, z^0)$ и $\nabla f(a_0) \neq \vec{0}$, $\;f(x^0, y^0, z^0) = c$. Тогда вектор $\nabla f(a_0)$ является нормалью касательной плоскости к поверхности $f(x, y, z) = c$ в точке (x^0, y^0, z^0).*

Из этой теоремы следует, что точка $a = (x, y, z)$ лежит в касательной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\big\langle \nabla f(a_0), \vec{a} - \vec{a}_0 \big\rangle = 0,$$

т. е. уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a}_0)\big(x - x^0\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}_0)\big(y - y^0\big) + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{a}_0)\big(z - z^0\big) = 0, \tag{6.3}$$

а уравнение нормали к поверхности имеет вид

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \nabla f(\vec{a}_0) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6.4}$$

Если хотя бы одна из частных производных в точке $\vec{a}_0$ не существует, то в этой точке не существует касательной плоскости. Если же $\nabla f(\vec{a}_0) = \vec{0}$, то касательная плоскость в точке $\vec{a}_0$ может существовать, но для ее нахождения требуется дополнительное исследование.

Рассмотрим еще одно понятие, связанное с функцией нескольких переменных.

Определение 6.21. *Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Если существует*

$$\lim_{t \to 0+0} \frac{f(\vec{a}_0 + t\vec{e}) - f(\vec{a}_0)}{t},$$

где $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$ — фиксированный единичный вектор, то он называется производной функции f по направлению $\vec{e}$ в точке $\vec{a}_0$ и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{a}_0)$ (рис. 6.3).

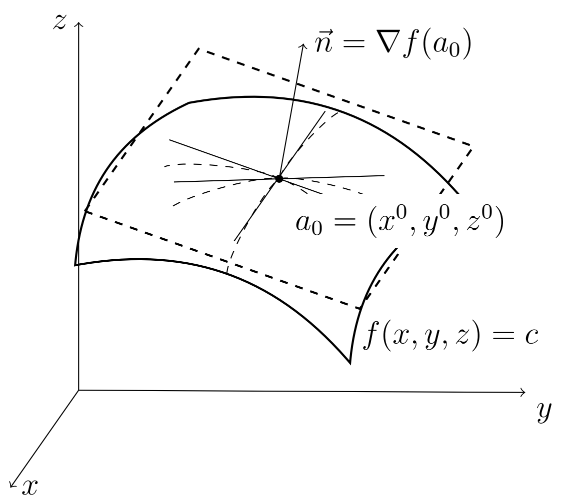

Рис. 6.2

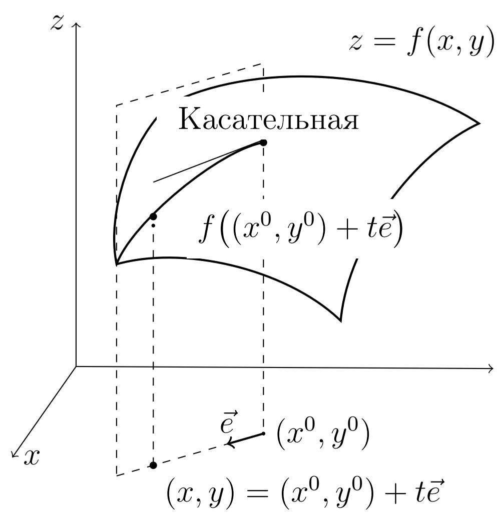

Рис. 6.3

Аналогично определяется производная по направлению функции трех и более переменных.

Из рис. 6.3 видно, что производная по направлению есть производная кривой, которая получается в сечении поверхности графика функции $z = f(x, y)$ вертикальной полуплоскостью, направленной вдоль вектора $\vec{e}$. Очевидно, что значение этой производной зависит от выбора направления, поскольку в разных направлениях получаются разные кривые. Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в направлении вектора $\vec{e}$.

Если функция f (двух или трех переменных) дифференцируема в точке $\vec{a}_0$, то для вычисления производной по направлению есть простой способ.

Теорема 6.6. *Пусть функция f дифференцируема в точке $\vec{a}_0$. Тогда в точке $\vec{a}_0$ существует производная функции f по любому направлению $\vec{e}$ и справедлива формула*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{a}_0) = \big\langle \nabla f(\vec{a}_0), \vec{e}\,\big\rangle. \tag{6.5}$$

Из (6.5) следует, что среди всех направлений $\vec{e}$ максимальное значение производной $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{a}_0)$ достигается, если вектор $\vec{e}$ сонаправлен с вектором $\nabla f(\vec{a}_0)$, т. е. $\vec{e} = \dfrac{\nabla f(\vec{a}_0)}{\|\nabla f(\vec{a}_0)\|}$. Аналогично, минимальное возможное значение производной достигается вдоль направления $\vec{e} = -\dfrac{\nabla f(\vec{a}_0)}{\|\nabla f(\vec{a}_0)\|}$.

Пример 6.13. Найти уравнение касательной и нормали к поверхности $6xy - 2x^2 - xy^2 - z^2 + 3 = 0$ в точке $a_0 = (1, 2, 3)$.

Решение. Поскольку точка a_0 лежит на данной поверхности (проверьте!), можно воспользоваться формулами (6.3) и (6.4). Находим

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6y-2x-y^2 \\ 6x-2xy \\ -2z \end{bmatrix}, \quad \nabla f(1,2,3) = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение касательной плоскости

$$6(x-1)+2(y-2)-6(z-3)=0,$$

а уравнение нормали к поверхности

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} t, \quad \text{т. е.} \begin{cases} x = 1+6t, \\ y = 2+2t, \\ z = 3-6t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \bullet$$

Пример 6.14. Найти уравнение касательной и нормали к графику функции $z = \sqrt{x^2-y^2}$ в точке $(5,-3)$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{x^2-y^2}-z=0$. Можно считать график функции поверхностью уровня 0 функции трех переменных $f(x,y,z) = \sqrt{x^2-y^2}-z$, поэтому соответствующая точка поверхности имеет координаты $x^0=5$, $y^0=-3$, $z^0=\sqrt{5^2-(-3)^2}=4$, т. е. $a_0=(5,-3,4)$. Тогда

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x/\sqrt{x^2-y^2} \\ -y/\sqrt{x^2-y^2} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla f(5,-3,4) = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.75 \\ -1 \end{bmatrix},$$

уравнение касательной плоскости имеет вид

$$1.25(x-5)+0.75(y+3)-(z-4)=0,$$

а уравнение нормали к поверхности

$$\begin{cases} x = 5+1.25t, \\ y = -3+0.75t, \\ z = 4-t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \bullet$$

Пример 6.15. Найти производную функции $z = x^2+y^2-xy+x+3y$ в точке $A(-3,-1)$ в направлении, идущем от точки A к точке $B(4,5)$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=[7,6]^\top$. Нормируем получившийся вектор: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2+6^2}=\sqrt{85}$, поэтому берем направление $\vec{e} = \left[\frac{7}{\sqrt{85}}, \frac{6}{\sqrt{85}}\right]^\top$.

Найдем градиент заданной функции в точке $A(-3;-1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = -4; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = 4. \qquad \nabla z(A) = [-4, 4]^\top.$$

Тогда по формуле (6.5) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{e}}(A) = \langle \nabla z(A), \vec{e} \rangle = -4\frac{7}{\sqrt{85}} + 4\frac{6}{\sqrt{85}} = -\frac{4}{\sqrt{85}}.$$

Ответ: $\frac{\partial z}{\partial \vec{e}}(A) = -\frac{4}{\sqrt{85}}$. •

Пример 6.16. Найти производную функции $z = 3\sin(3x + 4y) - \cos(x - y)$ в точке $A(\pi/2, \pi)$ в направлении, составляющем угол $\phi = \pi/4$ с градиентом функции z в этой точке.

Решение. Найдем градиент заданной функции в точке A:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 9\cos(3x + 4y) + \sin(x - y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 12\cos(3x + 4y) - \sin(x - y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = -1, \ \frac{\partial z}{\partial y}(A) = 1; \qquad \nabla z(A) = [-1, 1]^\top.$$

Найдем модуль градиента в точке A: $|\operatorname{grad} z(A)| = \sqrt{2}$. Используя теорему 6.6 и определение скалярного произведения, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{e}}(A) = |\operatorname{grad} z(A)| \cos(\phi) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1. \ \bullet$$

Пример 6.17. Найти производную функции $z = \sqrt{(x-2)^2 + 2(y-1)^2}$ в точке $a_0 = (2, 1)$ в направлении вектора $[3, -4]^\top$.

Решение. Сначала нормируем вектор направления: $\vec{e} = [0.6, -0.8]$. В данной задаче нельзя воспользоваться формулой (6.5), так как $\nabla z(2, 1)$ не существует (проверьте!). Используем непосредственно определение 6.21:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{e}}(2, 1) = \lim_{t \to 0+0} \frac{z(2 + 0.6t, 1 - 0.8t) - z(2, 1)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0+0} \frac{\sqrt{(-0.6t)^2 + 2(0.8t)^2} - 0}{t} = \lim_{t \to 0+0} \frac{\sqrt{2.64t^2}}{t} = \frac{\sqrt{66}}{5}. \ \bullet$$

Упражнения. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке a_0.

6.50. $xy^2+z^3 = 12, a_0 = (1, 2, 2)$. **6.51.** $x^3+y^3+z^3+xyz = 6, a_0 = (1, 2, -1)$.

6.52. $e^z - z + xy = 3$, $a_0 = (2, 1, 0)$. **6.53.** $z = y + \ln(x/z)$, $a_0 = (1, 1, 1)$.

Найти уравнение касательной плоскости и нормали к графику функции в точке a_0.

6.54. $z = 2x^2 - 4y^2$, $a_0 = (-2, 1)$. **6.55.** $z = x^3 - 3xy + y^3$, $a_0 = (1, 1)$.

6.56. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $a_0 = (-3, 4)$. **6.57.** $z = \dfrac{x}{y^2 + 1}$, $a_0 = (1, -1)$.

6.58. Найти на эллипсоиде $2x^2+y^2+3z^2 = 6$ точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $x - 2y - 3z + 17 = 0$.

6.59. Найти на эллипсоиде $x^2+2y^2+z^2 = 1$ точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $x - y + 2z = 0$.

6.60. Найти на поверхности $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 2 = 0$ точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $x + 2y = 0$.

6.61. Найти на поверхности $z^2+xy+xz = 1$ точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z+5}{2}$.

Вычислить $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a_0)$.

6.62. $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2$, $\vec{e} = \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]^\top$, $a_0 = (1, 1)$.

6.63. $f(x, y) = x\sin(x + y)$, $\vec{e} = [-1, 0]^\top$, $a_0 = (\pi/4, \pi/4)$.

6.64. $f(x, y, z) = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$, $\vec{e} = [2/3, 2/3, 1/3]^\top$, $a_0 = (3, 3, 1)$.

6.65. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $\vec{e} = [-1/3, 2/3, 2/3]^\top$, $a_0 = (1, 2, 1)$.

6.66. Найти производную функции $u = x+2y+\sqrt{xyz}$ в точке $A(1, 1, 4)$ по направлению вектора $\vec{a} = 4\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$.

6.67. Найти производную функции $u = 3xyz$ в точке $A(1, 2, 1)$ по направлению, составляющему с положительными полуосями равные углы.

6.68. Найти производную функции $z = 3x^2 + 2xy$ в точке $A(1, -2)$ по направлению, составляющему угол 60° с направлением оси OY.

6.69. Найти производную функции $z = \operatorname{arctg}(y/x)$ в точке $A(1/2, \sqrt{3}/2)$ по направлению, составляющему угол 30° с направлением оси OX.

Найти производную функции f в точке A в направлении, идущем от точки A к точке B.

6.70. $f(x, y) = 5x + 5x^2y + y^5$, $A(1, 2)$, $B(5, -1)$.

6.71. $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $A(3, 2, 1)$, $B(7, 5, 1)$.

6.72. $f(x, y, z) = \arcsin\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$, $A(1, 1, 1)$, $B(1, 5, 4)$.

Найти наибольшее значение $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(A)$.

6.73. $f(x,y) = xy^2 - 3x^4y^2$, $A(1,1)$. **6.74.** $f(x,y) = \dfrac{x+\sqrt{y}}{y}$, $A(2,1)$.

6.75. $f(x,y,z) = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + 2z + \operatorname{ctg} z$, $A(\pi/4, \pi/3, \pi/2)$.

Найти направление, по которому $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ достигает наибольшего значения в точке A.

6.76. $f(x,y) = x - 3y + \sqrt{3xy}$, $A(3,1)$. **6.77.** $f(x,y) = \ln\left|y/x\right|$, $A(1,-1)$.

6.78. $f(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $A(1,2,2)$.

6.5. Локальные экстремумы функций нескольких вещественных переменных

Все определения и утверждения, приведенные далее, справедливы для функций, заданных в пространстве $\mathbb{R}^2$ или на его подмножестве.Так как определение окрестности дано для пространства произвольной размерности, то все результаты легко обобщаются на функции, область определения которых — множество $D \subset \mathbb{R}^3$, и на функции, определенные в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 6.22. *Если* (x^0, y^0) *– внутренняя точка области определения функции* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *и существует такая проколотая окрестность* $\overset{\circ}{K}_\delta(x^0,y^0) \subset D$ *точки* (x^0,y^0), *что для всех* $(x,y) \in \overset{\circ}{K}_\delta(x^0,y^0)$ *справедливо неравенство*

$$f(x,y) < f(x^0,y^0) \qquad \big(\, f(x,y) > f(x^0,y^0)\,\big),$$

то точка (x^0,y^0) *называется точкой локального максимума (локального минимума) функции* f. *Принято говорить, что* (x^0,y^0) *— точка локального экстремума* f, *если* (x^0,y^0) *— точка локального максимума или локального минимума.*

Определение 6.23. *Если* (x^0,y^0) *– внутренняя точка области определения функции* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *в которой существуют частные производные* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0) = 0$, *то точка* (x^0,y^0) *называется стационарной точкой функции* f.

Теорема 6.7. (Необходимое условие экстремума) *Пусть функция* $f(x,y)$ *определена в некоторой окрестности точки* (x^0,y^0) *и имеет в* *этой окрестности непрерывные частные производные* $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. *Если точка* (x^0, y^0) *является точкой экстремума функции* $f(x,y)$*, то точка* (x^0, y^0) *является стационарной точкой функции* f.

Заметим, что встречаются функции, у которых некоторые частные производные первого порядка в отдельных точках не существуют. В указанных точках тоже может быть экстремум.

Итак, подозрительными на экстремум являются стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна из частных производных первого порядка не существует.

Пример 6.18. Пусть $f(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3}$, тогда частные производные $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{2}{3x^{1/3}}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{2}{3y^{1/3}}$ определены при $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и не существуют в точке $(0,0)$. Но очевидно, что точка $(0,0)$ — точка строгого локального минимума функции f. ●

Пример 6.19. Пусть $f(x,y) = x^3 + y^3$, тогда частные производные $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2$ обращаются в нуль в точке $(0,0)$. Однако эта точка не является экстремальной, так как $f(0,0) = 0$, но в любой окрестности точки $(0,0)$ функция принимает как положительные, так и отрицательные значения. ●

Этот пример показывает, что условия теоремы 6.6 не являются достаточными для нахождения экстремальной точки. Приведем вариант достаточного условия.

Определение 6.24. *Квадратичная форма* $(H\vec{a}, \vec{a})$ *и ее симметричная матрица* H *называются положительно (отрицательно) определенными, если для любого* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *выполняется условие* $(H\vec{a}, \vec{a}) > 0$ $\big((H\vec{a}, \vec{a}) < 0\big)$.

Квадратичная форма $(H\vec{a}, \vec{a})$ *и ее матрица* H *называются знакопеременными, если* $(H\vec{a}, \vec{a})$ *может принимать как положительные, так и отрицательные значения.*

Матрица H будет положительно (отрицательно) определенной, если все собственные числа матрицы $\lambda_i > 0$ $(\lambda_i < 0)$. Матрица H является знакопеременной, если среди ее собственных чисел есть как положительные, так и отрицательные.

Теорема 6.8. (Достаточное условие экстремума) *Пусть функция* $f(x,y)$ *определена в точке* (x^0, y^0)*, имеет в некоторой ее окрестности* $K_\delta((x^0, y^0))$ *все частные производные второго порядка, непрерывные* *в точке (x^0, y^0), и точка (x^0, y^0) является стационарной точкой функции f. Тогда:*

1) *если матрица Гессе функции f в точке (x^0, y^0) положительно определенная (все собственные числа матрицы положительны), то точка (x^0, y^0) — точка локального минимума функции f;*

2) *если матрица Гессе функции f в точке (x^0, y^0) отрицательно определенная (все собственные числа матрицы отрицательны), то точка (x^0, y^0) — точка локального максимума функции f;*

3) *если матрица Гессе функции f в точке (x^0, y^0) знакопеременная (среди ее собственных чисел есть как положительные, так и отрицательные), то функция f не имеет в точке (x^0, y^0) локального экстремума.*

Пример 6.20. Найти стационарные точки функции $f(x, y)$ и исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 5y^3 - 108x - 120y + 7.$$

Решение. Найдем стационарные точки. Для этого найдем частные производные функции $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 108;$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2 + 6xy + 15y^2 - 120.$$

Согласно определению 6.23 точка (x, y) стационарная, если

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 6xy + 3y^2 - 108 = 0, \\ 3x^2 + 6xy + 15y^2 - 120 = 0. \end{cases}$$

Разделим оба равенства на 3 и вычтем первое уравнение из второго. Получим равносильную систему:

$$\begin{cases} y^2 = 1, \\ x^2 + 2xy + y^2 - 36 = 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна двум системам уравнений:

$$\begin{cases} y = 1, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 36 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -1, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 36. \end{cases}$$

Подставляя значение y во второе уравнение, получим

$$\begin{cases} y = 1, \\ x^2 + 2x - 35 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -1, \\ x^2 - 2x - 35 = 0. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим 4 стационарные точки: $P_1(-7, 1)$, $P_2(5, 1)$, $P_3(7, -1)$ и $P_4(-5, -1)$.

Для того чтобы определить, какие из этих точек являются экстремальными, применим теорему 6.8. Найдем матрицу Гессе функции $f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6x + 6y = 6(x + y),$$

$$\frac{\partial^2 f\,(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f\,(x, y)}{\partial x \partial y} = 6x + 6y = 6(x + y),$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 6x + 30y = 6(x + 5y)$$

и

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6(x + y) & 6(x + y) \\ 6(x + y) & 6(x + 5y) \end{bmatrix}$$

В точке P_1 имеем:

$$H(P_1) = H(-7, 1) = \begin{bmatrix} -36 & -36 \\ -36 & -12 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы. Так как H симметрична, ее собственные числа вещественные. Запишем характеристическое уравнение

$$(-36 - \lambda)(-12 - \lambda) - (-36)^2 = 0, \qquad \lambda^2 + 48\lambda - 864 = 0.$$

Получаем 2 решения:

$$\lambda_1 = \frac{-48 - \sqrt{5760}}{2} \approx -61{,}947, \qquad \lambda_2 = \frac{-48 + \sqrt{5760}}{2} \approx 13{,}947.$$

Собственные числа матрицы Гессе $H(P_1)$ имеют разные знаки, следовательно, матрица является знакопеременной и по теореме 6.8 функция f не имеет в точке $P_1(-7, 1)$ локального экстремума. Это стационарная точка, $f(-7, 1) = 431$.

Отметим, что знаки собственных чисел можно определить и не решая квадратное уравнение. Используя теорему Виета, получаем

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -48, \\ \lambda_1 \lambda_2 = -864. \end{cases}$$

Так как произведение собственных чисел отрицательно, значит, они имеют разные знаки, и матрица Гессе $H(P_1)$ является знакопеременной. При исследовании других стационарных точек будем использовать этот метод, поскольку он менее трудоемкий.

В точке P_2 имеем:

$$H(P_2) = H(5,1) = \begin{bmatrix} 36 & 36 \\ \\ 36 & 60 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел имеет вид

$$(36 - \lambda)(60 - \lambda) - (36)^2 = 0, \qquad \lambda^2 - 96\lambda + 864 = 0.$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 96, \\ \lambda_1 \lambda_2 = 864. \end{cases}$$

Произведение собственных чисел положительно, следовательно, собственные числа имеют один и тот же знак. Но поскольку их сумма тоже положительна, то оба собственных числа положительны. Это значит, что матрица Гессе $H(P_2)$ положительно определенная и по теореме 6.8 функция f имеет локальный минимум в точке $P_2(5,1)$, его значение $f(5,1) = -433$.

В точке P_3 имеем:

$$H(P_3) = H(7,-1) = \begin{bmatrix} 36 & 36 \\ \\ 36 & 12 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел имеет вид

$$(36 - \lambda)(12 - \lambda) - (36)^2 = 0, \qquad \lambda^2 - 48\lambda - 864 = 0.$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 48, \\ \lambda_1 \lambda_2 = -864. \end{cases}$$

Так как произведение собственных чисел отрицательно, они имеют разные знаки и матрица Гессе $H(P_3)$ является знакопеременной. По теореме 6.8 функция f не имеет в точке $P_3(7,-1)$ локального экстремума. Это стационарная точка, $f(7,-1) = -417$.

В точке P_4 имеем:

$$H(P_4) = H(-5,-1) = \begin{bmatrix} -36 & -36 \\ \\ -36 & -60 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел имеет вид

$$(-36-\lambda)(-60-\lambda) - (-36)^2 = 0, \qquad \lambda^2 + 96\lambda + 864 = 0.$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -96, \\ \lambda_1\lambda_2 = 864. \end{cases}$$

Произведение собственных чисел положительно, следовательно, собственные числа имеют один и тот же знак. Но их сумма отрицательна, значит, оба собственных числа отрицательны и матрица Гессе $H(P_4)$ отрицательно определенная. По теореме 6.8 функция f имеет локальный максимум в точке $P_4(-5,-1)$, его значение $f(-5,-1) = 447$.

Ответ: $P_1(-7,1)$, $P_3(7,-1)$ — стационарные точки, в которых функция f не имеет экстремума, $f(-7,1) = 431$, $f(7,-1) = -417$;
$P_2(5,1)$ — точка локального минимума, $f(5,1) = -433$;
$P_4(-5,-1)$ — точка локального максимума, $f(-5,-1) = 447$. •

Пример 6.21. Найти стационарные точки функции $f(x,y,z)$ и исследовать функцию на экстремум:

$$f(x,y,z) = z^3 - x^2 - 3y^2 - \frac{3}{2}z^2 - 4x + 6y + 2.$$

Решение. Найдем стационарные точки. Для этого найдем частные производные функции $f(x,y,z)$:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = -2x - 4, \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -6y + 6, \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 3z^2 - 3z.$$

Система для нахождения стационарных точек имеет вид: $\begin{cases} -2x - 4 = 0, \\ -6y + 6 = 0, \\ 3z^2 - 3z = 0. \end{cases}$

Решая систему, находим две стационарные точки: $M_1(-2,1,0)$ и $M_2(-2,1,1)$.

Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} = -6, \quad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = 6z - 3,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial y} = 0.$$

Для того чтобы исследовать стационарные точки на экстремум, определим вид матрицы Гессе в каждой из них.

В точке M_1

$$H(M_1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы решив характеристическое уравнение

$$(-2-\lambda)(-6-\lambda)(-3-\lambda) = 0.$$

Получаем 3 решения:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -6, \quad \lambda_3 = -3.$$

Все собственные числа матрицы Гессе $H(M_1)$ отрицательны, значит, функция f в точке $M_1(-2,1,0)$ имеет максимум, его значение $f(-2,1,0) = 9$.

В точке M_2

$$H(M_2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа матрицы решив характеристическое уравнение

$$(-2-\lambda)(-6-\lambda)(3-\lambda) = 0.$$

Получаем 3 решения:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -6, \quad \lambda_3 = 3.$$

Собственные числа матрицы Гессе $H(M_2)$ имеют разные знаки, значит, функция f в точке $M_2(-2,1,1)$ экстремума не имеет.

Ответ: $M_1(-2,1,0)$, $M_2(-2,1,1)$ — стационарные точки.
В точке $M_2(-2,1,1)$ функция f не имеет экстремума; $M_1(-2,1,0)$ — точка локального максимума, $f(-2,1,0) = 9$. •

Упражнения. Исследовать функции на экстремум.

6.79. $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$. **6.80.** $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$.
6.81. $f(x,y) = (x-5)^2 + y^2 + 1$. **6.82.** $f(x,y) = xy(6-x-y)$.

6.83. $f(x,y) = 1+15x-2x^2-xy-2y^2$. **6.84.** $f(x,y) = 2xy-5x^2-3y^2+2$.
6.85. $f(x,y) = 8/x + x/y + y$. **6.86.** $f(x,y) = (x+y^2)e^{x/2}$.
6.87. $f(x,y) = (x^2-2y^2)e^{x-y}$. **6.88.** $f(x,y,z) = x^2+y^2+(z+1)^2-xy+x$.

6.89. $f(x,y,z) = x^3+y^2+z^2+6xy-4z$.
6.90. $f(x,y,z) = (x+7z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.
6.91. $f(x,y) = 1+x^2+\sqrt[3]{(y+2)^2}$.

Ответы к упражнениям разд. 6

6.1. $D=\mathbb{R}^2$, линии уровня — семейство прямых $4x-5y=c$, $c\in\mathbb{R}$.
6.2. $D = \{(x,y) \mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}\}$, линии уровня — пучок прямых $c(y+2)=4x-1$ с центром $(\frac{1}{4};-2)$, кроме прямой $y=-2$. **6.3.** $D=\mathbb{R}^2$, линии уровня $y=ce^{-x}$, $c\in\mathbb{R}$. **6.4.** $D=\{(x,y)\mid x>-1, y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$, линии уровня $cy=\ln(x+1)$, $c\in\mathbb{R}$. **6.5.** $D=\mathbb{R}^2$, линии уровня — семейство парабол $y=c(x^2+1)$, $c\in\mathbb{R}$. **6.6.** $D=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, y\in\mathbb{R}\}$, линии уровня — семейство окружностей $(x-\ln c)^2+y^2=(\ln c)^2$, $c>0$, $c\neq 1$ (рис. 6.4).
6.7. См. рис. 6.5. Линии уровня — семейство парабол $y^2=c^2(x-c^2/4)$, $c\geq 0$. **6.8.** Семейство параллельных плоскостей $x+2y+3z=c$, $c\in\mathbb{R}$.
6.9. Семейство параллельных плоскостей $2x-3y+4z=\ln c$, $c>0$. **6.10.** Семейство эллиптических параболоидов $z=(c+2)-2(x^2+y^2)$, $c\in\mathbb{R}$.

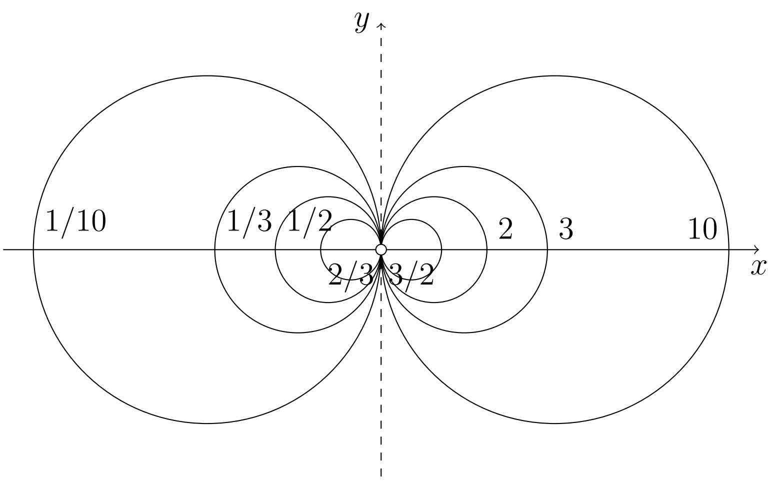

Рис. 6.4

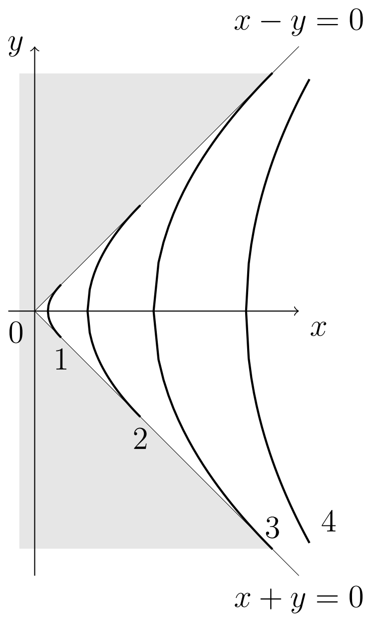

Рис. 6.5

6.11. Семейство эллиптических параболоидов $z = \dfrac{c}{2}(x^2 + y^2)$ при $c \neq 0$, плоскость $z = 0$ при $c = 0$; кроме точки $(0, 0, 0)$ во всех случаях.
6.12. Семейство сфер $(x - 1/c)^2 + y^2 + z^2 = (1/c)^2$ при $c \neq 0$, плоскость $x = 0$ при $c = 0$; кроме точки $(0, 0, 0)$ во всех случаях. **6.13.** Семейство гиперболоидов $\dfrac{x^2}{e^c} - y^2 - z^2 = 1 - \dfrac{1}{e^c}$ при $c \neq 0$, конус $x^2 = y^2 + z^2$ при $c = 0$. **6.14.** 1. **6.15.** Не существует. **6.16.** Не существует. **6.17.** 2.
6.18. Не существует. **6.19.** 1/3. **6.20.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 6x^2y - 4y^5z^4$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x^3 - 20xy^4z^4$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -16xy^5z^3 + 2e^{2z}$. **6.21.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (2x\sin x + x^2\cos x)y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2\sin x - 6y$.
6.22. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -2x\sin(x^2 - y^2) + 3x^2$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y\sin(x^2 - y^2)$.
6.23. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (x+y)^2}}$. **6.24.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{2x}(2x^2 + 2y^2 + 4y + 2x)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{2x}(2y + 2)$. **6.25.** $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1+y}{x + xy - y^2}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x - 2y}{x + xy - y^2} - z^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -2zy$. **6.26.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\operatorname{tg}(x/y)}{y}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{y^2}\operatorname{tg}(x/y)$.
6.27. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{1+y} + \dfrac{y}{2\sqrt{1+x}}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{2\sqrt{1+y}} + \sqrt{1+x}$.
6.28. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-2y}{(x-y)^2\cos^2\frac{x+y}{x-y}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x}{(x-y)^2\cos^2\frac{x+y}{x-y}}$.

6.29. $\vec{f}\,'(x, y) = \begin{bmatrix} 2x\cos y & -x^2\sin y \\ y\cos x & \sin x \end{bmatrix}$. **6.30.** $\vec{f}\,'(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}} & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y}} \\ -2y/x^3 & 1/x^2 \\ 8x - 4y & 2y - 4x \end{bmatrix}$.

6.31. $\vec{f}\,'(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2xyz^3 & x^2z^3 & 3x^2yz^2 \\ 2x/z & 1/z & -(x^2+y)/z^2 \end{bmatrix}$.

6.32. $\vec{f}\,'(x, y, z) = \begin{bmatrix} \ln(yz+1) & xz/(yz+1) & xy/(yz+1) \\ ye^x & e^x & 0 \\ ze^{2y} & 2xze^{2y} & xe^{2y} \end{bmatrix}$.

6.33. $f(x, y) = 2 - 2(x+1) + o\left(\sqrt{(x+1)^2 + (y-\pi)^2}\right)$.

6.34. $f(x, y) = 2 + 1.5(x-3) + 2.75(y-1) + o\left(\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}\right)$.

6.35. $f(x, y, z) = -0.5 - 2(x-2) + 1.5(y-1) - 0.75(z+1) + {}$ $+ o\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}\right)$.

6.36. $f(x,y,z) = 1+2(x+1)+4(y-1)+o\left(\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}\right)$.

6.37. $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x-4 \\ 2x-4 & 0 \end{bmatrix}$.

6.38. $H(x,y) = \begin{bmatrix} 2\ln(y^2+1) & \dfrac{4xy}{y^2+1} \\ \dfrac{4xy}{y^2+1} & -2\dfrac{x^2y^2+y^3+3y-x^2}{(y^2+1)^2} \end{bmatrix}$.

6.39. $H(x,y,z) = \begin{bmatrix} 12xz & -2yz & 6x^2-y^2 \\ -2yz & -2xz & -2xy \\ 6x^2-y^2 & -2xy & 0 \end{bmatrix}$.

6.40. $H(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/z^2 \\ 0 & 0 & -2/z^2 \\ -1/z^2 & -2/z^2 & 2(x+2y)/z^3 \end{bmatrix}$.

6.41. $f' = \left[3y^2+4y^3, 6xy+12xy^2\right]$, $H(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 6y+12xy^2 \\ 6y+12y^2 & 6x+24xy \end{bmatrix}$.

6.42. $f' = \left[\dfrac{1}{y}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right), -\dfrac{x}{y^2}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)\right]$,

$H(x,y) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{y^2}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \dfrac{x}{y^3}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{1}{y^2}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) \\ \dfrac{x}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right) - \dfrac{1}{y^2}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) & \dfrac{2x}{y^3}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) - \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)\dfrac{x^2}{y^4} \end{bmatrix}$.

6.43. $f' = \left[yx^{y-1}, x^y\ln(x)\right]$,

$H(x,y) = \begin{bmatrix} y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1}+yx^{y-1}\ln(x) \\ x^{y-1}+yx^{y-1}\ln(x) & x^y\ln^2(x) \end{bmatrix}$.

6.44. Удовлетворяет. **6.45.** Удовлетворяет. **6.46.** Удовлетворяет.

6.47. Не удовлетворяет. **6.48.** Не удовлетворяет. **6.49.** Удовлетворяет.

6.50. $x+y+3z-9=0;\quad x=1+t,\ y=2+t,\ z=2+3t,\ t\in\mathbb{R}$.

6.51. $x+11y+5z-18=0;\quad x=1+t,\ y=2+11t,\ z=-1+5t,\ t\in\mathbb{R}$.

6.52. $x+2y-4=0;\quad x=2+t,\ y=1+2t,\ z=0,\ t\in\mathbb{R}$.

6.53. $x+y-z-1=0;\quad x=1+t,\ y=1+t,\ z=1-t,\ t\in\mathbb{R}$.

6.54. $8x+8y+z-8=0;\quad x=-2+8t,\ y=1+8t,\ z=t,\ t\in\mathbb{R}$.

6.55. $z+1=0;\quad x=1,\ y=1,\ z=-1+t,\ t\in\mathbb{R}$.

6.56. $-4.6x+3.8y-z-12=0;\quad x=-3-4.6t,\ y=4+3.8t,\ z=17-t,\ t\in\mathbb{R}$.

6.57. $x+y-2z+1=0;\quad x=1+t,\ y=-1+t,\ z=0.5-2t,\ t\in\mathbb{R}$.

6.58. $(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{4}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}})$, $(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{4}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}})$.

6.59. $\left(\dfrac{\sqrt{22}}{11}, -\dfrac{\sqrt{22}}{22}, \dfrac{2\sqrt{22}}{11}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{22}}{11}, \dfrac{\sqrt{22}}{22}, -\dfrac{2\sqrt{22}}{11}\right)$.

6.60. $\left(\dfrac{-\sqrt{2}-1}{3}, \dfrac{2-\sqrt{2}}{3}, \dfrac{4+\sqrt{2}}{6}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}, \dfrac{2+\sqrt{2}}{3}, \dfrac{4-\sqrt{2}}{6}\right)$.
6.61. $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}), (-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}})$. **6.62.** $2\sqrt{2}$. **6.63.** -1. **6.64.** 62.
6.65. $5/9$. **6.66.** $\dfrac{55}{4\sqrt{21}}$. **6.67.** $\pm 6\sqrt{3}$. **6.68.** $1 \pm 2\sqrt{3}$. **6.69.** $-1/2, \ -1$.
6.70. 5. **6.71.** $52/5$. **6.72.** $\sqrt{3}/5$. **6.73.** $\sqrt{137}$.
6.74. $\sqrt{29}/2$. **6.75.** $\sqrt{137}/8$.
6.76. $\vec{e} = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]^\top$. **6.77.** $\vec{e} = \left[\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]^\top$.
6.78. $\vec{e} = [7/9, -4/9, -4/9]^\top$. **6.79.** $f_{\min}(1, 0.5) = 4$. **6.80.** $f_{\max}(2, -2) = 8$.
6.81. $f_{\min}(5, 0) = 1$. **6.82.** $f_{\max}(2, 2) = 8$. **6.83.** $f_{\max}(4, -1) = 31$.
6.84. $f_{\max}(0, 0) = 2$. **6.85.** $f_{\min}(4, 2) = 6$. **6.86.** $f_{\min}(-2, 0) = -2/e$.
6.87. $f_{\max}(-4, -2) = 8/e^2$. **6.88.** $f_{\min}(-2/3, -1/3, -1) = -1/3$.
6.89. $f_{\min}(6, -18, 2) = -112$. **6.90.** $f_{\max}(0.1, 0, 0.7) = 5/\sqrt{e}$,
$f_{\min}(-0.1, 0, -0.7) = -5/\sqrt{e}$. **6.91.** $f_{\min}(0, -2) = 1$.

Список литературы

1. Математический анализ в примерах и задачах: учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 1 / Н. А. Бодунов, Е. З. Боревич, С. И. Челкак и др. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2018.

2. Дифференциальное и интегральное исчисление (функций одной переменной): учеб. пособие / А. Л. Белопольский, М. Л. Доценко, Е. В. Фролова, А. П. Щеглова. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2013.

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. электрон. пособие: в 3 т. Т. 2. СПб.: Лань, 2018.

4. Боревич Е. З., Жукова Е. Е., Челкак С. И. Дифференциальное исчисление функций многих вещественных переменных: учеб. электрон. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2013.

5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. электрон. пособие: в 3 т. Т. 1. СПб.: Лань, 2018.

6. Типовые расчеты по различным разделам высшей математики: учеб. пособие / А. Л. Белопольский, Н. Г. Гоголева, С. А. Колбина и др. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2018.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Белопольский Андрей Львович,
Непомнящая Татьяна Владимировна,
Трегуб Вера Леонидовна,
Челкак Сергей Иванович,
Щеглова Александра Павловна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Часть II

Учебное пособие

Редактор Э. К. Долгатов

Подписано в печать 09.04.19. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Гарнитура „Times New Roman“. Печ. л. 6,75.
Тираж 445 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5