$$(AB)^T = B^T A^T$$

$\boxed{\square}$

$A \in M_{m \times r}$ (матрица A принадлежит множеству матриц размера $m \times r$)

$B \in M_{r \times n}$

$AB \in M_{m \times n}$

---

1) $A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ (iая строка)

$B = \begin{bmatrix} \cdot & b_{1j} & \cdot \\ \cdot & b_{2j} & \cdot \\ \cdot & \vdots & \cdot \\ \cdot & b_{nj} & \cdot \end{bmatrix}$ (jый столбец)

$A \cdot B = C$

где каждый элемент матрицы C:

$$C_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{n1} b_{1j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

(см произв матриц)

$$C_{ij} = (C_{ij}^T)^T = [\text{св-во } 1] = (C_{ji})^T = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (\mathrm{I})$$

2) $A^T = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ \dots \\ a_{in} \end{bmatrix}$ $\quad B^T = \begin{bmatrix} b_{1j} & b_{2j} & \dots & b_{nj} \end{bmatrix}$

$A^T \in M_{n \times r}$

$B^T \in M_{n \times r}$

$B^T \cdot A^T \in M_{n \times}$

$$(B^T \cdot A^T)_{ji} = b_{1j} a_{i1} + b_{2j} a_{i2} + \dots + b_{nj} a_{in} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} a_{ik} \quad (\mathrm{II})$$

Заметим, что выр (I) совпадает с выр (II)

$\Downarrow$

$$\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$$

$\blacksquare$

Линейные системы 2ого порядка

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mid \times a_{21} \\ \mid \times a_{11} \end{array}$$

Решим в общем виде

1) Избавимся от x:

$$\begin{matrix} (I) \\ (II) \end{matrix} \begin{cases} a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y = b_1 a_{21} \\ a_{21}a_{11}x + a_{22}a_{11}y = b_2 a_{11} \end{cases}$$

(II) − (I):

$$y\,(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}$$

$$\boxed{y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}} = \frac{\Delta}{\Delta}$$

2) Избавимся от y

$$\begin{matrix} (I) \\ (II) \end{matrix} \begin{cases} x \cdot a_{11}a_{22} + a_{12}a_{22} \cdot y = b_1 a_{22} \\ x \cdot a_{21}a_{12} + a_{12}a_{22}\,y = b_2 a_{12} \end{cases}$$

(I) − (II)

$$x\,(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$

$$\boxed{x = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}} = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

Пусть:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta$$

$$b_1 a_{22} - b_2 a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{21} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_x$$

$$a_{11}b_2 - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_y$$

Теорема Крамера

Утверж., необходимые для док-ва:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A$$

1) $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \det A$

2) $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0$

Попарное умножение элементов (столбца) строки i на алгебраич дополнение (столбца) строки k $(i \neq k) = 0$

$\square$ Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_n + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

1) Для x_1:

а) Умножаем каждое уравнение на алгебр дополнение элемента при x_1:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_n + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad | \times A_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad | \times A_{21} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \quad | \times A_{31} \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \quad | \times A_{n1} \end{cases}$$

б) складываем

$$x_1\underbrace{(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1})}_{=\Delta \text{ (см утв 1)}} + x_2\underbrace{(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + A_{n1}a_{n2})}_{=0 \text{ (см утв 2)}} + \dots +$$

$$+ x_n\underbrace{(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1})}_{=0} = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} = \Delta_1 \text{ (по опред)}$$

Теорема Крамера (часть 2)

2) Для x_k ($k = 1 \ldots n$) (аналогично)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_n + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & \Big| \times A_{1k} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & \Big| \times A_{2k} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 & \Big| \times A_{3k} \\ \ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n & \Big| \times A_{nk} \end{cases}$$

$$x_k \cdot \Delta = \Delta_k \qquad x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & . & b_1 & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & b_2 & . & a_{2n} \\ a_{31} & . & b_3 & . & a_{3n} \\ \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \\ a_{n1} & \vdots & b_n & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема:

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ решение одно

$\Delta = 0 \Rightarrow$ решений нет или ∞

см Гаусс – Жордан

Однородная система лин уравнений

Система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Теорема:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\det A = 0$ - бесконечное кол-во ненулевых решений

$\det A \neq 0$ - $\exists$ решение только тривиальное $(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0)$

Решение система имеет всегда!

Док-во следует из т. Крамера

т. Крамера:

одгор. сист всегда имеет решение

$\det A = 0$ - ~~решений нет~~ или бесконечно - нетривиальное решение

$\det A \neq 0$ - решение одно - тривиальное

Обратная матрица

$AA^{-1} = E$ — A^{-1} - обратная матрица, матрице A.

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Введем матрицу $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & \dots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$ $\quad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$A \cdot A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\det A}{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + A_{1n}a_{1n}} & \dots\dots & \det A \\ \underset{0}{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + A_{2n}a_{2n}} & a_{21}A_{21} + A_{22}a_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n} & \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = \det A \cdot E$$

$$A \cdot A^* = E \cdot \det A$$

$$A \cdot A^{-1} = E \quad \Rightarrow \text{аналогично для } A^{-1}A = E \Rightarrow A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

$$A \cdot A^* = A \cdot A^{-1} \det A$$

$$(A^{-1}A) \cdot A^* = (A^{-1}A) A^{-1} \det A$$

$$A^* = A^{-1} \det A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* \Rightarrow \det A \neq 0$$

Теорема о единственности:

Пусть A^{-1} и A_1^{-1} - две обратные матрицы к матрице A

$$A^{-1}A = A_1^{-1}A = E$$

$$A_1^{-1}(A^{-1}A) = A_1^{-1}(AA_1^{-1}) = A_1^{-1}E \quad \text{(ассоциативность др матрицы)}$$

$$A_1^{-1}(A^{-1}A) = A_1^{-1}E = A_1^{-1}$$

$$(A_1^{-1}A)A^{-1} = A_1^{-1}$$

$$A^{-1} = A_1^{-1} \quad \text{(противоречие)}$$

Векторное произведение в координатах.

Св-ва:

1) $\vec{a}\times\vec{b} = (-\vec{b})\times\vec{a}$

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

Следствие св-ва 1 и 3:

$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} = [\text{св-во 1}] = (-\vec{a})\times(\vec{b}+\vec{c})$

$= -\vec{a}\times\vec{b} + (-\vec{a})\times\vec{c}$

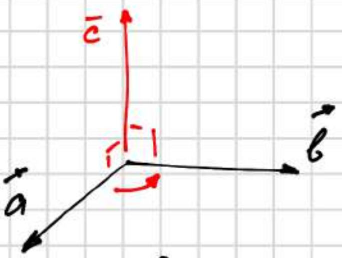
$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$

$\vec{c}$:

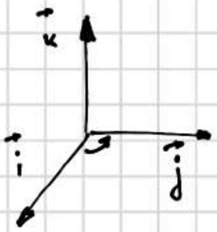
1) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка вект.



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – правая тройка



$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$ $\quad$ $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{0}$

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$ $\quad$ $\vec{j}\times\vec{j} = \vec{0}$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$ $\quad$ $\vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$ т.к. $\sin(0^\circ) =$

$\square$ $\quad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$

$(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = [\text{св-во 3}] =$

$= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times b_x\vec{i} + (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\, b_y\vec{j} +$

$+ (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\, b_z\vec{k} = \left[\begin{matrix}\text{следств} \\ 1 \text{ и } 3\end{matrix}\right] = -\cancel{a_x b_x \vec{i}\times\vec{i}} - a_y b_x \underbrace{\vec{i}\times\vec{j}}_{=\vec{k}} -$

$- a_z b_x \underbrace{\vec{i}\times\vec{k}}_{=-\vec{j}} - b_y a_x \underbrace{\vec{j}\times\vec{i}}_{=-\vec{k}} - \cancel{a_y b_y \vec{j}\times\vec{j}} - a_z b_y \underbrace{\vec{j}\times\vec{k}}_{=\vec{i}} - b_z a_x \underbrace{\vec{k}\times\vec{i}}_{=\vec{j}} - b_z a_y \underbrace{\vec{k}\times\vec{j}}_{=-\vec{i}} -$

$- \cancel{a_z b_z \vec{k}\times\vec{k}} = -a_y b_x\vec{k} + a_z b_x\vec{j} + b_y a_x\vec{k} - a_z b_y\vec{i} - b_z a_x\vec{j} + b_z a_y\vec{i} =$

$= \vec{i}\,(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}\,(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}\,(a_x b_y - a_y b_x) =$

$= \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Смешанное произведение в координатах

СВОЙСТВА:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix}$$

1) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$

3) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$

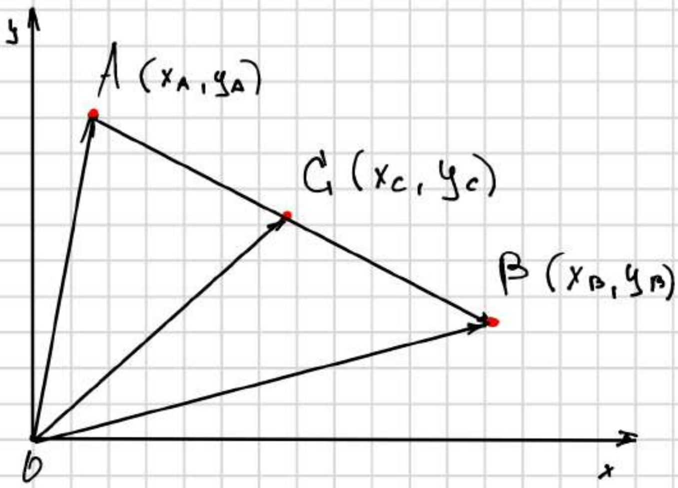
$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$\square$

$$c \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \left(c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k},\ \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) =$$

$$= c_x \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКОВ В СООТНОШЕНИИ



$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$$

$$\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

$$\lambda = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} \Rightarrow |\overline{AC}| = \lambda|\overline{CB}|$$

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\, \overrightarrow{CB}$$

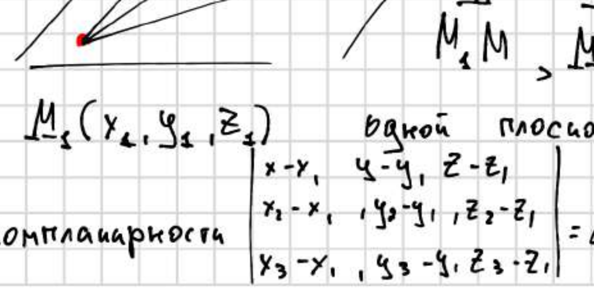
$$\overline{AC} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} - \lambda \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{\lambda+1}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$$

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= (x_C, y_C) \\ \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} &= (x_A + \lambda x_B, y_A + \lambda y_B)\end{aligned}\right\} \Rightarrow C\left(\frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}\right)$$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ЧЕРЕЗ 3 ТОЧКИ



$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

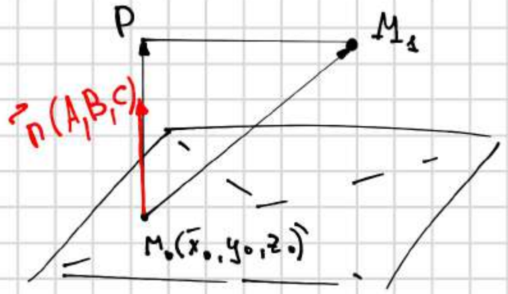
$\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ должна лежать в одной плоскости $\Rightarrow$ компланарны

см условие компланарности
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

РАСТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$



$$M_0P = \left| np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0M_1} \right| =$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = |\vec{n}| \left| \overrightarrow{M_0M_1} \right| \cos(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M_1}) = |\vec{n}| \cdot np_{\vec{n}} M_0M_1$$

$$\overrightarrow{M_0P} = np_{\vec{n}} M_0M_1 = \left| \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 - \overbrace{(Ax_0 + By_0 + Cz_0)}^{= -D}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Теоремы о линейной зависимости (независимости)

Опр 1. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n$ лин. зависимы, если $\exists \lambda_i \neq 0$ такое, что выполняется $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = \vec{0}$

Опр 2 Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_n$ лин. независимы, если

$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = \vec{0}$ выполняется только если $\forall \lambda = 0$

Теорема 1.

Если среди векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n$ имеется нулевой вектор, то $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n$ лин зависимы.

$\square$

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{0} = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$\forall \lambda \neq 0$ выражение выполн $\Rightarrow \exists \lambda \neq 0 \Rightarrow$ лин. зависимы $\blacksquare$

Теорема 2

Если среди векторов $\bar{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_m$ векторы $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \dots a_{m-1}$ – лин. зависим, то $\bar{a}_1, \vec{a}_2 \dots \bar{a}_m$ – лин зависима

$\square$

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_{m-1} \overrightarrow{a_{m-1}} + \lambda_m \bar{a}_m = \vec{0}$$

Пусть $\lambda_m = 0$

$$\underbrace{\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_{m-1} \overrightarrow{a_{m-1}}}_{\parallel} + 0 \cdot \bar{a}_m = \vec{0}$$

$\exists \lambda_i \neq 0 \Rightarrow \bar{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_m$ – лин зависим $\blacksquare$

Теорема 3

Следующие 2 утв равносильны

1) 2 вектора лин зависимы

2) 2 вектора коллинеарны

а) $1 \Rightarrow 2$

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \vec{x}_1 = -\lambda_2 \vec{x}_2$$

$$\vec{x}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{x}_2 \quad (\lambda_1 \neq 0)$$

$$\alpha = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$\vec{x}_1 = \alpha \vec{x}_2 \Rightarrow \vec{x}_1, \vec{x}_2$ - коллинеарны

б) $2 \Rightarrow 1$

$\vec{x}_1 = \lambda \vec{x}_2$ (по опред. коллинеарности)

$$\vec{x}_1 - \lambda \vec{x}_2 = \vec{0}$$

Пусть: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -\lambda$

$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 = \vec{0} \Rightarrow$ лин зависимы $(\alpha_1 \neq 0)$

Теорема 4.

Следующие 2 утв равносильны:

1) 3 вектора лин зависимы

2) 3 вектора компланарны

а) $1 \Rightarrow 2$

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} = \vec{0} \quad (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0)$$

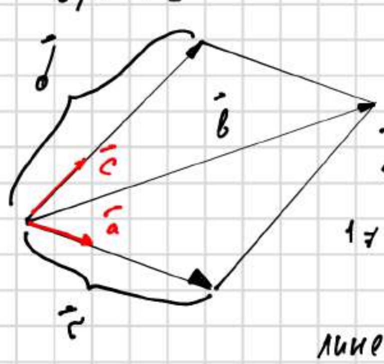
$$\lambda \vec{a} = -\mu \vec{b} - \nu \vec{c}$$

$$\vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda} \vec{b} - \frac{\nu}{\lambda} \vec{c}$$

$$\alpha_1 = -\frac{\mu}{\lambda}; \quad \alpha_2 = -\frac{\nu}{\lambda}$$

$\vec{a} = \alpha_1 \vec{b} + \alpha_2 \vec{c} \Rightarrow$ компланарны

б) $2 \Rightarrow 1$



$\vec{b} = \vec{r} + \vec{d} =$

$= \lambda \vec{a} + \mu \vec{c}$

$$\vec{b} - \lambda \vec{a} - \mu \vec{c} = \vec{0}$$

$1 \neq 0 \quad \lambda \neq 0 \quad \mu \neq 0$

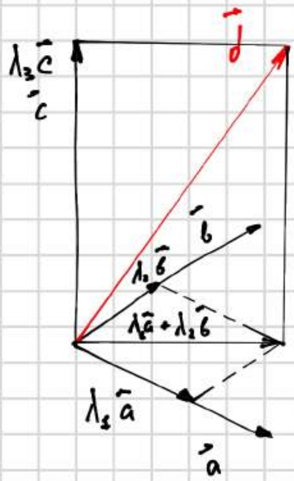
$\Downarrow$

линейно зависимы

Теорема 5

В $\mathbb{R}^3$ любые 4 вектора лин. зависимы

$\square$



$\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} = \vec{0}$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ → лин. независимы (некомпланарны)

$\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}$

$\vec{d} - \lambda_1\vec{a} - \lambda_2\vec{b} - \lambda_3\vec{c} = \vec{0}$

хотя бы один из $1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0 \Rightarrow$ лин. зависимо

$\blacksquare$

Базис в $\mathbb{R}^n$. ($\mathbb{C}^n$)

- Упорядоченный набор из n лин. независимых векторов

$$\vec{a}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \dots + a_{1n}\vec{e}_n$$
$$\vec{a}_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \dots + a_{2n}\vec{e}_n$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\vec{a}_n = a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n$$

($\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n$ - базис)

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix} \dots \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

Введём матрицу $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{n3} \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Теорема:

Если $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$ — лин независимы то $\det A \neq 0$

□

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1n} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{2n} \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \dots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_n a_{n1} = \vec{0} \\ \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{n2} = \vec{0} \\ \dots \\ \lambda_1 a_{n1} + \lambda_2 a_{n2} + \dots + \lambda_n a_{nn} = \vec{0} \end{cases}$$

Однородная система лин уравнении (см св-ва)

$\Downarrow$

$\det A = 0 \to \infty$ решении

$\det A \neq 0 - \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$\Downarrow$ векторы лин независимы

■

Теорема:

Разложение по базису единсвено

□

Пуся это не так и сущ 2 разложения вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n$

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$$

$$\vec{x} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_n \vec{e}_n$$

$$\vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$$

$$\vec{e}_1 (\alpha_1 - \beta_1) + \vec{e}_2 (\alpha_2 - \beta_2) + \dots + \vec{e}_n (\alpha_n - \beta_n) = \vec{0}$$

$\alpha_1 - \beta_1 = 0 \qquad \alpha_1 = \beta_1$

$\alpha_2 - \beta_2 = 0 \qquad \alpha_2 = \beta_2$

$\dots \qquad \dots$

$\alpha_n - \beta_n = 0 \qquad \alpha_n = \beta_n$ ■

Неравенство Коши - Буняковского

Св-ва скалярного произведения:

1) $(\vec{x},\vec{x}) \geq 0$

2) $(\vec{x},\vec{y}) = \overline{(\vec{y},\vec{x})}$

3) $(\lambda\vec{x},\vec{y}) = \lambda(\vec{x},\vec{y})$

4) $(\vec{x}+\vec{y},\vec{z}) = (\vec{x},\vec{z}) + (\vec{y},\vec{z})$

Следствие:

$(x,y+z) = \begin{bmatrix} \text{св-во} \\ 2 \end{bmatrix} = \overline{(y+z,x)} = \begin{bmatrix} \text{св-во} \\ 4 \end{bmatrix} = \overline{(y,x)} + \overline{(z,x)} = (x,y) + (x,z$

$\square$

$(\vec{x}-\lambda\vec{y},\vec{x}-\lambda\vec{y}) \geq 0$ (св-во 1)

$\lambda = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{(\vec{y},\vec{y})}$

$(\vec{x}-\lambda\vec{y},\vec{x}-\lambda\vec{y}) = \begin{bmatrix} \text{св-во} \\ 4 \end{bmatrix} = (\vec{x},\vec{x}-\lambda\vec{y}) + (-\lambda\vec{y},\vec{x}-\lambda\vec{y}) = \begin{bmatrix} \text{следств} \\ 1 \end{bmatrix} =$

$= (\vec{x},\vec{x}) + (\vec{x},-\lambda\vec{y}) + (-\lambda\vec{y},\vec{x}) + (-\lambda\vec{y},-\lambda\vec{y}) =$

$= (\vec{x},\vec{x}) - \bar{\lambda}(\vec{x},\vec{y}) - \lambda\overline{(\vec{x},\vec{y})} + \lambda\bar{\lambda}(\vec{y},\vec{y}) =$

$= (\vec{x},\vec{x}) - \frac{\overline{(\vec{x},\vec{y})}}{(\vec{y},\vec{y})}(\vec{x},\vec{y}) - \frac{(\vec{x},\vec{y})}{\cancel{(y,y)}}\overline{(\vec{x},\vec{y})} + \frac{(\vec{x},\vec{y})\overline{(\vec{x},\vec{y})}}{\cancel{(y,y)}}$

$(\vec{x},\vec{x}) - \frac{\overline{(\vec{x},\vec{y})}(\vec{x},\vec{y})}{(\vec{y},\vec{y})} \geq 0$

$(\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y}) \geq |(\vec{x},\vec{y})|$

$|(\vec{x},\vec{y})| \leq (\vec{x},\vec{x})(\vec{y},\vec{y})$

$\blacksquare$

Матрица Грама

$$G = \begin{bmatrix} (\bar{x}_1, \bar{x}_1) & (\bar{x}_1, \bar{x}_2) & \dots & (\bar{x}_1, \bar{x}_n) \\ (\bar{x}_2, \bar{x}_1) & (x_2, x_1) & \dots & (\bar{x}_2, \bar{x}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{x}_n, \bar{x}_1) & (\bar{x}_n, \bar{x}_2) & \dots & (\bar{x}_n, \bar{x}_n) \end{bmatrix}$$

Теорема:

Следующие 2 утв равносильны:

1) $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \dots \vec{x}_n$ – лин зависимы

2) $\det G = 0$

$1 \Rightarrow 2$

$\square \quad \lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0}$

(умножаем скалярно на $x_1, x_2 \dots x_n$)

$$\begin{cases} \lambda_1 (\bar{x}_1, \vec{x}_1) + \lambda_2 (\bar{x}_2, \vec{x}_1) + \dots + \lambda_n (\vec{x}_n, \vec{x}_1) = \vec{0} \\ \lambda_1 (x_1, x_2) + \lambda_2 (\vec{x}_2, \vec{x}_2) + \dots + \lambda_n (\vec{x}_n, \vec{x}_2) = \vec{0} \\ \vdots \\ \lambda_1 (\bar{x}_1, \bar{x}_n) + \lambda_2 (\vec{x}_2, \vec{x}_n) + \dots + \lambda_n (\vec{x}_n, \vec{x}_n) = \vec{0} \end{cases}$$

однородная система

Если решение нетривиально $\det G = 0$. (см теор об однор системах)

$2 \Rightarrow 1$

Если $\det G = 0$, то $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \neq 0$

Рассмотрим эквив. систему:

$$\begin{cases} (\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \lambda_3 \bar{x}_3 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n, \bar{x}_1) = \vec{0} \\ (\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n, \bar{x}_2) = \vec{0} \\ \vdots \\ (\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n, \bar{x}_n) = \vec{0} \end{cases}$$

Умножим каждое уравнение на $\bar{\lambda}_i$ и воспольз. свойством скал. произв.

$(\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n, \lambda_1 \bar{x}_1) = \vec{0}$

$(\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n, \lambda_2 \bar{x}_2) = \vec{0}$

$\vdots$

$(\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n, \lambda_n \bar{x}_n) = \vec{0}$

Сложим все уравнения.

$(\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2+\ldots+\lambda_n\bar{x}_n, \lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2+\ldots+\lambda_n\bar{x}_n)=0$

$(\bar{x},\bar{x})=\bar{0}$, только если $\bar{x}=\bar{0}$

Получим, что

$\lambda_1\bar{x}_1+\lambda_2\bar{x}_2+\ldots+\lambda_n\bar{x}_n=\bar{0}$

получили линейную комбинацию, где $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2\neq 0$

$\Downarrow$

$\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\ldots\bar{x}_n$ - лин зависимы.

$\blacksquare$

Собственные числа

Теорема 1:

λ - собсвенное число матрицы A. $\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda E)=0$

По опред:

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}, \quad \underset{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}{E}\bar{x} = \bar{x}$$

$$A\bar{x} = \lambda E\bar{x} \qquad A\bar{x} - \lambda E\bar{x} = \bar{0}$$

$\Downarrow$

однородная система лин уравнений

$\Downarrow$

нетривиальное решение при $\det(A-\lambda E)=0$

Теорема 2:

$$\det(A-\lambda E) = P_n(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + P_{n-1}(\lambda)$$

Док во по мат индукции

а) $n=2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = \overbrace{a_{11}a_{22} - \lambda a_{11} - \lambda a_{22}}^{P_{n-1}(\lambda)} + \lambda^2 =$$

$$= (-1)^n\lambda^2 + P_{n-1}$$

б) $n=3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(многочлен первой степени)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}}_{(-1)^2\lambda^2 + P_1(\lambda)} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}}_{Q_1(\lambda)} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{T_1(\lambda)} =$$

$$= (a_{11}-\lambda)\left((-1)^2\lambda + P_1(\lambda)\right) - a_{12}Q_1(\lambda) + a_{13}T_1(\lambda) = (-1)^3\lambda^3 + P_2(\lambda)$$

в) для n

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)\left((-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + P_{n-2}(\lambda)\right) + Q_{n-2}(\lambda) =$$

$$= (-1)^n \lambda^n + \lambda P_{n-2}(\lambda) + Q_{n-2}(\lambda) =$$

$$= (-1)^n \lambda^n + P_{n-1}(\lambda) \quad \blacksquare$$

Подобная матрица

$$A \in M_{n\times n}, \quad B \in M_{n\times n}$$

$$A = S'^{-1} B S' \quad \det(S') \neq 0$$

Теорема:

Если A и B подобны и λ - собственное число матрицы A, то λ - собственное число матрицы B.

$\square$

$$A = S'^{-1} B S'$$

$$\det(A - \lambda E)$$

$$B - \lambda E \to S'^{-1}(B - \lambda E)S' = S'^{-1} B S' - \lambda E \underbrace{S'^{-1} S'}_{= E} = A - \lambda E \quad \blacksquare$$

Теорема:

Если A и B подобны, то $\vec{y} = S'\vec{x}$ - собственный вектор матрицы B, где $\vec{x}$ - собственный вектор матрицы A.

$\square$ $A = S'^{-1} B S'$

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$S'^{-1} B S' \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$(S' S'^{-1}) B S' \vec{x} = S' \lambda \vec{x}$$

$$B S'\vec{x} = \lambda S'\vec{x} \quad \blacksquare$$

Самосопряжённые матрицы

$A \in M_{n\times n}$

$A^* = (\bar{A})^T$

$a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Теорема:

если A - самосопряж, то

$$(A\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, A\bar{y})$$

$\square$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \bar{x} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \end{bmatrix}$$

$$(A\bar{x}, \bar{y}) = \left(\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \text{см скал} \\ \text{произведение} \\ \text{в координатах} \\ \text{в } \mathbb{C}^n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n (a_{1i} x_i) \cdot \bar{y}_1 + \sum_{i=1}^n (a_{2i} x_i) \bar{y}_2 + \dots +$$

$$+ \sum_{i=1}^n (a_{ni} x_i) \cdot \bar{y}_n = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j \sum_{i=1}^n (a_{ji} x_i) = \sum_{i,j=1}^n a_{ji} x_i \bar{y}_j \quad (\mathrm{I})$$

$$(\bar{x}, A\bar{y}) = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} y_j \end{bmatrix} \right) = x_1 \sum_{j=1}^n \bar{a}_{1j} \bar{y}_j + x_2 \sum_{j=1}^n \bar{a}_{2j} \bar{y}_j + \dots + x_n \sum_{j=1}^n \bar{a}_{nj} \bar{y}_j =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} \bar{y}_j = \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{a}_{ij} \bar{y}_j = \left[\overline{a_{ij}} = a_{ji} \right] = \sum_{i,j=1}^n a_{ji} x_i \bar{y}_j \quad (\mathrm{II})$$

Заметим, что (I) и (II) совпадают $\Rightarrow (A\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, A\bar{y})$ $\blacksquare$

Теорема 1: (теор о самосопр матрице)

Собственные числа самосопряжённой матрицы вещественны.

□ Из свойств самосопр. матрицы

$$(A\bar{x}, \bar{x}) = (\bar{x}, A\bar{x})$$

$$(\lambda\bar{x}, \bar{x}) = (\bar{x}, \lambda\bar{x}) \quad (\lambda \text{ - собств число } A)$$

$$\lambda(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{\lambda}(\bar{x}, \bar{x}) \quad \text{-(св-во скал произв)}$$

$$(\lambda - \bar{\lambda})(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{0}$$

$$\underset{0}{\parallel} \qquad \underset{0}{\nparallel} \text{ (т.к } \bar{x} \neq \bar{0} \text{ - 1 св-во скал произв)}$$

$$\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \ ■$$

Теорема 2:

Собственные векторы самосопряж матрицы образуют ортогональный базис (см опред.)

□ Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ - собственные числа A.

$x_1, x_2 \dots x_n$ - собственные векторы A.

$$(A\bar{x}_i, \bar{x}_j) = (\bar{x}_i, A\bar{x}_j) \quad (i \neq j)$$

$$(\lambda_i\bar{x}_i, \bar{x}_j) = (\bar{x}_i, \lambda_j\bar{x}_j)$$

$$\lambda_i(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \lambda_j(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \quad (\lambda_j, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ - теор 1 см выше})$$

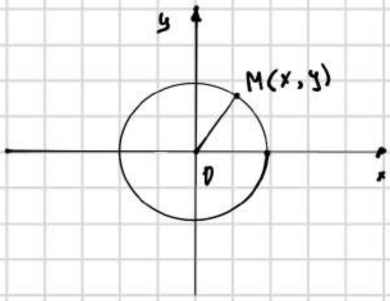
$$(\lambda_i - \lambda_j)(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \bar{0}$$

$$\underset{0}{\nparallel} \text{ т.к } (i \neq j) \qquad \underset{0}{\parallel} \Downarrow$$

попарное скал произв $= 0 \Rightarrow$ ортогональный базис ■

Кривые второго порядка

Окружность



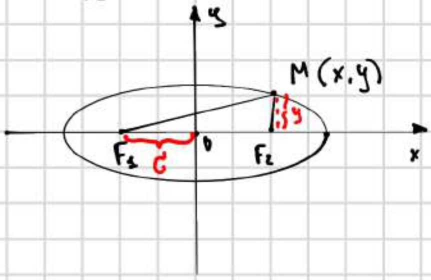
$$|\overline{OM}| = R$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = R$$

$$x^2+y^2=R^2$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

Эллипс



$$|\overline{F_1M}| + |\overline{F_2M}| = 2a$$

$$|\overline{F_1F_2}| = 2c \Rightarrow F_1(-c,0)$$

$$F_2(c,0)$$

см т. Пифагора

$$\sqrt{y^2+(c+x)^2} + \sqrt{y^2+(x-c)^2} = 2a.$$

$$\left(\sqrt{y^2+(c+x)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{y^2+(x-c)^2}\right)^2$$

$$\cancel{y^2}+\cancel{c^2}+2cx+\cancel{x^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2+(x-c)^2} + \cancel{y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2}$$

$$cx = a^2 - a\sqrt{y^2+(x-c)^2}$$

$$\left(a\sqrt{y^2+(x-c)^2}\right)^2 = (a^2-cx)^2$$

$$a^2(y^2+x^2-2cx+c^2) = (a^2-cx)^2$$

$$a^2y^2+a^2x^2-\cancel{2cx}a^2+a^2c^2 = a^4-\cancel{2cx}a^2+c^2x^2$$

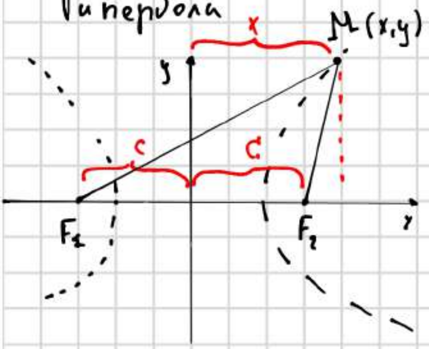
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$a^2-c^2=b^2 \quad |a>c| \text{ (нерав. треуг)}$$

$$x^2b^2+a^2y^2 = a^2b^2 \quad \Big| \times \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Гипербола



$$\big|\,|\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}|\,\big| = 2a$$

т. Пифагора

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \pm \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

далее аналогично элипсу

т.к возводим в квадрат

знаки уравняются

делаем до момента:

$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = (a^2-c^2)a^2$$

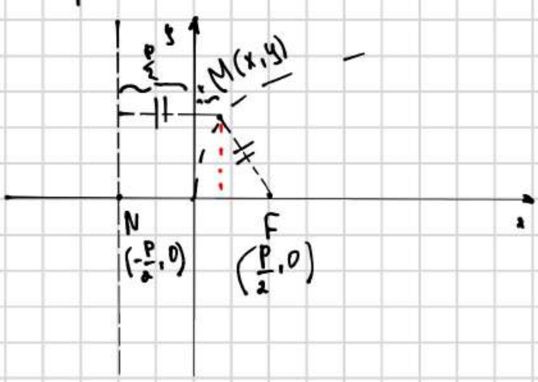
$$a^2 - c^2 = -b^2$$

$$\boxed{a < c} \Rightarrow a^2 < c^2$$

$$-x^2b^2 + a^2y^2 = -b^2c^2 \;\Big|\; \times \frac{1}{-b^2a^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Парабола



$$|\overline{NF}| = p$$

$$|MF| = d$$

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+y^2} = d$$

$$d^2 = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

$$y^2 = d^2 - \left(x-\frac{p}{2}\right)^2$$

$$y^2 = \left(d - x + \frac{p}{2}\right)\left(d + x - \frac{p}{2}\right)$$

$$d = \frac{p}{2} + x$$

$$y^2 = \left(\frac{p}{2} + \cancel{x} - \cancel{x} + \frac{p}{2}\right)\left(\cancel{\frac{p}{2}} + 2x - \cancel{\frac{p}{2}}\right)$$

$$y^2 = p\,2x \qquad y^2 = 2px$$