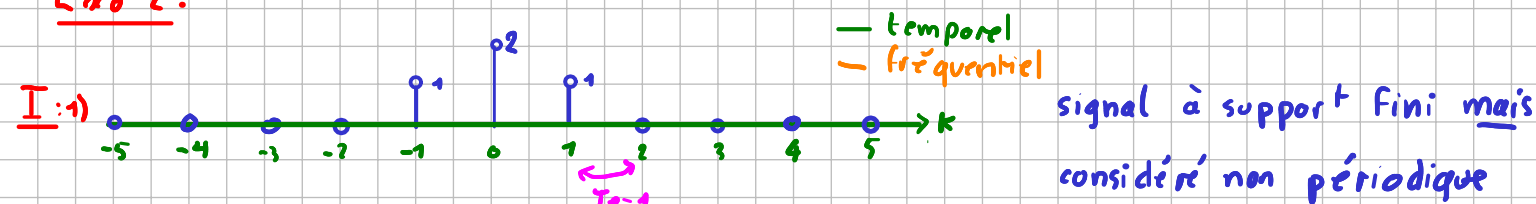


Exo 2:



1) Formulaire

$$\delta_0 \xrightarrow{\text{TFSD}} \hat{\delta}_0: f \mapsto 1 \quad (\text{exo 1})$$

$$\frac{\delta_{-a} + \delta_a}{2} \xrightarrow{\text{TFSD}} f \mapsto \cos(2\pi a n)$$

V sans dimension car $a \sim [s]$ et $n \sim [Hz]$

$$2\delta_0 + 2 \frac{\delta_{-1} + \delta_1}{2} \xrightarrow[\text{linéarité}]{\text{TFSD}} k \mapsto 2 + 2 \cos(2\pi a n)$$

avec $a=1$ on a $E(f) = 2 + 2 \cos(2\pi f)$

⚠ En fréquences normalisée! on suppose que $T_e = 1$ et donc $F_e = 1$

Donc pour T_e quelconque on "normalise" f à 1 avec $f \mapsto \frac{f}{F_e}$

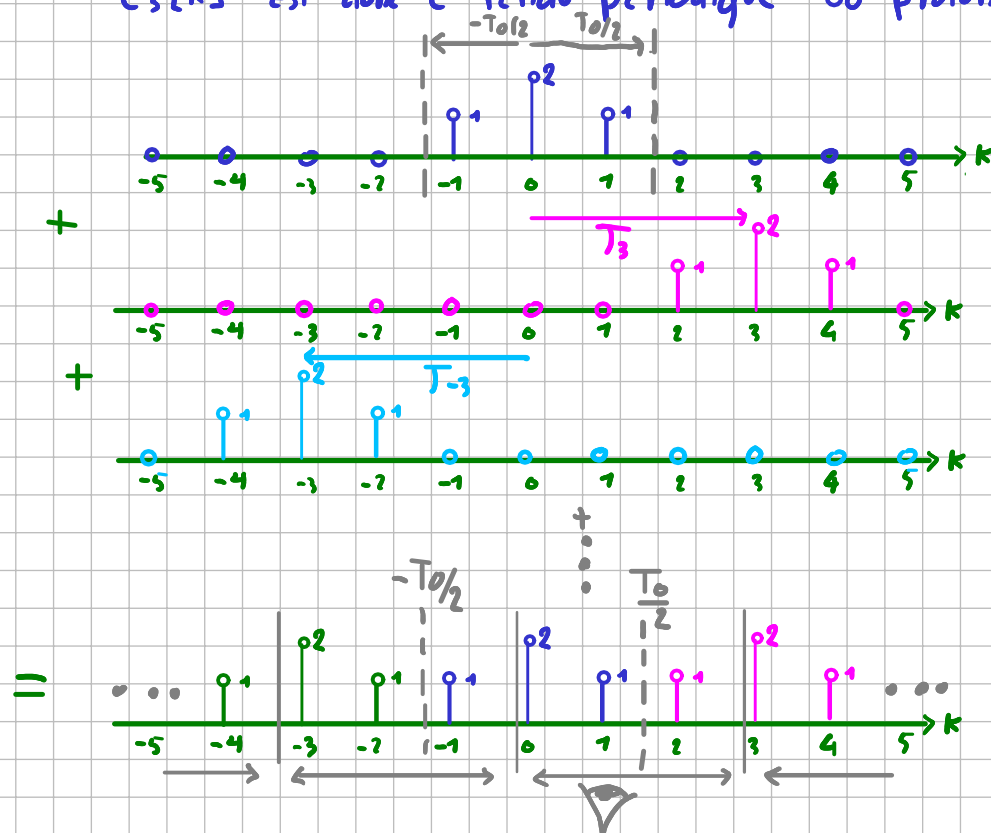
Donc $E(f) = 2 + 2 \cos(2\pi \frac{f}{F_e})$

Vois la vidéo "t42_exo2.1_dualité" pour avoir la tête bien faite plutôt que bien pleine et retrouver le Formulaire...

II) 3) TFD 3 points

TFD N=3 \Rightarrow temporel 3 périodique et fréquentiel 3 périodique discret

$e_3[k]$ est donc "rendu périodique ou prolongé par périodicité":



Echantillonner 3 points en fréquence rend le temporel 3 périodique

Aucun contenu temporel au delà de $\pm \frac{T_0}{2}$

\Downarrow
Pas de superposition de type $\bullet + \bullet + \bullet$
 \Rightarrow Pas de repliement temporel

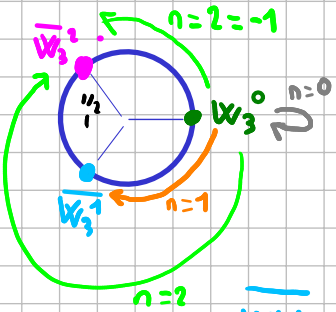
c'est le dual de l'échantillonnage temporel et repliement de spectre pour les spectres au delà de $\pm \frac{F_e}{2}$

Shanon

Donc $e_3 = (2, 1, 1)_{B_e}$ dans la base canonique $(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$

TFD 3 points :

En calcul matriciel :



$$\begin{aligned} n=0 &\rightarrow T \overline{w_0} \\ n=1 &\rightarrow T \overline{w_1} \\ n=2 &\rightarrow T \overline{w_2} \end{aligned}$$

$$P_{w \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{3}} & e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{3}} & e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix}$$

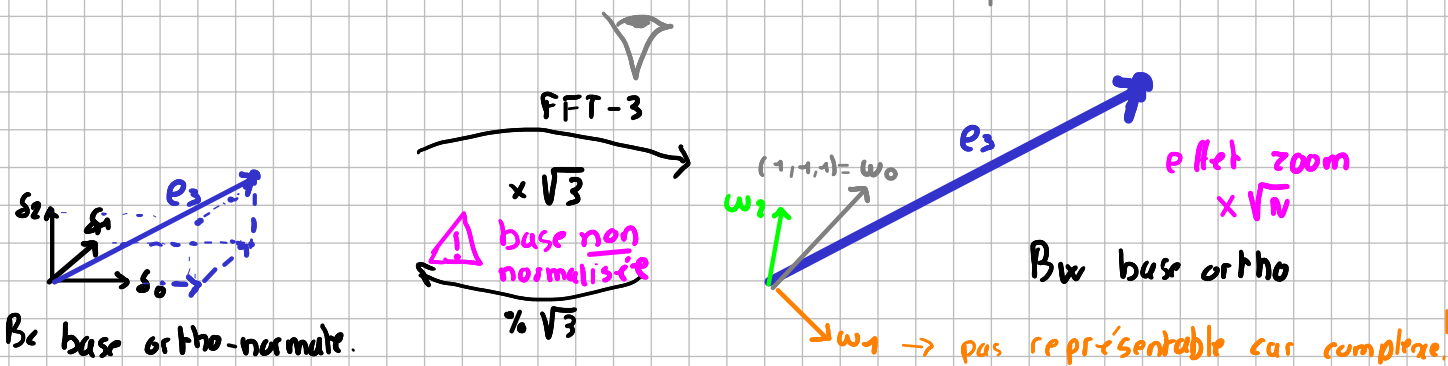
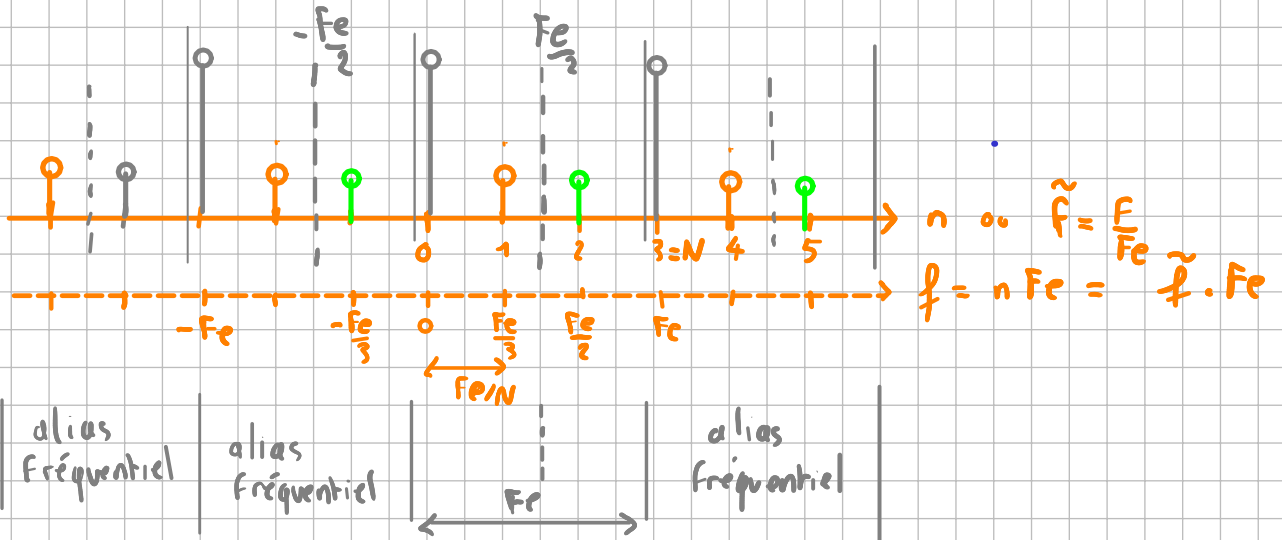
$P_{w \leftarrow B}$

$$B_c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} < e_3, w_0 > = 4 \\ < e_3, w_1 > = 1 = 2 \cdot 1 - 1 \\ < e_3, w_2 > = 1 \end{matrix} \Bigg|_{B_w}$$

$$\overline{w_3^1} = w_3^2$$

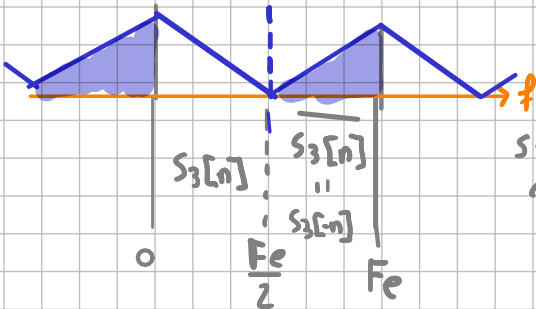
$$\text{et } \overline{w_3^1} + \overline{w_3^2} = -\frac{1}{2} + -\frac{1}{2} = -1$$

$$B_w = (w_0, w_1, w_2)$$



Vérif Hilbert :

$$S_3[-n] = \overline{S_3[n]}$$



$$\begin{aligned} S_3[N-n] &= S_3[-n] \\ \text{car } N \text{ périodique} \\ &= \overline{S_3[n]} \\ \text{car } S_3 \text{ réel} \end{aligned}$$

Vérif Norme :

$$\|e_{3_{B_c}}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6$$

$$\|e_{3_{B_w}}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 4^2 + 1 + 1 = 18$$

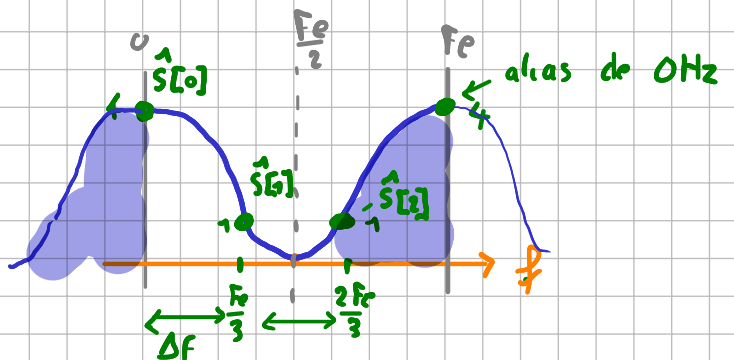
$$\|e_{3_{B_c}}\| = \sqrt{6}$$

$$\|e_{3_{B_w}}\| = \sqrt{18} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$$

car base FFT non normalisée

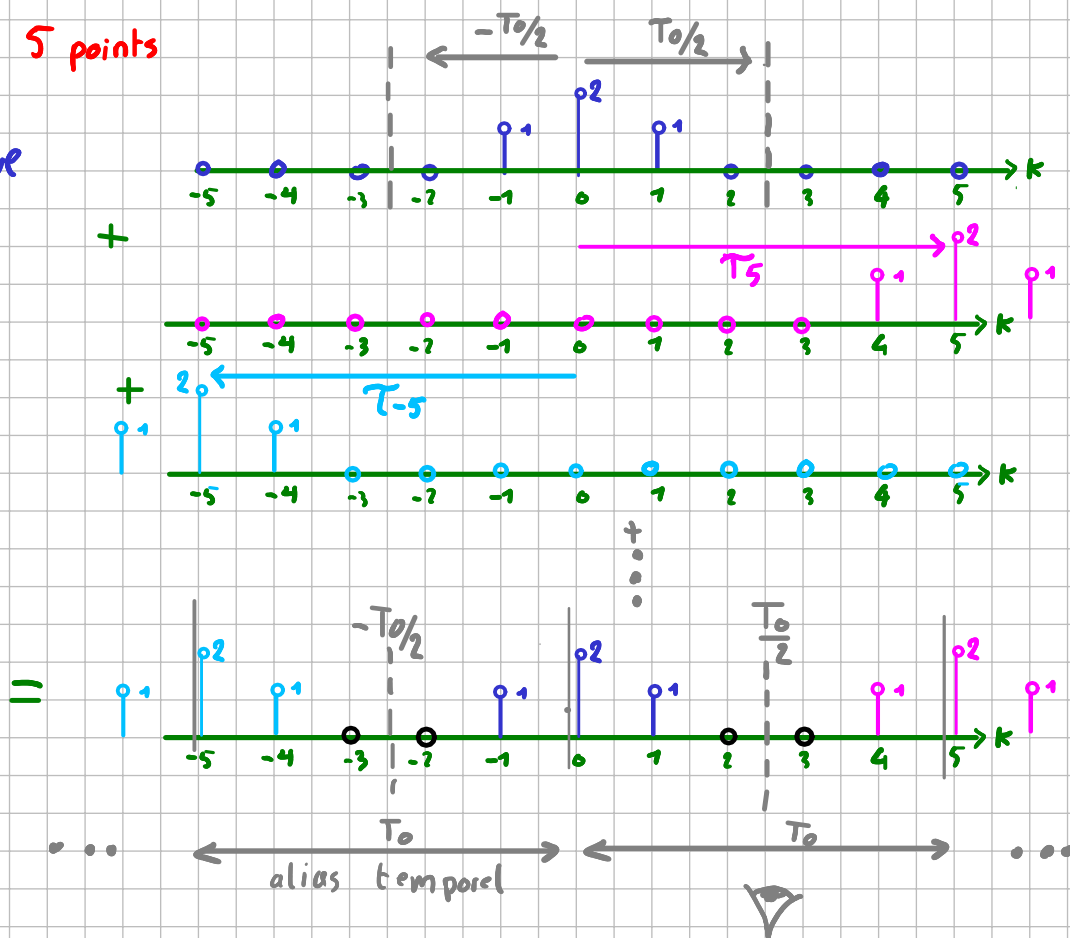
Vérif échantillonnage TFS:

$$\Delta F = \frac{F_e}{N} = \frac{F_e}{3}$$



4) TFD 5 points

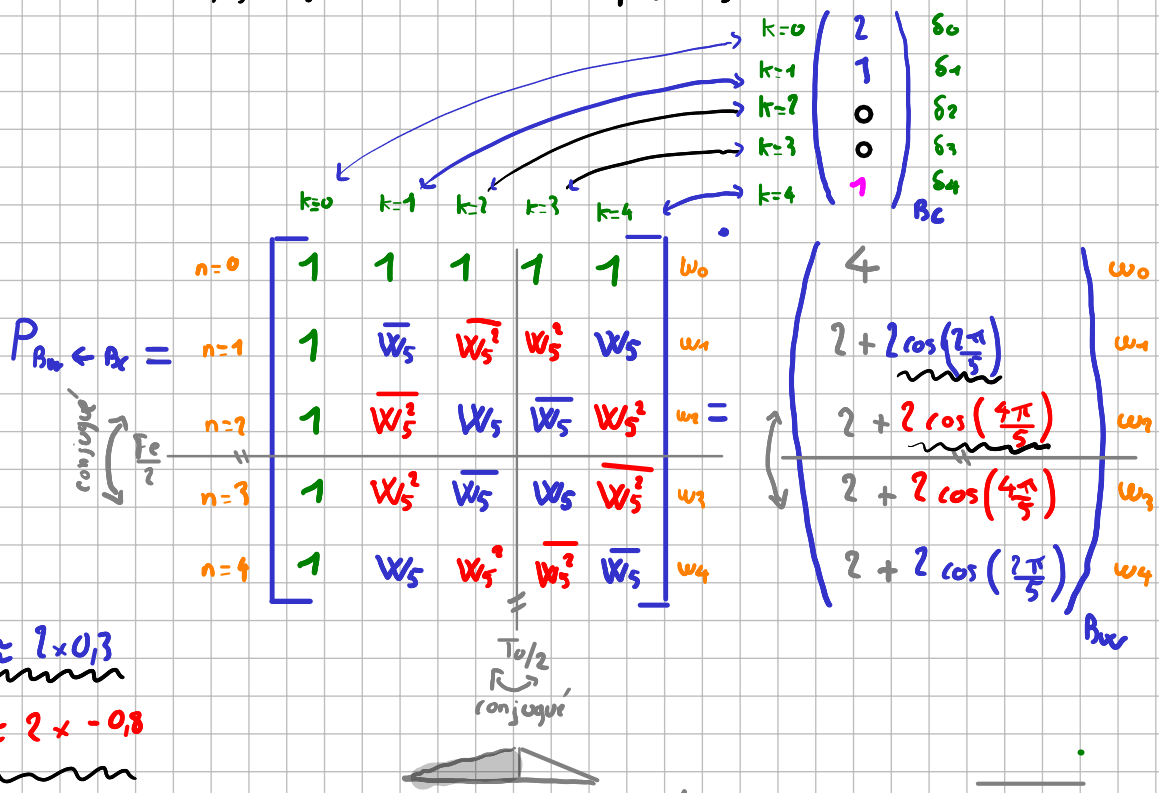
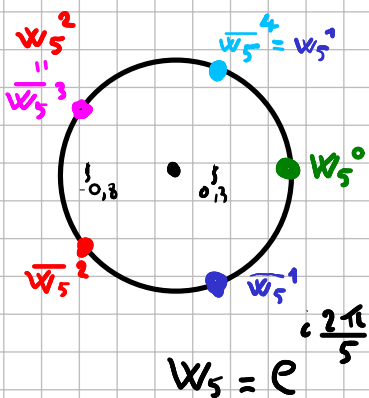
5 périodique



Toujours pas de signal au delà de $\pm \frac{T_0}{2} = \pm \frac{5}{2} \Rightarrow$ pas de repliement temporel
avec période 5: Shannon ok

Donc $s_5 = (2, 1, 0, 0, 1)$ dans $B_c = (\vec{\delta}_0, \vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_3, \vec{\delta}_4)$
 \rightarrow gavage de zéros = zero padding

FFT-5 matriciel



$$2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = w_5^1 + \overline{w_5^1} \approx 2 \times 0.3$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = w_5^2 + \overline{w_5^2} \approx 2 \times -0.8$$

Vérif Hilbert:

Voilà le conjugué \checkmark $\hat{s}_5[-n] = \hat{s}_5[N-n] = \overline{\hat{s}_5[n]}$
période N \leftarrow signal réel

Vérif norme:

$$\|s_5\|_2^2 = \|s_5\|_1^2 = 2^2 + 1 + 1 = 6$$

$$\|s_5\|_2^2 = 4^2 + 2 \left(2 + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right)^2 + 2 \left(2 + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right)^2$$

$$= 16 + 8 \left[\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right)^2 + \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right)^2 \right]$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 \rightarrow zero padding
ne change pas
l'énergie

$$\sqrt{6}^2 \xrightarrow[\times 5 = N]{\times \sqrt{5}^2} (\sqrt{5}\sqrt{6})^2 = 16 + 8 \cdot \frac{7}{4} = 16 + 14 = 30$$