1. Les bases de Fourier

Ce chapitre présente les transformées, séries de FOURIER et introduit la transformée deFOURIER Discrète en se basant sur une analogie entre les espaces vectoriels Euclidiens et les espaces de Hilbert où :

— un vecteur est un signal sous forme d'une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$;
— le produit scalaire de deux vecteurs est sous forme d'intégrale (ou somme) du produit ;
— les coefficients peuvent être complexe $\mathbb{C}$-espace vectoriel et non $\mathbb{R}$-espace vectoriel comme pour les Euclidiens, ce qui change la propriété de symétrie du produit scalaire.

La Fig. 1.1 mets en évidence cette analogie et souligne le fait que transformer un signal avec un produit scalaire revient à a effectuer un changement de base.

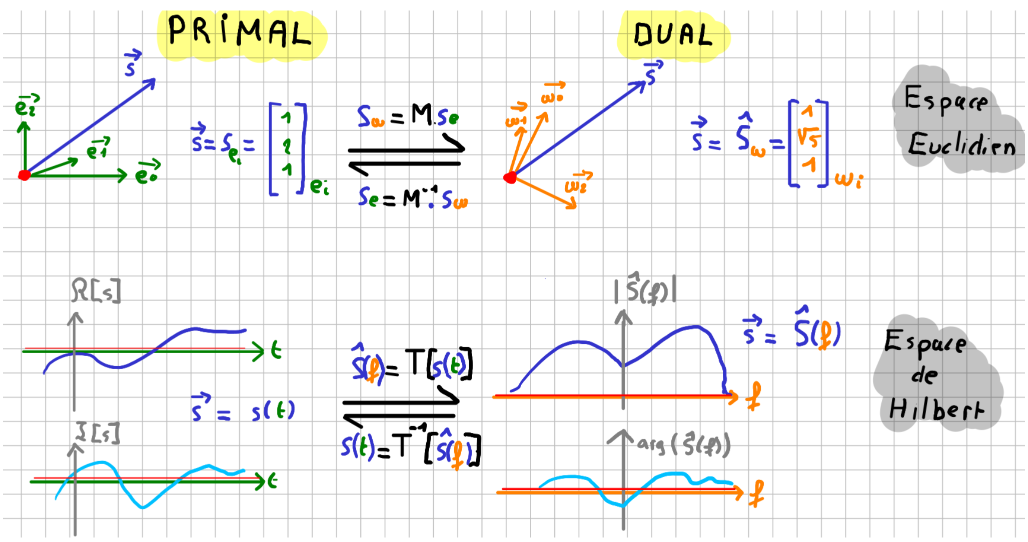


FIGURE 1.1 – Changement de base d'un vecteur dans un espace Euclidien de $\mathbb{R}^3$ et transformation d'une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dans un espace de Hilbert.

On utilise par habitude la variable t car l'espace de départ est souvent des *fonctions du temps*. On nomme *espace primal* ce premier espace considéré.

En décomposant un signal vecteur dans une base, on va pouvoir représenter ce signal par ses coordonnées dans la base d'arrivée, on dit plutôt composantes pour un signal. On obtient alors un « signal des composantes » dans un espace que l'on appelle *espace dual*. Comme l'on utilise la plupart des temps des bases dites fréquentielles, la variable de l'espace dual est notée f et correspond aux *fonctions de la fréquence*.

R **Pourquoi du complexe pour du réel ?**
On considère le cas général des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ car cela permet :
- de représenter des signaux de type phaseur (vecteurs en rotation)
- de représenter facilement des signaux réels dont la bande de fréquence est finie (signaux dits *bande étroite*)
- de pouvoir appliquer la trasnformée de FOURIER à une transformée de FOURIER (qui est complexe même pour des signaux réels) et de voir l'opération de transformée comme un isomorphisme et de jouer avec la notion de dual.

La base de vecteurs utilisée dans les transformées de FOURIER $\left(t \mapsto e^{2\pi f t}\right)_{f\in\mathbb{R}}$ va être déclinée en différentes bases selon que l'on va discrétiser une des variables :

temps discret où la variable $t \in \mathbb{R}$ sera remplacée par une variable discrète $k \in \mathbb{N}$ avec la relation $t = kT_e$ où T_e est la valeur qui sépare deux échantillons en temps est nommé *période d'échantillonnage*.

frequences discrètes où la variable $f \in \mathbb{R}$ sera remplacée par une variable discrète $n \in \mathbb{N}$ avec la relation $f = n\Delta_f$ où Δ_f est la valeur qui sépare deux échantillons en fréquence est nommé *résolution fréquentielle*

Selon la dimention continue (infinie indénombrable) ou discrète (infinie dénombrable ou finie) des espaces primal et dual, on utiliser différents produis scalaires pour effectuer différente transformées entre primal et dual.

1.1 Les espaces et produits scalaires associés

Nous allons considérer des espaces de fonctions tantôt à variables continues puis discrètes, et en même temps sur des supports infinis ou bornés. Dans le cas de fonctions bornées (définies sur un intervalle $[a, a+T_0[$ en continu ou $[\![a, a+N[\![$ en discret), on peut **toujours** prolonger cette fonction en dehors du support de manière périodique, plutôt que par des zéros, car cela permet d'avoir une représentation en séries de FOURIER (SdF) (cas continu) ou en Transformée de Fourier Discrète (TFD) dans le cas discret.

Les produits scalaires pour différents espaces de fonctions sont définis et illustrés dans la Tab. 1.1 en prenant :
- en rangées du tableau les signaux de la *variable continue* (intégrale continue) ou bien de la *variable discrète* (somme discrète) ;
- en colonnes du tableau les *supports infinis* (de $-\infty$ à ∞) ou bien support *périodiques/borné* (de 0 à T_0 ou N).

Exercice 1.1 Propriété de scalaire et norme dans le cas général
On aurait pu définir ces produits scalaires en ne prenant jamais le conjugué d'une fonction g (ou en considérant des fonction à valeurs réelles de manière à ignorer ce conjugué car $\overline{g} = g$).
1. Vérifiez dans le cas réel (sans conjugué) que le produit $\langle f, g\rangle$ à les propriété d'un produit scalaire, en déduire la norme induite $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$ et déterminer la dimention de $\|f\|^2$: est-ce de la puissance ou de l'énergie, est-ce une valeur ou une densité ?
2. Appliquez cette norme (toujours sans le conjugué) au signal imaginaire pur $f : t \mapsto i$.

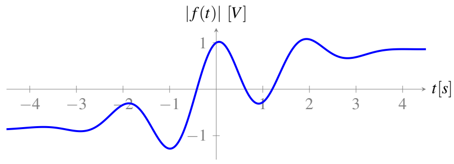
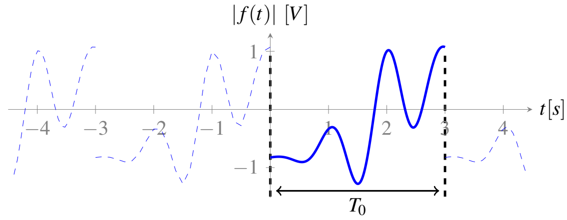
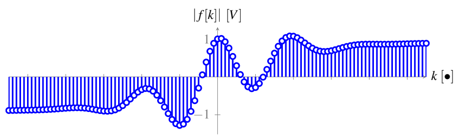
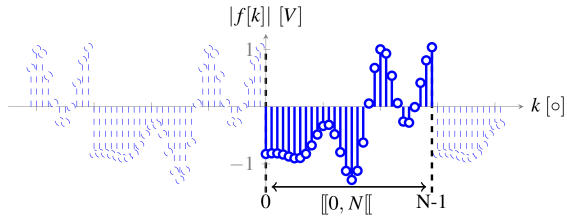
	Support infini	Support fini ou périodique
variable continue	 $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t).\overline{g(t)}\ \mathrm{dt} \quad \bowtie \left[\frac{V^2}{\mathrm{Hz}}\right]$	 $f:\mathbb{R}_{T_0}\mapsto\mathbb{C}$ ou $f:\ [0,T_0[\mapsto\mathbb{C}$ $\langle f,g\rangle_P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t).\overline{g(t)}\ \mathrm{dt} \quad \bowtie \left[V^2\right]$
variable discrète	 $\mathbb{N}\mapsto\mathbb{C}$ $\langle\!\langle f,g\rangle\!\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} f[k].\overline{g[k]} \quad \bowtie \left[V^2\right]$	 $\mathbb{Z}_{N_0}\mapsto\mathbb{C}$ ou $[\![0,N[\![\ \mapsto\mathbb{C}$ $\langle\!\langle f,g\rangle\!\rangle_P = \sum_{k=0}^{N-1} f[k].\overline{g[k]} \quad \bowtie \left[V^2\right]$

TABLE 1.1 – Les produits scalaires adaptés aux différents espaces de fonctions. Par clarté, on ne représente que le module de la fonction qui est dans la cas général complexe.

Quelle propriétée de la norme n'est pas respectée ?

3. Refaites de même en prenant cette fois-ci les formules de Tab. 1.1 avec le conjugué de g et vérifiez que cette propriété est vérifiée dans le cas général des fonctions à variables complexes.
4. Vérifiez que $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$ et que donc le produit scalaire est linéaire à gauche $\forall\lambda\in\mathbb{C},\ \langle\lambda f,g\rangle = \lambda\langle f,g\rangle$ et *à moitié linéaire* à droite $\forall\lambda\in\mathbb{C},\ \langle f,\lambda g\rangle = \overline{\lambda}\langle f,g\rangle$

On comprend maintenant pourquoi, dans le cas général des fonctions à valeurs complexes, on utilise le conjugué dans l'expression des produit scalaires et pourquoi on parle de produit *sesqui–linéaire* pour ces produits scalaires : *sesqui* en latin voulant dire « un et demi » en latin. ■

Le produit scalaire est très utile car il permet d'obtenir :

— de mesurer des longueurs de signaux avec la norme induite par le produit scalaire $\|\overrightarrow{s}\| = \langle\overrightarrow{s},\overrightarrow{s}\rangle$, et de mesurer des distances entre signaux avec la norme de la différence $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|$;

— de projeter un vecteur sur un autre ou sur un sous-espace vectoriel : cela revient à minimiser une distance $P_v(u) = \min_{x\in\mathrm{vect}(u)} (\|u-x\|)$ par simple calcul direct ;

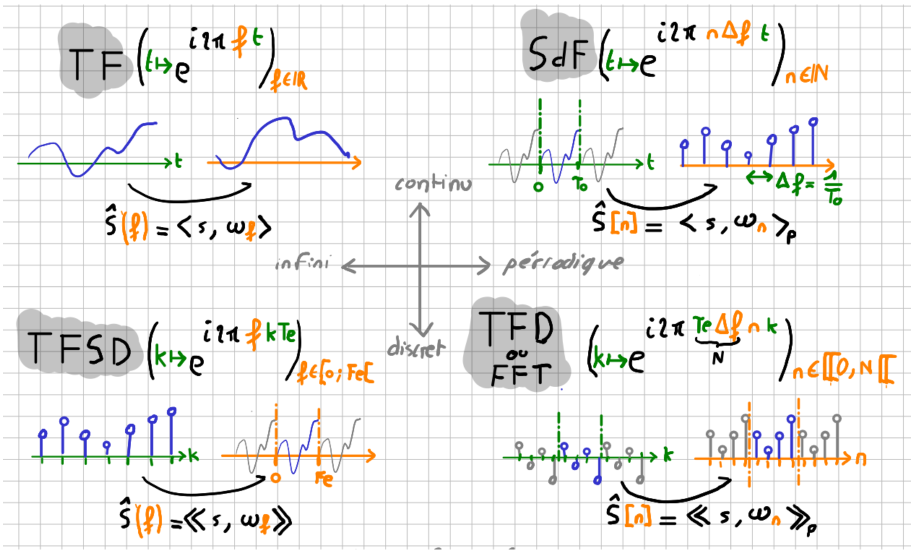
— trouver les meilleures, au sens de la distance avec la norme engendrée, décompositions d'un signal u sur une base de vecteurs données : calculer des transformées de signaux.

La Tab. 1.2 montre le parallèle entre l'utilisation du produit scalaire sur des vecteurs et sur des signaux, chacune permet de retrouver des formules bien connues des SdF et des TF.

1.2 Les transformations

En prenant la base des ondes complexes adaptée à chaque espaces de signaux (discrétisée ou non, sur un intervalle infini ou borné/périodique), et en utilisant les produits scalaires adaptés, on peut définir quatre types de transformations et leur réciproques entre un primal avec une base canonique purement localisée dans le temps (et infiniment étendue en fréquence) et un dual composé d'une base d'ondes purement localisées fréquentielles (et infiniment étendue en dans le temps).

Le schéma ci dessous résume ces transformées, leurs base et les produits scalaires associés à chaque transformation :



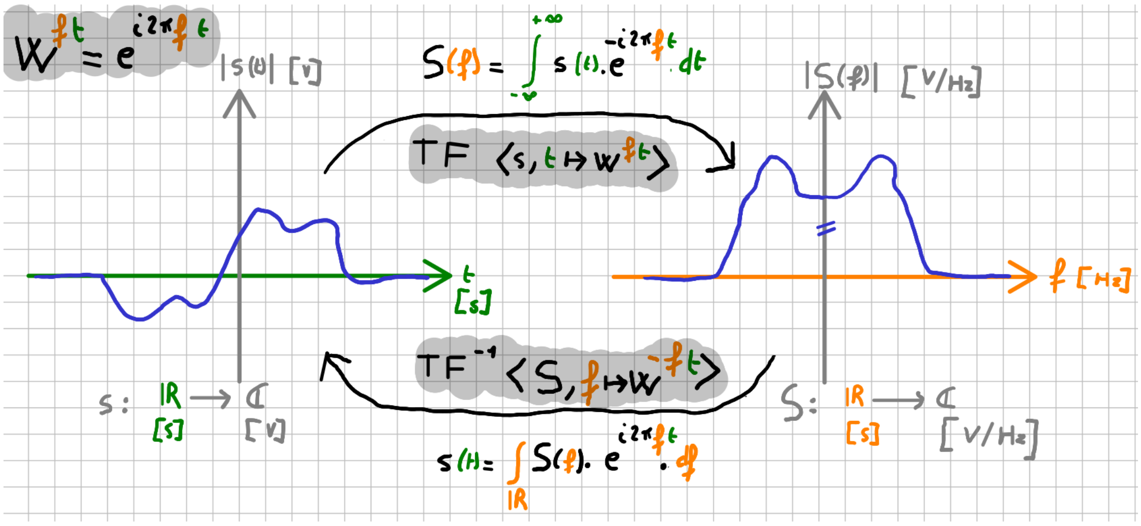
1.2.1 Base de la TF

La TF (Transformée de FOURIER), ou FT (*Fourier Transform*) en anglais, s'applique aux fonction continues et utilise une base d'ondes complexes $B_F = \left(\underbrace{t \mapsto e^{i2\pi f t}}_{w_f}\right)_{f\in\mathbb{R}}$.

Exercice 1.2 Tentez de retrouver la formule de la transformée et son inverse et d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en se rappelant juste que c'est une application de

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C} \xrightarrow{TF} \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire continu noté $\langle , \rangle$ avec la base continue $B_F = (w_f)_{f\in\mathbb{R}}$ ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens mais pas l'amalgame, car :

— le produit scalaire $\langle , \rangle$ est défini dans le cas de fonctions de carré intégrable, ou *fonction à énergie finie*, que nous notons $\mathscr{L}_2$,
— les vecteurs de la base ne sont pas normés car de norme infinie ;
— la base n'est pas finie, ni infinie dénombrable mais infinie indénombrable.

Mais lorsque l'on se place dans le cas de fonctions de carré intégrable, ou fonction à énergie finie, que nous notons $\mathscr{L}_2$, l'espace est complet (les suites de Cauchy convergent) dont les sommes infinies se comporte bien dans $\mathscr{L}_2$: c'est une espace de Banach. De plus le produit scalaire associé à la norme 2 existe et on a donc un espace de HILBERT où la norme et le produit scalaire sont des application linéaire dans $\mathscr{L}_2$. Comme il s'agit d'une espace de dimention infinie, il ne suffit pas d'avoir une base de dimention infinie pour couvrir tout l'espace, mais dans le cas de $\mathscr{L}_2$ avec la base $\mathrm{B_F}$ on montre que tout l'espace est engendré.

Bref ! ça fonctionne tout comme un espace Euclidien sans en être un.

Exercice 1.3 Prendre la base $\mathrm{B_F} = (w_f)_{f\in\mathbb{R}}$ et utiliser la partie espace indénombrable de la Tab. 1.2 pour retrouver les formules de PLANCHEREL et PARSEVAL. ■

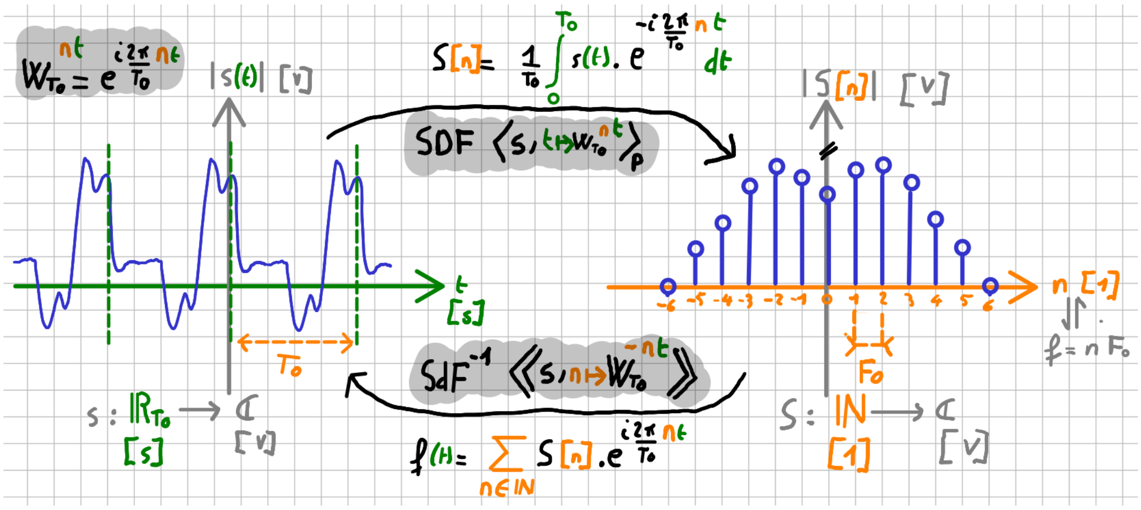
1.2.2 Base des SdF

Les SdF (Séries de FOURIER), ou FS (*Fourier Series*) s'appliquent aux fonctions continues périodiques et utilisent une base dénombrable $\mathrm{B_F} = \left(t \mapsto \underbrace{W_{T_0}^{nt}}_{w_{T_0}^n} = e^{i\frac{2\pi}{T_0}nt}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $W_{T_0} = e^{i\frac{2\pi}{T_0}}$.

Exercice 1.4 Tentez de retrouver la formule de la décomposition et recomposition en SdF et d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en se rappelant juste que c'est une application de

$$\mathbb{R}_{T_0} \to \mathbb{C} \xrightarrow{SdF} \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire continu périodique noté $\langle , \rangle_P$ et avec la base discrète $\mathrm{B_F} = \left(W_{T_0}^n\right)$. ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens mais pas l'amalgame, car :

— le produit scalaire $\langle , \rangle_P$ est défini dans le cas de fonctions périodiques de carré intégrable, *fonctions de puissance moyenne finie*, que nous notons $\mathscr{L}_{p2}$

— ce n'est pas un isomorphisme car on passe d'un espace continu périodique à un espace discret ! La transformée inverse se fait avec le produit scalaire discret $⟪ , ⟫$

— la base n'est pas finie, mais infinie dénombrable ;

Bref ! cela fonctionne un peu comme un espace Euclidien fini sans en être un...

Exercice 1.5 Prendre la base

$$\mathrm{B_F} = \left(\underbrace{t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} n t\right)}_{\cos_n} \right)_{n \geq 1} \cup \left(\underbrace{t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} n t\right)}_{\sin_n} \right)_{n \geq 1} \cup (t \mapsto 1)$$

et voir que l'on retrouve les formules des coefficients $a[n]$, $b[n]$ et a_0 **à un facteur 2 près !**

Et oui ! La base n'est pas normée car un rapide calcul montre que la norme des vecteurs vaut $\frac{1}{2}$ (on peut se rappeler que la valeur efficace d'un cosinus d'amplitude 1 est $\frac{\sqrt{2}}{2}$; sa puissance moyenne sur une période est donc le carré de $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

En prenant la base normée

$$\mathrm{B_F}' = \left(\underbrace{\sqrt{2}\cos_n}_{\cos'_n} \right)_{n \geq 1} \cup \left(\underbrace{\sqrt{2}\sin_n}_{\sin'_n} \right)_{n \in \mathbb{Z}^*} \cup (t \mapsto 1)$$

on obtient une définition des SdF chère aux physiciennes :

$$s(t) = \left(\begin{array}{c} \underbrace{\langle s, t \mapsto 1 \rangle_P}_{a_0} \; 1 \\ + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \cos'_n \rangle_P}_{a'[n]} \cos'_n(t) \\ + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \sin'_n \rangle_P}_{b'[n]} \sin'_n(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} a_0 \\ + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \sqrt{2}\cos_n \rangle_P}_{\sqrt{2}a[n]} \sqrt{2}\cos_n(t) \\ + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \sqrt{2}\sin_n \rangle_P}_{\sqrt{2}b[n]} \sqrt{2}\sin_n(t) \end{array} \right) \tag{1.1}$$

Avec $\|t \mapsto 1\|^2 = 1$, $\|\cos'_n\|^2 = \left\|\sqrt{2}\cos_n\right\|^2 = 1$ et $\left\|\sqrt{2}\sin_n\right\|^2 = 1$

On peut ne pas normer les vecteurs, et c'est le plus fréquent, mais introduire un facteur 2 dans la formule de calcul des coefficients $a[n]$ et $b[n]$ qui n'apparait pas dans les coefficients $c[n]$:

$$s(t) = \begin{pmatrix} \underbrace{2\langle s, t\mapsto 1\rangle_P}_{a_0} 1 \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2\langle s, \cos_n\rangle_P}_{a[n]} \cos_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2\langle s, \sin'_n\rangle_P}_{b[n]} \sin_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_0}{2} \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2\langle s, \cos_n\rangle_P}_{a[n]} \cos_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2\langle s, \sin_n\rangle_P}_{b[n]} \sin_n(t) \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Avec $\|t \mapsto 1\|^2 = 1$, $\|\cos_n\|^2 = \|\sin_n\|^2 = \frac{1}{2}$.

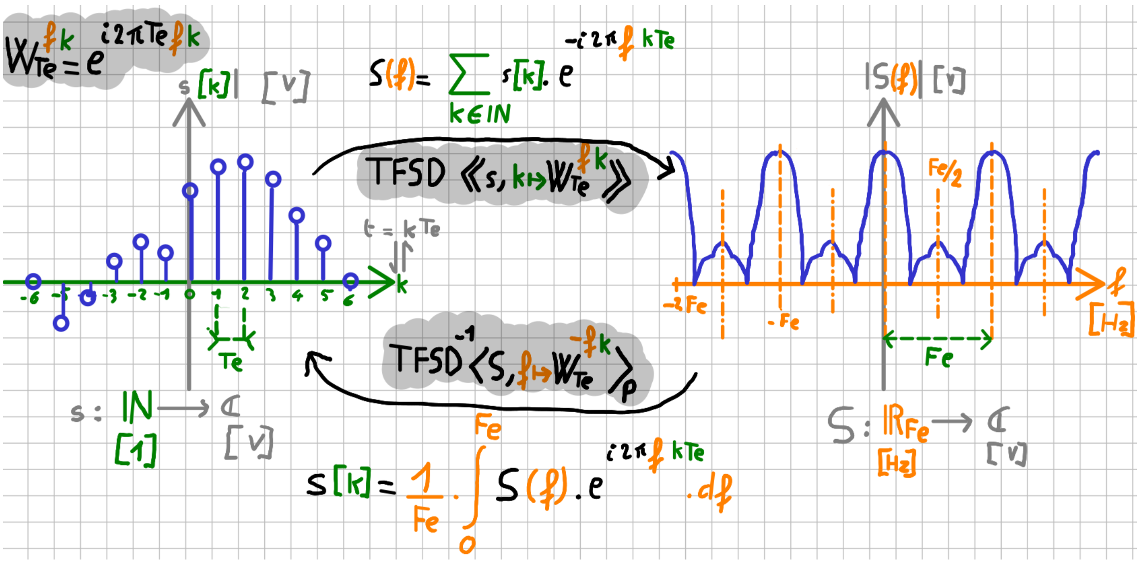
1.2.3 Base de la TFSD

La TFSD (Transformée de FOURIER des Signaux Discrets), ou DTFT (*Discrete Time Fourrier Transform* en anglais, s'applique aux fonctions à variable discrète et utilise une base d'ondes complexes indénombrable $\mathrm{B_F} = \left(\underbrace{k \mapsto W_{T_e}^{fk} = e^{i2\pi T_e f k}}_{w_{T_e}^f}\right)_{f\in[0,\,F_e[}$ avec $W_{Te} = e^{i2\pi T_e}$.

Exercice 1.6 Tentez de trouver la formule de cette TFSD et son inverse, d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en pensant que c'est la « duale » de la SdF. Il s'agit d'une application de

$$\mathbb{N} \to \mathbb{C} \xrightarrow{TFSD} \mathbb{R}_{F_e} \to \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire discret noté $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ avec la base continue $\mathrm{B_F} = \left(w_{T_e}^f\right)_{f\in[0,\,F_e[}$



On peut difficilement faire l'analogie avec les espaces Euclidiens car :
- le produit scalaire $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle$ fonctionne dans le cas de suites discretes absolument convergentes ;
- ce n'est pas un isomorphisme car on passe d'un espace discret à un espace continu périodique !

La transformée inverse se fait avec le produit scalaire continu périodique $\langle , \rangle_P$ (Attention la période dans l'espace des fréquences est F_e) ;
— la base n'est pas finie, ni dénombrable mais infinie indénombrable.

Exercice 1.7 On admet pour le moment que la TFSD d'un signal $s[k]$ quelconque est une fonction $S(f)$ de période F_e. On peut donc voir $S(f)$ comme une fonction de période F_e de la variable réelle f et y appliquer une décomposition en séries de FOURIER !

Faites-le et comparez avec la TFSD inverse. Vous venez de basculer dans un dual ! D'ailleurs on peut voir $s[k]$ comme les coefficients de FOURIER d'une fonction de fréquence fondamentale T_E et appliquer une recomposition de la série et trouver $S(f)$.

Donc TFSD=SdF^{-1} et inversement SdF=TFSD^{-1} ■

1.2.4 Base de la TFD et FFT

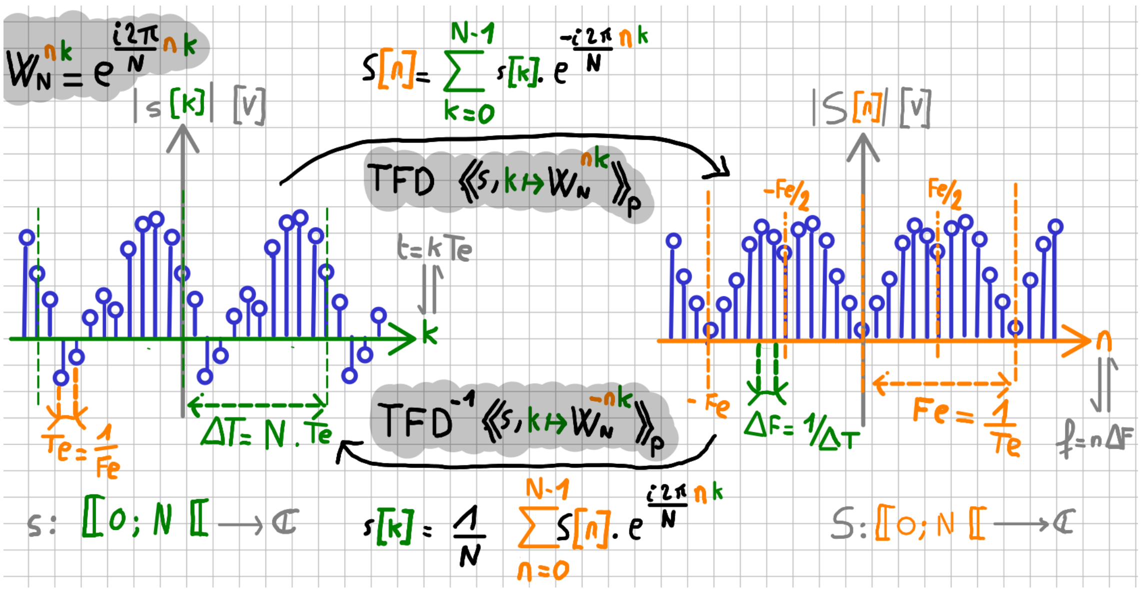
La TFD (Transformée de FOURIER Discrète), ou DFT (*Direct Fourier Transform*) en anglais, s'applique aux fonctions discrètes à support fini et utilisent une base d'ondes complexes discrète finie $\mathrm{B_F} = \left(\underbrace{k \mapsto W_N^{nk} = e^{i\frac{2\pi}{N}nk}}_{W_N^n} \right)_{n \in [\![0, N_0[\![}$ avec $W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$.

La FFT (*Fast Fourier Transform* en anglais uniquement) est un algorithme efficace de calcul de la TFD : c'est donc la même transformation avec les mêmes valeurs !

Exercice 1.8 Tentez de trouver la formule de cette TFD et son inverse, d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder. Il s'agit d'une application de

$$[\![0, N_0[\![\to \mathbb{C} \xrightarrow{TFD} [\![0, N_0[\![\to \mathbb{C}$$

basée sur le p.s. discret périodique noté $\langle\!\langle , \rangle\!\rangle_P$ avec la base continue $\mathrm{B_F} = (w_N^n)_{n \in [\![0, N_0[\![}$ ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens finis et **on peut faire l'amalgame !** car c'en est un mais dans $\mathbb{C}$ donc :
— le produit scalaire n'est pas symétrique mais « symétrique et demi » c.-à-d.*sesquilinéaire* car $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

Base pas normée
Le terme $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ est en fait une racine Nième de l'unité. Le calcul de la norme $\|w_n\|$ du vecteur de la base $w_n = k \mapsto W_N^{-nk}$ devient donc :

$$\langle\!\langle w_n, w_n \rangle\!\rangle_P = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}nk} . e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

La formulation normée et symétrique de la TFD (1.3) fait donc intervenir un facteur $\frac{1}{\sqrt{N}}$ pour la TFD et son inverse :

$$s[k] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\langle\!\langle s, w_n' \rangle\!\rangle_P}_{S[n]} w_n' \quad = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle\!\langle s, \tfrac{w_n}{\sqrt{N}} \rangle\!\rangle_P \tfrac{w_n}{\sqrt{N}} \quad \text{avec } \left\|w_n'\right\|^2 = \left\| \frac{w_n}{\sqrt{N}} \right\|^2 = 1 \qquad (1.3)$$

Pour des raisons de simplicité et de contrainte de calcul numérique, la formulation non normée (1.4) est largement utilisée. Cela fait donc apparaitre le terme $\frac{1}{N}$ dans la TFD inverse.

$$s[k] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\langle\!\langle s, w_n \rangle\!\rangle_P}_{S[n]} \frac{w_n}{N} \quad = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle\!\langle s, w_n \rangle\!\rangle_P \tfrac{w_n}{N} \quad \text{avec } \|w_n\|^2 = N \qquad (1.4)$$

Exercice 1.9 Tout comme la TF, la TFD est un isomorphisme bidual. Pour un signal s quelconque, calculez la transformée de la transformée et montrez que $\underbrace{\mathscr{F} \circ \mathscr{F}}_{\mathscr{F}^2}[s] = \mathscr{F}\left[\mathscr{F}\left[t \mapsto s(t)\right]\right] = t \mapsto s(-t)$. Donc si on recalcule deux fois la transformée on obtient le signal d'origine et on montre que $\mathscr{F}^2$ est sa propre réciproque. Déduisez une technique pour calculer la transformée inverse $\mathscr{F}^{-1}$ en utilisant la transformée $\mathscr{F}$.

Faites de même pour la TFD ■

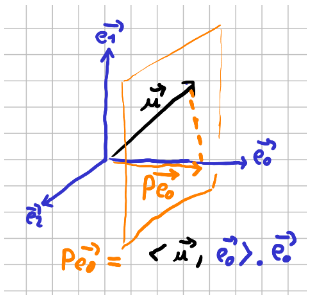
<table>
<tr><th></th><th>Euclidien fini</th><th>Espace de fonctions</th></tr>
<tr><td>Base Ortho–normée</td><td>une base finie de vecteurs
$$B=(\vec{e_n})_{n\in\mathbb{Z}_{N_0}}$$
normés $\|\vec{e_n}\|=1$ et orthogonaux $\langle\vec{e_n},\vec{e_m}\rangle=0$</td><td>base dénombrable de fonctions $(\vec{w_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ou indénombrable $(\vec{w_f})_{f\in\mathbb{R}}$ repérées par leur fréquences f ou un indice n associé ; fonctions d'énergie unitaire $\|\vec{w_n}\|=1$ ou $\|\vec{w_f}\|=1$, et orthogonales $\langle\vec{w_n},\vec{w_m}\rangle_P=0$ ou $\langle\vec{w_f},\vec{w_{f'}}\rangle=0$</td></tr>
<tr><td>Analyse</td><td>décomposer un vecteursdans cette base en coefficients $V_n=\langle\vec{v},\vec{e_n}\rangle$ et en donner les coordonnées
$$\underbrace{V|_B}_{=\vec{v}}=\begin{bmatrix}V_0=\langle\vec{v},\vec{e_0}\rangle\\ \vdots\\ V_{N-1}=\langle\vec{v},\vec{e_{N-1}}\rangle\end{bmatrix}_B$$</td><td>décomposer une fonction $\vec{u}$ en fréquentiel avec la transformée $U(f)$ ou avec les coéfficients $U(n)$ de la série :
$$U(f)=\langle\vec{u},\vec{w_f}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\overline{w_f(t)}\,dt$$
$$U(n)=\langle\vec{u},\vec{w_n}\rangle_P=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}u(t)\overline{w_n(t)}\,dt$$</td></tr>
<tr><td>Synthèse</td><td>recomposer un vecteur dans cette base $\vec{v}=\sum_{k\in\mathbb{Z}_{N_0}}\underbrace{U_0}_{\langle\vec{v},\vec{e_0}\rangle}.\vec{e_0}$

</td><td>recomposer une fonction par transformation inverse de $U(f)$ ou recompostion de série $U(n)$:
$$\vec{u}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{U(f)}_{\langle\vec{u},\vec{w_f}\rangle}.\vec{w_f}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\vec{u}(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{U(n)}_{\langle\vec{u},\vec{w_n}\rangle_P}.\vec{w_n}(t)$$</td></tr>
<tr><td>Projeter avec Plancherel</td><td>calculer le produit scalaire de vecteurs par leurs composantes :
$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\langle U_B,V_B\rangle={}^TU|_B.V|_B$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix}U_0 & \dots & U_{N-1}\end{bmatrix}}_{{}^TU|_B}.\begin{bmatrix}V_0\\ \vdots\\ V_{N-1}\end{bmatrix}$$</td><td>on peut calculer un produit scalaire (utile aux correlations et convolutions) à partir de sa transformée ou composantes de la série :
$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\overline{v(t)}\,dt=\langle U,V\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}U(f)\overline{V(f)}\,df$$
$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_P=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}u(t)\overline{v(t)}\,dt=\langle\!\langle U,V\rangle\!\rangle_P=\sum_{k=0}^{N_0-1}U(k)\overline{V(k)}$$</td></tr>
<tr><td>Normer avec Parseval</td><td>Calculer la norme en sommant les carrés des coordonnées :
$$\|\vec{u}\|^2=\|U_B\|^2=\sum U_n{}^2$$</td><td>calculer la puissance moyenne par la transformée $u(f)$ ou en sommant celle des composantes fréquentielles $U(n)$:
$$\|\vec{u}\|^2=\|U\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|u(t)|^2\mathrm{dt}=\int_{-\infty}^{\infty}|U(f)|^2\mathrm{df}$$
$$\|\vec{u}\|^2=\|U\|_P^2=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}|u(t)|^2\mathrm{dt}=\sum_{k\in\mathbb{N}}|U(k)|^2$$</td></tr>
</table>

TABLE 1.2 – Structure Euclidiene à structure de Hilbert