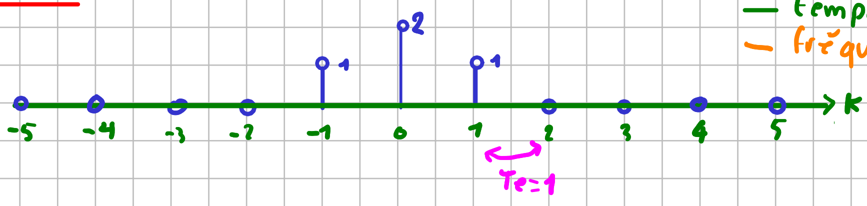
Exo 2 :

— temporel
— fréquentiel

I :1)



signal à support fini mais considéré non périodique

2) Formulaire $\delta_0 \xrightarrow{TFSD} \hat{\delta_0} : f \mapsto 1$ (exo 1)

$\dfrac{\delta_{-a} + \delta_a}{2} \xrightarrow{TFSD} f \mapsto \cos(2\pi\, \underbrace{a\,n}_{\text{sans dimention}})$ → voir plus bas

car $a \sim [s]$ et $n \sim [Hz]$

$2\,\delta_0 + 2\,\dfrac{\delta_{-a} + \delta_a}{2} \xrightarrow[\text{linéarité}]{TFSD} k \mapsto 2 + 2\cos(2\pi a n)$

avec $a = 1$ on a $E(f) = 2 + 2\cos(2\pi f)$

⚠ En fréquences normalisée ! on suppose que $Te = 1$ et donc $Fe = 1$

Donc pour Te quelconque on "normalise" f à 1 avec $f \longleftrightarrow \dfrac{f}{Fe}$

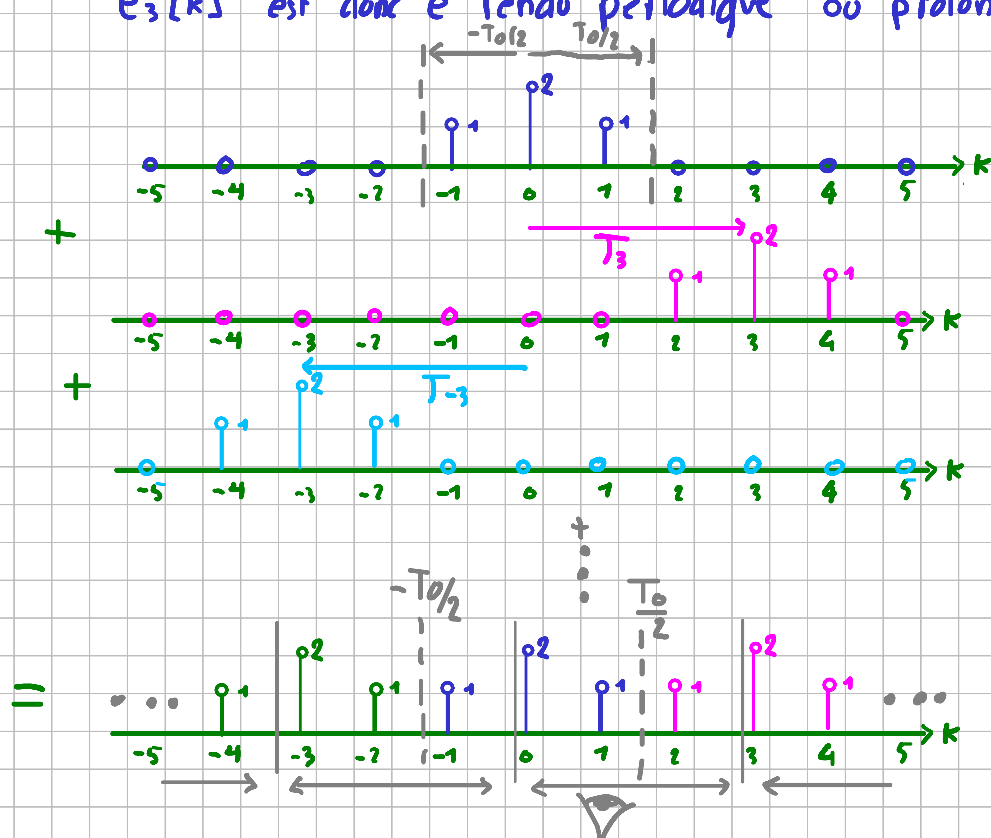
Donc $E(f) = 2 + 2\cos\left(2\pi \frac{f}{Fe}\right)$

Voir la vidéo " td2_exo2_1_dualité" pour avoir la tête bien faite plutôt que bien pleine et retrouver le formulaire ...

II\ 3) TFD 3 points

TFD $N=3 \Rightarrow$ temporel discret 3 périodique et fréquentiel discret 3 périodique

$e_3[k]$ est donc "e" rendu périodique ou prolongé par périodicité :



Echantillonner 3 points en fréquence rend le temporel 3 périodique

Aucun contenu temporel au delà de $\pm \frac{To}{2}$

⇓

Pas de superposition de type • + • + •

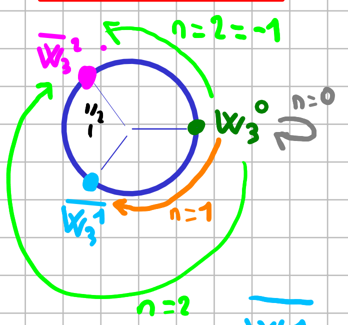
⇒ Pas de repliement temporel

C'est le dual de l'échantillonnage temporel et repliement de spectre pour les spectres au delà de $\pm \frac{Fe}{2}$

Shanon

Donc $e_3 = (2, 1, 1)_{Bc}$ dans la base canonique $(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$

TFD 3 points :



En calcul matriciel :

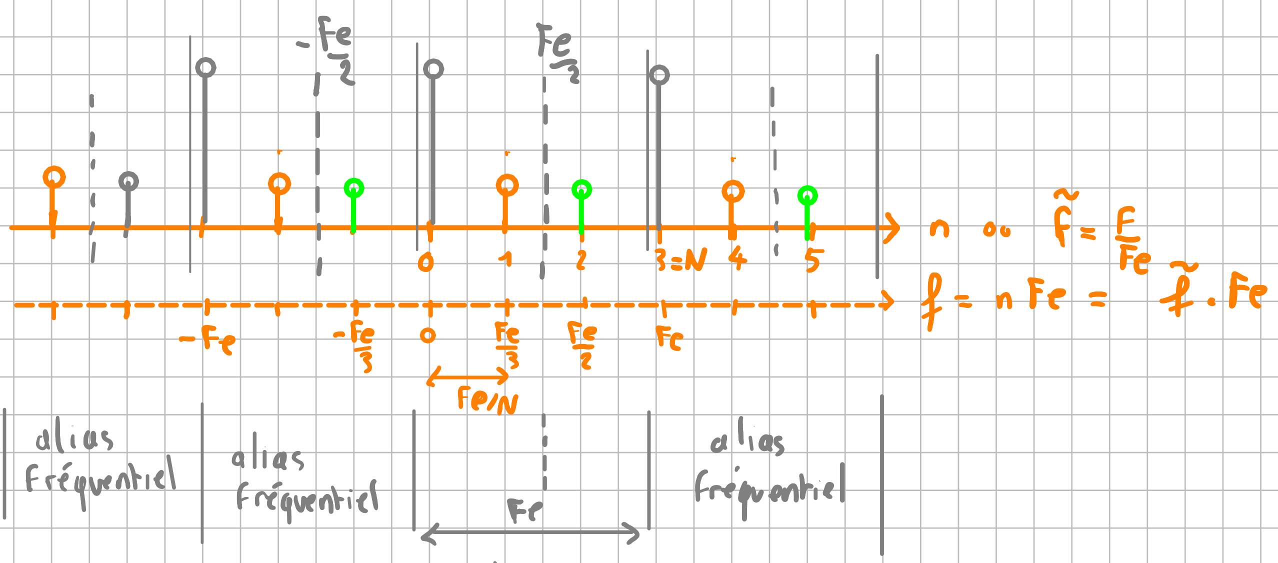
$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}_{Bc}$$

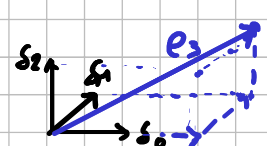
$$\begin{array}{l} n=0 \rightarrow \\ n=1 \\ n=2 \end{array}\begin{bmatrix} {}^T\overline{w_0} \\ {}^T\overline{w_1} \\ {}^T\overline{w_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{i2\pi}{3}} & e^{\frac{i2\pi}{3}} \\ 1 & e^{\frac{i2\pi}{3}} & e^{-\frac{i2\pi}{3}} \end{bmatrix}}_{P_{W\leftarrow B}} = \begin{pmatrix} \langle e_3, w_0\rangle = 4 \\ \langle e_3, w_1\rangle = 1 = 2.1-1 \\ \langle e_3, w_2\rangle = 1 \end{pmatrix}_{Bw}$$

$\overline{W_3^1} = W_3^2$

et $\overline{W_3^1} + \overline{W_3^2} = -\frac{1}{2} + -\frac{1}{2} = -1$

$Bw = (w_0, w_1, w_2)$





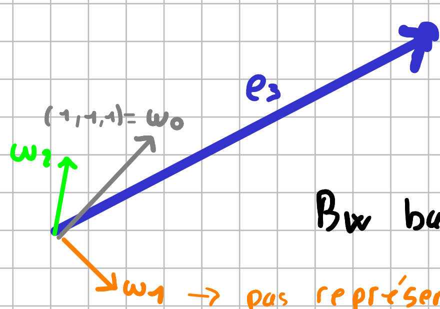
Bc base ortho-normale.

FFT-3

$\times\sqrt{3}$

⚠ base non normalisée

$\div\sqrt{3}$



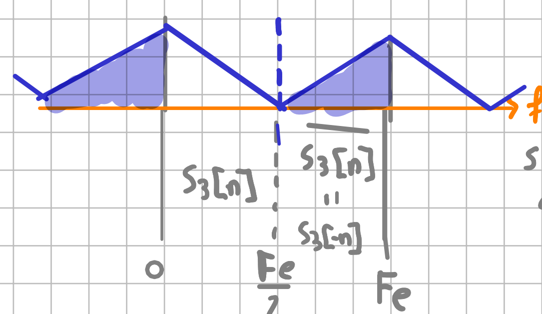
effet zoom $\times\sqrt{N}$

Bw base ortho

w_1 → pas représentable car complexe !

Vérif Hilbert :

$S_3[-n] = \overline{S_3[n]}$



$S_3[N-n] = S_3[-n]$ car N périodique

$= \overline{S_3[n]}$ car S_3 réel

Vérif Norme :

$$\|e_{3_{Bc}}\|^2 = \left\|\begin{matrix}2\\1\\1\end{matrix}\right\|^2 = 2^2+1^2+1^2 = 6 \xrightarrow[\times N=3]{} \|e_{3_{Bw}}\|^2 = \left\|\begin{matrix}4\\1\\1\end{matrix}\right\|^2 = 4^2+1+1 = 18$$

$$\|e_3\|_{Bc} = \sqrt{6} \xrightarrow[\times\sqrt{N}=\sqrt{3}]{} \|e_{3_{Bw}}\| = \sqrt{18} = \sqrt{3}.\sqrt{6}$$

car base FFT non normalisée

Vérif échantillonnage TFSD :

$$\Delta F = \frac{Fe}{N} = \frac{Fe}{3}$$