CHAP 7 : temporel

Exercice 2 :

a) $e(t) = u * u(t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$u*u(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{u(t)}_{=1 \text{ pour } t\geq 0} \cdot u(\tau - t) \cdot dt = \int_0^{+\infty} 1 \cdot \underbrace{u(\tau - t)}_{\substack{=1 \text{ pour } \tau - t > 0 \\ =1 \text{ pour } t < \tau}} \cdot dt$$

$$= \int_0^{\tau} 1 \cdot dt \quad \text{si } \tau \geq 0 \qquad = \int_0^{\tau} 0 \cdot dt \quad \text{si } \tau < 0$$

$$= \begin{cases} \tau & \text{si } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \tau u(\tau)$$

Donc $u*u : t \mapsto t u(t)$

b) $f(t) = \sin(t) * \Pi_{2a}(t)$ $\quad t \in \mathbb{R}$ ← erreur de rigueur $\mathbb{R} * \mathbb{R}$ n'a pas de sens !

$f = \sin * \Pi_{2a}$ ou bien $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sin * \Pi_{2a}(t)$
ou bien $f = (t \mapsto \sin t) * (t \mapsto \Pi_{2a}(t))$ ...

Calcul direct : $\sin * \Pi_{2a} = \Pi_{2a} * \sin$! l'un est plus facile que l'autre souvent

choisir

$$f(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \sin(t) \cdot \underbrace{\Pi_{2a}(\tau - t)}_{=1 \Leftrightarrow |\tau - t| < a} \cdot dt = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\Pi_{2a}(t)}_{\substack{=1 \Leftrightarrow \\ -a < t < a}} \cdot \sin(\tau - t) \cdot dt$$

① car $\Pi_{2a} = \Pi_{[-a;a]}$ ②

② Plus facile car $f(\tau) = \int_{-a}^{a} 1 \cdot \sin(\tau - t) \cdot dt = \left[\underbrace{-1}_{\frac{\partial \tau - t}{\partial t}} \cdot -\cos(\tau - t) \right]_{-a}^{a}$

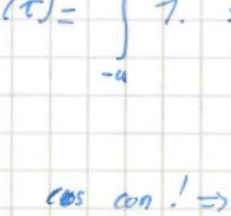
$$= \cos(\tau - a) - \cos(\tau + a)$$

cos con ! ⇒ raciste ⇒ cos cos ± sin sin
égoïste ⇒ cos cos ⊕ sin sin
d'abord ↳ signe change
vicieux ⇒

$c(\tau + a) = c\tau ca - s\tau sa$
$c(\tau - a) = c\tau ca + s\tau sa$

$f(\tau) = 2 \sin(a) \cdot \sin(\tau)$

Vérif $a = 0 \Rightarrow f(\tau) = 0$
normal car $\Pi_{2a} = 0_L$ dans ce cas



$\tau = 0$ et $\forall a$ ⇒ ⇒ $= 0$ car impaire.

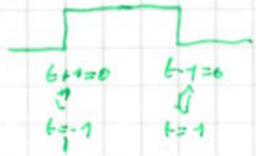
$a = \pi$ et $\forall \tau$ → intégrale sur 2π de sin $= 0$

Calcul indirect $\mathcal{F}[\sin] = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ $\qquad \mathcal{F}[\Pi_{2a}](f) = 2a \,\mathrm{sinc}(\pi 2a f)$ δ_{-1}

$\mathcal{F}[\sin * \Pi_{2a}] = \mathcal{F}[\sin] \cdot \mathcal{F}[\Pi_{2a}] = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}) \cdot 2a \,\mathrm{sinc}(\pi 2a f) = \frac{2a}{2} \mathrm{sinc}(\pi 2a) \delta_1 + \frac{2a}{2} \mathrm{sinc}(-\pi 2a) \delta_{-1}$

Cha7 exo 2 . e)

e) mal typé ! => $m = (\delta_1 - \delta_2) * (t \mapsto u(t+1) - u(t-1))$



$m = \delta_1 - \delta_2 * \Pi_{[-1;1]}$

par linéarité de * $\quad m = \delta_1 * \Pi_{[-1;1]} - \delta_2 * \Pi_{[-1;1]}$

On rapelle que $\quad f * \delta_a = \delta_a * f = f \circ (t \to t-a) = f \circ (Id - a)$

car $\quad f * \delta_a = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \delta \,.\, d\tau \quad = \int_{\mathbb{R}} \delta_a \,.\, f(\tau - t).dt$

comment dire que δ est inversée dans le temps ! / on préfère

$\delta_a(\tau - t)$ est dangereuse ! on sait pas si $= \delta_{\tau - a}$ ....

et propriété du Dirac :

$$f * \delta_a = \int_{\mathbb{R}} \delta_a \,.\, f(\tau - t).dt = f(\tau - a)$$

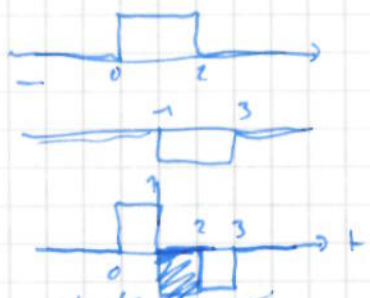
"la mesure de f à l'instant $t = a$ parfait"

Donc $\quad m(\tau) = \Pi_{[-1;1]}(\tau - 1) - \Pi_{[-1;1]}(\tau - 2)$

$= 1$ pour $-1 < \tau - 1 < 1$ ⇕ $= 1$ pour $0 < \tau < 2$

$= 1$ pour $-1 < \tau - 2 < 1$ ⇕ $= 1$ pour $1 < \tau < 2$

$m(\tau) = \Pi_{[0;2]}(\tau) - \Pi_{[1;2]}(\tau)$



$\boxed{m = \Pi_{[0;1]} - \Pi_{[2;3]}}$ "les diracs ont décalés $\Pi_{[-1;1]}$ autour de 1 et de 2 (à l'envers)"

c) pareil que b

d) $h = \Pi_{[-a\ a]} * (t \mapsto e^{-bt})$ $\quad$ calcul indirect compliqué $\quad H(f) = 2a \,\mathrm{sinc}(\pi f 2a) \cdot \frac{1}{j2\pi f + b}$

$h(t)$ ← transformée inverse dure

Calcul direct : comparer

$\Pi_{[-a\ a]} * (e_\circ - bId) = \int_{\mathbb{R}} \Pi_{[-a\ a]}(t)\, e^{-b(\tau - t)}.dt \to \boxed{\int_{-a}^{a} e^{-b(\tau - t)}.dt}$ (A)

avec $\quad (e_\circ - bId) * \Pi_{[-a\ a]} = \int_{\mathbb{R}} e^{-bt} .\, \Pi_{[-a\ a]}(\tau - t).\, dt$

$-a < \tau - t < a$

⇕

$-a - \tau < -t < a - \tau \Rightarrow \boxed{\int_{-a-\tau}^{a-\tau} e^{-bt}.dt}$ (C)

⚠ $\tau - a < t < \tau + a \Rightarrow \boxed{- \int_{\tau-a}^{\tau+a} e^{-bt}\, dt}$ (B)

calculer (A), (B) ou (C) selon les goûts.