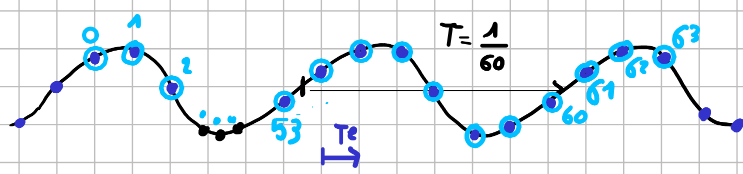
TD1 - Exo 3 : Échantillonnage et fenêtrage.

$F = 60\,Hz$

500 points / sec



~ signal analogique
~ signal échantillonné
~ signal discret mémorisé

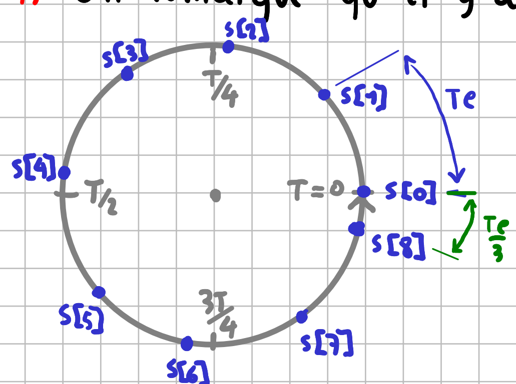
1) 2) 500 échantillon $\leftrightarrow$ 1 sec

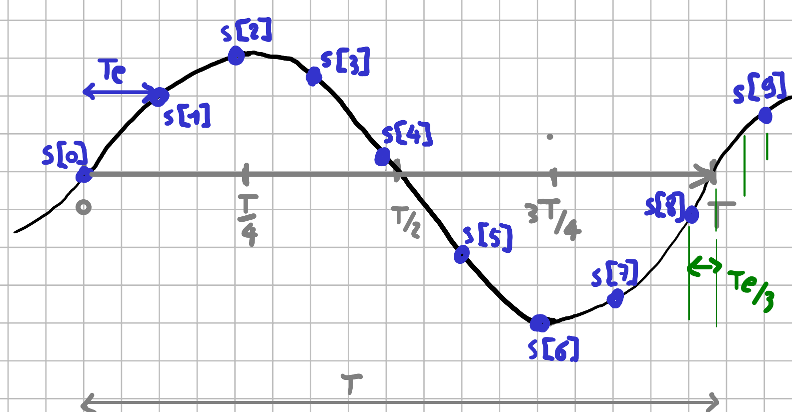
1 échantillon $\leftrightarrow$ $\frac{1}{500}$ période Te $\Rightarrow$ $Te = \frac{1}{500} = 0{,}2\ 10^{-2} = 2\ ms$

$Fe = \frac{1}{Te} = \frac{1}{1/500} = 500\ Hz$

3) période $T = \frac{1}{F} = \frac{1}{60} = \frac{1}{6} \cdot 10^{-1} = 0{,}166\cdots \cdot 10^{-1} \approx 16{,}66 \cdot ms$

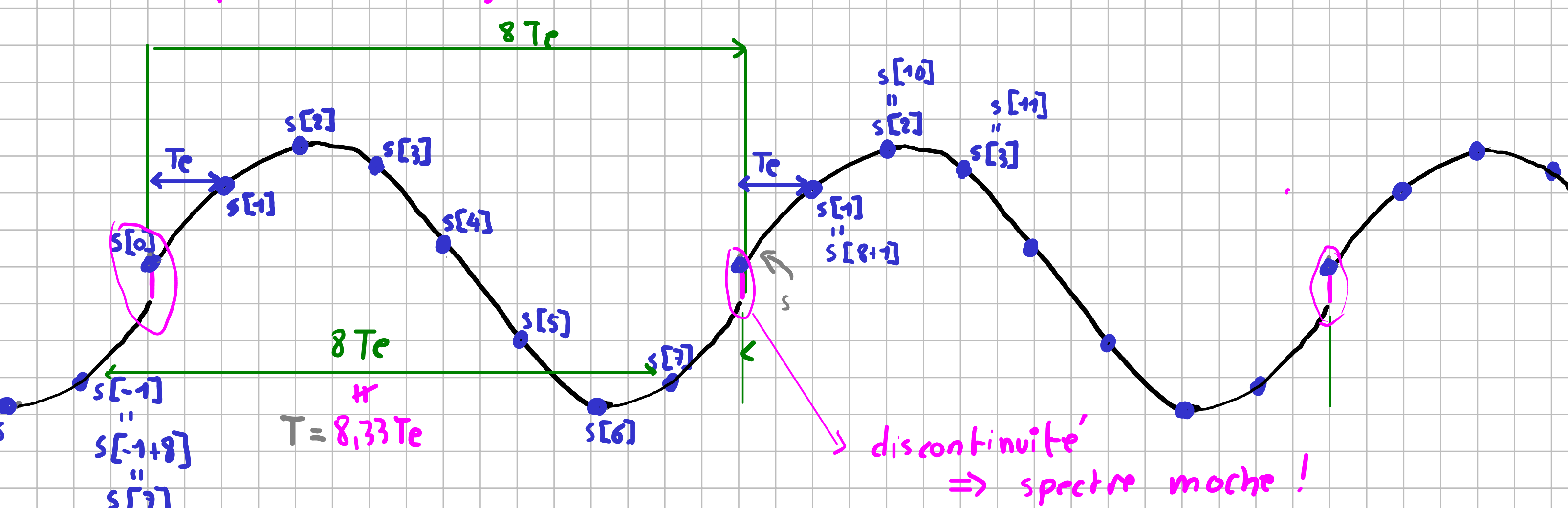
4) On remarque qu'il y a $\frac{T}{Te} = \frac{16{,}66\ ms}{2\ ms} = 8{,}33$ échantillons par période de sinus





$R\left[2 e^{i2\pi Ft}\right] = \sin(2\pi Ft)$

⚠ Si on mémorise 8 points pour faire une FFT en 8 points on périodise le signal tout les $8Te = 16\ ms \neq 16{,}66\ ms$



discontinuité $\Rightarrow$ spectre moche !

(De même en 64 points on a discontinuité et un spectre moche) $\Rightarrow$ $64\,Te \neq 8T = 8 \times 8{,}33\cdots Te = 66{,}66 \cdot Te$ = diable/10 !

$\neq 7T = 7 \times 8{,}33\ Te = 56{,}33 \cdot Te$

Calcul de fft :

$$\hat{s}[n] = \sum_{k=0}^{63} \sin\left(2\pi\, 60 \frac{k}{500}\right) \cdot e^{-\frac{i2\pi}{64} \cdot nk}$$

il faudrait passer par Euler !

$500 = Fe \leftrightarrow$ période fréquentielle

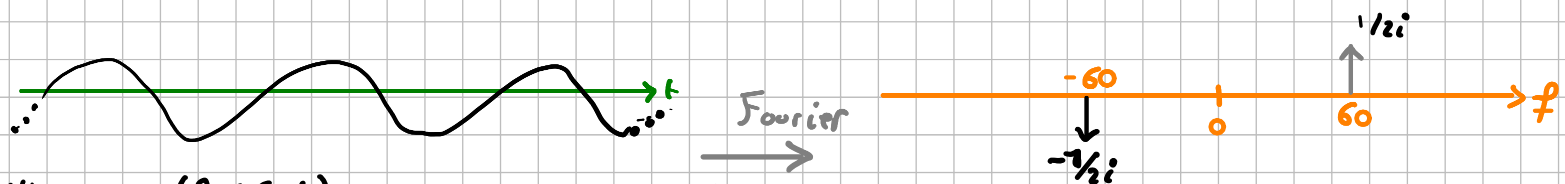
$64\,Te = To \leftrightarrow$ période temporelle

$$\hat{s}[n] = \sum_{k=0}^{63} \frac{\overbrace{\left(e^{i2\pi\left(\frac{60}{500} - \frac{n}{64}\right)}\right)}^{a}{}^{k} - \overbrace{\left(e^{-i2\pi\left(\frac{60}{500} + \frac{n}{64}\right)}\right)}^{b}{}^{k}}{2i}$$

Il faut voir des sommes partielles de suites géométriques de raison a et b

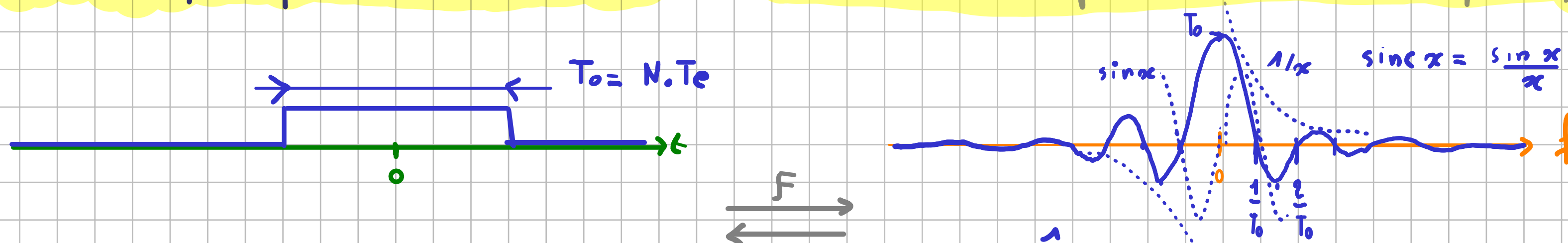
Calcul trop long !

Calcul par le continu :



$s(t) = \sin(2\pi 60 t)$ $\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\text{Fourier}}{\rightleftarrows}}$ $\hat{S}(f) = \dfrac{\delta_{-60} + \delta_{60}}{2i}$ voir formule Euler

× multiplier par fenêtre d'observa° ↔ * convoluer le spectre (Filtrer le spectre)

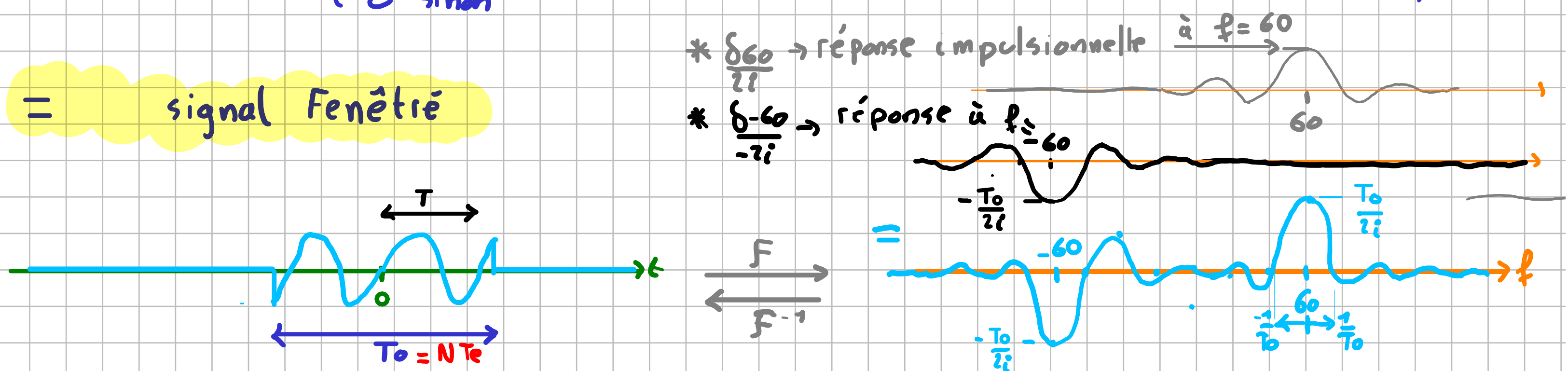


$\Pi_{[-\frac{T_o}{2};\frac{T_o}{2}]} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]-\frac{T_o}{2};\frac{T_o}{2}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}}$ $\hat{\Pi}(f) = T_o \,\text{sinc}\left(2\pi \frac{T_o}{2} f\right)$

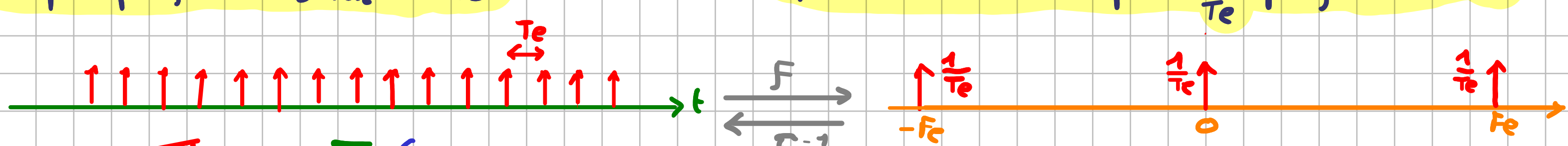
$* \dfrac{\delta_{60}}{2i}$ → réponse impulsionnelle à $f = 60$

$* \dfrac{\delta_{-60}}{-2i}$ → réponse à $f = -60$

= signal Fenêtré

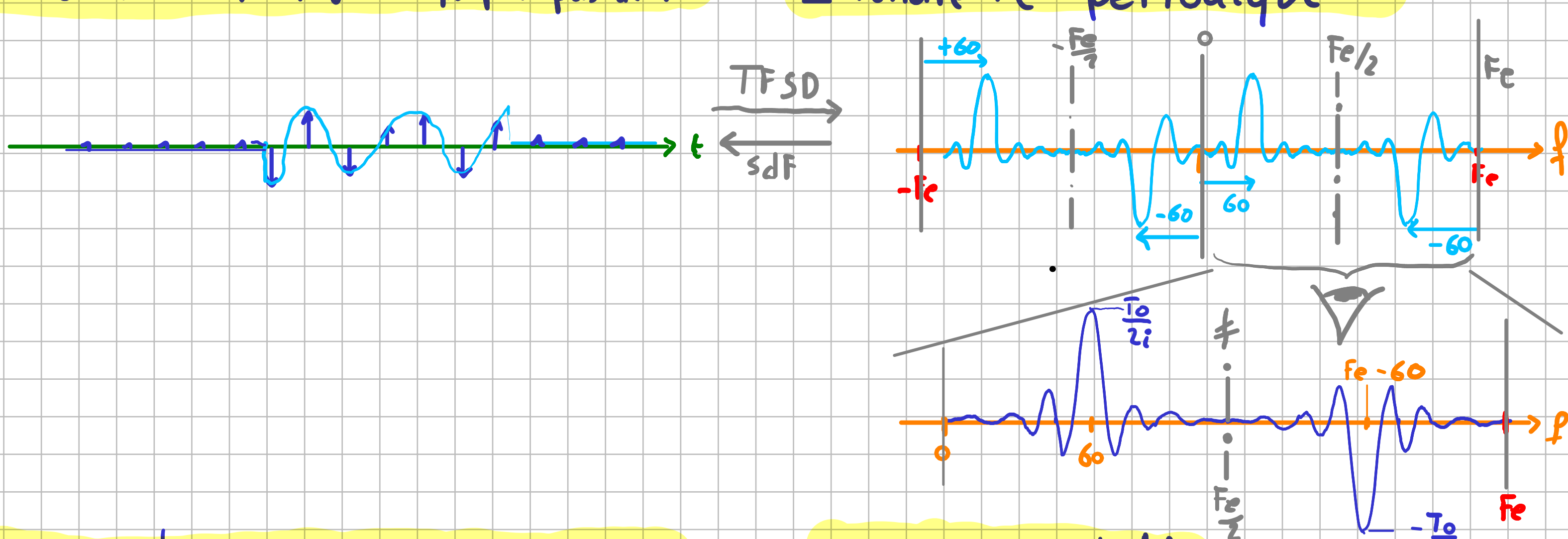


× par peigne de Dirac de Te ↔ * convoluer par $\frac{1}{T_e}$ peigne de Fe



$Ш_{Te} = \sum_k \delta_{kTe}$ $\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}}$ $\frac{1}{T_e} Ш_{Fe} = \sum_n \delta_{nFe}$

= échantillonner le temps par pas de Te ↔ = rendre Fe-périodique



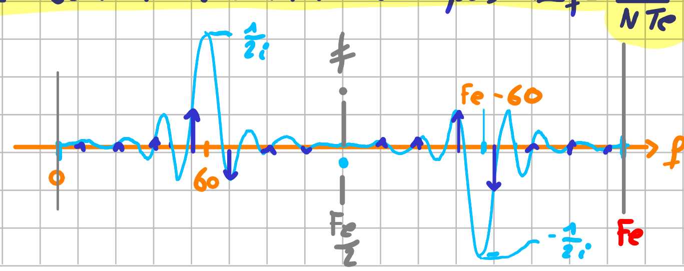
* convoluer par peigne de To = NTe ↔ × $\frac{1}{T_o}$ peigne de Δf

$Ш_{NTe}$, $NT_e = T_o$ ⇄ $\frac{1}{T_o} = \Delta F = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{NT_e}$

$\frac{1}{NT_e} Ш_{\frac{Fe}{N}} = \frac{1}{NT_e} \sum_n \delta_{n\frac{Fe}{N}}$

= rendre NTe périodique ↔ = échantillonner en pas $\Delta f = \frac{1}{NT_e}$

FFT / IFFT



On a donc $\quad s(t) = \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \xrightleftharpoons{TF} \hat{S}(f) = \frac{\delta_{60} - \delta_{-60}}{2i}$

Fenêtrage $\quad s' = s(t) \cdot \Pi_{\left[-\frac{NTe}{2} ; \frac{NTe}{2}\right]}(t) \xrightleftharpoons{TF} \hat{S}'(f) * NTe \cdot \mathrm{sinc}\left(2\pi \frac{NTe}{2} f\right)$

$$= \frac{NTe}{2i} \begin{pmatrix} \mathrm{sinc}\left(\pi\, NTe\, (f-60)\right) \\ - \mathrm{sinc}\left(\pi\, NTe\, (f+60)\right) \end{pmatrix}$$

échantillonnage sur N points

$k \in \left[\!\left[-\frac{N}{2} ; \frac{N}{2} \right[\!\right[, \quad s'[k] = s'(kTe) \quad \xrightleftharpoons[f = n \frac{Fe}{N} = n\Delta f]{TFD} \quad \hat{S}'[n] = \Delta f \cdot \hat{S}'(n\Delta f)$

$$\hat{S}'[n] = \frac{1}{2i} \mathrm{sinc}\left(\pi\left(n - \frac{60}{\Delta f}\right)\right) + \frac{1}{2i} \mathrm{sinc}\left(\pi\left(n + \frac{60}{\Delta f}\right)\right)$$