

Table des matières

1	Les bases de Fourier	3
1.1	Les bases temporelles et espaces	4
1.1.1	Espaces discrets à support finit ou périodiques	4
1.1.2	Espaces discrets de dimension infinie	4
1.1.3	Espaces continus à support finit ou périodiques	4
1.1.4	Espaces continus	4
1.2	Les espaces et produits scalaires associés	4
1.3	Les bases fréquentielles : transformations	6
1.3.1	Base de la TF	6
1.3.2	Base des SdF	7
1.3.3	Base de la TFSD	9
1.3.4	Base de la TFD et FFT	10
1.4	Dualité des transformées	11
1.4.1	Filtrage et fenêtrage : opérations duales	14
1.4.2	Interpolation et gavage de zéro : opérations duales	14
1.4.3	Sur-échantillonnage et multiplication de période : opérations duales	14
1.4.4	Décimation et division de période : opérations duales	14
2	Systèmes discrets	17
2.1	Systèmes linéaires	17
2.2	Systèmes invariants	19
2.3	Réponse d'un système LTI	19
2.3.1	Réponse impulsionnelle	19
2.4	Stabilité d'un système LTI	22

2.5	Calcul opérationnel	22
2.5.1	Dualité entre signal et système	22
2.5.2	Systèmes élémentaires : fonction de transfert	22
2.5.3	Système	22
2.5.4	Système IIR et fractions rationnelles	22
2.6		22
3	La distribution de Dirac	23
3.1	La notion de densité	23
3.2	Dérivée de fonctions discontinues	25
3.3	Opérateur dérivée et sa réciproque	26
3.3.1	Calcul opérationnel en continu	26
3.4	Propriété sous l'intégrale de l'impulsion de DIRAC et de l'impulsion unité	28
3.5	Propriété de convolution avec le DIRAC et impulsion unité	28

1. Les bases de Fourier

Ce chapitre présente les transformées, séries de FOURIER et introduit la transformée de FOURIER Discrète en se basant sur une analogie entre les espaces vectoriels Euclidiens et les espaces de Hilbert où :

- un vecteur est un signal sous forme d'une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$;
- le produit scalaire de deux vecteurs est sous forme d'intégrale (ou somme) du produit ;
- les coefficients peuvent être complexes \mathbb{C} -espace vectoriel et non \mathbb{R} -espace vectoriel comme pour les Euclidiens, ce qui change la propriété de symétrie du produit scalaire.

La Fig. 1.1 mets en évidence cette analogie et souligne le fait que transformer un signal avec un produit scalaire revient à effectuer un changement de base.

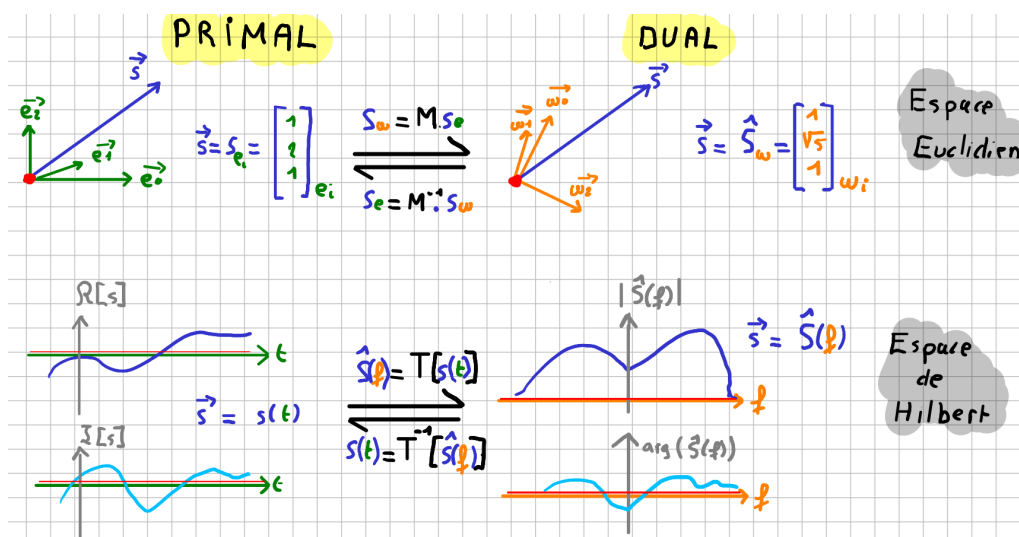


FIGURE 1.1 – Changement de base d'un vecteur dans un espace Euclidien de \mathbb{R}^3 et transformation d'une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dans un espace de Hilbert.

On utilise par habitude la variable t car l'espace de départ est souvent des *fonctions du temps*. On nomme *espace primal* ce premier espace considéré.

En décomposant un signal vecteur dans une base, on va pouvoir représenter ce signal par ses coordonnées dans la base d'arrivée, on dit plutôt composantes pour un signal. On obtient alors un « signal des composantes » dans un espace que l'on appelle *espace dual*. Comme l'on utilise la plupart du temps des bases dites fréquentielles, la variable de l'espace dual est notée f et correspond aux *fonctions de la fréquence*.

R Pourquoi du complexe pour du réel ?

On considère le cas général des fonctions à valeurs dans \mathbb{C} car cela permet :

- de représenter des signaux de type phaseur (vecteurs en rotation)
- de représenter facilement des signaux réels dont la bande de fréquence est finie (signaux dits *bande étroite*)
- de pouvoir appliquer la transformée de FOURIER à une transformée de FOURIER (qui est complexe même pour des signaux réels) et de voir l'opération de transformée comme un isomorphisme et de jouer avec la notion de dual.

La base de vecteurs utilisée dans les transformées de FOURIER $(t \mapsto e^{i2\pi ft})_{f \in \mathbb{R}}$ va être déclinée en différentes bases selon que l'on va discrétiser une des variables :

temps discret où la variable $t \in \mathbb{R}$ sera remplacée par une variable discrète $k \in \mathbb{N}$ avec la relation $t = kT_e$ où T_e est la valeur qui sépare deux échantillons en temps est nommé *période d'échantillonnage*.

fréquences discrètes où la variable $f \in \mathbb{R}$ sera remplacée par une variable discrète $n \in \mathbb{N}$ avec la relation $f = n\Delta_f$ où Δ_f est la valeur qui sépare deux échantillons en fréquence est nommé *résolution fréquentielle*

Selon la dimension continue (infinie indénombrable) ou discrète (infinie dénombrable ou finie) des espaces primal et dual, on utilisera différents produits scalaires pour effectuer différentes transformées entre primal et dual.

1.1 Les bases temporelles et espaces

1.1.1 Espaces discrets à support finit ou périodiques

1.1.2 Espaces discrets de dimension infinie

1.1.3 Espaces continus à support finit ou périodiques

1.1.4 Espaces continus

1.2 Les espaces et produits scalaires associés

Nous allons considérer des espaces de fonctions tantôt à variables continues puis discrètes, et en même temps sur des supports infinis ou bornés. Dans le cas de fonctions bornées (définies sur un intervalle $[a, a + T_0[$ en continu ou $\llbracket a, a + N \rrbracket$ en discret), on peut **toujours** prolonger cette fonction en dehors du support de manière périodique, plutôt que par des zéros, car cela permet d'avoir une représentation en séries de FOURIER (SdF) (cas continu) ou en Transformée de Fourier Discrète (TFD) dans le cas discret.

Les produits scalaires pour différents espaces de fonctions sont définis et illustrés dans la Tab. 1.1 en prenant :

- en rangées du tableau les signaux de la *variable continue* (intégrale continue) ou bien de la *variable discrète* (somme discrète) ;
- en colonnes du tableau les *supports infinis* (de $-\infty$ à ∞) ou bien support *périodique/borné* (de 0 à T_0 ou N).

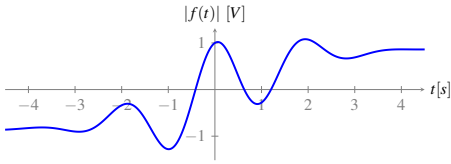
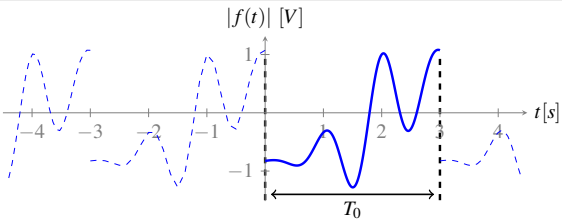
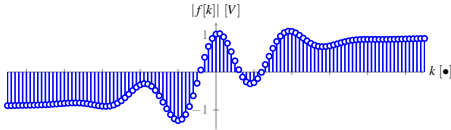
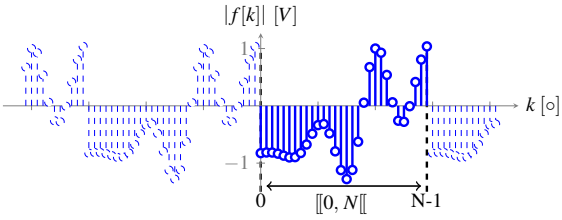
	Support infini	Support fini ou périodique
variable continue	 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt \propto \left[\frac{V^2}{\text{Hz}} \right]$	 $f : \mathbb{R}_{T_0} \rightarrow \mathbb{C} \text{ ou } f : [0, T_0[\mapsto \mathbb{C}$ $\langle f, g \rangle_P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt \propto [V^2]$
variable discrète	 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ $\langle\langle f, g \rangle\rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} f[k] \cdot \overline{g[k]} \propto [V^2]$	 $\mathbb{Z}_{N_0} \rightarrow \mathbb{C} \text{ ou } [0, N[\rightarrow \mathbb{C}$ $\langle\langle f, g \rangle\rangle_P = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] \cdot \overline{g[k]} \propto [V^2]$

TABLE 1.1 – Les produits scalaires adaptés aux différents espaces de fonctions. Par clarté, on ne représente que le module de la fonction qui est dans le cas général complexe.

Exercice 1.1 Propriété de scalaire et norme dans le cas général

On aurait pu définir ces produits scalaires en ne prenant jamais le conjugué d'une fonction g (ou en considérant des fonctions à valeurs réelles de manière à ignorer ce conjugué car $\bar{g} = g$).

1. Vérifiez dans le cas réel (sans conjugué) que le produit $\langle f, g \rangle$ a les propriétés d'un produit scalaire, en déduire la norme induite $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$ et déterminer la dimension de $\|f\|^2$: est-ce de la puissance ou de l'énergie, est-ce une valeur ou une densité ?
2. Appliquez cette norme (toujours sans le conjugué) au signal imaginaire pur $f : t \mapsto i$. Quelle propriété de la norme n'est pas respectée ?
3. Refaites de même en prenant cette fois-ci les formules de Tab. 1.1 avec le conjugué de g et vérifiez que cette propriété est vérifiée dans le cas général des fonctions à variables complexes.
4. Vérifiez que $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ et que donc le produit scalaire est linéaire à gauche $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$ et à moitié linéaire à droite $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle f, \lambda g \rangle = \overline{\lambda} \langle f, g \rangle$

On comprend maintenant pourquoi, dans le cas général des fonctions à valeurs complexes, on utilise le conjugué dans l'expression des produits scalaires et pourquoi on parle de produit *sesqui-linéaire* pour ces produits scalaires : *sesqui* en latin voulant dire « un et demi » en latin. ■

Le produit scalaire est très utile car il permet d'obtenir :

- de mesurer des longueurs de signaux avec la norme induite par le produit scalaire $\|\vec{s}\| = \sqrt{\langle \vec{s}, \vec{s} \rangle}$, et de mesurer des distances entre signaux avec la norme de la différence $\|\vec{u} - \vec{v}\|$;
- de projeter un vecteur sur un autre ou sur un sous-espace vectoriel : cela revient à minimiser une distance $P_v(u) = \min_{x \in \text{vect}(u)} (\|u - x\|)$ par simple calcul direct ;
- trouver les meilleures, au sens de la distance avec la norme engendrée, décompositions d'un

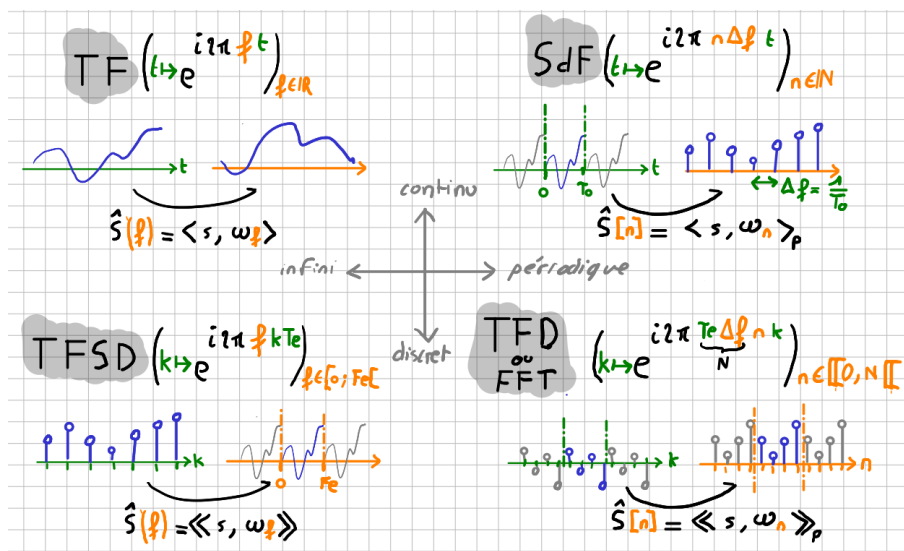
signal u sur une base de vecteurs données : calculer des transformées de signaux.

La Tab. 1.2 montre le parallèle entre l'utilisation du produit scalaire sur des vecteurs et sur des signaux, chacune permet de retrouver des formules bien connues des SdF et des TF.

1.3 Les bases fréquentielles : transformations

En prenant la base des ondes complexes adaptée à chaque espace de signaux (discrétisée ou non, sur un intervalle infini ou borné/périodique), et en utilisant les produits scalaires adaptés, on peut définir quatre types de transformations et leurs réciproques entre un primal avec une base canonique purement localisée dans le temps (et infiniment étendue en fréquence) et un dual composé d'une base d'ondes purement localisées fréquentielles (et infiniment étendue en dans le temps).

Le schéma ci-dessous résume ces transformées, leurs bases et les produits scalaires associés à chaque transformation :



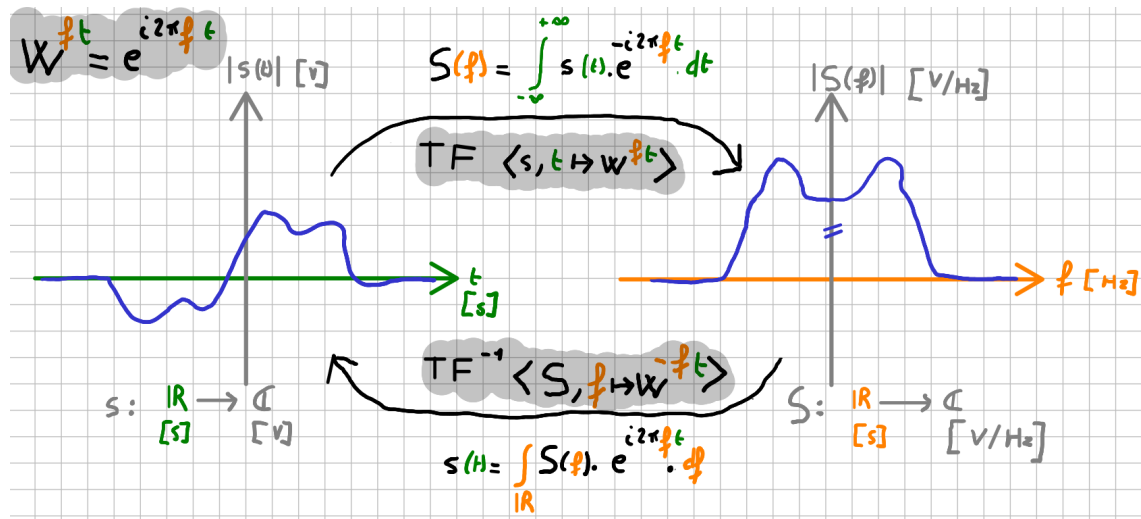
1.3.1 Base de la TF

La TF (Transformée de FOURIER), ou FT (*Fourier Transform*) en anglais, s'applique aux fonctions continues et utilise une base d'ondes complexes $B_F = \left(\underbrace{t \mapsto e^{i2\pi f t}}_{w_f} \right)_{f \in \mathbb{R}}$.

Exercice 1.2 Tentez de retrouver la formule de la transformée et son inverse et d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en se rappelant juste que c'est une application de

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{TF} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire continu noté \langle, \rangle avec la base continue $B_F = (w_f)_{f \in \mathbb{R}}$ ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens mais pas l'amalgame, car :

- le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini dans le cas de fonctions de carré intégrable, ou *fonction à énergie finie*, que nous notons \mathcal{L}_2 ,
- les vecteurs de la base ne sont pas normés car de norme infinie ;
- la base n'est pas finie, ni infinie dénombrable mais infinie indénombrable.

Mais lorsque l'on se place dans le cas de fonctions de carré intégrable, ou fonction à énergie finie, que nous notons \mathcal{L}_2 , l'espace est complet (les suites de Cauchy convergent) dont les sommes infinies se comporte bien dans \mathcal{L}_2 : c'est une espace de Banach. De plus le produit scalaire associé à la norme 2 existe et on a donc un espace de HILBERT où la norme et le produit scalaire sont des applications linéaires dans \mathcal{L}_2 . Comme il s'agit d'une espace de dimension infinie, il ne suffit pas d'avoir une base de dimension infinie pour couvrir tout l'espace, mais dans le cas de \mathcal{L}_2 avec la base B_F on montre que tout l'espace est engendré.

Bref ! Cela fonctionne tout comme un espace Euclidien sans en être un.

Exercice 1.3 Prendre la base $B_F = (w_f)_{f \in \mathbb{R}}$ et utiliser la partie espace indénombrable de la Tab. 1.2 pour retrouver les formules de PLANCHEREL et PARSEVAL. ■

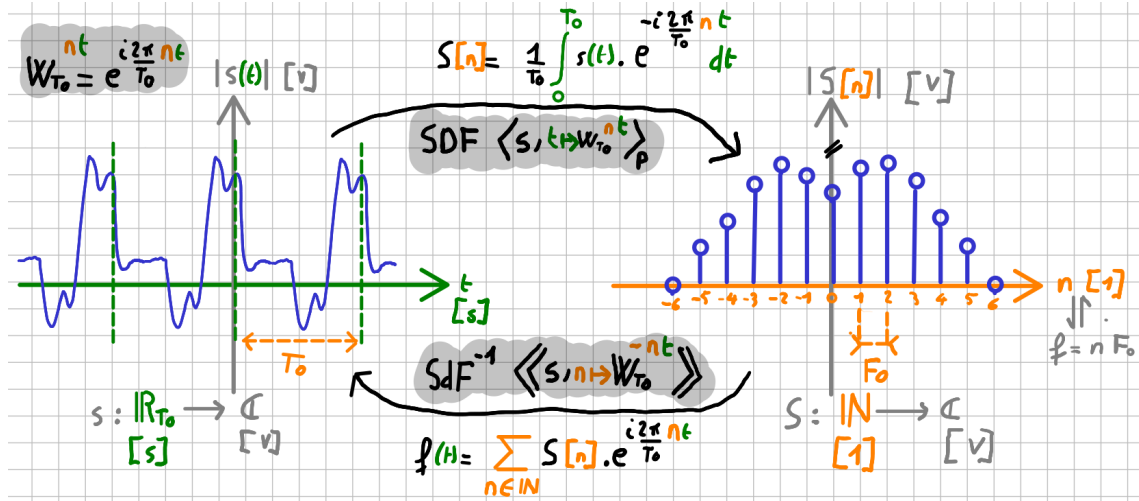
1.3.2 Base des SdF

Les SdF (Séries de FOURIER), ou FS (*Fourier Series*) s'appliquent aux fonctions continues périodiques et utilisent une base dénombrable $B_F = \left(\underbrace{t \mapsto W_{T_0}^{nt} = e^{i \frac{2\pi}{T_0} nt}}_{w_{T_0}^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $W_{T_0} = e^{i \frac{2\pi}{T_0}}$.

Exercice 1.4 Tentez de retrouver la formule de la décomposition et recomposition en SdF et d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en se rappelant juste que c'est une application de

$$\mathbb{R}_{T_0} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\text{SdF}} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire continu périodique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ et avec la base discrète $B_F = (W_{T_0}^n)$. ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens mais pas l'amalgame, car :

- le produit scalaire \langle, \rangle_P est défini dans le cas de fonctions périodiques de carré intégrable, *fonctions de puissance moyenne finie*, que nous notons \mathcal{L}_{p2}
- ce n'est pas un isomorphisme car, on passe d'un espace continu périodique à un espace discret ! La transformée inverse se fait avec le produit scalaire discret $\langle\langle, \rangle\rangle$
- la base n'est pas finie, mais infinie dénombrable ;

Bref ! elle fonctionne un peu comme un espace Euclidien fini sans en être un...

Exercice 1.5 Prendre la base

$$B_F = \left(\underbrace{t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} n t\right)}_{\cos_n} \right)_{n \geq 1} \cup \left(\underbrace{t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} n t\right)}_{\sin_n} \right)_{n \geq 1} \cup (t \mapsto 1)$$

et voir que l'on retrouve les formules des coefficients $a[n]$, $b[n]$ et a_0 **à un facteur 2 près !**

Et oui ! La base n'est pas normée car un rapide calcul montre que la norme des vecteurs vaut $\frac{1}{2}$ (on peut se rappeler que la valeur efficace d'un cosinus d'amplitude 1 est $\frac{\sqrt{2}}{2}$; sa puissance moyenne sur une période est donc le carré de $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

En prenant la base normée

$$B_F' = \left(\underbrace{\sqrt{2} \cos_n}_{\cos'_n} \right)_{n \geq 1} \cup \left(\underbrace{\sqrt{2} \sin_n}_{\sin'_n} \right)_{n \in \mathbb{Z}^*} \cup (t \mapsto 1)$$

on obtient une définition des SdF chère aux physiciens :

$$s(t) = \begin{pmatrix} \underbrace{\langle s, t \mapsto 1 \rangle_P}_{a_0} 1 \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \cos'_n \rangle_P}_{a'[n]} \cos'_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \sin'_n \rangle_P}_{b'[n]} \sin'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \sqrt{2} \cos_n \rangle_P}_{\sqrt{2} a[n]} \sqrt{2} \cos_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \sqrt{2} \sin_n \rangle_P}_{\sqrt{2} b[n]} \sqrt{2} \sin_n(t) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Avec $\|t \mapsto 1\|^2 = 1$, $\|\cos'_n\|^2 = \|\sqrt{2}\cos_n\|^2 = 1$ et $\|\sqrt{2}\sin_n\|^2 = 1$

On peut ne pas normer les vecteurs, et c'est le plus fréquent, mais introduire un facteur 2 dans la formule de calcul des coefficients $a[n]$ et $b[n]$ qui n'apparaît pas dans les coefficients $c[n]$:

$$s(t) = \begin{pmatrix} \underbrace{2\langle s, t \mapsto 1 \rangle_P}_{a_0} 1 \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2\langle s, \cos_n \rangle_P}_{a[n]} \cos_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2\langle s, \sin'_n \rangle_P}_{b[n]} \sin_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_0}{2} \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2\langle s, \cos_n \rangle_P}_{a[n]} \cos_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2\langle s, \sin_n \rangle_P}_{b[n]} \sin_n(t) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Avec $\|t \mapsto 1\|^2 = 1$, $\|\cos_n\|^2 = \|\sin_n\|^2 = \frac{1}{2}$.

1.3.3 Base de la TFSD

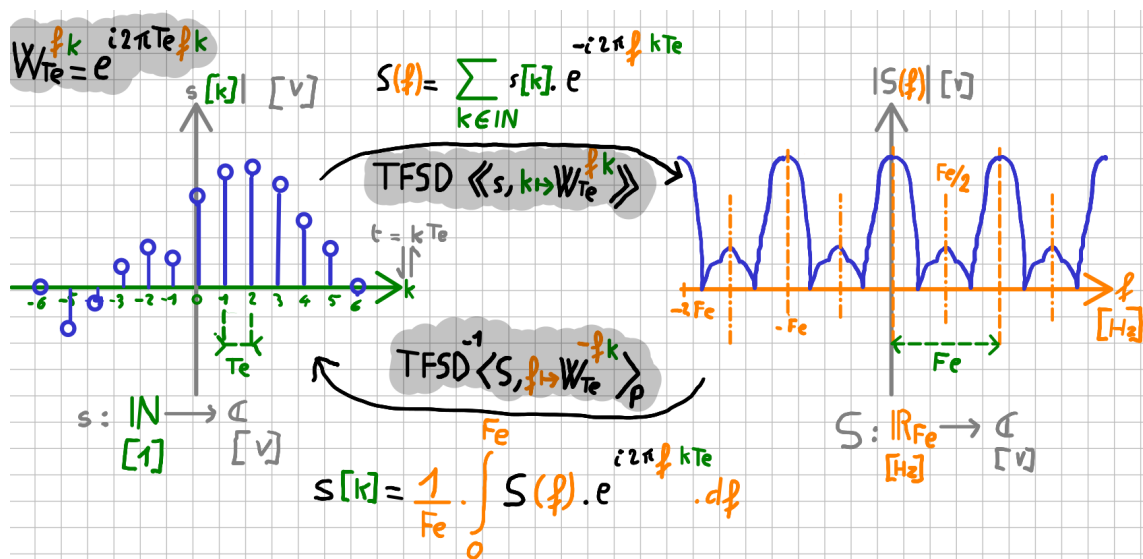
La TFSD (Transformée de FOURIER des Signaux Discrets), ou DTFT (*Discrete Time Fourier Transform* en anglais, s'applique aux fonctions à variable discrète et utilise une base d'ondes

complexes indénombrable $B_F = \left(\underbrace{k \mapsto W_{T_e}^{fk} = e^{i2\pi T_e f k}}_{w_{T_e}^f} \right)_{f \in [0, F_e[}$ avec $W_{T_e} = e^{i2\pi T_e}$.

Exercice 1.6 Tentez de trouver la formule de cette TFSD et son inverse, d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en pensant que c'est la « duale » de la SdF. Il s'agit d'une application de

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{TFSD} \mathbb{R}_{F_e} \rightarrow \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire discret noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ avec la base continue $B_F = (w_{T_e}^f)_{f \in [0, F_e[}$



On peut difficilement faire l'analogie avec les espaces Euclidiens car :

— le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonctionne dans le cas de suites discrètes absolument convergentes ;

- ce n'est pas un isomorphisme car on passe d'un espace discret à un espace continu périodique ! La transformée inverse se fait avec le produit scalaire continu périodique \langle, \rangle_P (Attention la période dans l'espace des fréquences est F_e);
- la base n'est pas finie, ni dénombrable mais infinie indénombrable.

Exercice 1.7 On admet pour le moment que la TFSD d'un signal $s[k]$ quelconque est une fonction $S(f)$ de période F_e . On peut donc voir $S(f)$ comme une fonction de période F_e de la variable réelle f et y appliquer une décomposition en séries de FOURIER !

Faites-le et comparez avec la TFSD inverse. Vous venez de basculer dans un dual ! D'ailleurs on peut voir $s[k]$ comme les coefficients de FOURIER d'une fonction de fréquence fondamentale T_e et appliquer une recombinaison de la série et trouver $S(f)$.

Donc $\text{TFSD} = \text{SdF}^{-1}$ et inversement $\text{SdF} = \text{TFSD}^{-1}$ ■

1.3.4 Base de la TFD et FFT

La TFD (Transformée de FOURIER Discrète), ou DFT (*Direct Fourier Transform*) en anglais, s'applique aux fonctions discrètes à support fini et utilisent une base d'ondes complexes discrète

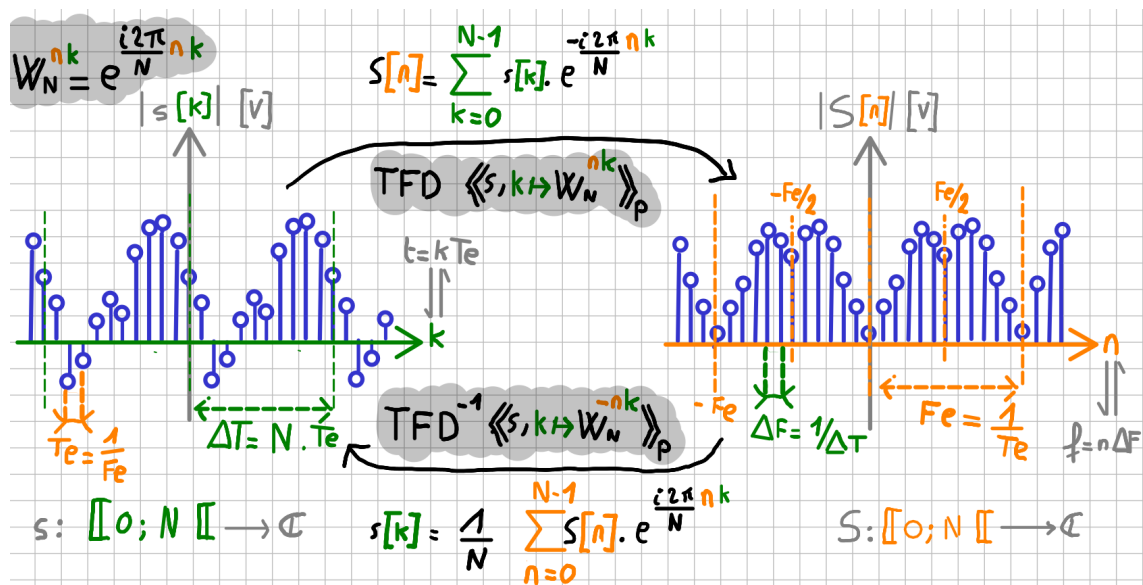
$$\text{finie } B_F = \left(\underbrace{k \mapsto W_N^{nk} = e^{i \frac{2\pi}{N} nk}}_{\vec{W}_N^n} \right)_{n \in \llbracket 0, N_0 \rrbracket} \quad \text{avec } W_N = e^{i \frac{2\pi}{N}}.$$

La FFT (*Fast Fourier Transform* en anglais uniquement) est un algorithme efficace de calcul de la TFD : c'est donc la même transformation avec les mêmes valeurs !

Exercice 1.8 Tentez de trouver la formule de cette TFD et son inverse, d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder. Il s'agit d'une application de

$$\llbracket 0, N_0 \rrbracket \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\text{TFD}} \llbracket 0, N_0 \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$$

basée sur le p.s. discret périodique noté \langle, \rangle_P avec la base continue $B_F = (\vec{w}_N^n)_{n \in \llbracket 0, N_0 \rrbracket}$ ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens finis et **on peut faire l'amalgame!** car c'en est un mais dans \mathbb{C} donc :

- le produit scalaire n'est pas symétrique mais « symétrique et demi » c.-à-d. *sesquilinéaire* car

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}.$$



Base pas normée

Le terme $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ est en fait une racine N ième de l'unité. Le calcul de la norme $\|w_n\|$ du vecteur de la base $w_n = k \mapsto W_N^{-nk}$ devient donc :

$$\langle w_n, w_n \rangle_P = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}nk} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

La formulation normée et symétrique de la TFD (1.3) fait donc intervenir un facteur $\frac{1}{\sqrt{N}}$ pour la TFD et son inverse :

$$s[k] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\langle s, w'_n \rangle_P}_{S[n]} w'_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle s, \frac{w_n}{\sqrt{N}} \rangle_P \frac{w_n}{\sqrt{N}} \quad \text{avec} \quad \|w'_n\|^2 = \left\| \frac{w_n}{\sqrt{N}} \right\|^2 = 1 \quad (1.3)$$

Pour des raisons de simplicité et de contrainte de calcul numérique, la formulation non normée (1.4) est largement utilisée. Cela fait donc apparaître le terme $\frac{1}{N}$ dans la TFD inverse.

$$s[k] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\langle s, w_n \rangle_P}_{S[n]} \frac{w_n}{N} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle s, w_n \rangle_P \frac{w_n}{N} \quad \text{avec} \quad \|w_n\|^2 = N \quad (1.4)$$

La transformée s'écrit aisément sous forme matricielle soit en considérant la transformée comme une application linéaire effectuant le changement de coordonnées entre les vecteur de la base canonique et la base fréquentielle, soit en faisant le changement de repère sous forme vectorielle :

$$\begin{aligned} \text{TFD} [\vec{s}] = \hat{S} = s_{B_F} &= \begin{pmatrix} \langle s, w_0 \rangle_P \\ \vdots \\ \langle s, w_{N-1} \rangle_P \end{pmatrix}_{B_F} \\ &= \begin{pmatrix} T_{S \cdot \overline{w_0}} \\ \vdots \\ T_{S \cdot \overline{w_{N-1}}} \end{pmatrix}_{B_F} = \begin{pmatrix} T_{\overline{w_0} \cdot s} \\ \vdots \\ T_{\overline{w_{N-1}} \cdot s} \end{pmatrix}_{B_F} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{w_0[0]} & \dots & \overline{w_0[N-1]} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{w_{N-1}[0]} & \dots & \overline{w_{N-1}[N-1]} \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{F}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} s[0] \\ \vdots \\ s[N-1] \end{pmatrix}}_{s_{B_C}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$s_{B_F} = M_{\mathcal{F}} \cdot s_{B_C}$$

On peut donc calculer la TFD d'un signal en multipliant le vecteur du signal temporel par une matrice $M_{\mathcal{F}}$ pour obtenir le vecteur des composantes fréquentielle : la TFD du signal.

Donc la matrice $M_{\mathcal{F}}$ représente un changement de base d'une base orthonormée canonique B_C vers la base orthogonale fréquentielle B_F , c'est donc la matrice de l'application identité Id du signal d'une base vers l'autre, ou plus simplement la matrice de passage $M_{\mathcal{F}} = P_{B_F \leftarrow B_C} = \text{mat}(\text{Id}, B_F, B_C)$

1.4 Dualité des transformées

On remarque que la TF et la TFD sont des endomorphismes (de E dans E) isomorphiques (il existe une réciproque), on parle d'automorphisme :

- la TF transforme une fonction complexe du primal en fonction complexe du dual et la transformée inverse du dual vers le primal existe ;
- la TFD transforme une suite périodique complexe du primal en suite périodique complexe du Dual et la transformée inverse du primal vers le dual existe.

Contrairement aux SdF et TFSD qui sont des isomorphismes (de E dans F et elles sont réciproques entre-elles) :

- la SdF transforme une fonction complexe périodique du primal en suite complexe du dual, sa réciproque est la TFD du dual ;
- la TFSD transforme une suite complexe du primal en fonction complexe périodique du Dual.

Sans rentrer dans la véritable définition d'un dual et de la dualité, nous pouvons garder cette notion de transformation d'un espace primal en son espace dual, et que si l'on retransforme le dual de la même manière alors on obtient à nouveau le primal. Le dual est comme une application qui est sa propre réciproque mais cela à l'échelle de la transformation d'ensemble qui est sa propre réciproque.

L'idée d'appliquer la TFSD à la SdF $n \mapsto \hat{S}[n]$ de la fonction primale $t \mapsto s(t)$, soit de faire le dual du dual, nous laisse espérer retomber sur la fonction primale s . Et cela marche car ces espaces sont duaux.

Exercice 1.9 Prenons le signal constant périodique $s : t \mapsto 1$, toutes ses projections $\langle s, t \mapsto e^{i2\pi t n F_0} \rangle_P$ sont nulles pour $n \neq 0$ sauf pour le vecteur $w_0 : t \mapsto 1$. Donc sa SdF est la suite complexes nulle partout sauf pour $n=0$ soit l'impulsion unité en 0 : $n \mapsto \delta_0[n]$.

Si l'on applique la TFSD à la SdF \hat{S} on obtient la fonction périodique constante et égale 1 soit la fonction de départ du primal s !

Essayez de faire cela pour un fonction périodique $s(t)$ quelconque : soit montrer que $TFSD[SdF[s]] = s$ et donc $TFSD \circ SdF = Id$ où Id est l'application identité des fonctions périodiques. Ou son dual : soit pour une suite complexe $s[k]$ montrer que $SdF \circ TFSD = Id$ où Id est l'application identité des suite complexes.

La SdF permet de créer l'espace dual des fonctions périodiques, en utilisant le produit scalaire avec les signaux de la base de FOURIER, qui est alors un espace des suites complexes. La TFSD permet de créer le dual des suites complexes, en utilisant le produit scalaire avec la base de FOURIER, qui est un espace des fonctions périodiques.

L'idée d'appliquer la TF à la transformée \hat{S} d'une fonction s primale, soit de faire le dual du dual, nous laisse espérer retomber sur la même fonction du primal s : cela est vrai au signe près !

Exercice 1.10 Prenons un signal pair de transformée connue (comme la fonction porte et son sinus cardinal) et calculez la transformée de la transformée (aussi connue à tout les coup). Vous vérifierez que **pour les fonction paires réelles** $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = Id$ des fonctions réelles paires.

On pourrait faire de même avec des fonctions imaginaires impaires et montrer que le dual du dual est le primal.

Dans le cas général ce n'est pas vrai, nous allons voir que le signal est retourné dans le temps.

Si on calcule la transformée de $Sy[s] : t \mapsto s(-t)$, où Sy est l'opérateur qui retourne une fonction dans le temps (défini ci-après dans def. 1.4.1), on obtient par changement de variable $x = -t$ la transformée inverse :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\text{Sy}[s]](f) &= \mathcal{F}[t \mapsto s(-t)](f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(-t) e^{-i2\pi f t} dt \\
&\stackrel{x=-t}{=} \int_{\infty}^{-\infty} s(x) e^{i2\pi f x} dx = \mathcal{F}^{-1}[s](f) \\
\mathcal{F} \circ \text{Sy} &= \mathcal{F}^{-1}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Definition 1.4.1 Opérateur symétrie ou « retournement »

L'opérateur symétrie noté Sy transforme une fonction discrète de L_e (resp. fonction continue de L_c) en fonction discrète de L_e (resp. fonction continue de L_c) retournée par changement du signe de sa variable, soit :

$$\begin{aligned}
\text{Sy} : L_e &\longrightarrow L_e \\
k \mapsto s[k] &\longmapsto k \mapsto s[-k] \\
\text{Sy} : L_c &\longrightarrow L_c \\
t \mapsto s(t) &\longmapsto t \mapsto s(-t)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

En appliquant successivement cette relation au signal s ; à son symétrique $\text{Sy} \circ s$; à la transformée \hat{S} et à son symétrique $\text{Sy} \circ \hat{S}$, on trouve le graphique Fig. 1.2.

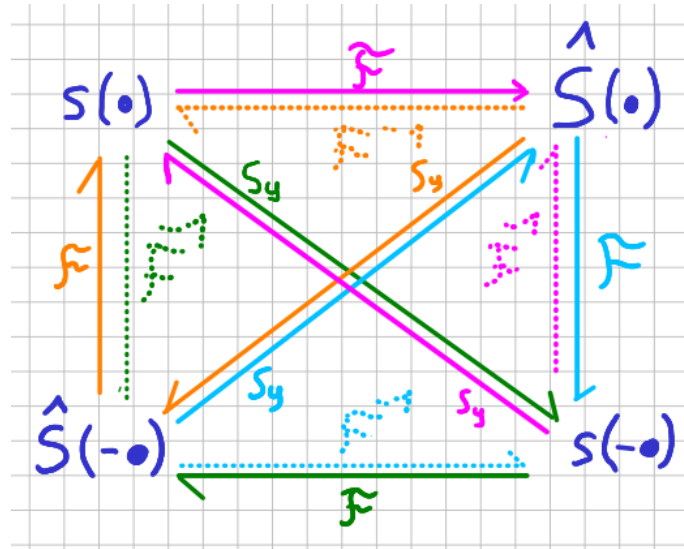


FIGURE 1.2 – Dualité de la transformation symétrie temporelle Sy car le symétrique du symétrique est lui même et bi-dualité de la transformée de FOURIER car transformer deux fois un signal c'est le retourner donc $\mathcal{F}^2 = \text{Sy}$ est duale et \mathcal{F} est dite biduale.

Exercice 1.11 Si on applique (1.6) au primal (flèches vertes), puis au dual (flèches oranges) et à leurs symétriques on obtient les 4 relations :

- $\mathcal{F} \circ \text{Sy}[s] = \mathcal{F}^{-1}[s] = ?$
- $\mathcal{F} \circ \text{Sy}[\hat{S}] = \mathcal{F}^{-1}[\hat{S}] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[s]] = ?$
- $\mathcal{F} \circ \text{Sy}[t \mapsto s(-t)] = \mathcal{F}^{-1}[t \mapsto s(-t)] = ?$
- $\mathcal{F} \circ \text{Sy}[f \mapsto \hat{S}(-f)] = \mathcal{F}^{-1}[f \mapsto \hat{S}(-f)] = ?$

Associez ces 4 relations aux quatre couleurs de flèches (vert, orange, cyan, rose) du diagramme et remplacez les « ? »

Prenez en primal le signal porte $s(t) = \Pi_T(t) = u(t + \frac{T}{2}) - u(t - \frac{T}{2})$ (signal nul partout sauf sur un intervalle de largeur T autour de 0) dont on connaît la transformée sous forme de sinus cardinal $\hat{S}(f) = T \operatorname{sinc}(\pi f T)$ (utiliser la transformée de LAPLACE, le théorème du retard et le passage à la transformée avec $p = i2\pi f$ pour retrouver cette formule ou par calcul direct). Appliquez ces formules pour trouver la transformée d'un sinus cardinal (fonction paire !) ■

On obtient ainsi des relations intéressantes du point de vue des opérateurs \mathcal{F} et Sy , notamment sur le fait qu'ils commutent bien :

$$\mathcal{F}^2 \circ \mathcal{F}^2 = \text{Sy} \circ \text{Sy} = \text{Id} = \text{Sy}^2 = \mathcal{F}^4$$

$$\mathcal{F}^{-1} = \underbrace{\mathcal{F} \circ \text{Sy}}_{\text{vert}} = \underbrace{\text{Sy} \circ \mathcal{F}}_{\hat{S}(-\bullet) \text{ ou orange}}$$

$$\mathcal{F} = \underbrace{\mathcal{F}^{-1} \circ \text{Sy}}_{\text{rose}} = \underbrace{\text{Sy} \circ \mathcal{F}^{-1}}_{\hat{S}(\bullet) \text{ ou orange}}$$

R De même pour la TFD

On obtient le même type de diagramme avec la TFD mais avec un retournement temporel discret périodique $\text{Sy} : k \mapsto s[-k] = s[N - k]$ ce qui permet de conserver la relation $\text{TFD} \circ \text{Sy} = \text{TFD}^{-1}$ mais avec une base normalisée ! Il faut donc faire attention et préférer la TFD normalisée en la divisant par \sqrt{N} .

Il suffit de partir de la TFD de $s[-k]$ et retrouver la formule de la TFD inverse. On a de plus pour les signaux discrets une représentation matricielle. Ce qui donne pour le retournement temporel d'un signal à 4 points :

$$\text{Sy}[s_4] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{\text{Sy}}} \cdot s_4 \quad (1.8)$$

avec $M_{\text{Sy}}^{-1} = M_{\text{Sy}}$ car $\text{Sy} = \text{Sy}^{-1}$

Et pour la TFD normalisée à 4 points :

$$\text{TFD}[s_4] = \hat{S}_4 = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{F}}} \cdot s_4 \quad (1.9)$$

avec $M_{\mathcal{F}}^{-1} = {}^T M_{\mathcal{F}}$ la matrice transposée. Car lors d'un changement entre base orthonormées, la matrice de passage est symétrique et orthogonale : la transposée est aussi l'inverse.

L'équation (1.6) devient alors $\text{TFD} \circ \text{Sy} = \text{TFD}^{-1}$ ce qui donne en matriciel $M_{\mathcal{F}} M_{\text{Sy}} = M_{\mathcal{F}}^{-1} = {}^T M_{\mathcal{F}}$

1.4.1 Filtrage et fenêtrage : opérations duales

1.4.2 Interpolation et gavage de zéro : opérations duales

1.4.3 Sur-échantillonnage et multiplication de période : opérations duales

1.4.4 Décimation et division de période : opérations duales

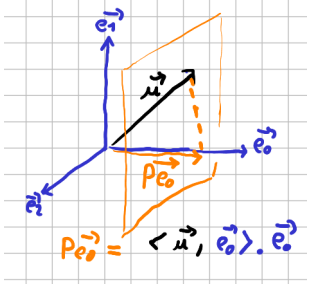
	Euclidien fini	Espace de fonctions
Base Ortho–normée	<p>une base finie de vecteurs</p> $B = (\vec{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}_{N_0}}$ <p>normés $\ \vec{e}_n\ = 1$ et orthogonaux $\langle \vec{e}_n, \vec{e}_m \rangle = 0$</p>	<p>base dénombrable de fonctions $(\vec{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou indénombrable $(\vec{w}_f)_{f \in \mathbb{R}}$ repérées par leur fréquences f ou un indice n associé ; fonctions d'énergie unitaire $\ \vec{w}_n\ = 1$ ou $\ \vec{w}_f\ = 1$, et orthogonales $\langle \vec{w}_n, \vec{w}_m \rangle_P = 0$ ou $\langle \vec{w}_f, \vec{w}_{f'} \rangle = 0$</p>
Analyse	<p>décomposer un vecteur dans cette base en coefficients $V_n = \langle \vec{v}, \vec{e}_n \rangle$ et en donner les coordonnées</p> $\underbrace{V _B}_{\Rightarrow \vec{v}} = \begin{pmatrix} V_0 = \langle \vec{v}, \vec{e}_0 \rangle \\ \vdots \\ V_{N-1} = \langle \vec{v}, \vec{e}_{N-1} \rangle \end{pmatrix}_B$	<p>décomposer une fonction \vec{u} en fréquentiel avec la transformée $U(f)$ ou avec les coefficients $U(n)$ de la série :</p> $U(f) = \langle \vec{u}, \vec{w}_f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \overline{w_f(t)} dt$ $U(n) = \langle \vec{u}, \vec{w}_n \rangle_P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \overline{w_n(t)} dt$
Synthèse	<p>recomposer un vecteur dans cette base $\vec{v} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{N_0}} \underbrace{U_0}_{\langle \vec{v}, \vec{e}_0 \rangle} \cdot \vec{e}_0$</p> 	<p>recomposer une fonction par transformation inverse de $U(f)$ ou recombinaison de série $U(n)$:</p> $\vec{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{U(f)}_{\langle \vec{u}, \vec{w}_f \rangle} \cdot \vec{w}_f(t) dt$ $\vec{u}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{U(n)}_{\langle \vec{u}, \vec{w}_n \rangle_P} \cdot \vec{w}_n(t)$
Projeter avec Plancherel	<p>calculer le produit scalaire de vecteurs par leurs composantes :</p> $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle U_B, V_B \rangle = {}^T U _B \cdot V _B$ $\left(\underbrace{U_0 \quad \dots \quad U_{N-1}}_{{}^T U _B} \right) \cdot \begin{pmatrix} V_0 \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{pmatrix}$	<p>on peut calculer un produit scalaire (utile aux corrélations et convolutions) à partir de sa transformée ou composantes de la série :</p> $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \overline{v(t)} dt = \langle U, V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) \overline{V(f)} df$ $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \overline{v(t)} dt = \langle\langle U, V \rangle\rangle_P = \sum_{k=0}^{N_0-1} U(k) \overline{V(k)}$
Normer avec Parseval	<p>Calculer la norme en sommant les carrés des coordonnées :</p> $\ \vec{u}\ ^2 = \ U_B\ ^2 = \sum U_n^2$	<p>calculer la puissance moyenne par la transformée $u(f)$ ou en sommant celle des composantes fréquentielles $U(n)$:</p> $\ \vec{u}\ ^2 = \ U\ ^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) ^2 df$ $\ \vec{u}\ ^2 = \ U\ _P^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) ^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{N}} U(k) ^2$

TABLE 1.2 – Structure Euclidienne à structure de Hilbert

2. Systèmes discrets

L'analogie avec les systèmes continus est forte, nous étudions de-même le cas des systèmes discrets linéaires invariants dans le temps avec une vision par opérateurs.

2.1 Systèmes linéaires

Definition 2.1.1 Système SISO (Single Input Single Output)

Un système discret SISO (resp. continu SISO) relie à un signal d'entrée x un signal de sortie unique y . Les signaux x et y sont des fonctions de la variables réelle discrète k (resp. t) appartenant à un espace de fonction le plus général possible noté ici L_E .

La relation entrée-sortie est donc modélisée par une application mathématique de L_E dans L_E notée L (resp. L_c en continu) et définie ainsi :

$$L : \begin{array}{ccc} L_E & \longrightarrow & L_E \\ x : k \mapsto x[k] & \longmapsto & y : k \mapsto y[k] \end{array} \quad (2.1)$$

$$L_c : \begin{array}{ccc} L_E & \longrightarrow & L_E \\ x : t \mapsto x(t) & \longmapsto & y : t \mapsto y(t) \end{array} \quad (2.2)$$

Une classe de système fondamentale est la classe des systèmes linéaires car elle offre de nombreux outils et propriétés mathématiques.

Definition 2.1.2 Système linéaire

Une système est dit linéaire si, et seulement si, l'application L associée est linéaire, soit pour tout $(x_1, x_2, \lambda) \in L_E^2 \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad L[x_1 + \lambda x_2](t) &= L[x_1](t) + \lambda L[x_2](t) \\ \iff L[x_1 + \lambda x_2] &= L[x_1] + \lambda L[x_2] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Une des conséquences de la linéarité est la possibilité d'appliquer le principe de superposition cher à l'électronicienne : « la réponse du système à une combinaison linéaire d'entrées est la combinaison des réponses de chaque entrée. »

Définition 2.1.3 Systèmes continus élémentaires

Les trois systèmes linéaires élémentaires que nous considérons dans l'étude des systèmes linéaires continus sont :

le gain $a.x : t \mapsto ax(t)$ où a est une constante scalaire réelle ou complexe

le dérivateur $D[x] = D \circ x : t \mapsto \frac{dx}{dt}(t)$

l'intégrateur $I[x] = I \circ x : t \mapsto \int_0^t x(v) dv$

On peut aisément vérifier que ces systèmes respectent la condition de linéarité 2.3.

R De manière implicite, on choisit un espace de fonction L_c qui est stable par toute combinaison de compositions de ces opérateurs (même une infinité de composition de D par exemple) soit un espace complet de fonctions.

On aimerait que les opérateurs dérivateur D et intégrale I commutent et soient réciproque sur $L_c : D \circ I = I \circ D = \text{Id}$. De manière à obtenir une composition de ces opérateurs qui ait la même propriété qu'un produit algébrique inversible.

Pour que cela soit vrai même avec les fonctions discontinues, il faut introduire les distributions de DIRAC voir Chap. 3.2.

Définition 2.1.4 Systèmes élémentaires discrets

Dans le cas des systèmes discret, les systèmes élémentaires sont :

le gain $a.x : k \mapsto ax[k]$ où a est une constante scalaire réelle ou complexe

le retard unité $T[x] = T \circ x : k \mapsto x[k-1]$.

l'avance unité $A[x] = A \circ x : k \mapsto x[k+1]$

On peut aisément vérifier que ces systèmes respectent la condition de linéarité 2.3.

R La commutation et réciprocity des opérateurs retard T et avance A est évidente et ne pose pas de problème théorique, contrairement au cas continu : $T \circ A = A \circ T = \text{Id}$.

La composition \circ de ces opérateurs avec l'opérateur somme de systèmes $+$ a donc une structure d'anneau commutatif : \circ et $+$ des systèmes se comporte comme \times et $+$ des nombres réels.

L'espace des signaux L_e (ou des suites complexes) est stable et complet par l'application des opérateurs élémentaires.

L'opérateur dérivée n'as pas de sens en discret car la limite $s'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h)-s(x)}{h}$ n'aurait pas de sens pour h entier. On peut s'approcher de cet opérateur avec des combinaisons plus ou moins complexes et précises des opérateurs avance et retard élémentaires.

■ **Exemple 2.1** L'effet du système *différentiateur* sur le signal d'entrée est d'écrit par l'opérateur :

$$L : x \mapsto y = \frac{x - T[x]}{T_e}$$

Vérifions d'abord que cet opérateur est linéaire :

$$\begin{aligned} L[x_1 + \lambda x_2][k] &= L[x_1 + \lambda x_2][k] \\ &= \frac{x_1[k] + \lambda x_2[k] - T[x_1 + \lambda x_2][k]}{T_e} \\ &= \frac{x_1[k] + \lambda x_2[k] - (x_1[k-1] + \lambda x_2[k-1])}{T_e} = A \\ L[x_1][k] + \lambda L[x_2][k] &= \frac{x_1[k] - x_1[k-1]}{T_e} + \lambda \frac{x_2[k] - x_2[k-1]}{T_e} = A \end{aligned}$$

Le système est donc linéaire. ■

2.2 Systèmes invariants

Il est fréquent, et surtout théoriquement utile, qu'un système réagisse de la même manière indépendamment de l'instant où est appliqué le signal d'entrée. Ce qui conduit à la définition suivante :

Définition 2.2.1 Système invariant dans le temps Un système discret (resp. continu) est dit invariant dans le temps si et seulement si son application associée L (resp. L_c) vérifie :

$$\forall x \in L_E, \forall (k, k_0) \in \mathbb{N}^2, \quad L[k \mapsto x(k - k_0)] = L[x](k - k_0) \quad (2.4)$$

$$\forall x \in L_E, \forall (t, t_0) \in \mathbb{R}^2, \quad L_c[t \mapsto x(t - t_0)] = L_c[x](t - t_0) \quad (2.5)$$

En terme d'opérateur ; un système L est invariant dans le temps si, et seulement si, son opérateur commute avec tout opérateur retard de k_0 noté $T_{k_0} = T_{k_0}[x] = k \mapsto x[k - k_0]$:

$$L \circ T_{k_0} = T_{k_0} \circ L \quad \Longleftrightarrow \quad L[T_{k_0}[x]] = T_{k_0}[L[x]] \quad (2.6)$$

$$L_c \circ T_\tau = T_\tau \circ L_c \quad \Longleftrightarrow \quad L_c[T_\tau[x]] = T_\tau[L_c[x]] \quad (2.7)$$

Autrement dit « la réponse du système à un signal retardé est le retard de la réponse du système. » ; ou encore « la réponse du système ne dépend pas de l'origine des temps choisie. »



Il est facile de vérifier que les systèmes discrets élémentaires que sont le gain ; le retard unitaire et l'avance unitaire (gain, dérivateur et intégrateur pour le continu) sont invariants. Il en est de même pour tout système constitué de combinaisons linéaires et de composition de systèmes élémentaires.

Il suffit alors de montrer que le système se décompose avec des *coefficients constants* avec des systèmes élémentaires en le mettant sous forme d'*équation aux différences* ou *réurrence* à coefficients constants (*équations différentielle* en continu) ou en un schéma bloc à coefficients constant.

2.3 Réponse d'un système LTI

Rappelons qu'un système peut aussi bien représenter un correcteur dans une boucle d'asservissement, qu'un filtre utilisé en boucle ouverte, ou bien un modèle de système à commander ou observer : calculer la réponse d'un système à un signal c'est aussi « faire du filtrage. »

Nous allons d'abord montrer que l'opération de filtrage consiste en temporel à effectuer une convolution du signal d'entrée x avec la réponse impulsionnelle h du système H ainsi défini.

En un second temps nous utiliserons la réponse impulsionnelle pour caractériser la propriété de stabilité du système.

Nous terminerons en montrant que l'opération duale du filtrage temporel est un *fenêtrage fréquentiel* ou multiplication par la transformée de la réponse impulsionnelle $Z(h) = \hat{H}$.

2.3.1 Réponse impulsionnelle

Dans le cas discret, l'obtention de la réponse d'un système est facile à obtenir en utilisant les propriétés LTI du système H et en décomposant le signal d'entrée x dans la base temporelle canonique.

Contrairement au cas continu, un signal d'entrée quelconque x se décompose facilement en impulsions unité. La Fig. 2.1 reprend la décomposition en impulsions d'un signal d'entrée nommé s (??) et applique un système H de réponse impulsionnelle h à chaque impulsion pour obtenir la réponse y du système. On retrouve ainsi la formule de convolution temporelle de $y = s * h$. Le résultat est démontré dans l'équation (2.8) en utilisant les propriétés de linéarité et invariance du système.

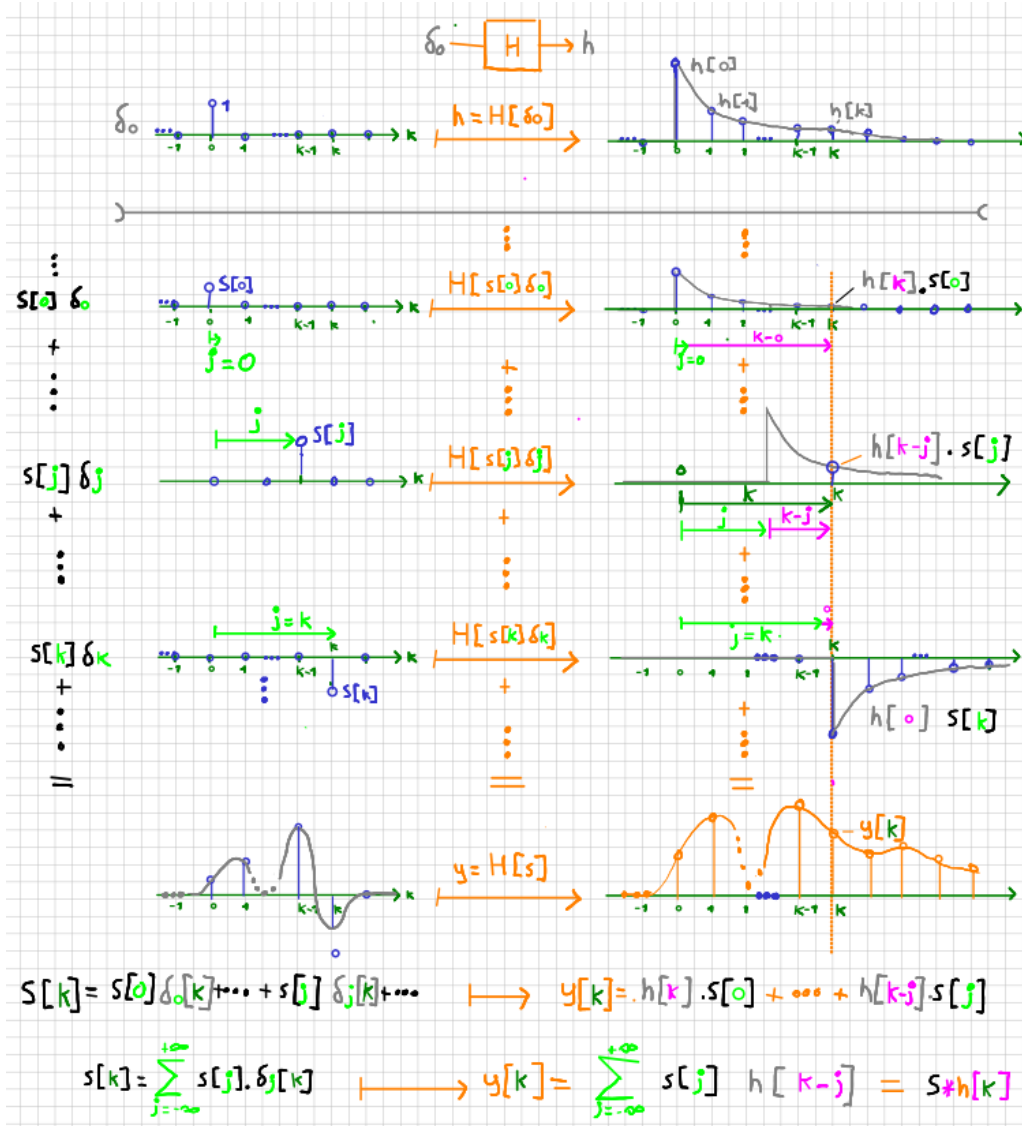


FIGURE 2.1 – La réponse d'un système linéaire invariant y est la somme des réponses impulsionnelles des impulsions qui composent le signal d'entrée s .

$$\begin{aligned}
 \underbrace{x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \delta_j}_{\text{signal}} &\implies y = H[x] = H \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \delta_j \right] \\
 &\stackrel{\text{linéarité de } H}{\implies} y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} H \left[\underbrace{x[j]}_{\text{constante!}} \delta_j \right] \stackrel{\text{linéarité de } H}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \underbrace{H[\delta_j]}_{H.T^j[\delta_0]} \\
 &\implies y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \cdot H.T^j[\delta_0] \stackrel{\text{invariance de } H}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \cdot T^j \cdot \underbrace{H[\delta_0]}_h \\
 &\implies y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \cdot \underbrace{T^j[h]}_{k \mapsto h[k-j]} = x * h \\
 &\implies \forall k \in \mathbb{Z}, \quad y[k] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] h[k-j] = x * h[k] \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

où l'opérateur $*$ est la convolution discrète définie ci-après.

Définition 2.3.1 Convolution discrète

La convolution de signaux discret u et v notée $u*v$ est le signal discret défini par :

$$\begin{aligned} u*v & : k \mapsto u*v[k] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u[j] \cdot v[k-j] & = \sum_{j \leftrightarrow j+k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} u[j+k] \cdot v[-j] \\ u*v & = \langle\langle u, \underbrace{T^k \cdot \text{Sy}[v]}_{j \mapsto v[k-j]} \rangle\rangle & = \langle\langle T^{-k}[u], \text{Sy}[v] \rangle\rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

où T^k est le retard de k échantillons et $T^{-k} = A^k$ son opérateur réciproque (inverse algébrique) : l'avance de k échantillons.



Attention à l'ordre des opérations : la symétrie et le retard ne commutent pas !

Même si nous avons vu dans §1.4 que les opérateurs Sy et \mathcal{F} commutent : $\mathcal{F} \circ \text{Sy} = \text{Sy} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$, il n'en est pas de même pour les opérateurs Sy et T !

Prendre un signal s de la variable discrète j , l'avancer de k échantillons avec $A^k = T^{-k}$ puis le retourner avec Sy donne

$$\underbrace{\text{Sy} \circ}_{\text{Symétrie de}} \underbrace{T^{-k}}_{\text{avance } A^k} [s] = \text{Sy} \left[\underbrace{T^{-k}[s]}_{j \mapsto s[j+k]} \right] : j \mapsto s \left[\underbrace{(-j)}_{\text{symétrie}} + k \right] = s[k-j]$$

Alors que prendre un signal, le retourner avec Sy puis l'avancer avec T^{-k} donne

$$\underbrace{T^{-k} \circ}_{\text{Avance } A^k \text{ de}} \underbrace{\text{Sy}}_{\text{symétrie}} [s] = T^{-k} \left[\underbrace{\text{Sy}[s]}_{j \mapsto s[-j]} \right] : j \mapsto s \left[- \underbrace{(j+k)}_{\text{avance}} \right] = s[-j-k]$$

On remarque donc que $T^{-k} \circ \text{Sy} \neq \text{Sy} \circ T^{-k}$. En revanche prendre un signal, le retourner avec Sy puis le *retarder* avec T^k donne

$$\underbrace{T^k \circ}_{\text{Retard de}} \underbrace{\text{Sy}}_{\text{symétrie}} [s] = T^k \left[\underbrace{\text{Sy}[s]}_{j \mapsto s[-j]} \right] : j \mapsto s[-(j-k)] = s[k-j]$$

Donc la commutation donne $\text{Sy} \circ T^{-k} = T^k \circ \text{Sy}$, autrement dit soit :

« La symétrie de l'avance d'un signal est le retard de son symétrique ».

L'analogie avec la convolution de signaux continu u et v notée $u*v$ fonctionne aussi en utilisant le produit scalaire continu $\langle\langle u, T^k \cdot \text{Sy}[v] \rangle\rangle$ au lieu du produit scalaire discret.

Définition 2.3.2 Convolution continue

$$\begin{aligned} u*v & : t \mapsto u*v(t) = \int_{x=-\infty}^{\infty} u(x) \cdot v(t-x) dx & = \int_{t=-\infty}^{\infty} u(x+t) \cdot v(-x) dx \\ u*v & = \langle\langle u, T^k \text{Sy}[v] \rangle\rangle & = \langle\langle T^{-k}[u], \text{Sy}[v] \rangle\rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

- 2.4** Stabilité d'un système LTI
- 2.5** Calcul opérationnel
 - 2.5.1** Dualité entre signal et système
 - 2.5.2** Systèmes élémentaires : fonction de transfert en Z
 - 2.5.3** Système non-bouclé – moyenne glissante – régressif – FIR
 - 2.5.4** Système bouclé – récurrence – autorégressif – IIR
- 2.6** Transformée en Z
 - 2.6.1** Fonction de transfert et récurrence
 - 2.6.2** Signaux/systèmes usuels
 - 2.6.3** Décomposition élémentaire et stabilité
 - 2.6.4** Domaine de convergence et causalité
- 2.7** Réponse fréquentielle
 - 2.7.1** Lien avec les transformées de Fourier
 - 2.7.2** Dualité entre système et filtre

3. La distribution de Dirac

L'impulsion de DIRAC est incontournable en traitement du signal et système; nous allons progressivement lever le voile !

3.1 La notion de densité

Retournons sur 3 notions de densité avec phénomène de localisation intense :

la densité de masse – est une notion physique que l'on peut comprendre aisément avec l'exemple d'une mousse au chocolat dont la *densité de masse* est plus ou moins aérée *selon une position réelle* sur un axe de découpe du gâteau. On considère la pépite pure de chocolat de 1g *concentrée à un endroit* infinitésimalement bon du gâteau.

la densité de probabilité – on considère la *densité de probabilité* d'un nombre tiré au hasard entre 1 et 10 *selon la valeur réelle* de ce nombre. Le tirage d'un dé à 6 faces sera la *concentration infinie autour de valeurs précises* de la densité de probabilité.

la densité d'amplitude (ou de puissance) – dans le cas d'une transformation de FOURIER, on considère la *densité d'amplitude* des composantes d'un signal *selon une fréquence réelle*. La décomposition en série de FOURIER sera la *concentration infinie autour de fréquences harmoniques* de cette densité d'amplitude.

Dans les années 20, DIRAC a eu besoin de représenter la concentration de densité de probabilité de particules élémentaires autour de valeurs précises et discrètes pour développer la mécanique quantique.

Une densité f n'a de sens, ou est utile, uniquement en l'intégrant pour avoir une « mesure » de la masse, ou de la probabilité ou de l'amplitude sur un segment de valeurs $[a, b]$:

$$M_{[a,b]} = \int_a^b f(x) \, dx \quad (3.1)$$

On voit que dans le cas discret, il faut dériver une fonction cumulative « en escalier » et donc dériver des discontinuités pour obtenir une densité continue d'une variable discrète. Or la dérivée d'une discontinuité est mal définie ! Nous allons le voir dans la section suivante.

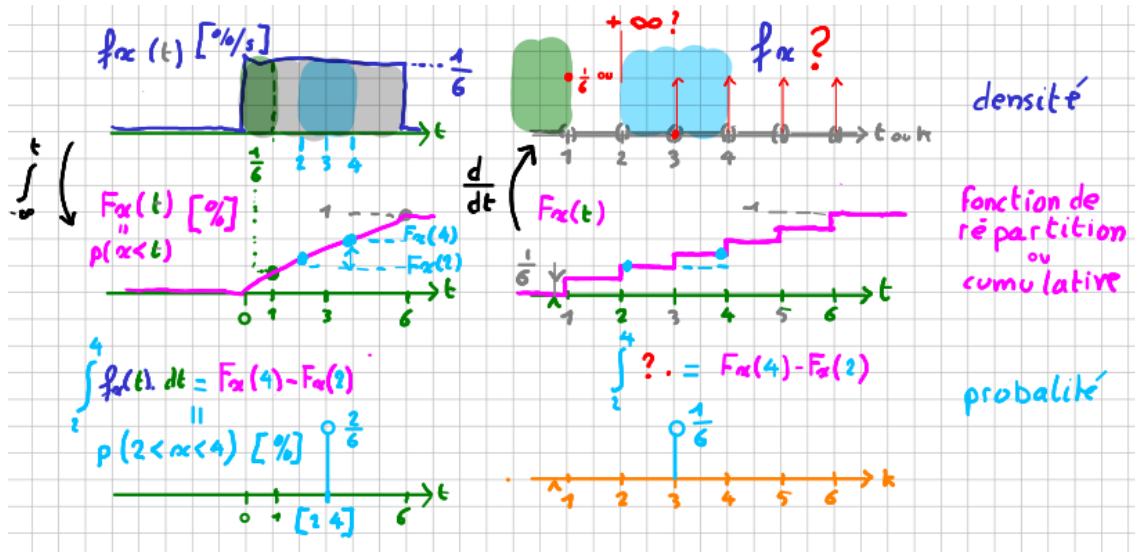


FIGURE 3.1 – A gauche une variable aléatoire continue $[0, 6]$. A droite une variable aléatoire discrète $[[1, 6]]$. En bas une mesure de probabilité de tirer une valeur autour de 3 dans $]2, 4[$; au milieu la fonction cumulative F_x ou probabilité d'avoir une valeur inférieure à t , en haut une tentative de densité de probabilité.

QUIZZ

En regardant la Fig. 3.1 répondez à ces questions :

Q1 - la probabilité d'avoir un tirage unique à exactement 3 est de

1. 0 pour $t=3$ en continu et $1/6$ pour $k=3$ en discret
2. $1/6$ pour $t=3$ en continu et $1/6$ pour $k=3$ en discret
3. $1/6$ pour $t=3$ en continu et ∞ pour $k=3$ en discret
4. c'est pas 3 que je veux mais 20/20 !

Q2 - la probabilité d'avoir un tirage unique < 3 est de

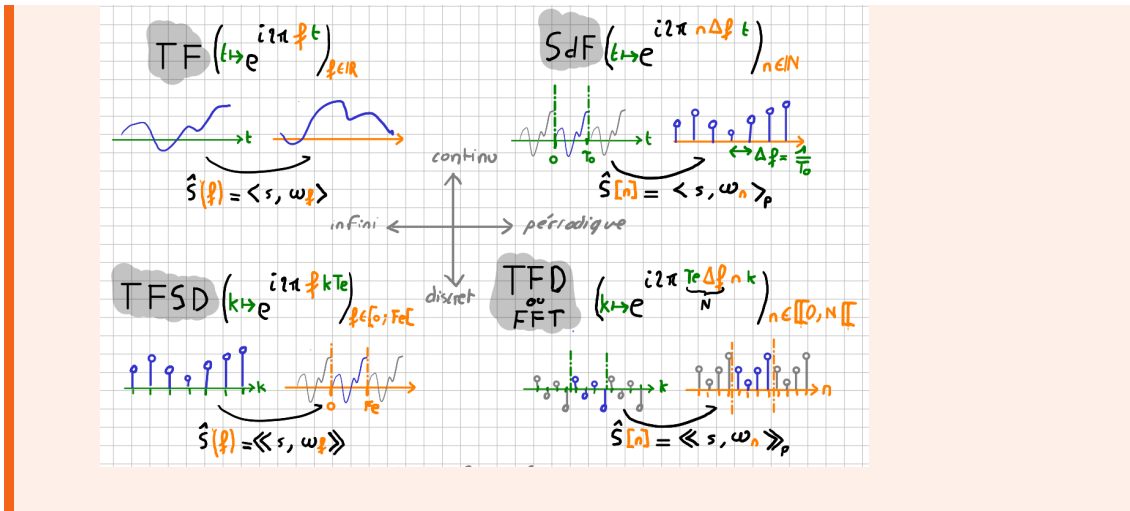
1. $1/2$ pour $<t=3$ en continu et $1/2$ pour $<k=3$ en discret
2. $1/2$ pour $<t=3$ en continu et $1/3$ pour $<k=3$ en discret
3. pareil que pour $t \leq 3$ en continus et pareil que pour $k \leq 3$ en discret
4. si on met la bonne réponse toujours au début c'est débile !

Q3 - la densité de probabilité pour la valeur exacte 3 est de

1. 0 pour $t=3$ en continu et $1/6$ pour $k=3$ en discret
2. $1/6$ pour $t=3$ en continu et $1/6$ pour $k=3$ en discret
3. $1/6$ pour $t=3$ en continu et ∞ pour $k=3$ en discret
4. je préfère rester discrète sur la question...

Q4 Parmi les transformées représentées sur la figure suivante, lesquelles sont des densités et dans quelles unités (on suppose un signal primal temporel en Volts) :

1. $\hat{S}(f)$ de la TF est une densité continue en V ;
2. $\hat{S}(f)$ de la TF est une densité continue en V/Hz ;
3. $\hat{S}(n)$ (impulsions unités) de la SdF est une densité discrète V/Hz ;
4. $\hat{S}(f)$ (diracs) de la SdF est une densité en V/Hz ;
5. au moins avec un choix unique, je fais qu'une erreur par question...



3.2 Dérivée de fonctions discontinues

La densité de fonction discrètes nous pousse à dériver des fonctions discontinues de première espèce (pas d'infinité à droite ni à gauche).

Prenons la fonction de HEAVISIDE ou échelon unité noté $u(t)$ pour modéliser toute discontinuité dans un signal, le but est de définir une dérivée de cette fonction, voir Fig. 3.2 et d'obtenir à nouveau $u(t)$ par intégration.

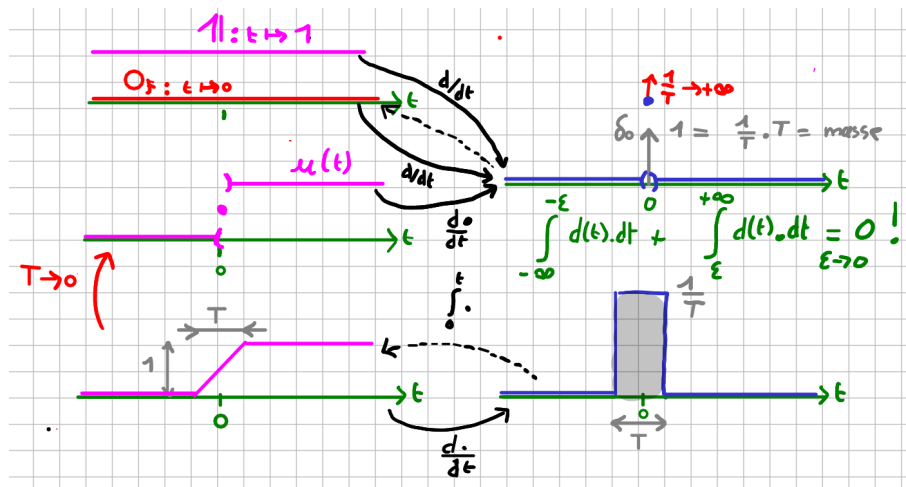


FIGURE 3.2 – Dérivées de l'échelon, de fonctions constantes et d'une fonction continue convergeant vers l'échelon pour $T \rightarrow 0$

Or la dérivée $u'(t)$ n'est pas définie en 0 (elle vaudrait $+\infty$), il faut donc trouver un prolongement pour la définir partout :

- $u'(0) = 0$ par continuité, on obtient alors la fonction nulle. Sa primitive est la fonction nulle et donc on ne retrouve pas $u(t)$ en intégrant la dérivée ;
- $u'(0) = a, a \in \mathbb{R}$, la fonction est discontinue en 0, on doit intégrer en deux fois

$$u(t > 0) = \int_{-\infty}^{t > 0} u'(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{-\infty}^{-\epsilon} u'(x) dx}_{=0} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\epsilon}^t u'(x) dx}_{=0} = 0$$

La dérivée de l'échelon est donc la fonction nulle « presque partout » ($\|u'\|_2 = 0$).

On peut essayer d'approcher l'échelon avec deux fonctions rampes comme illustré sur la figure, et obtenir une dérivée définie partout (sauf en $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$) sous la forme de la fonction porte $\Pi_{[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]}(t)$. Mais la limite de cette fonction porte reste la fonction nulle presque partout !

3.3 Opérateur dérivée et sa réciproque

Le fait que plusieurs fonctions ont pour image la même fonction nulle, rend l'opérateur dérivée (noté p en calcul opérationnel ou D) font que l'application dérivée qui transforme une fonction de L_1 en fonction de L_1 n'est pas injective.

$$p = D = \frac{d}{dt} : \begin{array}{ccc} L_1 & \longrightarrow & L_1 \\ t \mapsto u(t) & \longmapsto & t \mapsto u'(t) \end{array} \quad (3.2)$$

Elle est donc non bijective et une application réciproque unique n'existe pas (l'opérateur primitive qui s'annule en 0). Pourtant l'intuition montre que l'on a besoin d'établir un objet mathématique qui soit la dérivée de l'échelon et dont une primitive soit $u(t)$. Cette fonction généralisée ou fonction imaginaire est l'impulsion de DIRAC introduite et utilisée par le scientifique éponyme dans les années 1920 et établie mathématiquement par Schwartz dans les années 1950.

Comme l'indique la Fig. 3.3 on crée une fonction imaginaire étant la dérivée de discontinuité et dont l'intégrale réciproque donne une discontinuité.

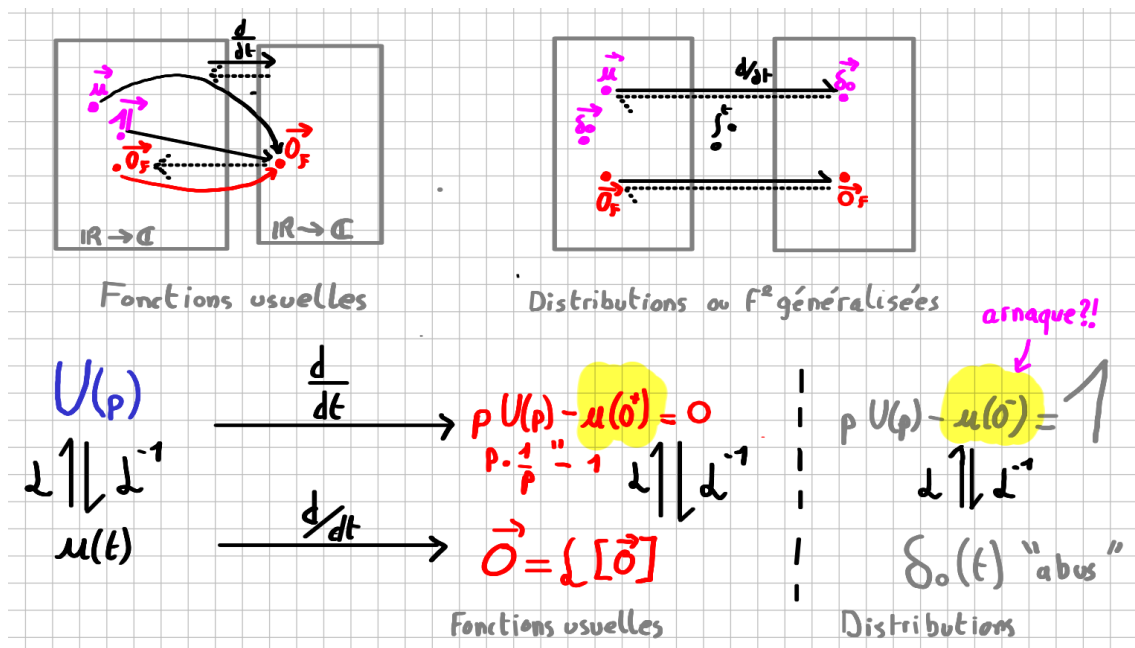


FIGURE 3.3 – L'espace des fonctions usuelles où l'opérateur dérivée n'est pas injectif, et l'espace des distributions où l'opérateur est bijectif.

Cela permet de définir un opérateur inversible et d'introduire le calcul opérationnel où l'opérateur D possède une réciproque D^{-1} tel que $D \circ D^{-1} = \text{Id}$. La notation D^{-1} n'est pas anodine car on assimile une réciproque d'opérateur à un inverse algébrique (du nombre D). C'est l'approche par *calcul opérationnel* vu dans la §?? pour les systèmes discrets.

3.3.1 Calcul opérationnel en continu

On obtient donc dans l'espace des distribution, noté $\mathcal{D}'(\Omega)$, un opérateur D qui admet un réciproque $I = D^{-1}$ capable de commuter, s'associer se distribuer et s'inverser avec l'addition :

une algèbre d'anneau commutatif comme celles de $+$ et \times sur les réels. L'approche opérationnelle assimile c'est opérateur D à un nombre complexe p que l'on manipule algébriquement : ce nombre peut être assimilé à la variable de LAPLACE notée s lorsque le signal de référence choisi est l'impulsion de DIRAC.

Tout système linéaire invariant continu est représenté par une équation différentielle

$$a_n y^{[n]} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m e^{[m]} + \dots + b_1 e' + b_0 e$$

que l'on peut noter sous forme opérationnelle :

$$a_n \underbrace{D \circ \dots \circ D}_{n \text{ fois}}[y] + \dots + a_1 D[y] + a_0 [y] = b_m \underbrace{D \circ \dots \circ D}_{m \text{ fois}}[e] + \dots + b_1 D[e] + b_0 [e]$$

Pour pouvoir manipuler les signaux comme des opérateurs et pouvoir écrire $D \circ y = y \circ D$ permettant d'avoir une algèbre d'anneau commutatif. On assimile un signal y au système Y permettant de le générer à partir de sa réponse impulsionnelle (réponse à une impulsion de DIRAC δ_0) :

$$y \leftrightarrow Y \text{ tel que } Y[\delta_0] = y$$

Nous avons donc les opérateurs élémentaires gain a_n , dérivée D et l'opérateur Y associé au signal y qui se composent et commutent : $a_n \circ D \circ Y = Y \circ D \circ a_n = \dots$. Comme avec ces opérateurs élémentaires les opération \circ et $+$ ont une structure d'anneau commutatif, on adopte la notation algébrique classique pour ces opérateurs :

$$a_n D^n Y + \dots + a_1 D Y + a_0 Y = b_m D^m E + \dots + b_1 D E + b_0 E$$

Comme l'opérateur D possède une réciproque notée D^{-1} puisque $D \circ D^{-1} = Id$ et que ces opérateurs commutent, on peut associer D à la variable scalaire p , l'opérateur gain a_n au nombre a_n (réel ou complexe) et obtenir une équation algébrique :

$$(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) Y = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) E \quad (3.3)$$

Comme le système identité est $Id = DD^{-1}$ nous obtenons algébriquement que le système identité est le système de gain 1 et donc associé au nombre 1 qui représente donc l'impulsion de DIRAC de poids 1.

Si l'on borne les signaux y et e à des signaux générés par des systèmes linéaire invariants Y et E à partir de l'entrée δ_0 , alors nous obtenons une représentation du signal y par une equation algébrique (3.3) calculée pour une entrée $E(p) = 1$ (impulsion de DIRAC). Le système Y est donc représenté par une fraction rationnelle $Y(p)$. Il en est de même pour le signal e qui est représenté par le système $E(p)$

C'est ainsi que HEAVISIDE à remarqué que la composition des dérivées de fonctions et leurs associations linéaires dans les équations différentielle se comportait comme une algèbre classique. L'idée est venue de manipuler D comme un nombre ce qui l'a conduit à l'utilisation du calcul opérationnel comme celui effectué avec la transformée de LAPLACE où p joue le rôle de l'opérateur dérivé mais est une nombre complexe.

Et donc passer le pas et de calculer la solution en faisant une fraction rationnelle d'opérateur dérivés et une décomposition en éléments simples d'opérateurs dérivés comme pour des nombres avec la fameuse *fonction de transfert* du système :

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{(b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0)}{(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0)} = \frac{\beta_n}{p + \alpha_n} + \dots + \frac{\beta_0}{p + \alpha_0}$$

Le tout sans avoir défini la transformée de LAPLACE qui est venue plus tard avec la formule de Carson.

3.4 Propriété sous l'intégrale de l'impulsion de DIRAC et de l'impulsion unité

Nous avons donc une fonction de densité δ_0 qui une fois intégrée peut enfin donner une fonction de répartition discontinue en 0. On peut appliquer l'opérateur de retard sur cet objet et définir δ_a la densité d'une fonction $u(t - a)$ discontinue en a . On peut définir par abus de notation :

$$\delta_a(t) = \delta_0(t - a)$$

Cela permet aussi de représenter l'opérateur d'échantillonnage idéal d'un signal continu à un instant a donné en multipliant le signal $s(t)$ par la densité de mesure en a ce qui est représenté par la Fig. 3.4

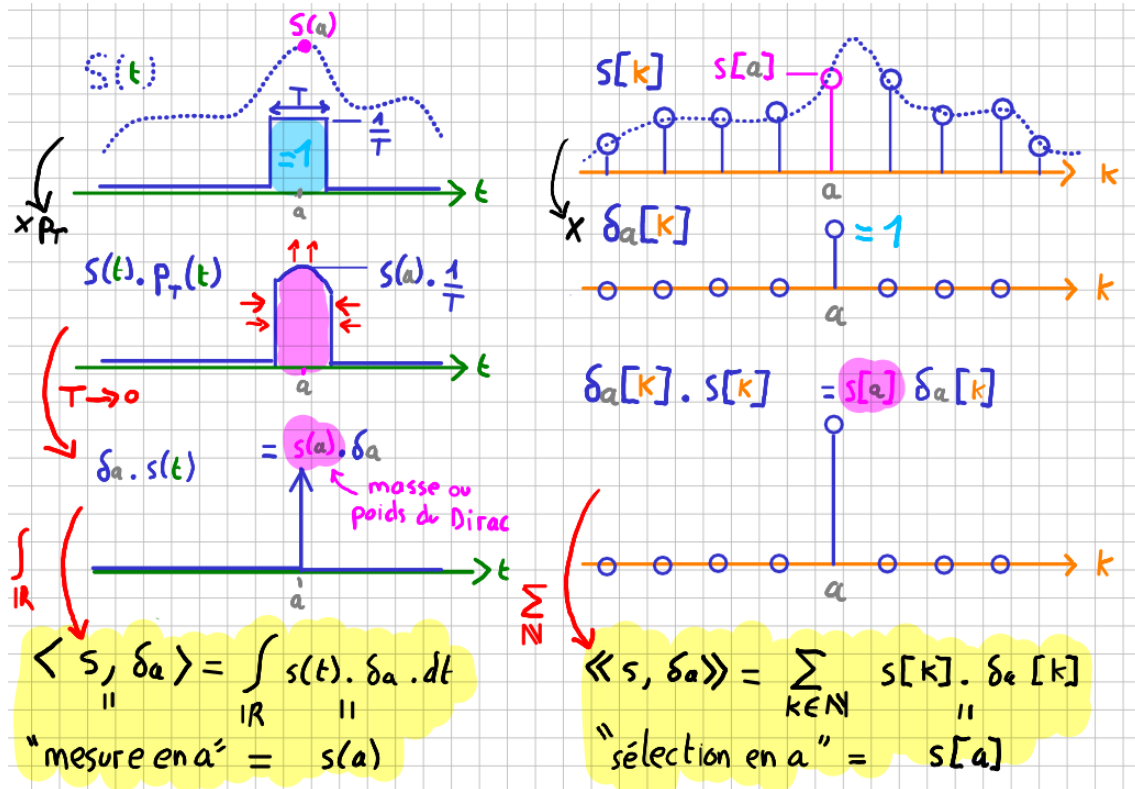


FIGURE 3.4 – A droite l'impulsion unitaire discrète qui effectue une mesure "sous la somme" ou à travers le produit scalaire. A gauche l'impulsion de DIRAC qui effectue la mesure idéale d'une fonction continue.

Nous avons donc les propriétés :

$$\langle s, \delta_a \rangle = s(a) \text{ en continu et en discret } \langle\langle s, \delta_a \rangle\rangle = s[a]$$

3.5 Propriété de convolution avec le DIRAC et impulsion unité

On peut définir l'opérateur de convolution, noté $*$, à l'aide du produit scalaire puisque :

$$u * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) v(t - x) dx = \langle u, \overline{x \mapsto v(t - x)} \rangle \quad (3.4)$$

De même pour les signaux discret à support infini, on définit la convolution :

$$u * v[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u[l] v[k - l] = \langle\langle u, \overline{l \mapsto v(k - l)} \rangle\rangle \quad (3.5)$$

Et la convolution cyclique pour les signaux discrets périodiques de N points :

$$u * v[k] = \sum_0^{N-1} u[l] v[k-l] = \langle\langle u, \overline{l \mapsto v(k-l)} \rangle\rangle_P \quad (3.6)$$