Exercice3 b)

Le piège du Dirac et des C.I.

b) $x'' + 6x' + 8x = A.\delta$ on prend $A=1$ pour répondre à l'énoncé

$= 0$ équa° homogène avec C.I.

$$\mathcal{L}\quad \underbrace{p^2 X(p) - p\,x_0^+ - x_0'^+}_{L[x'']} + \underbrace{6\left(p\,X(p) - x_0^+\right)}_{6\,L[x']} + 8\,X(p) = A.1$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_0^+ = 1 \\ x_0'^+ = 3 \end{matrix}}$$

$$X(p) = \frac{x_0^+ p + 6x_0^+ + x_0'^+ + A}{p^2+6p+8} = \frac{p + 9 + A}{(p+2)\,(p+4)} = \frac{a}{p+2} + \frac{b}{p+4}$$

$$(p+2)\,X(p) \xrightarrow[p\to -2]{} \frac{-2+9+A}{2} = \frac{7}{2} + \frac{A}{2}$$

$$(p+4)\,X(p) \xrightarrow[p\to -4]{} \frac{5+A}{-2} = -\frac{5}{2} - \frac{A}{2}$$

$$X(p) = \underbrace{\frac{7/2}{p+2} - \frac{5/2}{p+4}}_{\text{solution homogène si } A=0} + A.\underbrace{\frac{+1/2}{p+2} - \frac{1/2}{p+4}}_{\text{solu° particulière à l'entrée } A.\delta}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(7.e^{-2t} - 5\,e^{-4t}\right).u(t)}_{x_{c0}(t)} + A\,\underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{-2t} - e^{-4t}\right)u(t)}_{x_{cp}(t)}$$

$t=0$

$x(0^+)$

$$x(0^+) = \frac{2}{2}\,u(0^+) = 1 + \underbrace{\frac{A}{2}\cdot\frac{0}{2}\,u(0^+)}_{=0}$$

$$\lim_{p\to+\infty} p\,X(p) = \underbrace{7/2 - 5/2}_{2/2} + A\,\underbrace{(1/2 - 1/2)}_{0} = 1 = \lim_{t\to 0} x(t)$$ car elle existe !

$x'(0^+)$

$$x'(t) = \underbrace{\left(-7e^{-2t} + 10\,e^{-4t}\right)}_{x_{c0}'(t)}.u(t) + \underbrace{x_{c0}(t).\delta}_{\substack{= x_{c0}(0).\delta = \frac{7-5}{2}\delta \\ = \delta}} + A\,\underbrace{\left(-e^{-2t} + 2e^{-4t}\right).u(t)}_{x_{cp}'(t)} + \underbrace{(x_{cp}(t) * \delta)}_{\substack{= A.\frac{1-1}{2}.\delta \\ = 0\delta = 0}}$$

$$x'(0^+) = (10-7)\,u(0^+) + \frac{1}{2}(7-5)\,\underbrace{\delta(0^+)}_{=0 \text{ en } 0^+} + A\,(-1+2)\,u(0^+)$$

$$\boxed{x'(0^+) = 3 + A \ !}$$

Le Dirac ajoute une valeur initiale ! sur x'

TSVP

2) théorème valeur initiale et finale sur $x'(t)$

On a $x'(t) = \underbrace{x_{c_0}'(t) \cdot u(t)}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 3} + A \underbrace{x_{c_p}'(t) \cdot u(t)}_{\xrightarrow[t\to\infty]{} 1} + \underline{\underline{\delta}}$

$\lim_{t\to 0} x'(t)$ n'existe pas car δ est infinie en 0

Donc $\lim_{p\to +\infty} p\, \mathcal{L}[x'](p) = \lim_{p\to+\infty} p . p . \mathcal{L}[x](p) = \lim_{p\to+\infty} p^2 X(p) = +\infty$

ne marche pas ! car il faut que la limite existe...

En revanche $\lim_{t\to+\infty} x'(t)$ existe.

et $\lim_{p\to 0} p^2 X(p) = \lim_{p\to 0} p \left(7/2 - 5/2 + A/2 - A/2 \right) = 0$

ce qui marche bien !

~~Ss~~ δ et ses dérivées en entrée d'un système introduit des CI supplémentaires !

NE JAMAIS combiner les deux manières d'introduire des condi° initiales.

- On aurait pu prendre $x'(0^+) = 3 - A = 2$ ici pour avoir une solu° correcte...
- Les vrais matheuses résolvent les équadiffs dans l'espace des distribu° avec les Transformées de Fourier et introduisent les C.I. avec les diracs et dérivées...