Exercice 5 chap 7

$f_1 = t \mapsto \cos(\omega_1 t)$ $\qquad f_2 : t \mapsto \cos(\omega_2 t)$

1) $\mathcal{F}[f_1 . f_2]$

Calcul direct : $\mathcal{F}[f_1 . f_2]\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \int_{\mathbb{R}} \cos(\omega_1 t).\cos(\omega_2 t).e^{-j\omega t}.dt$

$f = \frac{\omega_2}{2\pi}$

semble dégueulasse ! formule trigo puis IPP !, ou plutôt formules d'euler....

Calcul indirect :

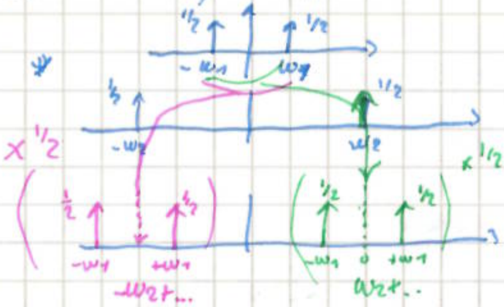
On sait que $\mathcal{F}[f_1 . f_2] = \mathcal{F}[f_1] * \mathcal{F}[f_2]$

c'est "le dual du filtrage" filtrer : multiplier les spectres pour modifier les fréquences sélectionnées ⇕ convoluer les temporel et h(t)

multiplier ds le tps pour sélectionner les instants ⇔ convoluer les spectres

dual

$\mathcal{F}[f_1 . f_2] = \frac{1}{2}(\delta_{\omega_1} + \delta_{-\omega_1}) * \left(\frac{1}{2}\, \delta_{\omega_2} + \delta_{-\omega_2}\right)$



Oups j'ai pris $\omega_2 > \omega_1$ mais c'est pareil ! sauf pour le dessin

: s'amuser à faire le dessin avec $f_2 . f_1$ soit $F_2 * F_1$ qui doit donner pareil !

convoluer avec un dirac c'est décaler autour du dirac en x ant par le poids du dirac.

↳ penser Physique densité de masse et poids de Dirac

$= \frac{1}{4}\left(\delta_{-\omega_2-\omega_1} + \delta_{-\omega_2+\omega_1} + \delta_{\omega_2-\omega_1} + \delta_{\omega_2+\omega_1}\right)$

EN TÉLÉCOM :

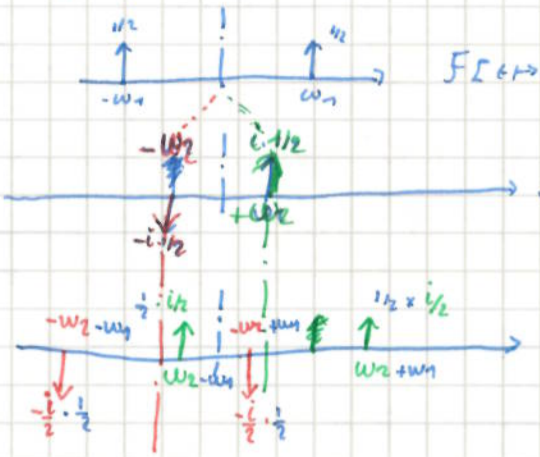
x^er par sinus ou cosinus ≡ décaler les fréquences ! c'est la modulation

d'où le nom de la formule :

$L[e^{-ft}.g(t)] = G(p+f)$
$= G \circ (p + f\,\mathrm{Id})$

duale de ? .....

2)



$\mathcal{F}[f_1 . f_2] = \frac{1}{4}\left(-i\,\delta_{-\omega_2-\omega_1} + i\,\delta_{\omega_2-\omega_1} - i\,\delta_{-\omega_2+\omega_1} + i\,\delta_{\omega_2+\omega_1}\right)$

Dualité est un $\oplus$, à l'inverse penser "il doit y avoir une formule"

3) $\mathcal{F}[f_1 . \operatorname{sinc}] = \mathcal{F}[f_1] * \mathcal{F}[\operatorname{sinc}]$

$\mathcal{F}[f_1] = \mathcal{F}[\cos w_1 t]$ par euler $= \frac{1}{2} e^{w_1 t} + \frac{1}{2} e^{-w_1 t} \underset{vu}{=} \mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{2} \delta_{w_1} + \delta_{-w_1}]$

$\mathcal{F}[\operatorname{sinc}]$ ne pas calculer c'est un dual de $\mathcal{F}[\underbrace{\Pi_{[-1/2 ; 1/2]}}_{=\Pi}] = \operatorname{sinc}$

① $\Pi \xrightarrow{\mathcal{F}} \operatorname{sinc}$ connue on applique $Sy : L \longrightarrow L$

" Sy " opérateur symétrique de ... ou " retourne dans " le temps ou la fréquence

$f \longmapsto f \circ -Id$

$x \mapsto f(x) \longmapsto x \mapsto$

On a vu que $\mathcal{F} \circ Sy = \mathcal{F}^{-1}$

$Sy[f](t) = f(-t)$

$Sy[F](\frac{w}{2\pi}) = F(-\frac{w}{2\pi})$

car $\mathcal{F} \circ Sy[f](\frac{w}{2\pi}) = \int_{\mathbb{R}} f(-t) . e^{-iwt} . dt$

en changeant de variable $t' = -t$, $dt' = -dt$, $+\infty \to -\infty$, $-\infty \to +\infty$ ⚠

$= \int_{\mathbb{R}} f(t) . e^{+iwt} . dt$

$= \mathcal{F}^{-1}[f] (\frac{w}{2\pi})$

$Sy[\operatorname{sinc}] = \operatorname{sinc}$ car sinc paire.

$Sy[\Pi] = \Pi$ car Π est paire

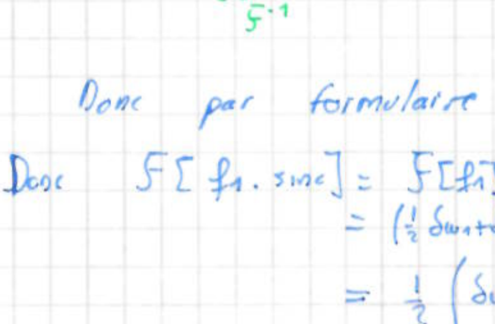
② donc

$$\begin{tikzcd}
\Pi \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, leftrightarrow] & \operatorname{sinc} \arrow[dl, leftrightarrow, "Sy"] \\
\operatorname{sinc} & \Pi
\end{tikzcd}$$

si on applique $\mathcal{F}$ à $Sy(f)$ soit $\mathcal{F} \circ Sy[f] = \mathcal{F}^{-1}[f]$

ici pour $f = \Pi$ $\quad \mathcal{F} \circ Sy[\Pi] = \mathcal{F}^{-1}[\Pi]$

pour $f = \operatorname{sinc}$ $\quad \mathcal{F} \circ Sy[\operatorname{sinc}] = \mathcal{F}^{-1}[\operatorname{sinc}] = \Pi$ car ① $\operatorname{sinc} = \mathcal{F}[\Pi] \Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}[\operatorname{sinc}] = \Pi$



DUALITÉ à mémoriser pour le formulaire.

On a toujours

$\mathcal{F}^2 = Sy$

$\mathcal{F}^4 = Id$

$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ Sy = Sy \circ \mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, leftrightarrow] & F \arrow[d, "\mathcal{F}"] \arrow[dl, leftrightarrow, "Sy"] \\
F \circ -Id \arrow[u, "\mathcal{F}"] & f \circ -Id \arrow[l, "\mathcal{F}"]
\end{tikzcd}$$

Donc par formulaire ou dualité $\mathcal{F}[\Pi] = \operatorname{sinc} \Leftrightarrow \Pi = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}[\Pi] = \mathcal{F}^{-1}[\operatorname{sinc}]$

$= \mathcal{F} \circ Sy[\operatorname{sinc}]$

$= \mathcal{F}[\operatorname{sinc}]$

Donc $\mathcal{F}[f_1 . \operatorname{sinc}] = \mathcal{F}[f_1] * \mathcal{F}[\operatorname{sinc}]$

$= (\frac{1}{2} \delta_{w_1} + \delta_{-w_1}) * \Pi$

$= \frac{1}{2} \left(\delta_{w_1} * \Pi + \delta_{-w_1} * \Pi \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\Pi \circ (Id + w_1) + \Pi \circ (Id - w_1) \right)$

$= t \longmapsto \frac{1}{2} \Pi_{[w_1 - \frac{1}{2} ; w_1 + 1/2]} + \frac{1}{2} \Pi_{[-w_1 - 1/2 ; -w_1 + \frac{1}{2}]}$

Exercice 6 très similaire.