

# **Signal et Filtrage**

**2ème année IMACS**

**Alexandre Boyer, Pascal Acco, Léa Cot**



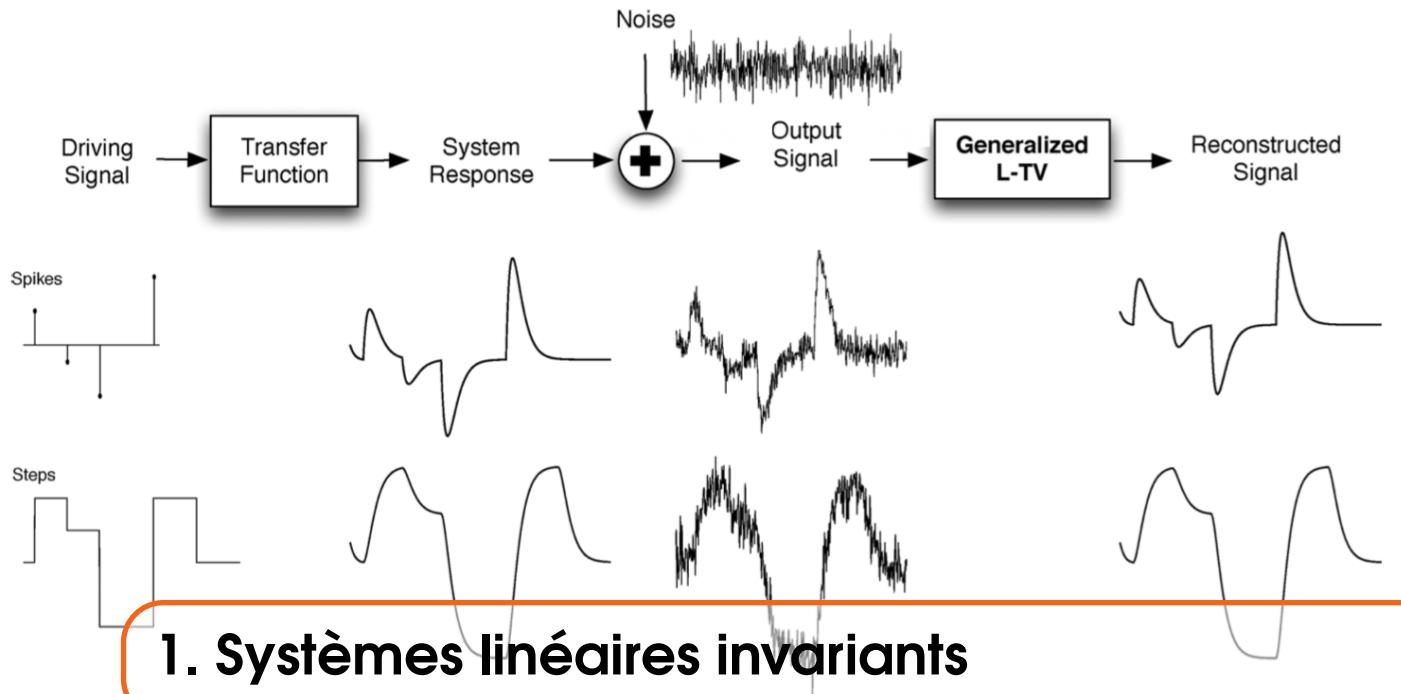
# Table des matières

<b>1</b>	<b>Systèmes linéaires invariants</b>	<b>7</b>
1.1	Définition d'un système linéaire à temps invariant	7
1.2	Définition d'un système linéaire invariant	8
1.2.1	Linéarité . . . . .	8
1.2.2	Invariance temporelle . . . . .	9
1.2.3	Causalité . . . . .	9
1.3	Equation générale d'un système linéaire	10
1.4	Réponse d'un système	10
1.5	Réponse naturelle d'un système LTI	10
1.5.1	Fréquences naturelles d'un système LTI . . . . .	11
1.5.2	Plan de LAPLACE . . . . .	12
1.5.3	Ordre d'un système linéaire . . . . .	13
1.6	Réponse forcée	16
1.6.1	Excitation exponentielle complexe . . . . .	16
1.6.2	Famille d'excitations impulsionales . . . . .	17
1.7	Les différents types de réponse caractérisant les systèmes LTI	22
1.7.1	Réponse impulsionnelle . . . . .	22
1.7.2	Réponse indicielle . . . . .	24
1.7.3	Réponse à une exponentielle complexe - Fonction de transfert . . . . .	25
1.7.4	Calcul de la réponse d'un système dans le domaine temporel ou fréquentiel ?	27
1.8	Exercices	27
<b>2</b>	<b>Transformée de Laplace</b>	<b>31</b>
2.1	Transformation d'une fonction temporelle au domaine fréquentiel	32

<b>2.2</b>	<b>Transformée de Laplace</b>	<b>33</b>
2.2.1	Définition .....	33
2.2.2	Conditions d'existence de la transformée de Laplace et stabilité des systèmes	33
2.2.3	Pôles et zéros d'une fonction de transfert .....	35
<b>2.3</b>	<b>Propriétés de la transformée de Laplace</b>	<b>35</b>
2.3.1	Linéarité .....	35
2.3.2	Théorème du retard .....	35
2.3.3	Théorème du changement d'échelle .....	36
2.3.4	Translation dans le domaine fréquentiel .....	36
2.3.5	Dérivation dans le domaine temporel .....	36
2.3.6	Dérivation dans le domaine des fréquences complexes p .....	36
2.3.7	Intégration temporelle .....	37
2.3.8	Théorème de la valeur initiale .....	37
2.3.9	Théorème de la valeur finale .....	37
2.3.10	Multiplication et produit de convolution .....	37
2.3.11	Fonctions causales avec N répétitions .....	37
2.3.12	Fonctions périodiques causales .....	38
<b>2.4</b>	<b>Transformée de Laplace des fonctions courantes</b>	<b>38</b>
<b>2.5</b>	<b>Transformée de Laplace inverse</b>	<b>39</b>
2.5.1	Méthode pratique d'utilisation .....	40
2.5.2	Décomposition pôles-résidus .....	40
<b>2.6</b>	<b>Applications</b>	<b>42</b>
2.6.1	Résolution d'équations différentielles ordinaires .....	42
2.6.2	Calcul de la réponse transitoire d'un système linéaire .....	43
<b>2.7</b>	<b>Exercices</b>	<b>45</b>
<b>3</b>	<b>Filtrage</b>	<b>49</b>
<b>3.1</b>	<b>Définition d'un filtre</b>	<b>50</b>
3.1.1	Définition .....	50
3.1.2	Filtre à réponse impulsionnelle réelle .....	51
3.1.3	Fréquence négative .....	51
<b>3.2</b>	<b>Analyse harmonique</b>	<b>52</b>
<b>3.3</b>	<b>Représentation - Diagramme de Bode</b>	<b>52</b>
3.3.1	Diagramme de Bode .....	52
3.3.2	Tracé asymptotique du diagramme de Bode .....	55
<b>3.4</b>	<b>Les principales caractéristiques d'un filtre</b>	<b>59</b>
3.4.1	Gain .....	59
3.4.2	Fréquence(s) de coupure .....	59
3.4.3	Bande passante .....	60
3.4.4	Ordre du filtre .....	60
3.4.5	Fréquences de résonance et d'antirésonance .....	60
<b>3.5</b>	<b>Les différents types de filtres</b>	<b>60</b>
3.5.1	Filtre passe-bas d'ordre 1 .....	61
3.5.2	Filtre passe-haut d'ordre 1 .....	61
3.5.3	Filtre passe-bas d'ordre 2 .....	62
3.5.4	Filtre passe-haut d'ordre 2 .....	62
3.5.5	Filtre passe-bande d'ordre 2 .....	62
3.5.6	Filtre coupe-bande d'ordre 2 .....	64

3.5.7	Mise en cascade filtre . . . . .	64
<b>3.6</b>	<b>Exercices</b>	<b>65</b>
<b>4</b>	<b>Séries de Fourier - Analyse fréquentielle des signaux périodiques</b>	<b>69</b>
<b>4.1</b>	<b>Fonctions périodiques</b>	<b>69</b>
<b>4.2</b>	<b>Développement d'une fonction périodique sous la forme d'une série</b>	<b>70</b>
4.2.1	Principe . . . . .	70
4.2.2	Série de fonctions trigonométriques . . . . .	71
<b>4.3</b>	<b>Calcul des coefficients d'une série de Fourier</b>	<b>73</b>
4.3.1	Forme trigonométrique . . . . .	73
4.3.2	Forme polaire . . . . .	75
4.3.3	Forme complexe . . . . .	75
4.3.4	Somme partielle . . . . .	76
<b>4.4</b>	<b>Convergence des séries de Fourier - Théorème de Dirichlet</b>	<b>77</b>
4.4.1	Continuité par morceaux . . . . .	78
4.4.2	Classe $C^1$ . . . . .	78
4.4.3	Théorème de Dirichlet . . . . .	78
<b>4.5</b>	<b>Propriétés des séries de Fourier</b>	<b>79</b>
4.5.1	Linéarité . . . . .	79
4.5.2	Changement de période . . . . .	79
4.5.3	Théorème du retard . . . . .	79
4.5.4	Dérivée . . . . .	80
4.5.5	Intégration . . . . .	80
4.5.6	Egalités entre coefficients de Fourier . . . . .	81
4.5.7	Symétries temporelles . . . . .	81
4.5.8	Cas d'une suite d'impulsions de Dirac ou peigne de Dirac . . . . .	82
<b>4.6</b>	<b>Représentation en spectre de raies</b>	<b>82</b>
4.6.1	Analyse spectrale d'un signal . . . . .	83
<b>4.7</b>	<b>Excitation d'un système linéaire par un signal périodique</b>	<b>84</b>
<b>4.8</b>	<b>Egalité de Parseval</b>	<b>84</b>
<b>4.9</b>	<b>Exercices</b>	<b>85</b>
<b>5</b>	<b>Transformée de Fourier</b>	<b>89</b>
<b>5.1</b>	<b>De la série de Fourier à la transformée de Fourier</b>	<b>89</b>
<b>5.2</b>	<b>Transformées de Fourier</b>	<b>91</b>
<b>5.3</b>	<b>Représentation du spectre</b>	<b>92</b>
<b>5.4</b>	<b>Exemples de calcul de transformée de Fourier</b>	<b>93</b>
5.4.1	Fonctions porte et sinus cardinal . . . . .	93
5.4.2	Impulsion de Dirac . . . . .	94
5.4.3	Fonctions cosinus et sinus . . . . .	95
<b>5.5</b>	<b>Propriétés de la transformée de Fourier</b>	<b>96</b>
<b>5.6</b>	<b>Table de transformée de Fourier courante</b>	<b>97</b>
<b>5.7</b>	<b>Excitation d'un système linéaire par un signal périodique</b>	<b>97</b>
<b>5.8</b>	<b>Exercices</b>	<b>97</b>

<b>6</b>	<b>Analyse dans le domaine temporel .....</b>	<b>101</b>
<b>6.1</b>	<b>Réponse impulsionnelle</b>	<b>101</b>
6.1.1	Définition .....	101
6.1.2	Extraction de la réponse impulsionnelle .....	102
<b>6.2</b>	<b>Produit de convolution</b>	<b>103</b>
6.2.1	Définition .....	103
6.2.2	Propriétés .....	103
6.2.3	Mise en œuvre du produit de convolution .....	104
6.2.4	Durée du produit de convolution .....	104
<b>6.3</b>	<b>Exemple : calcul de la réponse d'un filtre à partir de sa réponse impulsionnelle</b>	<b>105</b>
<b>6.4</b>	<b>Exercices</b>	<b>108</b>
<b>7</b>	<b>Aspects énergétiques et corrélation .....</b>	<b>113</b>
<b>7.1</b>	<b>Définitions de la puissance et de l'énergie d'un signal</b>	<b>113</b>
7.1.1	Puissance .....	113
7.1.2	Energie .....	114
7.1.3	Signaux à énergie/puissance finie .....	114
<b>7.2</b>	<b>Calcul de la puissance dans le domaine fréquentiel</b>	<b>115</b>
7.2.1	Densité spectrale d'amplitude .....	115
7.2.2	Cas des signaux périodiques - Egalité de Parseval .....	115
7.2.3	Cas des signaux non périodiques - Densité spectrale de puissance .....	116
<b>7.3</b>	<b>Corrélation</b>	<b>117</b>
7.3.1	Définition .....	117
7.3.2	Autocorrélation et intercorrélation .....	119
7.3.3	Propriétés de la corrélation .....	119
7.3.4	Exemples .....	122
<b>7.4</b>	<b>Théorème de Wiener-Khintchine</b>	<b>124</b>
<b>7.5</b>	<b>Relations entre le signal, la densité spectrale de puissance et l'autocorrélation</b>	<b>126</b>
<b>7.6</b>	<b>Transfert d'énergie à travers un système linéaire</b>	<b>127</b>
<b>7.7</b>	<b>Exercices</b>	<b>127</b>



## 1. Systèmes linéaires invariants

«««< HEAD Le but de ce chapitre est de présenter les concepts de base indispensables à l'étude des systèmes linéaires à temps invariants (LTI) et des signaux. Après une définition des critères qui caractérisent un système LTI, nous chercherons à répondre à la question suivante : comment déterminer efficacement la réponse d'un système linéaire lorsqu'il est soumis à une excitation quelconque ? Par efficacement, nous entendons :

- méthode mathématiquement "simple" ;
- méthode indépendante de l'excitation et des propriétés du système LTI.

Pour cela, nous commencerons par nous interroger sur la manière de représenter l'interaction entre l'entrée et la sortie d'un système, puis sur les notions d'excitation et de réponse. Nous distinguerons les notions de réponses naturelles et forcées, avant d'identifier deux familles d'excitation adaptées à l'étude des systèmes : exponentielle complexe et impulsionale. Nous introduirons ensuite la notion de fréquence (complexe), qui nous offrira la possibilité d'étudier les signaux temporels dans le domaine fréquentiel, ainsi que la notion de fonction de transfert qui facilitera l'étude des systèmes.

### 1.1 Définition d'un système linéaire à temps invariant

===== Le but de ce chapitre est de présenter les concepts de base indispensables à l'étude des systèmes linéaires à temps invariants LTI<sup>1</sup> et des signaux. Après une définition des critères qui caractérisent un système LTI, nous chercherons à répondre à la question suivante : comment déterminer efficacement la réponse d'un système linéaire lorsqu'il est soumis à une excitation quelconque ? Par efficacement, nous entendons :

- méthode mathématiquement "simple" ;
- méthode indépendante de l'excitation et des propriétés du système LTI.

Pour cela, nous commencerons par nous interroger sur la manière de représenter l'interaction entre l'entrée et la sortie d'un système, puis sur les notions d'excitation et de réponse. Nous distinguerons les notions de réponses naturelles et forcées, avant d'identifier deux familles d'excitation

---

1. Linear Time Invariant

adaptées à l'étude des systèmes : exponentielle complexe et impulsionale. Nous introduirons ensuite la notion de fréquence (complexe), qui nous offrira la possibilité d'étudier les signaux temporels dans le domaine fréquentiel, ainsi que la notion de fonction de transfert qui facilitera l'étude des systèmes.

## 1.2 Définition d'un système linéaire invariant

»»»> 32c0df24da5390795360e6583dca2c28be03f1cf

### 1.2.1 Linéarité

Un système relie à chaque signal d'entrée  $x$  un signal de sortie unique  $y$ . Les signaux  $x$  et  $y$  sont des fonctions de la variable réelle appartenant à un espace de fonction le plus général possible noté ici  $L_E$ . La relation entrée-sortie est donc modélisée par une application mathématique de  $L_E$  dans  $L_E$  notée  $L$  et définie ainsi :

$$L : \begin{array}{ccc} L_E & \longrightarrow & L_E \\ x : t \mapsto x(t) & \longmapsto & y : t \mapsto y(t) \end{array} \quad (1.1)$$



Remarquons que l'application  $L$  transforme une fonction en une fonction et que cela peut compliquer les notations, aussi il est courant de voir utiliser les crochets [] autour des fonctions arguments de l'application  $L$  et les simples parenthèses autour de la variable réelle argument d'une fonction. Ce genre d'application est souvent désignée par le terme d'*opérateur*

Beaucoup d'abus de notation figurent dans la littérature, gardons à l'esprit et tentons cette année encore de conserver une rigueur d'écriture irréprochable pour garder les idées claires. Parmi les écritures suivantes, une est parfaitement correcte et représente un réel ; une représente correctement une fonction mais ne respecte pas la convention des crochets ; une est incorrecte ; une est correcte mais lourde à écrire. À vous de les retrouver :

- $y(t) = L[x(t)]$  ;
- $y = L(x)$  ;
- $y(t) = L[x](t)$  ;
- $t \mapsto y(t) = L[t \mapsto x(t)]$

Une classe de système fondamentale est la classe des systèmes linéaires car elle offre de nombreux outils et propriétés mathématiques.

#### Definition 1.2.1 Système linéaire

Une système est dit linéaire si et seulement si l'application  $L$  associée est linéaire, soit pour tout  $(x_1, x_2, \lambda) \in L_E^2 \times \mathbb{R}$  :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad L[x_1 + \lambda x_2](t) = L[x_1](t) + \lambda L[x_2](t)$$

ou bien  $L[x_1 + \lambda x_2] = L[x_1] + \lambda L[x_2]$  (1.2)

Une des conséquences de la linéarité est la possibilité d'appliquer le principe de superposition.

Les trois opérateurs linéaires de base que nous considérons dans l'étude des systèmes linéaires sont :

- proportionnel :  $y = ax$  où  $a$  est une constante
- intégration :  $y = a \int f(x) dx$  où  $a$  est une constante
- dérivée :  $y = a \frac{df(x)}{dx}$  où  $a$  est une constante

On peut aisément vérifier qu'il respecte la condition 1.2.



Pour résoudre les complexes équations différentielles des télégraphistes, HEAVISIDE utilise ces opérateurs de base et introduit le *calcul symbolique*. Cela consiste à représenter l'application de l'opérateur dérivée sur une fonction  $f$  comme une simple multiplication par un

nombre  $p$ . Ainsi une équation différentielle  $ay'' + 2y' - y = 3\int x$  est associée à l'équation symbolique  $ap^2y + 2py - y = \frac{3}{p}x$ . Il est alors possible de résoudre algébriquement l'équation sous forme de fractions rationnelles ce qui donnerait avec notre exemple :  $y = \frac{3/p}{ap^2+2p+1}x$ . Rappelons que  $x$  et  $y$  sont des fonctions et non des réels et que dans ce cas les opérations ne sont pas de simple multiplication et addition de réels mais bien des multiplications et additions de fonctions. La variable symbolique  $p$  est utilisée comme un nombre réel mais n'est en aucun cas un réel...

### 1.2.2 Invariance temporelle

Il est fréquent qu'un système réagisse de la même manière indépendamment de l'instant où est appliqué le signal d'entrée. Ce qui conduit à la définition suivante :

#### Definition 1.2.2 Système invariant dans le temps

Un système est dit invariant dans le temps si et seulement si son application associée  $L$  vérifie :

$$\forall x \in L_E, \forall (t, t_0) \in \mathbb{R}^2, \quad L[t \mapsto x(t - t_0)] = L[x](t - t_0) \quad (1.3)$$

En d'autres termes, la réponse du système ne dépend pas de l'origine des temps choisie.

■ **Exemple 1.1** L'effet d'un système sur le signal d'entrée est d'écrit par l'application :  $x \mapsto y = 2 \frac{dx}{dt}$ . Vérifions d'abord que cet opérateur est linéaire :

$$\begin{aligned} L[x_1 + \lambda x_2] &= t \mapsto 2 \frac{d}{dt}(x_1 + \lambda x_2) \\ &= t \mapsto 2 \frac{dx_1}{dt} + 2\lambda \frac{dx_2}{dt} \\ &= L[x_1] + \lambda L(x_2) \end{aligned}$$

Le système est donc linéaire. Vérifions qu'il est invariant :

$$\forall t \quad L[t \mapsto x(t - t_0)](t) = 2 \frac{dx(t - t_0)}{dt} \cdot \underbrace{\frac{d(t - t_0)}{dt}}_{=1} = 2 \frac{dx}{dt}(t - t_0) = L[x](t - t_0)$$

ou bien exprimé par le biais des opérateurs en exprimant le retard d'un temps  $t_0$  par le biais de l'application identité soit  $\text{Id} - t_0 : t \mapsto t - t_0$  :

$$L[t \mapsto x(t - t_0)] = L[x \circ (\text{Id} - t_0)] = 2 \frac{d}{dt}(x \circ (\text{Id} - t_0)) = 2 \frac{dx}{dt} \circ (\text{Id} - t_0) \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}(\text{Id} - t_0)}_{=1} = L[x] \circ (\text{Id} - t_0)$$

■

### 1.2.3 Causalité

L'étude des systèmes linéaires passent par l'étude et la synthèse de fonctions mathématiques. Tous les systèmes linéaires physiquement réalisables peuvent être décrits par une fonction mathématique linéaire. Par contre, la réciproque n'est pas forcément vraie : un système décrit par une fonction linéaire n'est pas nécessairement physiquement réalisable. Une caractéristique importante qui différencie les systèmes physiquement réalisables de ceux qui ne le sont pas est la notion de causalité. On entend par physiquement réalisable un système pouvant traiter en temps réel les signaux d'entrée. Dans un système causal, l'effet ne peut pas précéder la cause, ce qui donne la définition suivante.

**Definition 1.2.3** Système causal

Un système est causal si, et seulement si, la propriété suivante est vérifiée pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$  :

$$\forall t < t_0, x(t) = 0 \implies \forall t < t_0, y(t) = 0 \quad (1.4)$$

Les systèmes numériques peuvent être non causaux car ils sont capables de stocker les valeurs du signal d'entrée pour un traitement différé. On peut prendre l'exemple de l'application de floutage d'une image numérique. Celle-ci correspond à une matrice de données, représentant chaque pixel de l'image. Le floutage consiste à appliquer un filtre (par exemple gaussien) qui sera centré sur chaque pixel. Ce filtre effectue une somme pondérée du pixel central mais aussi des pixels voisins, situés avant et après le pixel central. L'effet du floutage d'un pixel dépend donc de pixels situés après dans l'ordre de rangement des pixels.

### 1.3 Equation générale d'un système linéaire

Un système linéaire invariant est gouverné par une équation différentielle à coefficient constant donnée dans sa forme générale par 1.5. On l'appelle l'équation générale du système. Pour une excitation  $x(t)$  donnée, sa résolution permettra de déterminer la réponse  $y(t)$ .

$$\begin{aligned} L : x \mapsto y \text{ telle que} \quad & \sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m x}{dt^m} \\ \iff & a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + \dots + a_N \frac{d^N y}{dt^N} = b_0 x + b_1 \frac{dx}{dt} + \dots + b_M \frac{d^M x}{dt^M} \end{aligned} \quad (1.5)$$

### 1.4 Réponse d'un système

La réponse d'un système correspond au signal (ou aux signaux) de sortie lorsqu'il est excité par un (ou plusieurs) signal d'entrée. En reprenant l'équation générale 1.5, on remarque que l'on peut distinguer :

- une réponse propre ou naturelle d'un système, notée  $y_H(t)$ , correspondant à une solution de l'équation différentielle homogène : c.-à-d. pour une excitation nulle.
- la réponse forcée, notée  $y_f(t)$  correspondant à la solution particulière de l'équation différentielle associée à une excitation particulière  $x(t)$ .

La réponse naturelle  $y_h$  appartient à un espace des solutions homogènes noté  $S_H$  et sera déterminée en fonction des conditions initiales. La réponse d'un système sera la superposition de ces deux réponses.

$$y(t) = \underbrace{y_H(t)}_{\in S_H} + y_f(t) \quad (1.6)$$

Dans la suite du cours, nous ne nous intéresserons qu'à des systèmes causaux, et nous considérerons, sans perte de généralité, que les excitations sont nulles pour  $t < 0$ .

### 1.5 Réponse naturelle d'un système LTI

Il s'agit de la partie de la réponse qui est indépendante de l'excitation, c.-à-d. la solution de l'équation homogène. Elle est donc intrinsèque aux caractéristiques du système. Elle se détermine en résolvant l'équation différentielle 1.5 dans le cas où l'excitation  $x(t)$  est nulle.

$$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y}{dt^n} = 0 \quad (1.7)$$

**R** On peut s'interroger sur le sens physique de la recherche d'une solution non-nulle pour  $t > 0$  alors que le système n'est pas excité (un second membre nul correspondant à une entrée nulle). L'intuition physique nous laisse penser qu'une réponse non nulle n'apparaîtrait que si le système a été préalablement excité avant ou pendant  $t = 0$ , puis « relâché » par une excitation nulle pour tout  $t > 0$ .

Lorsque l'on ne souhaite pas s'intéresser à ce qui précède l'instant  $t_0 = 0$  et à ce qui a pu amener le système dans un état d'excitation (énergie emmagasinée dans les composants etc.), on considère alors une excitation et une réponse nulle pour tout  $t < t_0$  et on ajoute des conditions initiales non nulles à l'instant  $t_0$  représentant l'état du système (tensions et courant initiaux dans un système électrique par exemple) avant le lâché à l'instant  $t_0$ .

Rappelons que pour les équations différentielles d'ordre 1, l'espace des solutions homogènes est généré par toute combinaison linéaire d'une seule solution  $y_0$  de forme exponentielle réelle :

$$S_H = \{\lambda y_0 | \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(y_0), \quad \text{avec } L[y_0] = 0_{L_E}, \quad \text{et } y_0 : t \mapsto e^{\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

Dans le cas d'équations d'ordre supérieur, la recherche de solutions de forme exponentielle non nulles  $t \mapsto e^{pt}$  vérifiant l'équation homogène donne en remplaçant dans (1.12) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n e^{pt}}{dt^n} = \sum_{n=0}^N a_n p^n e^{pt} = \underbrace{e^{pt}}_{\neq 0} \sum_{n=0}^N a_n p^n = 0 \quad (1.9)$$

$$\implies D(p) = \sum_{n=0}^N a_n p^n = 0 \quad (1.10)$$

Le polynôme  $D(p)$  est appelée l'équation caractéristique du système d'équations différentielles. Pour un système d'ordre  $N$ , ce polynôme est scindé dans  $\mathbb{C}$  et possède donc  $N$  racines réelles ou complexes conjuguées telle que  $D(p) = a_N \prod_{i=1}^{N-1} (p - p_i)$ . Ces racines sont appelées pôles du système et notées  $p_i$  (i de 1 à  $N$ ). Les caractéristiques de la réponse naturelle du système sont liées uniquement aux  $N$  solutions, ou pôles  $p_i$ , de cette équation.

On montre que les solutions homogènes des équations différentielles d'ordre  $N$  à coefficients constants sont des combinaisons linéaires de  $N$  exponentielles  $y_i$  à coefficients réels et/ou paire de complexes conjuguées. L'espace des solutions homogènes est donc un espace de dimension  $N$  généré par la famille  $\{y_i\}_{i=1 \dots N}$  de  $N$  exponentielles complexes :

$$S_H = \text{vect}(\{y_i\}_{i=1 \dots N}), \quad \text{avec } L[y_i] = 0_{L_E} \quad \text{et } y_i : t \mapsto e^{p_i t}, \quad p_i \in \mathbb{C} \quad (1.11)$$

La réponse naturelle peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_H(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i e^{p_i t} \quad (1.12)$$

où les termes  $\lambda_i$  dépendent des conditions initiales connues en un temps  $t_0$ .

### 1.5.1 Fréquences naturelles d'un système LTI

Les  $N$  racines de l'équation caractéristique du système sont appelées les fréquences naturelles ou fréquences propres du système. Elles sont complexes et de la forme suivante :

$$p_i = \sigma_i + j\omega_i \quad (1.13)$$

En reprenant 1.12, la réponse naturelle pourra s'exprimer en fonction de ces fréquences naturelles :

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^M \lambda_i e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} \quad (1.14)$$

$\omega_i$  caractérise la pulsation de la réponse associée à cette racine, tandis que la partie réelle  $\sigma_i$  indique l'atténuation ou l'amortissement de cette réponse. Leur connaissance est indispensable car ce sont elles qui caractérisent la forme temporelle de la réponse du système. La prédiction de l'évolution temporelle de la réponse du système va passer par l'analyse de ces racines.

### 1.5.2 Plan de LAPLACE

Puisque les racines de l'équation caractéristique déterminent la réponse naturelle d'un système, il est intéressant d'établir un système de représentation graphique facilitant l'analyse du système. C'est le but de la représentation appelée plan complexe, plan de LAPLACE ou plan P, illustré à la figure 1.1. Il s'agit d'un repère cartésien dans lequel les racines sont placées, permettant de visualiser leurs parties réelles et imaginaires. Selon le positionnement des racines dans le plan complexe, les caractéristiques du système seront différentes, notamment sa stabilité.

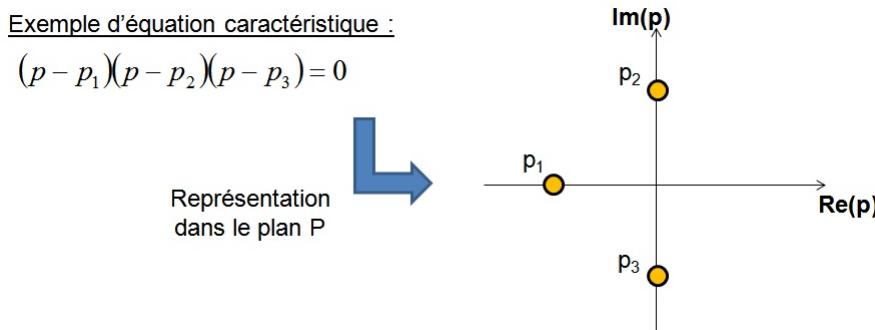


FIGURE 1.1 – Placement des racines de l'équation caractéristique dans le plan complexe. La racine  $p_1$  est réelle négative : apportant une exponentielle décroissante à la réponse. Tandis que  $p_2$  et  $p_3$  sont purement complexes conjuguées et apportent deux exponentielles complexes conjuguées, et donc par la formule d'EULER une forme sinusoïdale pure, à la réponse.

La stabilité d'un système est une notion qui sera abordée plus en détail dans les cours d'automatique, il s'agit en fait d'une propriété intrinsèque du système ne dépendant pas de l'excitation. Dans ce cours, nous utiliserons une définition au sens large : on entend par stabilité le fait que la réponse naturelle ne diverge pas. Dès que l'on conçoit un système, c'est une propriété indispensable qui doit être vérifiée.

#### Definition 1.5.1 stabilité d'un système

Un système est stable si, et seulement si, à toute entrée bornée, il fait correspondre une sortie bornée :

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq A \implies \exists B \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, |y(t)| \leq B \quad (1.15)$$

Dans le cas des systèmes LTI, cette définition est équivalente à la définition suivante : un système est stable si toute réponse naturelle tend vers 0 à l'infini. Dans ce cas là la notion de stabilité est clairement indépendante du type d'excitation.

La position des racines de l'équation caractéristique détermine à la fois la stabilité du système linéaire, mais aussi la forme temporelle de réponse.

La figure ci-dessous illustre les types de réponse naturelles associées à une fréquence naturelle, selon sa position dans le plan complexe. Considérons les cinq cas suivants, correspondant à cinq positions différentes d'une racine  $p_i$  dans le plan complexe, et déterminons le type de réponse temporelle. On considère  $t > 0$  :

1.  $p_i$  est purement complexe ( $\sigma_i = 0$ ) : elle est située sur l'axe des ordonnées du plan complexe.

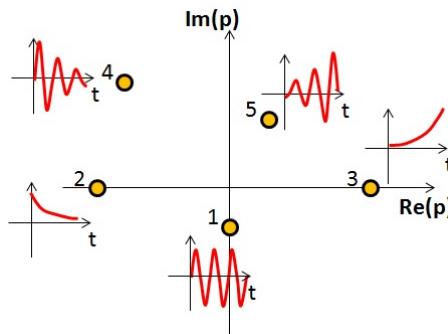


FIGURE 1.2 – Types de réponse naturelle en fonction de la position d'une racine dans le plan complexe.

La réponse naturelle sera donc un signal purement (co)sinusoïdale, dont l'oscillation aura une fréquence ou une pulsation déterminée par  $\omega_i$ . Le système est en limite de stabilité car sa réponse oscille en permanence autour d'une valeur.

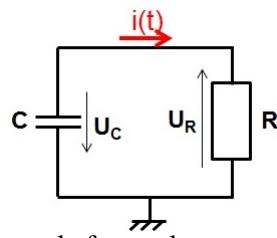
2.  $p_i$  est purement réel et négatif ( $\sigma_i \leq 0$  et  $\omega_i = 0$ ) : la racine est située sur l'axe des abscisses à gauche de l'origine. La réponse est une fonction exponentielle décroissante, sans la moindre oscillation, indiquant un comportement amorti. Le système est stable asymptotique.
3.  $p_i$  est purement réel et positif ( $\sigma_i \geq 0$  et  $\omega_i = 0$ ) : la racine est située sur l'axe des abscisses à droite de l'origine. La réponse est une fonction exponentielle croissante, sans la moindre oscillation, indiquant un comportement divergent. La réponse naturelle indique un système instable.
4.  $p_i$  est une valeur complexe quelconque dont la partie réelle est négative ( $\sigma_i < 0$  et  $\sigma_i \neq 0$ ) : la racine est située dans le demi plan à gauche de l'axe des ordonnées. La réponse va présenter une oscillation dont la fréquence est déterminée par  $\omega_i$ , mais dont l'amplitude s'atténue exponentiellement plus ou moins rapidement au cours du temps selon la valeur  $\sigma_i$ . Cette réponse indique un système stable oscillatoire amortis.
5.  $p_i$  est une valeur complexe quelconque dont la partie réelle est positive ( $\sigma_i > 0$  et  $\omega_i \neq 0$ ) : la racine est située dans le demi plan à droite de l'axe des ordonnées. La réponse va présenter une oscillation dont la fréquence est déterminée par  $\omega_i$ , mais dans l'amplitude s'accroît exponentiellement plus ou moins rapidement au cours du temps selon la valeur  $\sigma_i$ . Cette réponse indique un système oscillatoire instable.

### 1.5.3 Ordre d'un système linéaire

Plus l'équation caractéristique présente de racines, plus sa réponse devient complexe, puisqu'elle résulte de la superposition de plusieurs fréquences comme le montre l'équation 1.12. On appelle l'ordre d'un système le nombre de racines que présente son équation caractéristique. Il s'agit aussi de l'ordre ou du degré de l'équation différentielle caractérisant le système. Pour illustrer la notion d'ordre, nous allons analyser la réponse naturelle de deux circuits électriques passifs, caractérisés par des équations caractéristiques d'ordre 1 et 2. Vous retrouverez une analyse plus détaillée dans le cours d'électronique.

#### ■ Exemple 1.2 circuit RC

On considère le circuit ci-contre, formé par une résistance R et un condensateur C. En  $t = 0$ , le condensateur est chargé, de sorte que la tension à ses bornes soit égale à  $U_{C0}$ . On note  $U_C$  et  $U_R$  les tensions aux bornes du condensateur et de la résistance.



On souhaite déterminer la réponse naturelle de ce circuit pour  $t > 0$ , sous la forme du courant électrique  $i(t)$  circulant au travers du circuit. On souhaite aussi déterminer la fréquence naturelle de ce circuit, caractérisant sa réponse transitoire.

Commençons par appliquer la loi des mailles à ce circuit, qui permet d'écrire :  $U_R(t) + U_C(t) = 0$ . En prenant en compte les relations tension-courant pour la résistance et le condensateur, cette relation peut être mise sous la forme ci-dessous ne faisant apparaître que le courant. Après différentiation de l'équation, on fait apparaître une équation différentielle du premier ordre. On constate que le terme  $RC$  est homogène à un temps. On l'appelle la constante de temps du circuit RC, généralement notée  $\tau$ .

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt = 0 \implies \frac{di}{dt}(t) + \frac{1}{RC} i(t) = 0$$

On retrouve une équation du même type que 1.12. La solution de cette équation peut donc s'écrire :  $i(t) = Ae^{pt}$ , où A est lié aux conditions initiales et p est l'unique fréquence naturelle du système. En intégrant cette solution dans l'équation différentielle, on en déduit l'équation caractéristique de ce circuit (1.16).

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad & Ae^{pt} + \frac{1}{RC} e^{pt} = 0 \\ \iff & p + \frac{1}{RC} = 0 \iff p - \underbrace{\frac{-1}{RC}}_{p_0} = 0 \end{aligned}$$

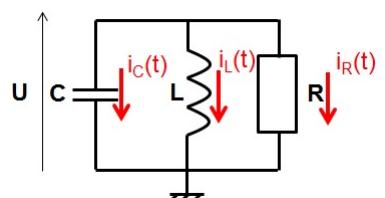
Cette équation présente une seule racine  $p_0 = -\frac{1}{RC}$ . Ce circuit électrique est donc un système d'ordre 1. La racine est purement réelle et négative. Elle se situe donc à gauche de l'axe des imaginaires dans le plan complexe, traduisant le comportement stable et non oscillant du système (équivalent au point 2 de la figure 1.2). La fréquence naturelle indique donc une réponse naturelle du type exponentielle décroissante. Cela est confirmé par l'expression de la réponse naturelle du circuit, qui s'écrit :

$$i(t) = Ae^{p_0 t} = Ae^{-\frac{t}{RC}}, \quad \forall t > 0 \quad (1.16)$$

La valeur de A peut être déterminée à partir des conditions initiales en  $t = 0^+$ . Le courant dans le circuit est alors donné par :  $i(0) = \frac{U_R(0)}{R} = \frac{U_{C0}}{R}$ . A partir de 1.16, on en déduit  $A = \frac{U_{C0}}{R}$ . ■

### ■ Exemple 1.3 circuit RLC

On considère le circuit ci-contre, formé par une résistance R, un condensateur C et une bobine L montées en parallèle ( $R, L$  et  $C \geq 0$ ). En  $t = 0$ , le condensateur est chargé, de sorte que la tension à ses bornes soit égale à  $U_{C0}$ . On note  $i_C$ ,  $i_R$  et  $i_L$  les courants traversant ces trois composants.



On souhaite déterminer la réponse naturelle de ce circuit pour  $t > 0$ , sous la forme de la tension  $u(t)$  mesurée aux bornes du circuit. On souhaite aussi déterminer la fréquence naturelle de ce circuit, caractérisant sa réponse transitoire.

Commençons par appliquer la loi des nœuds à ce circuit, qui permet d'écrire :  $i_C(t) + i_R(t) + i_L(t) = 0$ . En prenant en compte les relations tension-courant pour la résistance et le condensateur, cette relation peut être mise sous la forme ci-dessous, ne faisant apparaître que le courant. Après différenciation de l'équation, on fait apparaître une équation différentielle du second ordre. Pour simplifier les notations, on pose :  $\alpha = \frac{1}{2RC}$  et  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ .

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \int u(t) dt = 0 \implies \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u(t) = 0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \omega^2 u(t) = 0$$

On retrouve une équation du même type que 1.12. Un vecteur solution de cette équation peut donc s'écrire :  $u(t) = A e^{pt}$ . En intégrant cette solution dans l'équation différentielle, on en déduit l'équation caractéristique de ce circuit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (p^2 + 2\alpha p + \omega^2) A e^{pt} = 0$$

$$\iff p^2 + 2\alpha p + \omega^2 = (p - p_1)(p - p_2) = 0 \quad (1.17)$$

Cette équation présente deux racines  $p_1$  et  $p_2$ . Ce circuit électrique est donc un système d'ordre 2, dont la réponse naturelle va s'écrire :

$$u(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (1.18)$$

où  $A_1$  et  $A_2$  dépendent des conditions initiales. Selon la valeur de  $R$ ,  $L$  et  $C$ , la nature et la position de ces racines dans le plan complexe va changer, modifiant le comportement transitoire du circuit. Pour déterminer ces racines, il suffit de résoudre une équation d'ordre 2, dont le déterminant est donné par :  $\Delta = 4(\alpha^2 - \omega^2)$ . La nature des racines varie selon le signe du déterminant :

$$\text{si } \alpha \geq \omega : \begin{cases} p_1 = \frac{-2\alpha + \sqrt{\Delta}}{2} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \\ p_2 = \frac{-2\alpha - \sqrt{\Delta}}{2} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\text{si } \alpha < \omega : \begin{cases} p_1 = \frac{-2\alpha + j\sqrt{-\Delta}}{2} = -\alpha + j\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \\ p_2 = \frac{-2\alpha - j\sqrt{-\Delta}}{2} = -\alpha - j\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \end{cases} \quad (1.20)$$

On peut distinguer plusieurs types de comportement transitoire distincts selon les valeurs de  $\alpha = \frac{1}{2RC} \geq 0$  et  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \geq 0$  :

- si  $\alpha \neq 0$ , alors les deux racines présentent une partie réelle négative. Le système présente donc un caractère stable.
- si  $\alpha \geq \omega$ , les deux racines sont purement réelles et négatives. Dans le plan complexe, elles sont situées sur l'axe des réels à gauche de l'axe des imaginaires. La réponse du circuit sera du type exponentiel décroissant sans oscillation (équivalent au point 2 de la figure 1.2).
- si  $\alpha < \omega$  et  $\alpha \neq 0$ , les deux racines sont conjuguées. Elles sont situées à gauche de l'axe des imaginaires dans le plan complexe. La réponse du circuit sera du type oscillation amortie de pulsation  $\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$  (équivalent au point 4 de la figure 1.2).
- si  $\alpha = 0$ , les deux racines sont purement imaginaires et conjuguées. Elles sont placées sur l'axe imaginaire du plan complexe, symétriquement à l'axe de réels. La réponse du circuit sera une oscillation non amortie de pulsation  $\omega$  (équivalent au point 1 de la figure 1.2). Cela correspond au cas  $R = 0, C \neq 0$  d'une résistance nulle entretenant des oscillations perpétuelles (stabilité limite ou simple)

## 1.6 Réponse forcée

La réponse forcée est la solution de l'équation générale du système pour une excitation non nulle. La réponse va dépendre de la forme de l'excitation, mais aussi des propriétés du système. Puisque la réponse dépend de l'excitation, il est préférable de déterminer des excitations dont les propriétés faciliteront l'analyse de la réponse forcée d'un système. Pour cela, il faut chercher des familles d'excitation dont la forme n'est pas modifiée par l'effet du système LTI. Ainsi, en connaissant la forme de l'excitation, on déduira immédiatement la forme de la réponse. Seuls quelques coefficients que nous préciserons seront à calculer.

Nous allons nous intéresser à deux familles d'excitations répondant à ce critère : l'excitation exponentielle complexe (que nous avons rencontré précédemment) et la famille d'excitation impulsionale.

### 1.6.1 Excitation exponentielle complexe

L'excitation exponentielle complexe présente la forme suivante :

$$x = \begin{cases} \hat{X} e^{p_x t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.21)$$

où  $\hat{X} = |x|e^{j\theta}$  est l'amplitude complexe, ou vecteur de Fresnel, ou le phaseur du signal. Et  $p_x = \alpha + j\omega$  sa fréquence complexe. Dans le cas où l'on s'intéresse à des signaux réels (cas rencontré en pratique), cette forme reste valable à condition de ne conserver que la partie réelle. Elle s'écrit alors :

$$x(t) = \begin{cases} \Re[\hat{X} e^{p_x t}] = |X| e^{\alpha t} \cos(\omega t + \theta) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.22)$$

Comme dans le cas de la fréquence naturelle, la fréquence complexe peut être représentée dans le plan complexe. Sa position indique qualitativement la forme temporelle de l'excitation. Si  $p_x$  est purement réelle, l'excitation est une fonction exponentielle pure. Si  $p_x$  est purement imaginaire, l'excitation est une fonction cosinusïdale pure. L'excitation est dite monochromatique.  $|X|$  représente son amplitude et  $\theta$  sa phase.

■ **Exemple 1.4** Récrivez les expressions des fonctions ci-dessous sous la forme de fonctions réelles :  $y(t) = \operatorname{Re}[(1+j)e^{(-2+j)t}]$  et  $z(t) = \operatorname{Re}[2e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j10t}]$ . Les deux fonctions sont des exponentielles complexes. Elles représentent des signaux temporels réels puisqu'on ne conserve que la partie réelle.

Le phaseur de la fonction  $y(t)$  peut s'écrire  $\hat{Y} = 1 + j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ . La fréquence complexe est  $p_y = -2 + j$ . Elle contient une partie réelle négative donnant un comportement d'exponentielle décroissante de constante de temps 2 à l'amplitude, et une partie imaginaire donnant un comportement oscillant de pulsation égale à 1. La fonction  $y(t)$  peut donc s'écrire :

$$y(t) = \sqrt{2}e^{-2t} \cos(t + \frac{\pi}{4})$$

En procédant de même pour la fonction  $z(t)$ , on remarque que sa fréquence est purement complexe de pulsation 10, son phaseur est d'amplitude 2 et de phase  $\frac{\pi}{2}$ . Il s'agit d'une fonction cosinusïdale s'écrivant :  $z(t) = 2 \cos(10t + \frac{\pi}{2})$ . ■

L'excitation exponentielle complexe a une propriété remarquable : l'action d'un opérateur linéaire (proportionnel, intégrateur ou différentiel) laisse sa forme inchangée. Seule son amplitude complexe (phaseur) sont modifiées. On peut donc en déduire une propriété des systèmes LTI : lorsqu'un système linéaire est excité par un signal exponentiel complexe (en pratique, un signal sinusoïdal), la réponse sera aussi une fonction du même type et de même fréquence complexe. Seule l'amplitude et la phase changeront. Cette propriété en fait un signal d'analyse intéressant.

### 1.6.2 Famille d'excitations impulsionales

Nous parlons ici de familles car nous allons parler de plusieurs fonctions, reliées entre elles et associées à une excitation très importante dans l'analyse des systèmes et des signaux : l'impulsion de DIRAC.

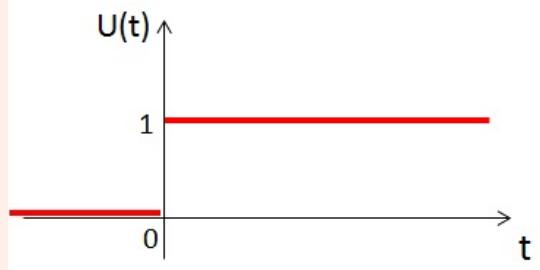
#### Echelon unitaire ou fonction de Heaviside

L'échelon unitaire<sup>2</sup> ou fonction de HEAVISIDE représente le signal que l'on obtiendrait derrière un interrupteur idéal que l'on fermerait à  $t = 0$ , et modélise le fait que l'on ne s'intéresse pas à ce qui c'est passé avant l'instant  $t = 0$ .

##### Definition 1.6.1 Échelon unité ou de HEAVISIDE

On note  $u$  la *fonction échelon*, ou *fonction de HEAVISIDE*, la fonction définie par :

$$u : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (1.23)$$



R

Selon l'utilisation voulue, cette fonction peut être définie en 0 par prolongement continu à gauche ( $u(0) = 0$ ) ou à droite ( $u(0) = 1$ ), ou de manière discontinue (par exemple  $u(0) = \frac{1}{2}$  pour respecter le théorème de DIRICHLET avec les séries de FOURIER). On peut aussi simplement laisser cette fonction définie seulement sur  $\mathbb{R}^*$ .

À l'aide de cette fonction, on peut définir la *fonction porte*<sup>3</sup>, ou bien encore *fenêtre naturelle* voire parfois *fonction rectangle*, pour représenter le fait que l'on s'intéresse à un signal dans une fenêtre temporelle donnée.

##### Definition 1.6.2 Fonction porte ou fenêtre naturelle

On note  $\Pi_{[a;b]}$  la fonction définie par :

$$\Pi_{[a;b]} = t \mapsto u(t-a) - u(t-b) = t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a < t < b \\ 0 & \text{si } t < a \text{ ou } t > b \end{cases} \quad (1.24)$$

On note  $\Pi$  la fonction porte unitaire définie par :

$$\Pi = \Pi_{[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]} = t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t < |1/2| \\ 0 & \text{si } t > |1/2| \end{cases} \quad (1.25)$$

Cette fonction peut être utilisée pour approcher n'importe quelle autre fonction par une fonction en marches d'escalier de largeur  $\Delta_\tau$  avec la forme :

$$t \mapsto f(t) \approx t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k\Delta_\tau) \cdot \Pi_{[0; \Delta_\tau]}(t - k\Delta_\tau) \quad (1.26)$$

Ce type de fonction escalier est utilisé dans la définition de l'intégrale au sens de RIEMANN que

2. Nommée *step function* outre-manche
3. On dit *boxcar function* chez les saxons

l'on peut ré-écrire :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\Pi_{[a;b]}(k\Delta\tau)}_{=\int_{\mathbb{R}} \Pi_{[0;\Delta\tau]}(t-k\Delta\tau)} f(k\Delta\tau) \Delta\tau \quad (1.27)$$

où vous remarquez l'utilisation de la fonction porte  $\Pi_{[a;b]}$  pour annuler la fonction à intégrer en dehors des bornes fixées.

■ **Exemple 1.5** Prenons une fonction en dent de scie définie par morceaux dont vous pouvez compléter le graphe sur la Fig. 1.3 à partir de la définition suivante :

$$x : t \mapsto \begin{cases} t+1 & \text{si } t \in [-1;1[ \\ 2 & \text{si } t \in [1;2[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \iff x = \Pi_{[-1;1]} \cdot (\text{Id} + 1_{L_E}) + \Pi_{[1;2]} \cdot 2 \cdot 1_{L_E}$$

comme  $x$  est continue à droite, remarquez que la fonction porte  $\Pi_{[-1;1]}$  est considérée avec son prolongement à droite pour définir le support  $[-1;1[$  où la fonction  $\text{Id} + 1_{L_E} = t \mapsto t + 1$  doit être considérée. Une autre fonction porte est utilisée pour définir le support de la fonction constante  $2 \cdot 1_{L_E} = t \mapsto 2$  et la fonction est donc laissée nulle ailleurs (y compris en  $t = 2$  puisque continue à droite).

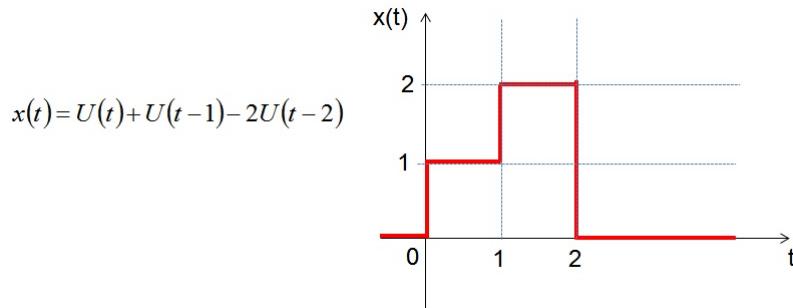


FIGURE 1.3 – Exemple d'utilisation de la fonction de Heaviside pour bâtir une fonction plus complexe

Si nous approchons cette fonction en utilisant (1.26) avec un pas d'échantillonage  $\Delta\tau = 1$ , seuls les deux échantillons  $x(0) = 1$  et  $x(1) = 2$  sont non nuls et on obtient l'approximation en deux fonctions portes non nulles (en rouge sur la Fig. 1.3) :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) \approx \Pi_{[0;1]}(t) + 2\Pi_{[1;2]}(t) = \underbrace{\Pi\left(t - \frac{1}{2}\right)}_{\text{vaut 1 autour de 0,5}} + \underbrace{2\Pi\left(t - \frac{3}{2}\right)}_{\text{vaut 2 autour de 1,5}}$$

En remplaçant les fonctions portes par leur composition en fonctions de HEAVISIDE, on obtient une approximation en 3 échelons dont l'amplitude représente le saut relatif à effectuer pour passer d'un escalier à un autre :

$$x(t) \approx \underbrace{u(t)}_{+1 \text{ à } t=0} + \underbrace{u(t-1)}_{+1 \text{ à } t=1} + \underbrace{-2u(t)}_{-2 \text{ à } t=2}$$

Cela permet d'approcher la valeur de l'intégrale de  $x(t)$  en utilisant (1.27) pour avoir :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x(t) dt &= \int_1^2 x(t) dt = \underbrace{\int_{-1}^1 t+1 dt}_{=2} + \underbrace{\int_1^2 2 dt}_{=1} = 3 \\ &\approx \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Pi_{[-1;2]}(k\Delta\tau) x(k\Delta\tau) \Delta\tau = \sum_{k=-1}^2 x(k) = \underbrace{x(-1)}_{=0} + \underbrace{x(0)}_{=1} + \underbrace{x(1)}_{=2} + \underbrace{x(2)}_{=0} = 3 \end{aligned}$$

■

La fonction de HEAVISIDE peut servir de base pour générer d'autres fonctions de type causal, par intégration ou différenciation. Par exemple, en l'intégrant une fois, on obtient la *fonction rampe*<sup>4</sup>  $t \mapsto t u(t)$ . Si on l'intègre  $n$  fois, on obtient la base des fonctions polynomiales causales, c.-à-d. nulles pour  $t < 0$ .

$$u^{(-n)}(t) = \frac{t^n}{!n} u(t) \quad (1.28)$$

où  $u^{(n)}$  désigne la  $n^e$  dérivée et par extension  $u^{(-n)}$  la  $n^e$  primitive qui s'annule en 0.

Le cas de la dérivation est plus complexe car elle entraîne l'apparition d'une discontinuité. En effet, la dérivée de la fonction de HEAVISIDE n'est pas définie en 0 car non continue en 0. Cet écueil ne peut se traiter qu'en utilisant la théorie des distributions, qui va permettre de définir l'impulsion de DIRAC.

### Impulsion ou distribution de DIRAC

L'impulsion de DIRAC se trouve, par exemple, en différenciant l'échelon unitaire. On voit immédiatement apparaître un problème : la dérivée est nulle presque partout, sauf au point 0 où l'échelon présente une discontinuité et où sa dérivée est infinie. Au sens classique des fonctions la dérivée de l'échelon unité est la fonction nulle, car on ne peut que proposer un prolongement continu en 0 qui vaut 0 pour pourvoir l'intégrer et l'intégrale devient alors nulle !

**R** Dans l'espace des fonctions continues  $C^0$ , les applications (ou opérateurs puisque l'application transforme une fonction en une fonction) dérivée et intégrale sont réciproques. Ces applications sont bijectives et ont un noyau nul car seul la fonction nulle  $0_{C^0}$  à pour dérivée la fonction nulle.

En revanche dans l'espace des signaux physiques  $L_E$  considéré, pouvant donc être discontinus, on voit que au moins  $u(t)$  et  $0_{L_E}$  ont pour dérivée la fonction nulle. Le noyau de l'application dérivée n'est plus réduit à  $\{0_{L_E}\}$  mais est au moins de dimension 1 puisque  $\text{vect}(u) \subset \text{Ker}(\frac{d}{dt})$ . Les opérateurs dérivée et intégrale ne sont plus réciproque.

Pourtant l'intuition physique nous pousse à penser qu'intégrer la dérivée d'un échelon doit redonner un échelon et qu'il existe bien un signal qui, donné en entrée d'un intégrateur, provoque un échelon en sortie. De même lorsque l'on considère une particule élémentaire comme une masse ponctuelle à travers une fonction de densité de masse, on introduit une fonction nulle partout sauf au point où se trouve la particule et dont la valeur de densité de masse est infinie, cependant sont l'intégrale vaut la masse de la particule. C'est pour cela que DIRAC introduit la *fonction Delta* dans le développement de la théorie quantique des champs sans pour autant en donner une définition mathématique valable. Cette fonction apparaît aussi lorsque l'on considère la fonction de densité de probabilité  $p(x)$  d'un événement discret tel qu'un jet de dé : la densité de probabilité en dehors des nombres entier est nulle mais infinie pour chaque valeur de 1 à 6. Pourtant lorsque

4. appelée *ramp function* de manière assez similaire dans les pays où l'on roule pourtant à gauche.

l'on veut la probabilité de tirer 1 sur un jet, on intègre cette densité autour de 1 et l'on veut obtenir

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} p(x)dx = \frac{1}{6}$$

Il faudra, 30 ans plus tard, deux médailles Field et bâtir la théorie des *Distributions* ou des *fonctions généralisées* pour en donner une définition correcte et obtenir une généralisation de la notion de fonction permettant de dériver les fonctions non-continues en tout points !

Le but de cette partie n'est pas de faire une présentation exhaustive de la théorie des distributions, mais de donner du sens à cette impulsion de DIRAC, de décrire comment l'utiliser convenablement et de lui donner une place centrale dans l'études des systèmes et des signaux.

Il est possible de donner une justification physique à l'impulsion de DIRAC par un passage à la limite, comme illustrée sur la figure ci-contre. On considère une fonction échelon avec un temps de transition finie  $\tau$ . En dérivant cette fonction, on obtient une fonction décrivant une impulsion brève de durée  $\tau$ . L'aire de cette fonction, associée à son intégrale sur  $\mathbb{R}$ , est égale à 1 quel que soit  $\tau$ . Par passage à la limite quand  $\tau$  tends vers 0, on se rapproche d'une fonction nulle presque partout sauf en 0 où elle tend vers l'infini et dont l'intégrale vaut 1. L'impulsion de DIRAC peut être présentée comme un algorithme de passage à la limite d'une impulsion, elle est donc décrite par « son effet sous l'intégrale » et n'admet pas de définition classique même en tant que limite de fonction :

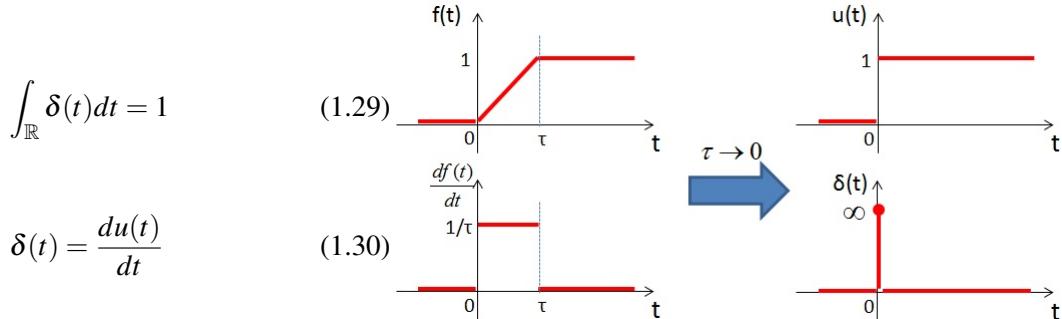


FIGURE 1.4 – Le DIRAC vu par le passage à la limite d'une fonction continue. Attention la limite de l'impulsion continue lorsque  $\tau \rightarrow 0$  est toujours la fonction nulle presque partout et non pas un DIRAC. Cependant son effet sous l'intégrale n'est pas celui de la fonction nulle.

L'impulsion de DIRAC est donc un objet mathématique qui n'est pas une fonction classique, on parle de fonction généralisée, qui est une dérivée non nulle de l'échelon et dont l'intégrale est la fonction échelon.

La position de cette impulsion n'est pas forcément centré en 0. On notera  $\delta_a$  la fonction généralisée dont l'intégrale est l'échelon centré en  $a$  soit  $u_a : t \mapsto u(t - a)$  et donc la fonction Delta est par défaut  $\delta = \delta_0$ . Il n'est pas rare de voir la fonction généralisé Delta utilisée et nommée comme une fonction classique, par exemple « la fonction  $\delta(t - a)$  » au lieu de la distribution  $\delta_a$ . Ce sont des abus de langage avec lesquels il faut être prudent car si certaines propriétés (comme ici le décalage dans le temps et donc la composition avec une fonction  $t \mapsto t - a$ ) sont conservée par les distributions, d'autre ne le sont pas.

Quel peut être l'intérêt d'un tel objet mathématique, nul partout sauf en un point où il devient infini ? Il est certain qu'il ne peut être utilisé comme une fonction. Par contre, il peut servir à calculer une fonction indicatrice  $I_f(t_0)$  pour mesurer une caractéristique d'une fonction  $f$ , définie en  $\mathbb{R}$ , autour de l'instant  $t_0$ . Comme le montre (1.31). La fonction  $f$  est localement intégrable et  $\delta(t)$  sert de fonction de mesure :

$$I_f(t_0) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t - t_0) f(t) dt \quad (1.31)$$

À l'intérieur de l'intégrale, la distribution de DIRAC prend tout son sens, car elle est définie par son effet sous l'intégrale. Elle va permettre de mesurer la fonction  $f$  au point  $t = t_0$ . En effet, à l'intérieur de l'intégrale, en multipliant l'impulsion avec la fonction  $f$  et en l'intégrant sur un intervalle infiniment court, on prélève la valeur de la fonction  $f$  au point  $t = t_0$ . On appelle cette propriété la propriété d'échantillonnage, donnée par (1.32). Celle-ci présente un très grand intérêt dans l'étude des signaux.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad (1.32)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0} f(t) dt = f(t_0)$$

Précisons-le à nouveau : l'utilisation de l'impulsion de DIRAC n'a de sens qu'à l'intérieur d'une intégrale. Ce n'est pas une fonction classique mais une distribution ou fonction généralisée. L'usage pratique montre qu'on trouve souvent l'impulsion de DIRAC utilisée à l'extérieur de toute intégrale, comme une fonction mathématique classique. C'est bien entendu une écriture abusive et potentiellement source d'erreur. Cependant, ce type d'écriture permet parfois une simplification de l'écriture des calculs, qui est toléré si l'impulsion de DIRAC est correctement employée dans une intégrale. Il est courant de représenter sur un graphique l'impulsion de DIRAC, au même titre qu'une fonction. Techniquement, c'est impossible car l'amplitude de l'impulsion de DIRAC devient infinie. Par convention, on la représente sous la forme d'un trait, terminé par une flèche, avec à proximité une valeur placée entre parenthèse indiquant l'aire du DIRAC, c.-à-d. l'amplitude de l'échelon obtenu par intégration. Cette aire est appelé *poids* du DIRAC en référence à son utilisation dans les fonctions densité de masse dont l'intégrale donne le poids de la particule.

La figure 1.5 illustre cette représentation, avec l'affichage de l'impulsion  $2\delta_{t-1}$ . L'impulsion est

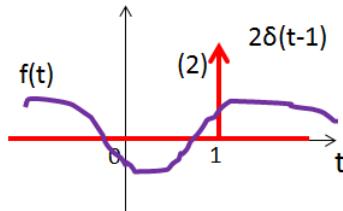


FIGURE 1.5 – Représentation graphique conventionnelle d'une impulsion de DIRAC de poids 2 et centrée en 1. Remarquez la notation abusive  $\delta(t-1)$  au lieu de  $\delta_1$

centrée en  $t = 1$  et son poids est égal à 2. Sur ce graphe, on a superposé l'impulsion de DIRAC avec le tracé d'une fonction  $f$  quelconque. L'utilisation de l'impulsion à l'intérieur de l'intégrale ?? permet d'extraire la valeur de  $f$  au point  $t = 1$ .

Revenons au problème initial de sélection de familles d'excitation inchangées par l'effet d'un système LTI. On peut remarquer que cette propriété est aussi vérifiée avec la famille d'excitation impulsionale. L'action d'un opérateur proportionnel, intégrateur ou dérivée appliquée à une fonction de cette famille donnera une nouvelle fonction appartenant aussi à cette famille. De plus, on comprend intuitivement l'intérêt de l'impulsion de DIRAC pour déterminer la réponse temporelle d'un système à n'importe quelle excitation. De par sa propriété d'échantillonnage, chaque point d'une excitation peut être modélisé, à la limite, par une impulsion de DIRAC. L'excitation complète peut donc être modélisée comme la superposition d'un nombre infini d'impulsions de DIRAC. Si on sait comment le système réagit à une impulsion de DIRAC, la réponse à l'excitation sera la superposition des réponses à toutes les impulsions de DIRAC, puisque le système est linéaire.

## 1.7 Les différents types de réponse caractérisant les systèmes LTI

Maintenant que nous avons défini deux familles d'excitation adaptées à l'étude des systèmes LTI, nous pouvons définir plusieurs types de réponse qui nous aideront à analyser les propriétés de ces systèmes.

### 1.7.1 Réponse impulsionnelle

Elle correspond à la réponse d'un système excité par une impulsion de DIRAC, cette réponse est notée  $h(t)$  :

$$h = L[\delta_0] \quad (1.33)$$

Quel que soit le système LTI considéré, puisque l'excitation devient nulle pour  $t > 0$ , on retrouve le calcul de la réponse naturelle. L'application de l'impulsion en  $t=0$  ne fait que changer les conditions initiales.

$$\text{si } x(t) = \delta(t) \rightarrow y_f(t) = y_0(t) \quad (1.34)$$

La réponse impulsionnelle va nous fournir un moyen de calculer la réponse d'un système LTI à n'importe quelle excitation, en effectuant les calculs uniquement dans le domaine temporel. C'est ce que nous allons démontrer. Tout signal peut être vu comme la superposition d'un nombre infini de points, pouvant être modélisés par des impulsions de DIRAC, pondérées et décalées dans le temps. Comme le montre la figure 1.6, une excitation quelconque  $x(t)$  peut être approximée par une suite de rectangles adjacents, de largeur  $\Delta\tau$ , que l'on peut remplacer par des impulsions de DIRAC équivalentes de même surface. Ainsi, elles transportent la même énergie. Si la largeur  $\Delta\tau$  tend vers zéro, cette approximation devient de plus en plus juste. Dans l'exemple considéré, on suppose que  $x(t) = 0$  pour  $t < 0$  par souci de lisibilité. Le même raisonnement resterait juste avec  $x(t)$  non nul pour  $t < 0$ . L'excitation peut alors s'approximer par :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta\tau)\Delta\tau\delta(t - n\Delta\tau)$$

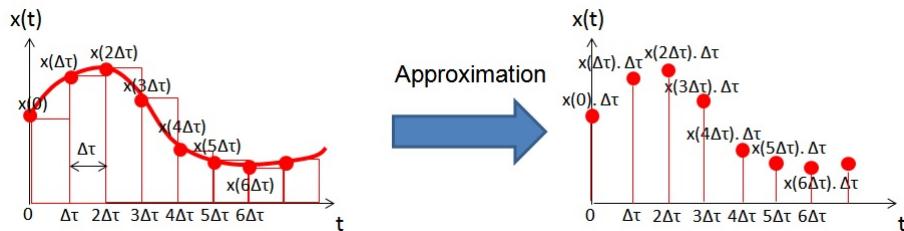


FIGURE 1.6 – Excitation quelconque  $x(t)$  approximée par une suite d'impulsion de DIRAC

Supposons que cette excitation attaque l'entrée d'un système LTI dont la réponse impulsionnelle  $h(t)$  est connue (Fig. 1.7). Par souci de lisibilité, on suppose aussi que  $h(t) = 0$  pour  $t < 0$ .

Chaque impulsion élémentaire composant  $x(t)$  et apparaissant à l'instant  $k \times \Delta\tau$  contribue à la réponse en sortie, comme l'illustre la figure 1.8. Chacune d'entre elles produit une réponse égale à la réponse impulsionnelle du système, mais :

- pondérée par l'amplitude de l'excitation d'entrée à l'instant  $k \times \Delta\tau$

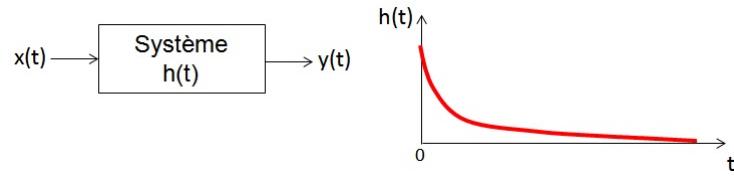


FIGURE 1.7 – Réponse impulsionnelle d'un système

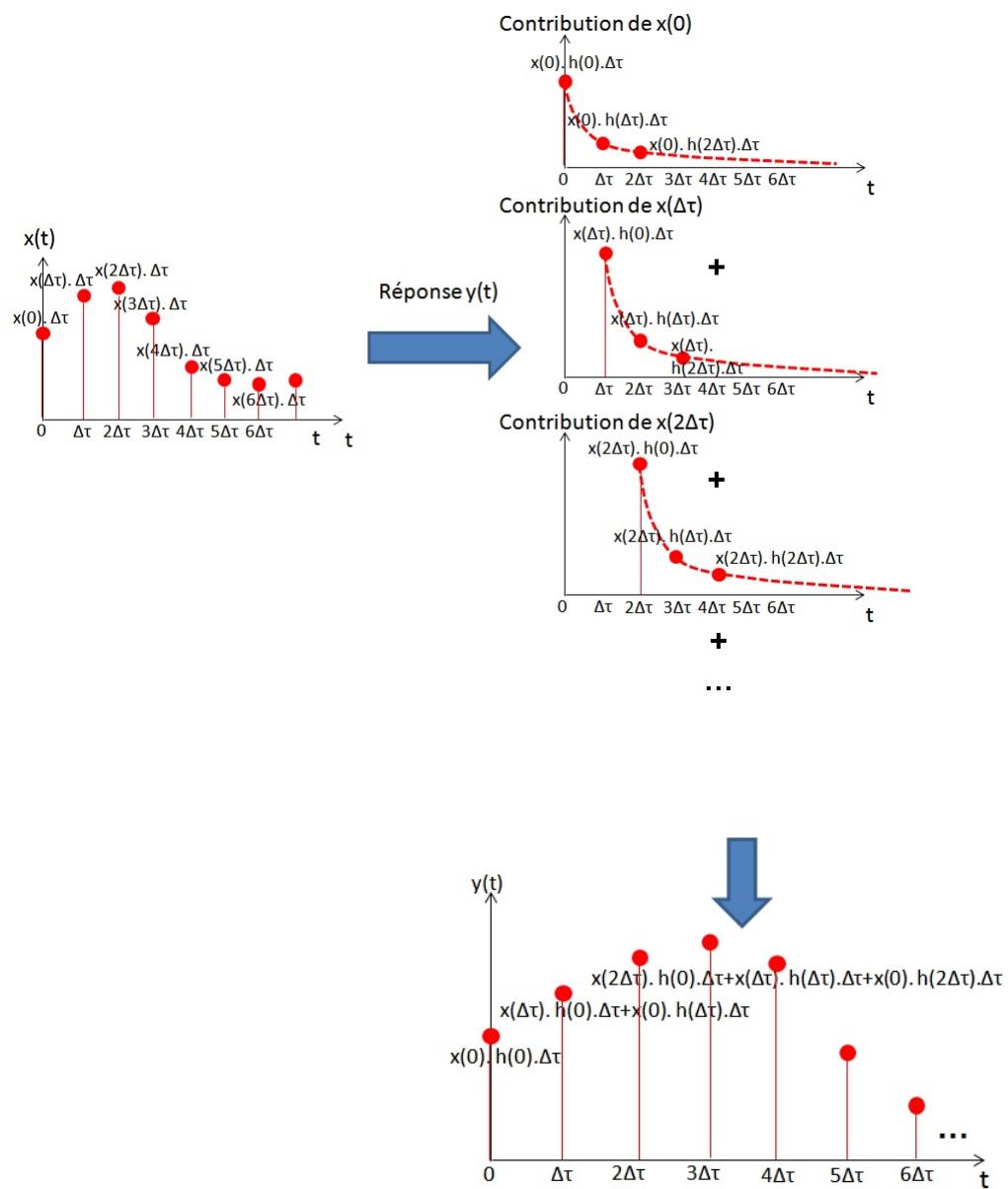


FIGURE 1.8 – Construction de la réponse impulsionnelle

— décalée dans le temps de  $k \times \Delta_\tau$

La réponse globale du système est obtenue en sommant l'ensemble des contributions de chaque impulsion élémentaire formant l'excitation. Elle peut alors s'approximer par :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta_\tau) \Delta_\tau h(t - n\Delta_\tau)$$

En faisant tendre  $\Delta_\tau$  vers zéro, cette somme converge vers une intégrale donnée par la relation ci-dessous. Ce calcul intégral particulier, faisant intervenir le produit de deux fonctions dont les indices  $\tau$  et  $t - \tau$  sont balayés dans des directions opposées, porte un nom : le produit de convolution. Cette opération est symbolisée par le signe  $*$ .

$$y(t) = \lim_{\Delta_\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta_\tau) h(t - n\Delta_\tau) \Delta_\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) dt = x * h(t) \quad (1.35)$$

Cette relation basée sur le produit de convolution fournit donc un outil de calcul de la réponse du système directement dans le domaine temporel. Cependant, c'est un calcul complexe, passant par une opération longue et fastidieuse si elle est effectuée à la main. Nous y reviendrons au chapitre 7, qui sera consacré au calcul des réponses des systèmes LTI directement dans le domaine temporel. Cependant, avant d'aborder ce point, nous allons d'abord considérer le cas d'une excitation exponentielle complexe pour dériver le concept de fonction de transfert défini dans le domaine fréquentiel. Nous verrons que dans ce domaine, le calcul de la réponse du système est beaucoup plus aisée !

### Condition pour garantir la causalité

Un système est causal si sa réponse ne dépend que des états passés et présents. A partir de la réponse impulsionale, on peut en déduire une condition : il faut que  $h(t) = 0$  pour  $t < 0$ . Les systèmes causaux sont les seuls à être physiquement réalisables. Le calcul de la réponse d'un système causal à partir de sa réponse impulsionale peut s'écrire :

$$y(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x * h(t) \quad (1.36)$$

## 1.7.2 Réponse indicielle

Elle correspond à la réponse d'un système excité par une fonction de Heaviside. On la note  $a(t)$ .

$$\text{si } x(t) = u(t) \rightarrow y_f(t) = a(t) \quad (1.37)$$

### Autre manière de déterminer la réponse impulsionale

Sans démonstration, on peut affirmer que si on différencie l'excitation, on peut déterminer la nouvelle réponse en différenciant la réponse à l'excitation initiale : si  $y(t) = L[x(t)]$  alors  $\frac{dy}{dt} = L[\frac{dx}{dt}]$ . Ainsi, puisque l'impulsion de DIRAC est la dérivée de l'échelon unitaire, si on connaît la réponse indicielle, on peut retrouver la réponse impulsionale en dérivant la réponse indicielle.

$$\delta(t) = \frac{da(t)}{dt} \quad (1.38)$$

### 1.7.3 Réponse à une exponentielle complexe - Fonction de transfert

On considère une excitation exponentielle complexe. La réponse forcée a donc la même forme que l'excitation, et présente la même fréquence complexe. La seule inconnue est le phaseur  $\hat{Y}$  de la réponse. Soit l'excitation  $x(t) = \operatorname{Re}[\hat{X}e^{pt}]$  et la réponse  $y_f(t) = \operatorname{Re}[\hat{Y}e^{pt}]$  pour  $t > 0$ . Si on reprend l'équation différentielle ordinaire générale d'un système LTI donnée par 1.5, on peut écrire la relation suivante.

$$\begin{aligned}\sum a_i \operatorname{Re}[p^i \hat{Y} e^{pt}] &= \sum b_i \operatorname{Re}[p^i \hat{X} e^{pt}] \\ \sum a_i \operatorname{Re}[p^i \hat{Y}] &= \sum b_i \operatorname{Re}[p^i \hat{X}] \\ \hat{Y} \sum a_i \operatorname{Re}[p^i] &= \hat{X} \sum b_i \operatorname{Re}[p^i]\end{aligned}$$

On peut donc facilement déterminer le phaseur  $\hat{Y}$  associée à la réponse, c'est-à-dire le module et le déphasage de la réponse. On peut alors caractériser l'effet du système à une excitation exponentielle complexe quelconque sous une forme appelée fonction de transfert, définie comme le rapport entre les phaseurs de réponse et d'excitation, et défini pour toutes les fréquences complexes.

$$H(p) = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}}(p) = \frac{\sum a_i \operatorname{Re}[p^i]}{\sum b_i \operatorname{Re}[p^i]} = G \frac{\prod_{i=1}^M (p - p_i)}{\prod_{j=1}^N (p - p_j)} \quad (1.39)$$

De manière générale, l'équation 1.39 peut s'écrire comme une fraction rationnelle entre deux polynômes, où  $G$  est un terme constant. Les  $N$  racines du dénominateur sont les pôles de la fonction de transfert et les  $M$  racines du numérateur sont appelées les zéros de la fonction de transfert. Comme leur nom l'indique, ils annulent la fonction de transfert lorsque la fréquence  $p = p_j$ . Les pôles sont les mêmes que ceux identifiés dans la réponse naturelle ! Ils ont un rôle prépondérant sur la stabilité du système et la nature de la réponse. Les outils permettant d'étudier l'influence des pôles et des zéros sur la réponse d'un système sortent du cadre de ce cours et seront abordés dans les cours d'automatique.

Avec une excitation exponentielle complexe, l'action du système LTI peut donc se résumer à la multiplication de l'excitation par la fonction de transfert. On peut souligner la facilité de la méthode. Une fois la fonction de transfert connue à une fréquence complexe donnée, la réponse forcée à une exponentielle complexe de même fréquence est trouvée en multipliant le phaseur d'entrée par la fonction de transfert (1.40).

$$\hat{Y}(p) = H(p)\hat{X}(p) = |H(p)||X(p)|e^{j(\arg(H(p)) + \arg(\hat{X}(p)))} \quad (1.40)$$

#### Réponse en régime permanent :

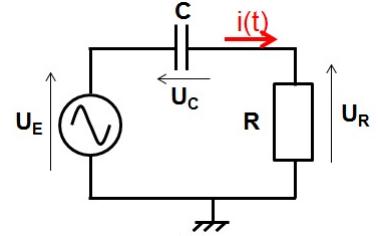
Dans le cas général, l'excitation est complexe. Le cas particulier où  $\sigma = 0$  correspond au cas d'une excitation dite monochromatique ou harmonique. On parlera alors de réponse en fréquence. Il correspond aussi au cas du régime permanent avec  $\sigma < 0$ , c'est-à-dire que  $t$  devient suffisamment grand pour que l'influence du terme  $e^{\sigma t}$  devienne négligeable. La réponse du système se trouve facilement en remplaçant la fréquence complexe  $p$  par  $j\omega$ . En considérant une excitation cosinusoidale d'amplitude égale à  $X$  et de phase  $\Phi_x$ , la réponse du système est donnée par la relation suivante.

$$y(t) = \operatorname{Re}[|H(\omega)|Xe^{j(\omega t + \arg(H(p)) + \Phi_x)}] = |H(\omega)|X \cos(\omega t + \arg(H(p)) + \Phi_x) \quad (1.41)$$

La réponse est une grandeur complexe. Le module de la réponse en fréquence est le gain en amplitude de la fonction de transfert du système ou du filtre. Le déphasage du signal en sortie du filtre par rapport au signal d'entrée est l'argument de la fonction de transfert. Le module et la phase sont des fonctions de la pulsation  $\omega$ .

**Exemple**

On reprend l'exemple du circuit RC abordé dans la partie IV.4. On considère toujours que le condensateur est chargé initialement en  $t = 0$ , avec une tension à ses bornes notée  $U_{C0}$ . Le circuit est excité par un signal délivrant une excitation exponentielle complexe  $U_E(t) = X e^{pt}$  avec  $t > 0$  et  $X$  l'amplitude complexe. La réponse du circuit correspond à la tension mesurée aux bornes de la résistance  $R$  ou tension de sortie. Déterminez la fonction de transfert de ce circuit. Indiquez quels sont les pôles et les zéros. Quelle est la réponse à un signal cosinusoïdal, d'amplitude unitaire et de phase nulle ?



La réponse du circuit  $U_R$  est la superposition de la réponse naturelle  $U_{R0}$  et de la réponse forcée  $U_{Rf}$ . La réponse naturelle est liée à la présence d'une condition initiale : ici, le stockage d'une charge dans le condensateur à  $t=0$ . Sans charge initialement stockée, la réponse naturelle aurait été nulle. Nous avions établi la réponse naturelle de ce circuit en terme de courant. Nous pouvons aisément l'adapter pour la donner en terme de tension de sortie.

$$U_{R0}(t) = R i_0(t) = U_{C0} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad t > 0$$

La réponse forcée est provoquée par l'excitation du circuit en  $t > 0$ , indépendamment de la présence d'une condition initiale. Commençons par établir une équation différentielle reliant la tension de sortie  $U_{Rf}$  et l'excitation  $U_E(t)$ . On utilise la loi des mailles. Après une dérivation, on obtient l'équation 1.42.

$$U_E(t) = U_C(t) + U_R(t) \Rightarrow U_E(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + U_R(t) \Rightarrow U_E(t) = \frac{1}{RC} \int U_R(t) dt + U_R(t)$$

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{U_R}{RC} + \frac{dU_R}{dt} \quad (1.42)$$

L'excitation étant de type exponentielle complexe et le circuit linéaire, la réponse est aussi de type exponentielle complexe. Elle s'écrit :  $U_{Rf}(t) = Y e^{pt}$ . Replaçons les termes  $U_E$  et  $U_R$  par leurs expressions respectives dans 1.42 et exprimons le rapport entre ces deux grandeurs pour obtenir la fonction de transfert  $H(p)$  de ce circuit (équation 1.43).

$$pX e^{pt} = \frac{1}{RC} Y e^{pt} + pY e^{pt} \Rightarrow pU_E(t) = \frac{1}{RC} U_{Rf}(t) + pU_{Rf}(t)$$

$$H(p) = \frac{U_{Rf}}{U_E}(p) = \frac{p}{p + \frac{1}{RC}} = \frac{p}{p + \omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (1.43)$$

La fonction de transfert du système présente un zéro nul et un seul pôle  $p_0$ , qui est exactement le même que celui identifié dans l'analyse de la réponse naturelle. Ce n'est pas une surprise car les pôles agissent sur la stabilité, qui est une caractéristique intrinsèque du système indépendante de l'excitation. Le pôle étant purement réel et négatif, on peut conclure que le système sera stable.

Calculons maintenant la réponse forcée à un signal cosinusoïdale, en utilisant 1.41. Le système n'agit que sur l'amplitude et la phase de l'excitation. Il est donc intéressant d'exprimer la fonction de transfert sous la forme de son module et son déphasage. En considérant  $p = j\omega$ , celles-ci sont :

$$|H(\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \quad \text{et} \quad \text{Arg}(H(\omega)) = \frac{\pi}{2} - \text{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\Rightarrow U_{Rf}(t) = |H(\omega)| \cos(\omega t + \text{Arg}(H(\omega)))$$

La réponse étant la superposition des réponses naturelles et forcées, celle-ci s'écrit :

$$\Rightarrow U_R(t) = U_{Rf}(t) + U_{R0}(t) = |H(\omega)| \cos(\omega t + \text{Arg}(H(\omega))) + U_{C0} e^{-\frac{t}{RC}}$$

### 1.7.4 Calcul de la réponse d'un système dans le domaine temporel ou fréquentiel ?

Nous venons de décrire deux manières de calculer l'effet d'un système LTI, selon que l'on considère une excitation impulsionnelle ou exponentielle complexe. Dans le premier cas, la réponse est déterminée directement dans le domaine temporel à l'aide de l'équation 1.35 et de la réponse impulsionnelle, à l'aide d'un produit de convolution. Dans le second cas, la réponse est déterminée dans le domaine fréquentiel à l'aide de l'équation 1.41 et de la fonction de transfert. Bien qu'il semble plus naturel de faire le calcul de la réponse directement dans le domaine temporel, nous avons montré que le calcul dans le domaine fréquentiel était beaucoup plus évident. Il se résume à une simple multiplication de l'excitation par la fonction de transfert. Cependant, comme il s'agit du même système, il y a nécessairement un lien entre la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert. C'est ce que nous verrons dans les prochains chapitres, où nous aborderons les questions de transformée de Laplace, puis de Fourier. Nous allons ainsi mettre en évidence des transformations mathématiques, permettant le passage d'une fonction du domaine temporel au domaine fréquentiel, et inversement.

## 1.8 Exercices

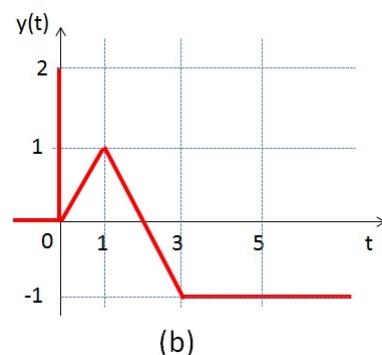
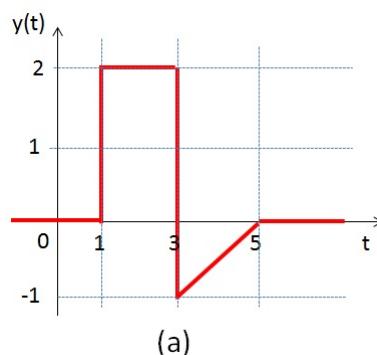
### Exercice 1

Soient les systèmes dont le comportement temporel est défini par les équations suivantes. Indiquez si ces systèmes sont linéaires, à temps invariant et causaux ?

- a.  $y(t) = x(t) + 4 \frac{dy}{dt}$
- b.  $y(t) = 2x(t) + 2$
- c.  $y(t) = e^{-t} x(t - 2)^2$
- d.  $y(t) = \frac{dx}{dt} + x(t + 2)$

### Exercice 2

1. On trace les réponses de deux systèmes LTI ((a) et (b)). Proposez une expression mathématique décrivant ces réponses.



2. Réécrivez sous la forme d'une fonction à valeurs réelles les fonctions suivantes et esquissez leur forme temporelle (pour  $t > 0$ ) :

- a.  $x(t) = (1+j)e^{j10t}$
- b.  $y(t) = e^{(-2+j)t}u(t-2)$
- c.  $z(t) = e^{(-1+2j)t} + e^{(-1-2j)t}$

**Exercice 3**

On dispose de la réponse indicielle d'un système linéaire, qui est esquissée ci-dessous. Elle a une forme exponentielle croissante.



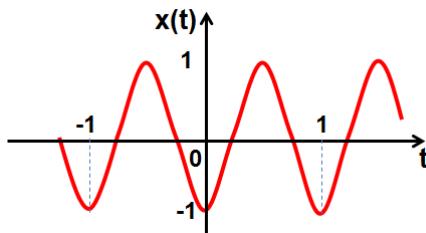
Esquissez les réponses de ce système dans les cas suivants :

- a. l'excitation  $e(t) = u(t) - u(t-1)$
- b. l'excitation  $e(t) = t(u(t) - u(t-2))$
- c. l'excitation est la dérivée de celle utilisée pour obtenir la réponse indicielle.

**Exercice 4**

On excite un système linéaire à l'aide du signal suivant :  $e(t) = e^{j2\pi t}$ . La réponse obtenue, notée  $y(t)$ , est égale à  $y(t) = \frac{1}{2}e^{j(2\pi t + \frac{\pi}{3})}$ .

- a. Réécrire la réponse sous la forme  $y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$  et  $y(t) = B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$ , en précisant les valeurs de A, B, C et  $\phi$ .
- b. Donnez l'expression de la réponse du système lorsqu'il est excité par le signal ci-dessous.



- c. Calculez la réponse du système à l'excitation suivante :  $x(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi t)$ .

**Exercice 5 - Réponse indicielle d'un circuit RC**

On reprend le circuit RC dont on a étudié la réponse dans la partie VI.3. On considère deux cas : celui où le condensateur est déchargé initialement, puis celui où il est chargé.

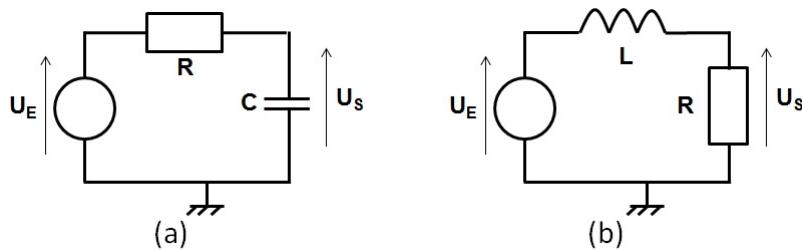
- a. Calculez la réponse naturelle du circuit lorsque le condensateur est initialement chargé.
- b. En déduire la réponse impulsionale du circuit.

c. Calculez la réponse lorsque le circuit est soumis à un échelon de HEAVISIDE d'amplitude E, dans les deux cas (charge initiale absente ou présente).

d. En déduire la réponse indicielle du circuit.

### Exercice 6

On considère les deux circuits électriques ci-dessous. Pour le circuit (a), la tension initiale ( $t=0$ ) aux bornes du condensateur C est notée  $U_{C0}$ . Pour le circuit (b), un courant noté  $I_{L0}$  traverse la bobine L. La sortie de ces deux circuits est la tension  $U_s$ .



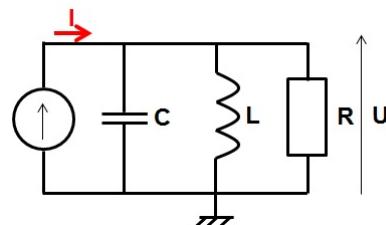
a. Déterminez les fréquences et les réponses naturelles de ces deux circuits. Quels sont les ordres de ces deux systèmes ?

b. On excite ces deux systèmes à l'aide d'un échelon de HEAVISIDE d'amplitude notée E. Déterminez la réponse indicielle de ces deux circuits.

c. Déterminez les fonctions de transfert de ces deux circuits.

### Exercice 7 - Fonction de transfert d'un circuit résonant

On reprend le circuit RLC présenté dans la partie IV.4. Celui-ci est excité par un générateur de courant I, comme le montre la figure ci-dessous. On s'intéresse à la tension U aux bornes de ce circuit. On considère que la résistance R est grande et  $R \gg \sqrt{\frac{L}{C}}$ .



a. Déterminez la fonction de transfert de ce circuit. La mettre sous la forme  $\frac{Gp}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}$ .

b. Précisez l'unité de la fonction de transfert.

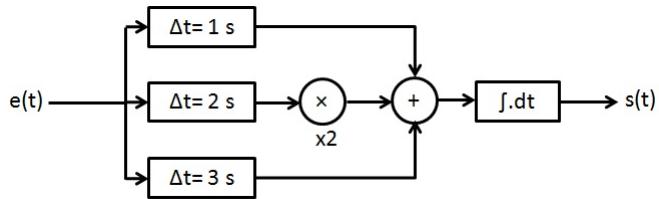
c. Ce circuit est-il stable ?

d. On considère maintenant que le terme  $\alpha$  est négligeable et une excitation cosinusoidale du circuit. Y a-t-il une fréquence particulière où la réponse présente un maximum ? Si oui, laquelle ?

e. Donnez l'expression de la réponse temporelle du circuit en régime permanent.

**Exercice 8**

On considère le système dont le fonctionnement est décrit par le schéma-bloc ci-dessous. Celui-ci transforme un signal d'entrée  $e(t)$  et délivre en sortie un signal  $s(t)$ .



- Le système est-il linéaire, à temps invariant, causal ?
- Ecrire l'équation différentielle générale de ce système.
- Déterminez l'expression de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du système. Esquissez l'allure temporelle de la réponse impulsionnelle.
- Déterminez l'expression de la fonction de transfert  $H(p)$  du système. Précisez les pôles de la fonction de transfert. Que concluez-vous sur sa stabilité ?



## 2. Transformée de Laplace

Dans le chapitre précédent, nous avons identifié deux manières de calculer la réponse transitoire d'un système :

- soit en considérant la réponse impulsionnelle et en calculant le produit de convolution dans le domaine temporel
- soit en considérant la fonction de transfert et en réalisant une simple multiplication dans le domaine fréquentiel, nécessitant une excitation exponentielle complexe.

Bien que cette deuxième méthode soit plus simple, elle suppose une excitation d'un type donné. La question posée et illustrée ci-dessous est : peut-on passer directement d'une fonction temporelle à sa forme dans le domaine fréquentiel complexe, même si celle-ci n'est pas une exponentielle complexe ? Nous allons voir que cela est possible, via une transformation mathématique appelée transformée de Laplace. En plus de nous offrir un moyen pratique pour déterminer les réponses des systèmes quel que soit le type d'excitation, nous verrons qu'elle permet de résoudre d'une manière pratique les équations différentielles ordinaires, quel que soit leur ordre (on pourra remarquer qu'il s'agit en fait du même problème).

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système LTI}} \longrightarrow y(t)$$
$$y(t) = L[x(t)] \leftrightarrow Y(p) = H(p)X(p)$$

Transformation  
mathématique ?

FIGURE 2.1 – Lien entre la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert

La transformée de Laplace permet de passer du domaine temporel à son domaine dual, le domaine fréquentiel. Dans les chapitres suivants, nous présenterons un autre type de transformation dérivée de la transformée de Laplace : la transformée de Fourier, qui sera très utile pour l'analyse des signaux, ainsi que pour l'étude des systèmes en régime permanent.

Remarque : Dans ce chapitre, on ne considère que des fonctions causales. L'instant d'apparition des signaux se fera en  $t = 0$ . Pour représenter cette condition, l'ensemble des signaux en entrée et en sortie que nous allons considérer seront multiplier par l'échelon de Heaviside  $u(t)$ .

## 2.1 Transformation d'une fonction temporelle au domaine fréquentiel

Dans le domaine temporel, l'entrée et la sortie du système sont reliées par la réponse impulsionale  $h(t)$  et le produit de convolution. Cela est vrai quel que soit le type d'excitation appliquée en entrée du système. Le passage dans le domaine fréquentiel suppose une excitation exponentielle complexe. Considérons ce cas dans le domaine temporel : la réponse sera donc égale au produit de convolution entre la réponse impulsionale et l'excitation exponentielle complexe. Nous considérons dans un premier temps un signal défini sur tout le domaine temporel. Elle peut être modifiée selon la forme donnée par l'équation 2.2.

$$y(t) = h * x(t) = h * \exp(pt) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot \exp(p(t - \tau)) d\tau \quad (2.1)$$

$$y(t) = \exp(pt) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot \exp(-p\tau) d\tau \quad (2.2)$$

On remarque que la réponse du système est le produit entre l'excitation et un terme intégrale dépendant de la réponse impulsionale. On retrouve donc une forme très similaire à celle vue à l'équation 1.39, reliant réponse et excitation exponentielle complexe, via la fonction de transfert. Ce terme intégrale n'est donc rien d'autre que la réponse du système LTI dans le domaine fréquentiel complexe, c'est-à-dire sa fonction de transfert.

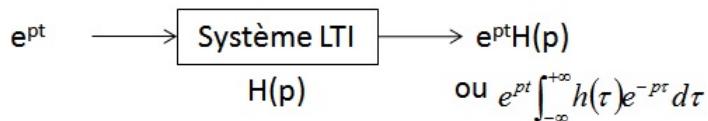


FIGURE 2.2 – Lien via la transformée de Laplace entre l'excitation exponentielle complexe et la réponse d'un système LTI

Nous venons de mettre en évidence une transformation mathématique permettant de passer de la représentation temporelle d'une fonction à sa représentation fréquentielle complexe. Cette transformée s'appelle la transformée de Laplace. Elle est donnée par 2.3 dans le cas général.

$$H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot \exp(-pt) dt, \quad p \in \mathbb{C} \quad (2.3)$$

La démonstration précédente reste valable dans le cas d'un signal causal, défini pour  $t > 0$ . Dans ce cas, on peut écrire :

$$H(p) = \int_0^{+\infty} h(t) \cdot \exp(-pt) dt, \quad p \in \mathbb{C} \quad (2.4)$$

Remarque : On vient aussi de montrer que la fonction de transfert, exprimée dans le domaine des fréquences complexes  $p$ , n'est rien d'autre que la transformée de Laplace de la réponse impulsionale.

## 2.2 Transformée de Laplace

### 2.2.1 Définition

La transformée de Laplace est une transformation mathématique, transformant une fonction temporelle en une fonction définie dans le domaine des fréquences complexes  $p$ . Nous noterons  $\mathcal{L}$  cette transformation. On distingue deux types de transformée de Laplace : bilatérale (2.5) et unilatérale (2.6). Cette dernière s'impose naturellement dès que l'on considère des systèmes causaux ( $h(t) = 0$  pour  $t < 0$ ). Dans la suite, comme nous ne traiterons que de systèmes causaux, nous ne considérerons que la transformée de Laplace unilatérale.

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-pt) dt, \quad p = \sigma + j\omega \quad (2.5)$$

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^+}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-pt) dt, \quad p = \sigma + j\omega \quad (2.6)$$

#### Opérateur de Heaviside s :

Dans la littérature scientifique anglo-saxonne, lorsque la transformée de Laplace est utilisée, l'opérateur  $p$ , représentant les fréquences complexes, apparaît rarement. Il est remplacé par un opérateur noté "s" et appelé opérateur de Heaviside en hommage à Oliver Heaviside. Il est l'inventeur des méthodes mathématiques de résolution des équations différentielles pour les circuits électroniques, équivalentes à la transformée de Laplace.

### 2.2.2 Conditions d'existence de la transformée de Laplace et stabilité des systèmes

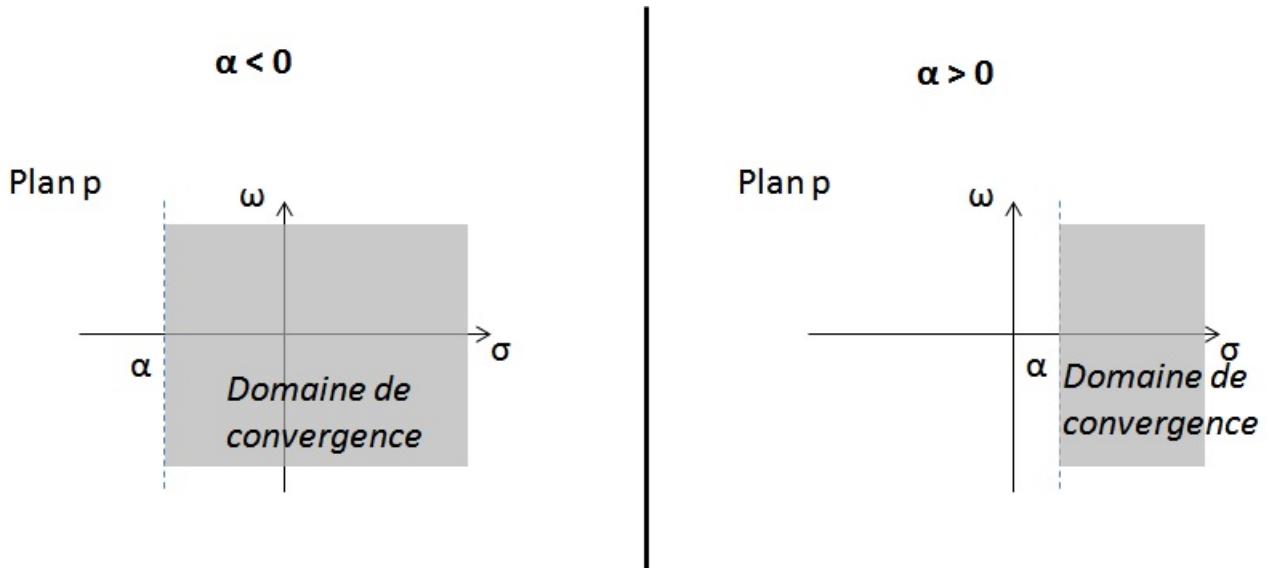
Il est important de noter que la transformée de Laplace n'existe que si l'intégrale converge. Ceci n'est pas le cas pour toutes les valeurs de  $p$ . L'objectif de ce cours n'est pas de faire ce calcul intégrale, mais plutôt de l'utiliser comme outil pour l'étude des systèmes linéaires. Nous utiliserons la plupart du temps des tables contenant les transformées pour les fonctions les plus courantes. Néanmoins, nous allons mettre en œuvre ce calcul à travers un exemple et indiquer les conditions d'existence de la transformée de Laplace. Nous allons mettre en évidence ce que cela signifie du point de vue de la stabilité des systèmes LTI. Par souci de simplification, on dira qu'un système est stable s'il converge vers une valeur finie. Exemple : considérons un système LTI dont la réponse impulsionnelle est définie par la fonction :  $h(t) = \exp(\alpha t)u(t)$  où  $\alpha$  est un réel quelconque. Calculons sa transformée de Laplace à l'aide de l'équation 2.5 :

$$\begin{aligned} H(p) &= \mathcal{L}[\exp(\alpha t)u(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha t)u(t) \cdot \exp(-pt) dt \\ H(p) &= \int_0^{+\infty} \exp(-(p - \alpha)t) dt \\ H(p) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1 - \exp(-(p - \alpha)T)}{p - \alpha} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1 - \exp(-(\sigma - \alpha)T)\exp(-j\omega T)}{p - \alpha} \end{aligned}$$

La transformée de Laplace existera si cette intégrale converge. Cela dépend uniquement de la partie réelle  $\sigma$  de la fréquence complexe :

$$F(p) = \begin{cases} \frac{1}{p - \alpha} & \text{si } \sigma > \alpha \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.7)$$

Si on représente l'excitation en fréquence dans le plan P, il existe un domaine d'existence de la transformée de Laplace appelé domaine de convergence. Il s'agit d'un plan où  $\text{Re}(p) = \sigma > \alpha$ .

FIGURE 2.3 – Domaine de convergence de la fonction  $\exp(\alpha t)$ 

Nous le représentons dans deux cas différents :  $\alpha < 0$  et  $\alpha > 0$ , et allons analyser sa signification concrète. Le domaine de convergence indique, dans le cas d'une excitation exponentielle complexe, l'ensemble des fréquences complexes pour lequel le système convergera. Pour s'en convaincre, considérons une excitation exponentielle, de fréquence complexe  $p_0 = \beta + j\omega$ . Reprenons la forme initiale dérivée de la réponse impulsionale.

$$y(t) = \exp(p_0 t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \exp(-p_0 \tau) d\tau$$

$$y(t) = \exp((\beta + j\omega)t) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha\tau) \exp(-(\beta + j\omega)\tau) d\tau$$

$$y(t) = \exp((\beta + j\omega)t) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(\beta - \alpha + j\omega)\tau) d\tau$$

$$y(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\exp((\beta + j\omega)t)(\exp(-(\beta - \alpha + j\omega)T) - 1)}{\beta - \alpha + j\omega} \quad (2.8)$$

Cette fonction converge si la partie réelle  $\beta$  de la fréquence de l'excitation est supérieure à  $\alpha$ , autrement dit si la fréquence complexe d'excitation appartient au domaine de convergence, mais aussi si  $\beta < 0$ . Dans le cas contraire, le signal d'entrée va diverger pour  $t > 0$ . Cette double condition sur  $\beta$  n'est possible que si  $\alpha < 0$ , qui est donc une condition nécessaire pour garantir la stabilité du système.

#### Cas d'une excitation harmonique :

Cette situation correspond au cas où  $\beta = 0$ . Le système sera stable uniquement si, dans le plan p, l'axe des imaginaires appartient au domaine de convergence. Dans le chapitre consacré à la transformée de Fourier, nous verrons qu'elle est équivalente à une transformée de Laplace, mais pour une fréquence purement complexe  $\beta = 0$ . Si l'axe des imaginaires appartient au domaine de convergence, alors la transformée de Fourier de la fonction pourra exister.

### 2.2.3 Pôles et zéros d'une fonction de transfert

Reprendons l'exemple précédent. Comme nous l'avions introduit dans le chapitre précédent,  $\alpha$  correspond à un pôle de la réponse du système. Sa stabilité est liée à sa partie réelle.

Toutes les transformées de Laplace que l'on considère peuvent se mettre sous la forme d'une fonction rationnelle, où le numérateur  $N(p)$  et dénominateur  $D(p)$  sont des polynômes. Eux-mêmes peuvent être exprimés en fonction de leurs racines appelés zéros et pôles respectivement. Ceux-ci correspondent à des fréquences complexes particulières qui :

- annulent la fonction de transfert dans le cas des zéros  $p_{zi}$
- font tendre la fonction de transfert vers l'infini dans le cas des pôles  $p_{pj}$

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} \Rightarrow F(p) = G \frac{\prod_{i=1}^m (p - p_{zi})}{\prod_{i=1}^n (p - p_{pj})} \quad (2.9)$$

où  $G$  est le gain de la fonction de transfert. Comme nous l'avions déjà vu dans le chapitre 2, la position des pôles nous donne une indication sur l'allure temporelle de la fonction de transfert (réponse naturelle). Quel que soit le système linéaire considéré, la position de ces pôles va déterminer la stabilité du système. Vous approfondirez ces concepts dans le cours d'automatique.

## 2.3 Propriétés de la transformée de Laplace

Dans cette partie, nous allons passer en revue plusieurs des propriétés importantes de la transformée de Laplace, qui facilitent les calculs de la transformée de Laplace et les applications associées. Nous ne démontrerons pas l'ensemble de ces propriétés.

### 2.3.1 Linéarité

La transformée de Laplace est linéaire. La transformée de Laplace d'une somme pondérée de fonction est la somme des transformées de Laplace individuelle de ces fonctions, pondérées de la même manière. Elle vérifie donc la relation suivante :

$$a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \longleftrightarrow a \cdot F(p) + b \cdot G(p) , \text{ avec } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ et } G(p) = \mathcal{L}[g(t)] \quad (2.10)$$

### 2.3.2 Théorème du retard

Supposons que l'on connaisse la transformée de Laplace  $F(p)$  de la fonction causale  $f(t)$ , qui est nulle pour  $t < 0$ . Si on a retardé de  $t_0$  cette fonction, elle devient  $f(t-t_0)$  et s'annule pour tout  $t < t_0$ . Calculons sa transformée de Laplace à partir de (2.6) et appliquons le changement de variable  $w = t-t_0$ . On montre que la transformée de Laplace de la fonction retardée est la transformée de Laplace non retardée multipliée par  $e^{-pt_0}$ .

$$F_{t_0}(p) = \mathcal{L}[f(t-t_0)] = \int_{t_0}^{+\infty} f(t-t_0) \exp(-pt) dt$$

$$F_{t_0}(p) = \int_0^{+\infty} f(w) \exp(-p(w+t_0)) dw = \int_0^{+\infty} f(w) \exp(-pw) \exp(-pt_0) dw$$

$$F_{t_0}(p) = F(p) \cdot \exp(-pt_0) \quad (2.11)$$

### 2.3.3 Théorème du changement d'échelle

Supposons que l'on connaisse la transformée de Laplace  $F(p)$  de la fonction causale  $f(t)$ . Dilatons l'échelle de temps de cette fonction par un facteur réel  $k$ . La fonction devient  $f(kt)$ . Calculons la transformée de Laplace de cette version dilatée de  $f(t)$ , en appliquant le changement de variable  $w = kt$ .

$$F_k(p) = \mathcal{L}[f(kt)] = \int_{t_0}^{+\infty} f(kt) \exp(-pt) dt = \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{k} f(w) \exp\left(-\frac{p}{k}w\right) dw$$

$$F_k(p) = \frac{1}{k} \cdot F\left(\frac{p}{k}\right) \quad (2.12)$$

### 2.3.4 Translation dans le domaine fréquentiel

Un décalage d'une valeur  $p_1$  dans le domaine de Laplace conduit à une multiplication par  $e^{p_1 t}$  dans le domaine temporel.

$$\text{soit } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ alors } \mathcal{L}[e^{p_1 t} f(t)] = F(p - p_1) \quad (2.13)$$

Dans le domaine fréquentiel ( $\alpha = 0$ ), cela est équivalent à une translation du spectre. Ce procédé est bien connu en télécommunication, car il est utilisé pour moduler les signaux à transmettre.

### 2.3.5 Déivation dans le domaine temporel

Considérons le cas d'une fonction  $f(t)$  continue non nulle pour  $t > 0$ . La transformée de Laplace de la dérivée de cette fonction est donnée par :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p \cdot F(p) - f(0^+) \quad \text{avec } f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \quad (2.14)$$

On remarque que l'opérateur dérivée correspond à une multiplication de la transformée de Laplace par  $p$ . Cependant, il est nécessaire de tenir compte de la condition initiale  $f(0^+)$ .

Il est possible de généraliser cette relation au cas où l'on dérive  $N$  fois la fonction. L'expression devient :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0^+) - p^{n-2} \cdot \frac{df}{dt}(0^+) - \dots - p \frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}}(0^+) - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0^+) \quad (2.15)$$

Le calcul nécessite de connaître les conditions initiales non seulement sur la valeur de la fonction mais aussi pour ses  $(n-1)$  premières dérivées.

### 2.3.6 Déivation dans le domaine des fréquences complexes p

Dériver une fonction dans le domaine de Laplace revient à multiplier cette fonction par  $-t$  dans le domaine temporel.

$$\text{soit } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ alors } \mathcal{L}[-t \cdot f(t)] = \frac{dF(p)}{dp} \quad (2.16)$$

Cette propriété peut se généraliser au cas où l'on dérive  $N$  fois la fonction dans le domaine de Laplace, qui revient à multiplier la fonction temporelle par le terme  $(-t)^N$ .

$$\text{soit } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ alors } \mathcal{L}[-(t)^n \cdot f(t)] = \frac{dF^n(p)}{dp^n} \quad (2.17)$$

### 2.3.7 Intégration temporelle

Considérons le cas d'une fonction  $f(t)$  continue non nulle pour  $t > 0$ . La transformée de Laplace de son intégrale de 0 à  $t$  est donnée par :

$$\text{soit } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ alors } \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(p)}{p} \quad (2.18)$$

Cette propriété peut s'étendre au cas où on intègre N fois la fonction temporelle :

$$\text{soit } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \text{ alors } \mathcal{L}\left[\int \dots \int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(p)}{p^n} \quad (2.19)$$

### 2.3.8 Théorème de la valeur initiale

On considère une fonction  $f(t)$  continue non nulle pour  $t > 0$ . On peut montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) \quad (2.20)$$

### 2.3.9 Théorème de la valeur finale

De la même manière, on peut montrer que la fonction  $f(t)$  tend de manière asymptotique vers la valeur suivante :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (2.21)$$

Cette propriété, couplée à celle de l'intégration temporelle, permet aussi de calculer l'aire sous la courbe temporelle entre 0 et une valeur  $t > 0$  :

$$\int_{0^-}^t f(t)dt = F(0) \quad (2.22)$$

### 2.3.10 Multiplication et produit de convolution

Multiplication et produit de convolution (1.35) sont deux opérations complémentaires dans les domaines temporelles et de Laplace. On peut ainsi écrire les deux propriétés suivantes :

$$\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)] = F * G(p) \quad (2.23)$$

$$\mathcal{L}[f * g(t)] = F(p) \cdot G(p) \quad (2.24)$$

Avec cette dernière propriété, on retrouve la relation vue entre la fonction de transfert et la réponse impulsionale. Dans le domaine temporel, la réponse d'un système correspond au produit de convolution entre l'excitation et la réponse impulsionale. Avec une excitation exponentielle complexe, cette relation est équivalente au produit entre l'excitation exprimée dans le domaine de Laplace et la fonction de transfert, soit la transformée de Laplace de la réponse impulsionale.

### 2.3.11 Fonctions causales avec N répétitions

On considère une fonction  $f_1(t)$ , dite génératrice, que l'on répète N fois de manière périodique pour former une nouvelle fonction causale  $f(t)$ . La période est notée T. La fonction  $f(t)$  s'écrit :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f_1(t - kT)$$

On note  $F_1(p)$  la transformée de Laplace de la fonction génératrice. A partir du théorème du retard, on peut calculer la transformée de Laplace de la somme des N termes précédents.

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = F_1(p)(1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + \dots + e^{-(N-1)Tp})$$

On retrouve une série de N termes exponentiels mis à la puissance k, qui peut se simplifier selon la relation ci-dessous.

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = F_1(p) \frac{1 - e^{-(N-1)Tp}}{1 - e^{-Tp}} \quad (2.25)$$

### 2.3.12 Fonctions périodiques causales

La propriété précédente peut être réutilisée pour déterminer la transformée de Laplace d'une fonction causale périodique, de période T et générée à partir d'une fonction génératrice  $f_1(t)$ . La fonction périodique s'écrit :  $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_1(t - kT)$ .

On en déduit la transformée de Laplace de la fonction en remarquant que  $|e^{-kTp}| < 1$  car la partie réelle de p est positive pour garantir la convergence.

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \lim_{N \rightarrow +\infty} F_1(p) \frac{1 - e^{-(N-1)Tp}}{1 - e^{-Tp}} = F_1(p) \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \quad (2.26)$$

Toute fonction exprimée dans le domaine de Laplace où apparaît le terme  $\frac{1}{1 - e^{-Tp}}$  correspond à la transformée de Laplace d'une fonction périodique de période T.

## 2.4 Transformée de Laplace des fonctions courantes

Le tableau 2.1 donne la transformée de Laplace des fonctions causales les plus courantes, et pour lesquelles des formes mathématiques simples existent. Pour la plupart, aucune démonstration n'est donnée, mais les transformées peuvent être retrouvées. Nous nous limiterons à deux exemples de mise en forme de la transformée de Laplace pour deux formes temporelles courantes, sachant que nous avons déjà vu celle d'une fonction exponentielle.

Exemple 1 : échelon unitaire  $f(t) = u(t)$

$$F(p) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp(-pt) dt = \int_0^{+\infty} \exp(-pt) dt = \left[ -\frac{\exp(pt)}{p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

Exemple 2 : fonction cosinusoidale

$$f(t) = \cos(\omega t)u(t)$$

$$\begin{aligned} F(p) &= \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t)u(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(j\omega t) + \exp(-j\omega t)}{2} dt \\ F(p) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\exp((j\omega - p)t) + \exp(-(j\omega + p)t)) dt = \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{\exp((j\omega - p)t)}{j\omega - p} \right]_0^{+\infty} - \left[ \frac{\exp((j\omega + p)t)}{j\omega + p} \right]_0^{+\infty} \right) \end{aligned}$$

$$F(p) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{j\omega - p} + \frac{1}{j\omega + p} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (2.27)$$

Tableau récapitulatif des transformées de Laplace :

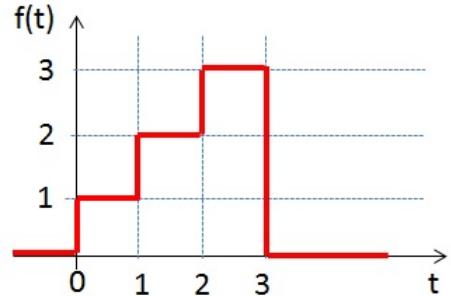
TABLE 2.1 – Tableau récapitulatif des transformées de Laplace usuelles

Fonctions temporelles $f(t)$	Transformée de Laplace $F(p)$
Echelon unitaire $u(t)$	$\frac{1}{p}$
Fonction rampe $f(t) = t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
Fonction rampe polynomiale $f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{p^n}$
Fonction exponentielle $f(t) = e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$f(t) = te^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
$f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^n}$
Fonction cosinus $f(t) = \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
Fonction sinus $f(t) = \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
Fonction cosinus amorti $f(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$
Fonction rampe limitée $f(t) = \begin{cases} A \frac{t}{\tau} u(t), & \text{si } t \leq \tau \\ A \cdot u(t) & \end{cases}$	$A \frac{1 - e^{-p\tau}}{p^2 \tau}$

A partir de cette table, il est possible de dériver les transformées de Laplace pour d'autres fonctions temporelles. En effet, il suffit d'identifier des formes dont la transformée de Laplace est connue et utiliser les différentes propriétés de la transformée pour en déduire l'expression de la transformée de Laplace.

### Exemple :

Soit la fonction temporelle  $f(t)$  dont l'évolution temporelle est présentée ci-contre. Déterminez la transformée de Laplace de cette fonction.



La fonction discontinue ci-dessus peut être exprimée sous la forme d'une somme de fonctions échelons. En repérant les instants de transition et les amplitudes des paliers, celle-ci s'écrit :  $f(t) = u(t) + u(t-1) + u(t-2) - 3u(t-3)$ . La transformée de Laplace étant linéaire, la transformée de Laplace de  $f(t)$  sera la somme des transformées de chaque terme de l'expression de  $f(t)$ . En identifiant la transformée de Laplace de la fonction échelon et en appliquant le théorème du retard, on détermine l'expression de la transformée de Laplace de  $f(t)$  :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t)] + \mathcal{L}[u(t-1)] + \mathcal{L}[u(t-2)] - 3\mathcal{L}[u(t-3)]$$

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} - 3\frac{e^{-3p}}{p}$$

## 2.5 Transformée de Laplace inverse

Du point de vue pratique, le but de la transformée de Laplace est de fournir un outil simple pour le calcul des réponses temporelles des systèmes linéaires. Elle permet de calculer la représentation

fréquentielle d'une fonction à partir de sa représentation dans le domaine temporel. Dans le domaine fréquentiel, le calcul de la réponse du système est facilité en passant par la fonction de transfert. Cependant, si nous ne disposons pas d'une transformation mathématique permettant de réaliser le passage inverse, cette approche perd de son intérêt. Fort heureusement, cet outil existe. Il s'agit de la transformée de Laplace inverse, que nous allons rapidement présenter. Elle permet de transformer une fonction définie dans le domaine des fréquences complexes  $p$  en une fonction définie dans le domaine temporel. Nous la noterons  $\mathcal{L}^{-1}$ . Comme la transformée de Laplace, la transformée de Laplace inverse est une fonction linéaire.

### 2.5.1 Méthode pratique d'utilisation

La transformée de Laplace inverse est donnée par la formule de Bromwich-Mellin , où  $\sigma$  est choisi pour que l'intégrale converge.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) \exp(pt) dp \quad (2.28)$$

Dans la pratique, cette formule est difficile à mettre en œuvre car elle nécessite de calculer une intégrale dans le plan complexe. Ceci dépasse le cadre de ce cours et nous n'effectuerons pas de calcul de cette transformée. Dans ce cours, nous privilégierons la méthode utilisée en pratique, basée sur les tables reliant des fonctions courantes et leur transformée de Laplace, comme le tableau 2.1. Il s'agit de rechercher des paires de transformées. A partir de la fonction  $F(p)$ , on identifie des fonctions connues et on déduit la fonction temporelle correspondante. Dans le cas de fonctions compliquées, le calcul de la forme temporelle passe par des approches basées sur le calcul numérique, non détaillées ici. Dans de nombreux cas pratiques, les expressions des transformées de Laplace peuvent être données sous la forme d'une fraction rationnelle, pour laquelle on ne dispose pas directement de la fonction temporelle correspondante. Il est nécessaire de transformer d'abord l'expression de la transformée de Laplace avant d'identifier des formes courantes. On utilisera notamment une technique de décomposition en pôles et en résidus.

### 2.5.2 Décomposition pôles-résidus

Comme nous l'avons dans la partie II.3, la plupart des transformées de Laplace peuvent être mises sous la forme d'une fonction rationnelle, rapport de deux polynômes faisant apparaître leurs racines (pôles et zéros). Cependant, il n'existe sans doute pas une paire de transformées simples pour toutes les fonctions rationnelles. Pour appliquer la méthode précédente, il est nécessaire de décomposer cette fonction rationnelle en éléments plus simples, dont on connaît la paire de transformées. Il est possible de montrer que toute fonction rationnelle de deux polynômes peut s'écrire sous la forme d'une somme d'éléments simples, appelées fractions partielles ne dépendant que des pôles et de constantes appelées résidus. Cette décomposition s'appelle la décomposition pôles-résidus, dont la forme est illustrée par 2.29. Cette décomposition ne fonctionne qu'avec des fractions dites "propres" pour lesquelles le nombre  $n$  de pôles est supérieur ou égal au nombre  $m$  de zéros. Dans ce cas, la fraction rationnelle peut se décomposer en  $n$  termes dont il faut déterminer les résidus  $A_n$ .

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = A \frac{(p - p_{z_m}) \dots (p - p_{z_1})}{(p - p_{p_n}) \dots (p - p_{p_1})} = \frac{A_1}{p - p_{p_1}} + \frac{A_2}{p - p_{p_2}} + \dots + \frac{A_n}{p - p_{p_n}} \quad (2.29)$$

On voit immédiatement l'intérêt de cette approche car on remarque qu'on identifie immédiatement la paire de transformée simple. En effet, la transformée de Laplace inverse de la fraction partielle est une fonction exponentielle, dépendante du pôle.

**Cas d'une fraction impropre ( $n < m$ ) :**

Avant de voir comment réaliser cette décomposition pôles-résidus, traitons d'abord le cas des fractions impréises (plus de zéros que de pôles). La décomposition pôles-résidus n'est pas directe. Il est cependant possible d'exprimer cette fraction impropre comme la somme d'un terme (qui ne sera pas une fraction) et d'une fraction propre (2.30). Il est indispensable que le premier terme ait une transformée de Laplace inverse connue.

$$\frac{N(p)}{D(p)} = Q(p) + \frac{R(p)}{D(p)}, \text{ si } n < m \quad (2.30)$$

$Q(p)$  n'est rien d'autre que le quotient de la division entre  $N(p)$  et  $D(p)$ , tandis que  $R(p)$  est le reste. Cette décomposition consiste donc à faire une division entre deux polynômes. Illustrons-le par un exemple.

Exemple : décomposer la fonction  $\frac{2p^3+p^2-4p}{p^2+p-2}$  pour faire apparaître une fraction propre.

La division est décrite ci-dessous. Elle s'effectue comme suit : on identifie chaque terme du quotient afin d'éliminer le terme de plus haut degré du numérateur. Par exemple, le terme de plus haut degré de  $Q(p)$ ,  $2p$ , est choisi de manière à éliminer  $2p^3$  du numérateur. Comme il ne reste plus que  $p^2$ , le prochain terme de  $Q(p)$  est  $-1$ . Le calcul s'arrête ensuite. On a déterminé  $Q(p)$  et  $R(p)$ .

$$\begin{array}{r} N(p) = \frac{2p^3 + p^2 - 4p}{p^2 + p - 2} \\ \qquad - (2p^3 + 2p^2 - 4p) \\ \hline \qquad \qquad - p^2 \\ \qquad \qquad - (-p^2 - p + 2) \\ \hline \qquad \qquad \qquad R(p) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} p^2 + p - 2 = D(p) \\ 2p - 1 \\ Q(p) \\ p - 2 \end{array} \right.$$

On peut donc écrire  $\frac{2p^3+p^2-4p}{p^2+p-2} = (2p-1) + \frac{p-2}{p^2+p-2} = Q(p) + \frac{R(p)}{D(p)}$ . Le terme  $\frac{R(p)}{D(p)}$  est une fraction propre, tandis qu'on peut associer à  $Q(p)$  une transformée de Fourier simple, en l'occurrence  $2tu(t) - \delta(t)$  (voir tableau 2.1).

Nous considérons maintenant que nous disposons d'une fraction propre. Voyons comment effectuer facilement la décomposition pôles-résidus. Un préalable consiste à disposer des zéros et des pôles de la fonction rationnelle, afin de pouvoir écrire l'égalité de l'équation 2.30. Il existe plusieurs méthodes de décomposition pôles-résidus, nous n'en mentionnerons que deux.

**Association des fractions partielles**

La première méthode consiste à partir de la forme en fractions partielles, puis de les associer pour revenir à la forme initiale de la fonction rationnelle, mais exprimée avec les résidus. On obtient ainsi  $n$  équations où les  $n$  inconnues sont les résidus. Prenons l'exemple suivant, où les pôles sont égaux à 1 et -2 :

$$\frac{p-2}{p^2+p-2} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+2}$$

On cherche les résidus  $A$  et  $B$ . En les associant, on obtient  $\frac{p-2}{p^2+p-2} = \frac{A(p+2)+B(p-1)}{p^2+p-2} = \frac{(A+B)p+(2A-B)}{p^2+p-2}$ . On détermine les résidus en résolvant le système d'équations suivants :

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - B = -2 \end{cases}$$

On trouve les solutions suivantes :  $A = -\frac{1}{3}$  et  $B = \frac{4}{3}$ . Cette approche simple peut devenir fastidieuse lorsque le nombre de pôles s'accroît.

### Méthode du cache

Une méthode alternative est la méthode du cache. Elle consiste à annuler un pôle pour déterminer le résidu associé, et répéter l'opération pour chaque pôle. Par exemple, supposons que l'on cherche le résidu  $A_i$  associé au pôle  $p_{pi}$ . On multiplie la fraction par  $(p - p_{pi})$ . Dans la fraction rationnelle, l'effet du pôle va disparaître. En prenant  $p = p_{pi}$ , on fera disparaître les autres fractions partielles et on isolera ainsi le résidu  $A_i$ . Pour l'illustrer, reprenons l'exemple précédent :

$$\frac{p-2}{p^2+p-2} = \frac{p-2}{(p-1)(p+2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+2}$$

Commençons par déterminer le résidu A associé au pôle  $p=1$ . On multiplie la fraction rationnelle par  $(p-1)$  et on obtient :

$$\frac{p-2}{(p+2)} = A + \frac{B(p-1)}{p+2}$$

En fixant  $p = 1$ , on détermine  $A = \frac{1-2}{(1+2)} = -\frac{1}{3}$ . On répète l'opération pour déterminer l'autre résidu associé au pôle  $p=-2$ . On multiplie la fraction rationnelle par  $(p+2)$  et on obtient :

$$\frac{p-2}{(p-1)} = \frac{A(p+2)}{p-1} + B$$

En fixant  $p = -2$ , on détermine  $A = \frac{-2-2}{(-2-1)} = \frac{4}{3}$ . La décomposition pôles-résidus s'écrit donc :

$$\frac{p-2}{p^2+p-2} = \frac{-1}{3(p-1)} + \frac{4}{3(p+2)}$$

Sous cette forme, on identifie facilement la transformée de Laplace inverse, qui est égale à  $(-\frac{1}{3}e^t + \frac{4}{3}e^{-2t})u(t)$ .

## 2.6 Applications

Nous allons présenter deux applications où l'utilisation de la transformée de Laplace et de son inverse trouve tout leur intérêt :

- la résolution d'équations différentielles
- le calcul de la réponse transitoire de systèmes linéaires

### 2.6.1 Résolution d'équations différentielles ordinaires

La transformée de Laplace constitue un outil puissant de résolution des équations différentielles ordinaires, qui ne dépendent que d'une variable. De manière générale, elles peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$L[t, x(t)] = f(t) \tag{2.31}$$

où  $x(t)$  est l'inconnue,  $L$  un opérateur linéaire quelconque (superposition des effets d'opérateurs proportionnels, intégrateurs et différentiateurs) et  $f(t)$  une fonction quelconque. Dans le domaine des fréquences complexes, l'effet d'une dérivée et d'une intégration se résument à une multiplication et une division par la fréquence  $p$ . Ainsi, en passant dans le domaine fréquentiel, l'équation différentielle se transforme en une simple équation algébrique. En isolant le terme  $X(p)$  et en utilisant la transformée de Laplace inverse (à condition qu'elle existe), on pourra déterminer la solution  $x(t)$  de l'équation.

**Exemple :**

soit l'équation différentielle suivante :  $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$ , où  $y(t)$  est une fonction causale. On a les conditions initiales suivantes :  $y(0^+) = 1$  et  $y'(0^+) = -2$ . Résoudre l'équation différentielle.

A l'aide du théorème de la dérivation, l'équation différentielle peut être exprimée dans le domaine de Laplace.

$$p^2Y(p) - py(0^+) - y'(0^+) + 4(pY(p) - y(0^+)) + 4Y(p) = 0$$

En isolant  $Y(p)$  et en intégrant les valeurs des conditions initiales, on détermine l'expression de la solution  $Y(p)$  dans le domaine de Laplace.

$$(p^2 + 4p + 4)Y(p) = y'(0^+) + (p + 4)y(0^+)$$

$$Y(p) = \frac{y'(0^+) + (p + 4)y(0^+)}{p^2 + 4p + 4} = \frac{p + 2}{(p + 2)^2} = \frac{1}{p + 2}$$

On identifie sans difficulté la fonction temporelle associée à cette transformée de Laplace à l'aide du tableau 2.1.

$$y(t) = \mathcal{L}[Y(p)] = e^{-2t}u(t)$$

On vérifie que cette solution satisfait bien aux conditions initiales fixées et est une solution de l'équation différentielle.

### 2.6.2 Calcul de la réponse transitoire d'un système linéaire

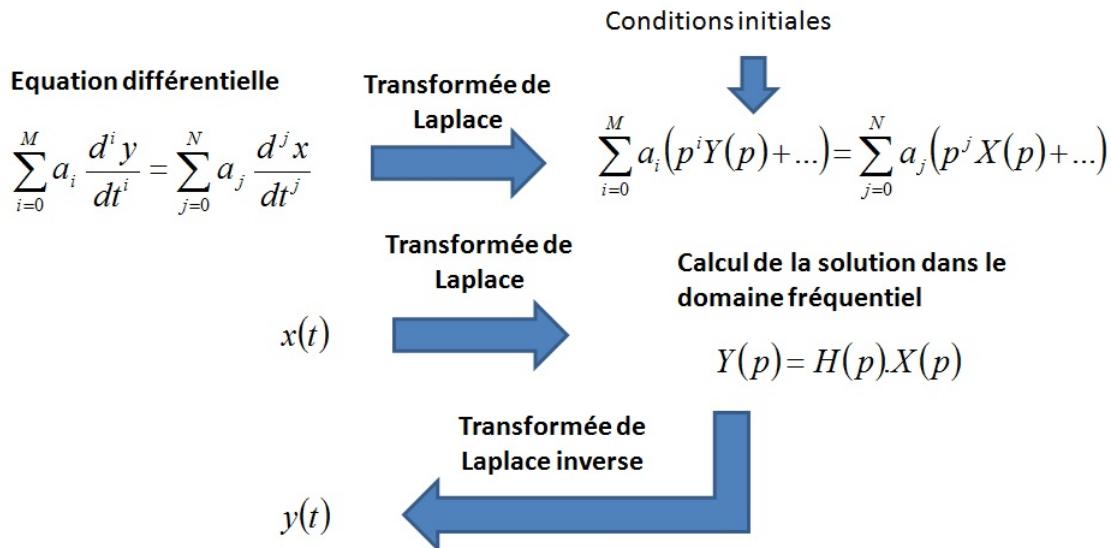


FIGURE 2.4 – Méthodologie de résolution d'une équation différentielle ordinaire basée sur la transformée de Laplace

Comme nous l'avons vu avec l'équation générale du système linéaire (??), le comportement transitoire d'un système est dicté par une équation différentielle. Déterminer la réponse temporelle à une excitation donnée revient à résoudre cette équation différentielle. Le problème est donc équivalent au précédent et la transformée de Laplace constitue encore un outil de résolution

adapté à ce genre de problème. Supposons que nous disposons de la fonction de transfert  $H(p)$  du système et que l'on recherche la réponse  $y(t)$  à une excitation  $x(t)$  dont l'expression est donnée. La première étape consiste à déterminer la transformée de Laplace  $X(p)$  de l'excitation. La réponse du système dans le domaine fréquentiel  $Y(p)$  est directement le produit de la fonction de transfert et de l'excitation  $X(p)$ . Ensuite, la transformée de Laplace inverse de  $Y(p)$  permet de retrouver l'expression de la réponse temporelle  $y(t)$ . Il est bien entendu indispensable de prendre en compte les conditions initiales du système, qui vont intervenir dans la réponse naturelle du système. Si l'expression de la fonction de transfert ne les intègre pas, il est indispensable de repartir de l'équation différentielle décrivant le système et établir la fonction de transfert en intégrant l'effet des conditions initiales. La méthodologie de calcul est résumée à la figure 2.4.

### Exemple : réponse d'un circuit RC à un échelon

On reprend l'exemple du circuit RC (passe haut) vu dans le chapitre précédent, pour lequel nous avons calculé la réponse harmonique. Le circuit est présenté ci-dessous. On considère qu'il est excité par un échelon d'amplitude  $E$  en  $t = 0$ , et que le condensateur est initialement chargé (la tension initiale à ses bornes est notée  $U_{C0}$ ). On souhaite déterminer la réponse du circuit, correspondant à la tension aux bornes de la résistance.

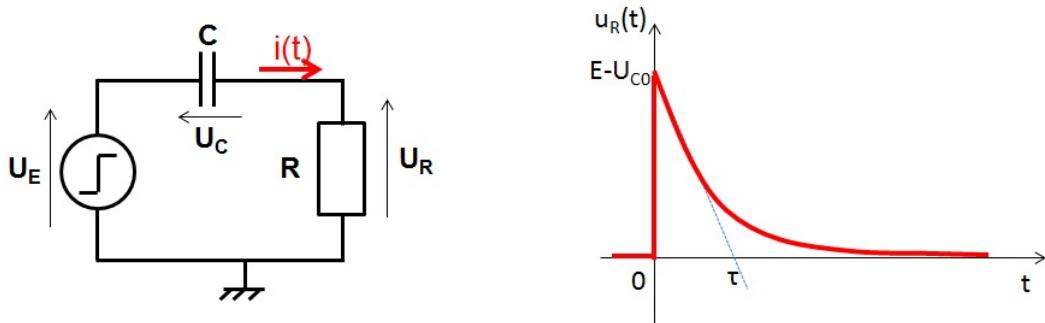


FIGURE 2.5 – Circuit RC étudié (à gauche) et réponse à un échelon (à droite)

L'excitation du circuit s'écrit :  $u_E(t) = Eu(t)$ . Dans le domaine de Laplace, elle s'exprime :  $U_E(p) = \frac{A}{p}$ . Dans le chapitre précédent, nous avions déterminé l'équation différentielle liant l'excitation et la réponse du circuit. Nous allons la reprendre pour déterminer non seulement la fonction de transfert du circuit, mais aussi intégrer la condition initiale sur la charge du condensateur. On note  $\tau = RC$  la constante de temps du circuit.

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{U_R}{RC} + \frac{dU_R}{dt} = \frac{U_R}{\tau} + \frac{dU_R}{dt} \quad (2.32)$$

Le passage dans le domaine de Laplace de cette équation différentielle donne :

$$pU_E(p) - U_E(0^+) = \frac{U_R(t)}{\tau} + pU_R(p) - U_R(0^+)$$

$$(p + \frac{1}{\tau})U_R(p) + U_E(0^+) - U_R(0^+) = pU_E(p)$$

En remarquant que  $U_E(0^+) - U_R(0^+)$  est équivalent à la tension initiale  $U_C(0^+) = U_{C0}$  aux bornes du condensateur, l'équation s'écrit sous la forme ci-dessous. Le premier terme correspond à l'effet de l'excitation "filtré" par la fonction de transfert du circuit. Le second terme est lié à la présence d'une charge initiale aux bornes du condensateur.

$$U_R(p) = \frac{p}{p + \frac{1}{\tau}}U_E(p) - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}U_C(0^+) = H(p)U_E(p) - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}U_{C0}$$

En intégrant l'expression de l'excitation, puis en effectuant la transformée de Laplace inverse, on détermine la réponse du circuit (2.33). Son tracé est présenté à la figure 2.5.

$$u_R(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)U_E(p)] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}U_{C0}\right]$$

$$u_R(t) = E\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}\right] - U_{C0}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}\right]$$

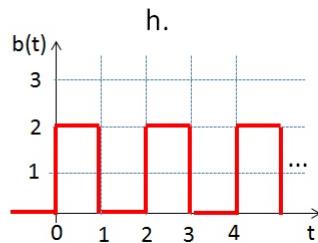
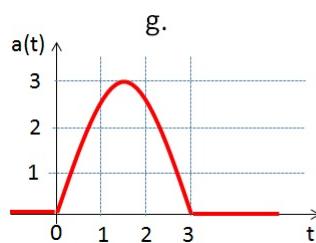
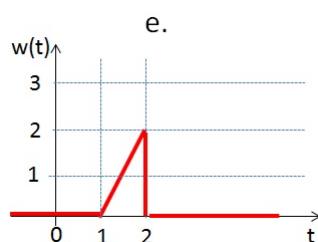
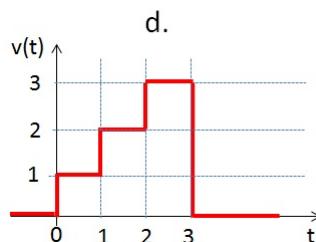
$$u_R(t) = (E - U_{C0})e^{-\frac{t}{\tau}}u(t) = (E - U_{C0})e^{-\frac{t}{RC}}u(t) \quad (2.33)$$

## 2.7 Exercices

### Exercice 1

Déterminez les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

- a.  $x(t) = e^{-2t}u(t - 1)$
- b.  $y(t) = e^{-2(t-1)}u(t - 1)$
- c.  $z(t) = \sqrt{2}\cos(t + \frac{\pi}{4})$



### Exercice 2

Déterminez les expressions temporelles des fonctions suivantes :

- a.  $X(p) = \frac{p-4}{p^2+16}$
- b.  $Y(p) = \frac{p^2+3p+3-\frac{6}{p}}{p^2}$
- c.  $Z(p) = \frac{p^2+4p+4}{p^2+2p+2}$
- d.  $W(p) = \frac{p-1+e^{-p}}{p^2(1-e^{-p})}$ . Tracez cette fonction.

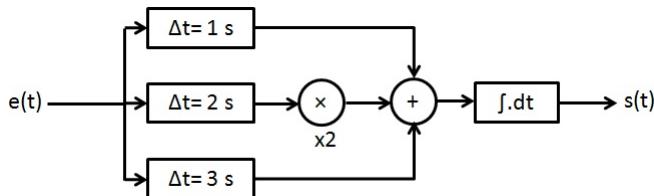
**Exercice 3**

Résoudre les équation différentielles suivantes :

- $x'' + 2x' + x = e^{-t}u(t)$ , avec  $x(0) = 0$  et  $x'(0) = 0$ .
- $x'' + 6x' + 8x = \delta(t)$  avec  $x(0)=1$  et  $x'(0)=3$ .

**Exercice 4**

On reprend l'exercice 8 du chapitre 2.



- Ecrivez la fonction de transfert du système dans le domaine de Laplace.
- Calculez la réponse indicielle du système. On supposera que les conditions initiales de tous les nœuds internes du système sont nulles.

**Exercice 5**

On considère un circuit électrique, dont le courant  $i(t)$  est donné par l'équation ci-dessous.

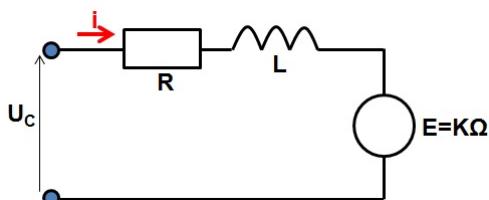
$$e(t) = \frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 10i(t)$$

On considère l'excitation suivante  $e(t) = 6e^{-3t}u(t)$ . Les conditions initiales du circuit sont :  $i(0) = 3 A$  et  $\frac{di}{dt}(0) = 3 A/s$ .

- Etablir l'expression du courant dans le domaine de Laplace.
- En déduire l'expression temporelle du courant  $i(t)$ .
- Vérifiez, en utilisant les expressions du courant dans le domaine de Laplace, puis dans le domaine temporel, que la condition initiale du courant est respectée. Déterminez ensuite les conditions finales.

**Exercice 6 - Réponse d'un moteur à courant continu à aimants permanents**

Le fonctionnement d'un moteur est gouverné par un modèle électromécanique, se présentant sous la forme de plusieurs équations différentielles reliant grandeurs électriques et mécaniques. Dans cet exercice, nous allons étudier le modèle simplifié d'un moteur à courant continu à aimants permanents. La figure ci-dessous présente le modèle électrique équivalent de l'induit. Celui-ci est modélisé par un circuit RL et est excité par une tension de commande notée  $U_C$ . Lorsque le moteur tourne, une force contre électromotrice (fcem)  $E$  est induite, qui est proportionnelle à la vitesse angulaire du moteur  $\Omega$ . Le courant  $i$  circulant dans l'induit produit un couple moteur  $C_m$ , selon la



même constante de proportionnalité  $K$  que celle liant la f<sub>cem</sub> et la vitesse de rotation du moteur. A ce couple moteur s'opposent plusieurs sources de couples résistants  $C_R$  :

- l'inertie du moteur, donnée par le moment d'inertie  $J$
- les frottements visqueux, caractérisés par le coefficient de frottement visqueux  $f$

L'équation mécanique du moteur s'écrit alors :

$$C_m = C_R = J \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega$$

Nous cherchons à déterminer la vitesse de rotation du moteur en fonction de l'excitation appliquée. Dans cet exercice, on considérera les valeurs suivantes :  $r=0.2 \Omega$ ,  $L = 0.2 \text{ mH}$ ,  $K = 0.057 \text{ N.m/A}$ ,  $J = 650.10^{-7} \text{ kg.m}^2$ ,  $f = 2.3.10^{-5} \text{ N.m/rad.s}^{-1}$ . On suppose que le moteur est initialement à l'arrêt.

- a. Etablir l'équation différentielle reliant la vitesse de rotation et l'excitation  $U_C$  du moteur.
- b. Déterminez la fonction de transfert du moteur dans le domaine de Laplace. Exprimez-la sous la forme  $\frac{G}{p^2+2\alpha p+\omega_0^2}$ .
- c. Calculez les pôles du système. Est-il stable ?
- d. En  $t = 0$ , on applique une commande de type échelon unitaire d'amplitude  $U_{c0} = 10 \text{ V}$ . Déterminez l'expression du profil temporel de la vitesse angulaire.
- e. Esquissez le profil temporel de la vitesse angulaire. En régime permanent, quelle est la valeur de la vitesse ?





### 3. Filtrage

Un filtre est un dispositif visant à modifier le contenu fréquentiel d'un signal. Une utilisation courante est de supprimer d'un signal des composantes fréquentielles indésirables (ou, inversement, d'extraire de ce signal certaines composantes utiles). La figure 3.1 illustre ce type d'utilisation. Le graphique à gauche présente un signal digital corrompu par un bruit aléatoire important. La présence de ce bruit est indésirable, car il risque de corrompre l'interprétation de ce signal. Afin d'éviter toute erreur de décodage de ce signal, un filtre doit être synthétisé pour supprimer ce bruit, sans trop affecter le signal utile. L'utilisation d'un filtre est possible si le signal utile et le bruit occupent des bandes de fréquence différentes. Un outil d'analyse du signal, comme la transformée de Fourier que nous aborderons dans le prochain chapitre, permet de déterminer l'occupation fréquentielle des signaux.

Dans l'exemple ci-dessous, le signal utile à une fréquence de 2.5 Hz. Le spectre du signal bruité est présenté à la figure 3.2. Le spectre du signal utile se situe principalement en dessous de 100 Hz. Le bruit est large bande, mais présente quatre composantes spectrales importantes au-dessus de 100 Hz. Pour éliminer ce bruit, on dimensionne un filtre passe-bas d'ordre 2 avec une fréquence de coupure de 100 Hz. L'effet de ce filtre sur le signal est présenté sur la partie droite de la figure 3.1. La présence du bruit n'est quasiment plus discernable. Comme le confirme le spectre du signal filtré (3.2), le filtre a fortement atténué le spectre au-dessus de 100 Hz. On peut remarquer que le filtre affecte aussi la forme du signal utile, mais cet effet reste négligeable et ne contribuera pas à une erreur d'interprétation du signal.

Ce chapitre est dédié au filtre linéaire à temps invariant et leur analyse en régime harmonique. Les filtres n'ont aucune différence par rapport aux systèmes LTI vues précédemment. La différence vient de leur utilisation, qui nécessite une analyse dans le domaine fréquentiel. La connaissance de la fonction de transfert du filtre est donc centrale. En régime harmonique, nous la noterons  $H(\omega)$  ou  $H(f)$ .

Dans ce chapitre, nous présenterons les outils et les termes usuels permettant de caractériser les filtres. Nous introduirons un outil d'analyse graphique : le diagramme de Bode et son tracé asymptotique.

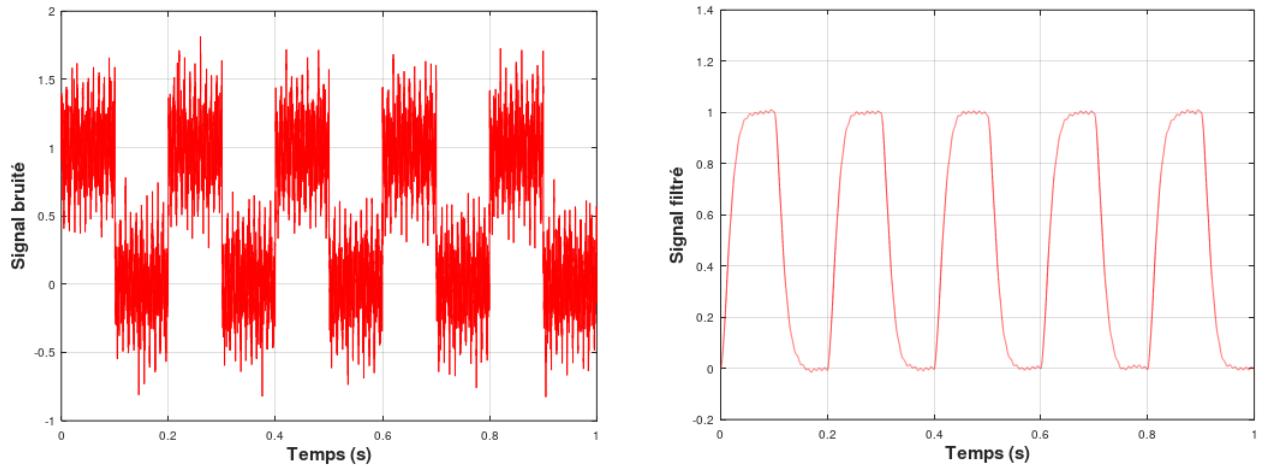


FIGURE 3.1 – Effet du filtre sur un signal bruité : signal bruité (à gauche) et filtré (à droite)

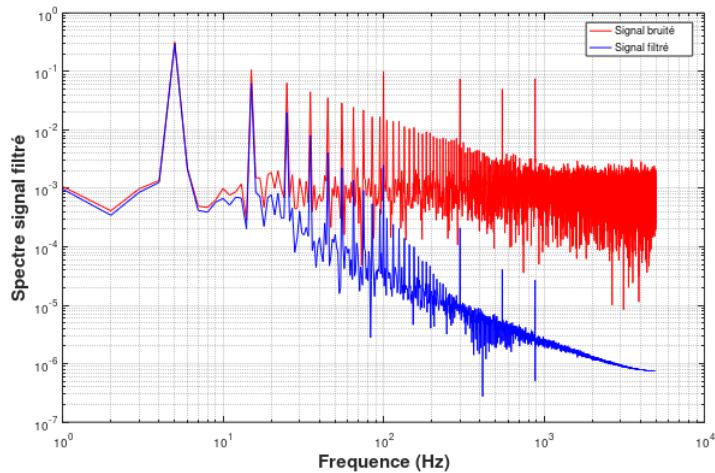


FIGURE 3.2 – Spectre du signal bruité et filtré

### 3.1 Définition d'un filtre

#### 3.1.1 Définition

Un filtre est un système, généralement passif, présentant une certaine sélectivité dans le domaine des fréquences. Il est utilisé pour atténuer (ou au contraire laisser passer) le signal sur une ou plusieurs bandes de fréquences. Il atténue ainsi certaines des composantes fréquentielles du signal d'entrée et en laisse passer d'autres, d'où son appellation de filtre ! C'est bien cette opération sélective d'atténuation ou d'amplification des fréquences que modélise la multiplication de l'excitation par la fonction de transfert.

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \quad (3.1)$$

Une manière pratique d'étudier un filtre est de l'analyser en régime harmonique, donc dans le domaine fréquentiel. Pour mettre en évidence l'effet du filtre, la fonction de transfert peut être écrite sous la forme module-argument :

$$H(f) = |H(f)| \exp(j \arg(H(f))) \quad (3.2)$$

Le module correspond au gain du filtre, c'est-à-dire le rapport entre les amplitudes de la réponse du filtre et de son excitation. Si le module est important, alors le signal d'entrée est faiblement atténué voire amplifié. Sinon, il est filtré. Si les signaux d'entrée et de sortie représentent le même type de grandeur (par exemple, une tension dans le cas de signaux électriques), le gain est sans unité.

L'argument correspond au déphasage apporté par le filtre. Celui-ci traduit un retard  $\tau_p$  introduit par le filtre à la fréquence  $f$ , déterminé par l'équation ???. Il caractérise le retard apporté par le filtre sur chaque composante fréquentielle du signal et on parle de retard de phase. Un autre terme de retard courant pour caractériser les filtres est le retard de groupe  $\tau_g$ . Par groupe, on entend un groupe de composantes fréquentielles, de fréquences proches, formant le signal qui va traverser le filtre. Chaque composante sera retardé individuellement selon l'argument de la fonction de transfert et la fréquence. Cependant, l'enveloppe du signal, résultante de l'ensemble des composantes fréquentielles présentes, sera affectée par le retard de groupe. Celui-ci est défini par ???. Il dépend de la dérivée fréquentielle de l'argument de la fonction de transfert.

$$\tau = \frac{d(\text{Arg}(H(f)))}{2\pi df} \quad (3.3)$$

### Filtre à phase linéaire

On remarque une propriété intéressante : soit un signal constitué de la superposition de plusieurs signaux sinusoïdaux, traversant un filtre présentant un déphasage variable en fonction de la fréquence. Même si le gain est le même à ces différentes fréquences, si le retard introduit par le filtre varie avec la fréquence, alors le signal en sortie présentera une distorsion. Ceci démontre qu'il ne faut pas négliger l'information de phase d'un filtre. Pour éviter cette distorsion, il est nécessaire que le retard soit constant. D'après 3.3, cela est vérifié uniquement si le déphasage varie linéairement avec la fréquence. On parle alors de filtres à phase linéaire.

On peut aussi remarquer qu'un filtre présentant un déphasage constant quelle que soit la fréquence ne doit pas être réalisable en pratique. En effet, celui-ci ne présenterait aucun retard. La sortie changerait simultanément avec l'entrée, ce qui est physiquement impossible.

### 3.1.2 Filtre à réponse impulsionnelle réelle

Considérons le cas particulier, mais pratique, où la réponse impulsionnelle est une fonction réelle :  $\forall t \in \mathbb{R}, h(t) \in \mathbb{R}$ . Une réponse temporelle prenant des valeurs complexes n'aurait pas directement de sens physique ! On peut alors appliquer la propriété suivante de la Transformée de Fourier : la Transformée de Fourier d'une fonction réelle est une fonction en général complexe mais admettant une symétrie conjuguée :  $\forall f \in \mathbb{R}, H^*(f) = H(-f)$ , c'est-à-dire dont le module est une fonction paire tandis que l'argument est une fonction impaire, comme le montre l'équation ci-dessous.

$$\forall f \in \mathbb{R}, |H(f)| = |H(-f)| \text{ et } \arg(H(f)) = -\arg(H(-f)) \quad (3.4)$$

### 3.1.3 Fréquence négative

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, la fréquence est une grandeur réelle pouvant être négative. En raison de propriétés de symétries introduites par la transformée de Fourier pour les fonctions réelles, les représentations que nous utiliserons dans ce chapitre ne font

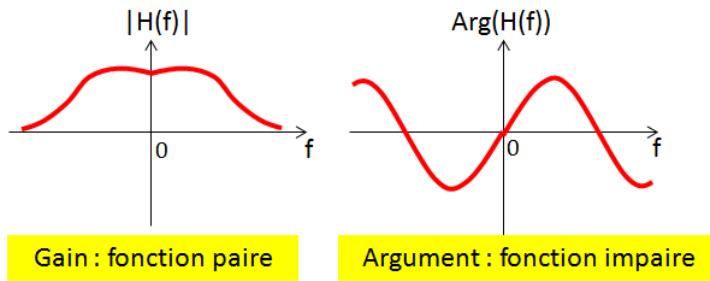


FIGURE 3.3 – Symétries du module et de l'argument d'un filtre réel

apparaître que les fréquences positives. Les fréquences négatives sont omises par convention parce qu'elles n'apportent pas d'informations supplémentaires : le gain est une fonction paire tandis que le déphasage est une fonction impaire.

La notion de basse ou de haute fréquence ne s'attache qu'à la valeur absolue de la fréquence considérée : seules les fréquences positives  $f$  appartenant à  $\mathbb{R}^+$  ont un sens physique ; les fréquences négatives  $f$  appartenant à  $\mathbb{R}^-$  n'ont pas de signification physique directe, mais leur prise en compte assure une utilisation correcte de l'analyse harmonique comme outil d'étude des filtres.

Ainsi, la convention pratique veut que le tracé des caractéristiques des gains et déphasage des filtres (diagramme de Bode), la définition des fréquences de coupure et des bandes passantes soient uniquement donnés dans le domaine des fréquences positives. Ils existent aussi pour les fréquences négatives, mais sont obtenus facilement par symétrie.

## 3.2 Analyse harmonique

A partir de la connaissance du gain et du déphasage de la fonction de transfert, lorsque le filtre est attaqué par un signal (co)sinusoidal, il est très simple de déterminer l'expression de sa réponse. En considérant une notation complexe, la réponse temporelle du filtre en régime harmonique est donnée par :

$$x(t) = \operatorname{Re}[X_0 \exp(j\Phi_x) \exp(j2\pi ft)] \Rightarrow y(t) = \operatorname{Re}[X_0 |H(f)| \exp(j(\Phi_x + \arg(H(f)))) \exp(j2\pi ft)] \quad (3.5)$$

Celle-ci peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$x(t) = X_0 \cos(2\pi ft + \Phi_x) \Rightarrow y(t) = X_0 |H(f)| \cos(2\pi ft + \Phi_x + \arg(H(f))) \quad (3.6)$$

## 3.3 Représentation - Diagramme de Bode

### 3.3.1 Diagramme de Bode

En régime harmonique, l'étude d'un filtre passe par une analyse de son gain et de son déphasage. Il faut donc chercher une représentation graphique adaptée à l'analyse du comportement fréquentiel du filtre. La méthode la plus courante est le tracé du diagramme de Bode. Il contient deux tracés graphiques décrivant :

- l'évolution du gain en fonction de la fréquence
- l'évolution du déphasage en fonction de la fréquence

Bien qu'il n'existe pas une forme de représentation unique du diagramme de Bode, certains usages sont récurrents et il convient de les expliquer. Pour des raisons pratiques, l'axe fréquentiel

est généralement tracé en échelle logarithmique. En général, on s'intéresse au comportement fréquentiel sur une large gamme de fréquence, couvrant plusieurs décades. Un tracé avec une échelle linéaire offre une résolution constante, qui cache les détails dans les basses fréquences. Avec un tracé en échelle logarithmique, la résolution varie en fonction de la fréquence et s'adapte à chaque décade. Le même niveau de détail peut être apprécié en basse ou en haute fréquence. C'est ce qu'illustre la figure 3.4 : le filtre étudié est de type passe-bas, c'est-à-dire qu'il laisse passer les signaux basses fréquences. Le tracé est réalisé entre 100 Hz et 1 MHz. Avec l'échelle linéaire, le tracé ne permet pas d'évaluer précisément à partir de quelle fréquence le filtre commence à atténuer significativement le signal d'entrée. Avec l'échelle logarithmique, on peut mieux évaluer cette fréquence, appelée fréquence de coupure, qui se situe aux alentours de 1 kHz.

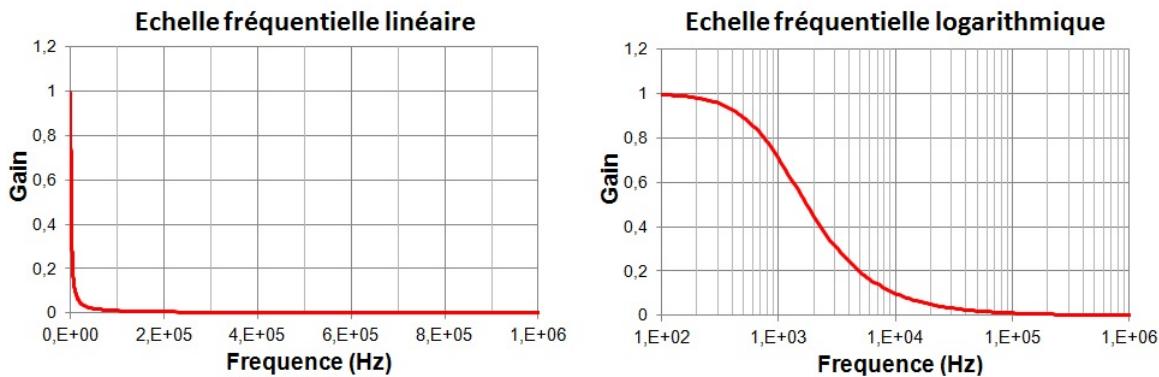


FIGURE 3.4 – Tracé du gain de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas : échelle fréquentielle linéaire (à gauche) et logarithmique (à droite)

#### Conseil pratique : comment tracer une échelle logarithmique ?

On définit tout d'abord le pas représentant une décade (par exemple 2 cm par décade). On considère que l'origine est placé en  $f=1$  ( $\log_{10}(1) = 0$ ). La position de toute valeur par rapport à cette origine sera donnée par  $\text{pas} \times \log_{10}(\text{valeur})$ . Ainsi, la valeur 10 (une décade de plus que 1) sera située à 2 cm à droite de l'origine, 100 (deux décades de plus) sera située à 4 cm à droite de l'origine, tandis que 0.1 (une décade de moins) sera située à 2 cm à gauche de l'origine. Par exemple, la valeur 50 sera située à  $2 \times \log_{10}(50) = 3.4$  cm à droite de l'origine.

Une autre convention consiste à exprimer les gains en décibels (3.7), qui n'est rien d'autre qu'une représentation des valeurs sur une échelle logarithmique. De part leur sélectivité en fréquence, les gains des filtres vont présenter des valeurs très variables en fonction de la fréquence. Pour les mêmes raisons que la représentation des fréquences, une échelle logarithmique pour le gain permettra d'apprécier avec la même résolution les faibles et les fortes valeurs de gain. La figure 3.5 l'illustre, en reprenant l'exemple du tracé du gain du filtre précédent. Le tracé du gain sur une échelle linéaire ne permet pas de le mesurer précisément lorsqu'il atteint de faibles valeurs. A contrario, lorsqu'il est exprimé en dB, la mesure des faibles valeurs devient plus précise, mettant en évidence les tendances particulières du gain. Par exemple, le gain de ce filtre décroît avec une pente de  $-20$  dB par décade au-dessus de la fréquence de coupure, ce qui est typique d'un filtre passe-bas d'ordre 1.

$$G_{dB} = 20 \cdot \log(|H(f)|) \quad (3.7)$$

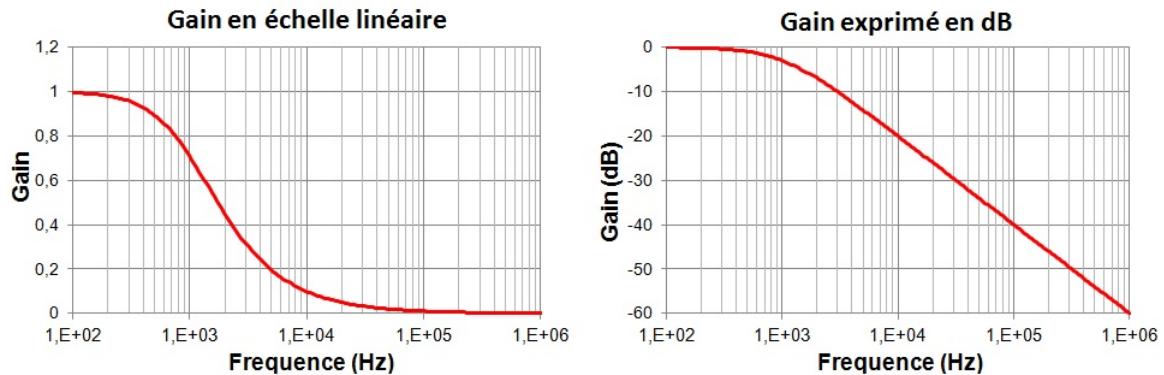
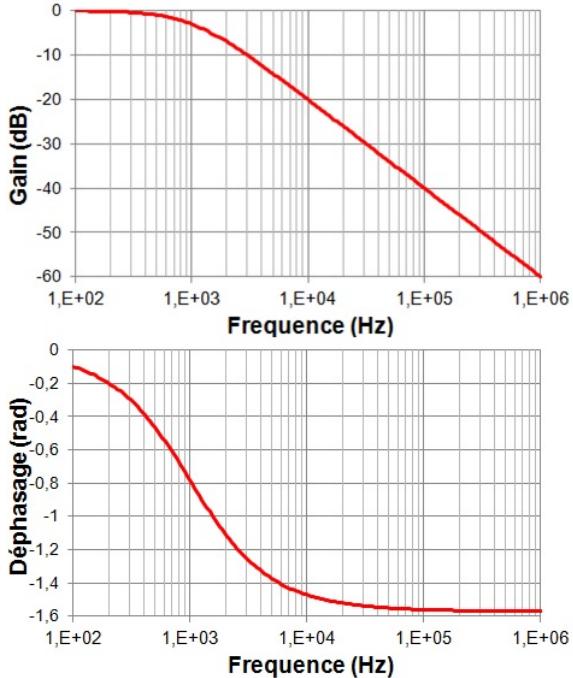


FIGURE 3.5 – Tracé du gain de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas : échelle linéaire (à gauche) et en décibel (à droite)

Il n'y a pas de convention particulière pour le déphasage, qui peut être exprimé en radians ou en degrés. La figure ci-contre présente le diagramme de Bode du filtre précédent, montrant les tracés de l'évolution fréquentielle de son gain et de son déphasage. Le diagramme de Bode indique un déphasage dont la valeur diminue entre 0 et  $-\frac{\pi}{2}$ . Le déphasage étant négatif, le filtre introduit un retard.



#### **Remarque : normalisation des fréquences :**

Un filtre de nature donnée présentera toujours la même tendance fréquentielle. Seule la ou les fréquences de coupure changeront selon les propriétés du filtre. Pour disposer d'une représentation indépendante de la fréquence de coupure, il est courant de représenter l'axe des fréquences sous la forme d'une fréquence normalisée. Cette normalisation se fait par rapport à une fréquence de référence, généralement la fréquence coupure du filtre. Ainsi, le même gabarit peut être utilisé pour plusieurs filtres présentant différentes fréquences de coupure. Si l'axe fréquentiel est exprimé en pulsation, la normalisation se fera de la même manière.

$$f_{norm} = \frac{f}{f_c} \quad (3.8)$$

$$\omega_{norm} = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (3.9)$$

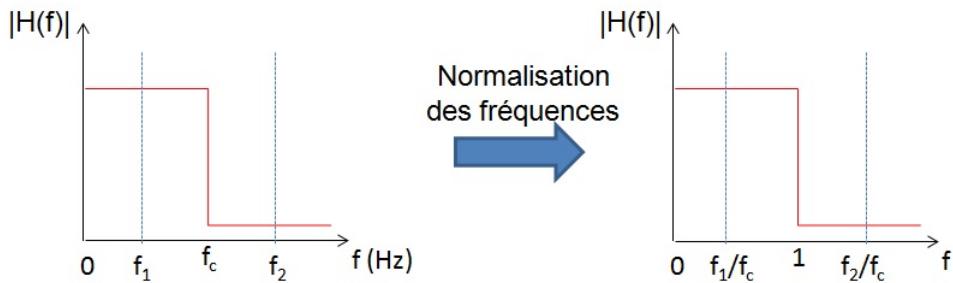


FIGURE 3.6 – Normalisation des fréquences

### 3.3.2 Tracé asymptotique du diagramme de Bode

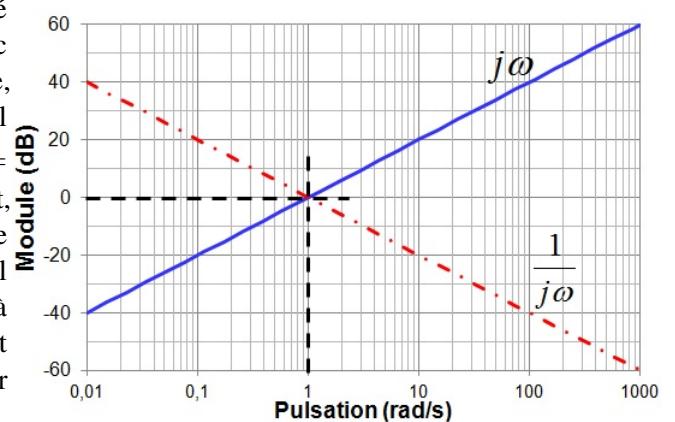
Les fonctions de transfert des filtres linéaires peuvent souvent être écrites sous la forme d'un rapport de deux polynômes, comme le montre l'équation 3.10. Comme nous allons le voir, cette forme particulière facilite le tracé graphique du module de la fonction de transfert, sous une forme appelée tracé asymptotique. Celui-ci permet de visualiser ou représenter sans calculs compliqués l'évolution du module, les pentes, les points d'inflexion (fréquences de coupure) ou l'ordre du filtre. Il s'agit d'un outil d'ingénierie couramment utilisé, soit dans la synthèse de filtre comme moyen de définir le gabarit d'un filtre, ou bien de son analyse à partir de l'expression de sa fonction de transfert.

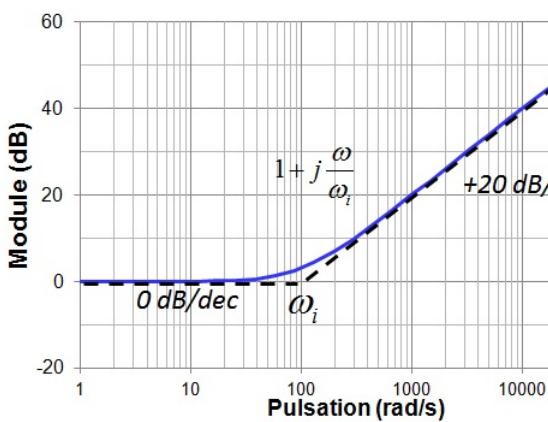
$$H(\omega) = G \frac{\prod_{i=1}^m (1 + j\frac{\omega}{\omega_i})}{\prod_{j=1}^n (1 + j\frac{\omega}{\omega_j})} \quad (3.10)$$

Le tracé asymptotique est une représentation simplifiée du module, même si l'il peut s'étendre à celui de la phase. Il consiste à représenter le comportement asymptotique de chacun des termes des produits au numérateur et au dénominateur de l'équation 3.10, où  $G$  est une constante réelle,  $\omega_i$  représente les zéros et  $\omega_j$  les pôles de la fonction de transfert. La représentation se fait systématiquement sur un graphique aux échelles log-log, avec l'utilisation de décibels sur l'axe des ordonnées. De cette manière, les termes de l'équation 3.10 présenteront des décroissances linéaires en +/- 20 dB/dec. En outre, les produits et les divisions se transformeront en addition ou en soustraction, opérations plus simples (on rappelle que  $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$  et  $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$ ).

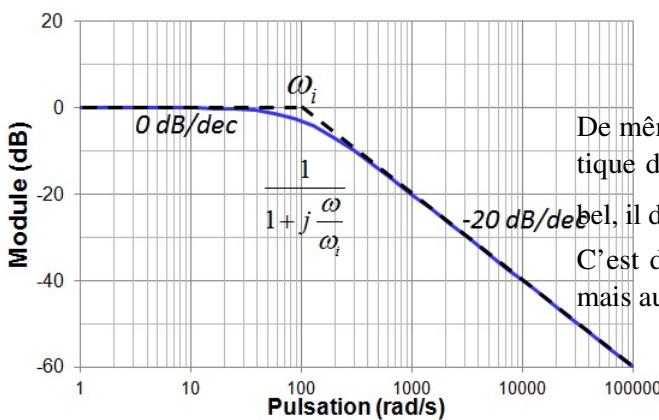
Nous allons illustrer le tracé asymptotique du module et de la phase d'une fonction de transfert quelconque. Mais avant, nous allons réaliser ceux des termes de base de l'équation 3.10. Dans les différents exemples, nous allons considérer une pulsation de coupure  $\omega_i = 100 \text{ rad/s}$ . Commençons par le terme  $j\omega$ . C'est un cas particulier où la racine est nulle. Après passage en décibels, son module devient  $20\log(\omega)$ .

Dans un tracé log-log, comme celui présenté ci-contre, le module évolue linéairement avec une pente en 20 dB/décade. Le terme inverse,  $\frac{1}{j\omega}$ , est très proche. Le passage en décibel conduit à :  $20\log(\frac{1}{j\omega}) = 20\log(1) - (20\log(\omega)) = -20\log(\omega)$ . L'évolution se fait aussi linéairement, mais avec une croissance en -20 dB/dec. Dans ce cas, le tracé asymptotique est évident, puisqu'il consiste en une simple droite de pente égale à +/-20 dB/dec. Ces deux termes étant purement imaginaires, leur phase est de  $+\frac{\pi}{2}$  pour le premier terme,  $-\frac{\pi}{2}$  pour le second.



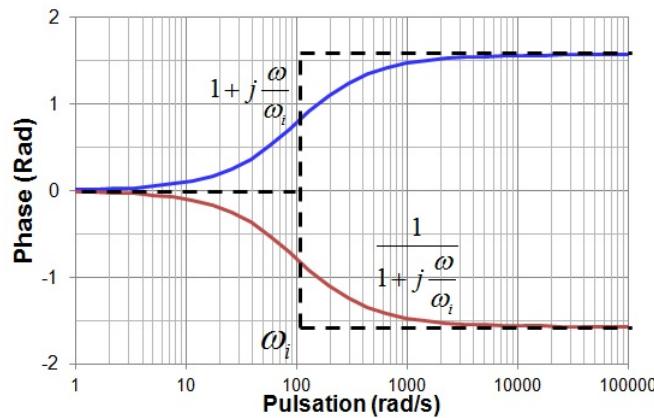


Considérons maintenant le terme  $1 + j\frac{\omega}{\omega_i}$ . Tant que la pulsation est inférieure à  $\omega_i$ , le module reste constant, proche de 1 (soit 0 dB). Par contre, au-delà de  $\omega_i$ , le module augmente linéairement avec la fréquence, en +20 dB/dec. Entre ces deux comportements asymptotiques, l'évolution fréquentielle est plus compliquée à tracer précisément. Néanmoins, en ramenant le tracé à deux droites de pente 0 et +20 dB/dec se coupant en  $\omega_i$ , on obtient une représentation simplifiée mais montrant précisément la fréquence de coupure et les tendances asymptotiques de la fonction de transfert en dessous et au-dessus de la fréquence de coupure.



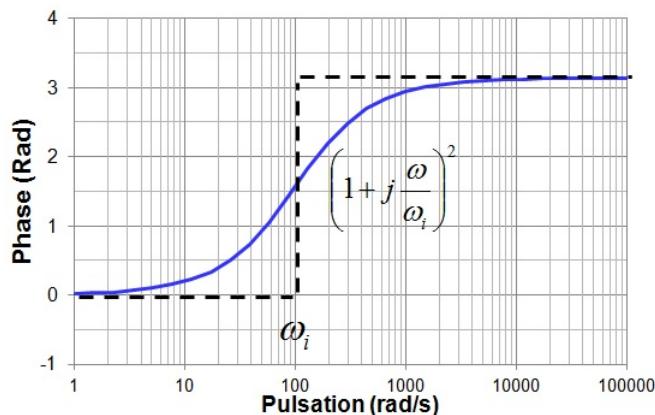
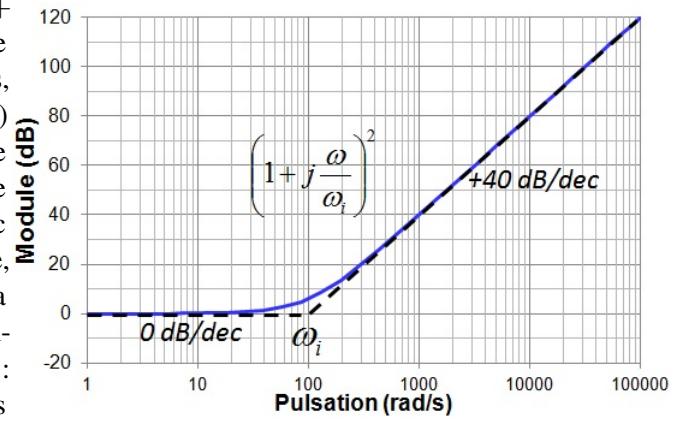
De même, on peut représenter le tracé asymptotique du terme  $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_i}}$ . Lors du passage en décibel, il devient :  $20\log(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_i}}) = -20\log(1+j\frac{\omega}{\omega_i})$ . C'est donc le même terme que précédemment, mais au signe près.

La phase de ces deux termes est égale à  $+/- \arctan(\frac{\omega}{\omega_i})$ . On peut aussi en déduire deux comportements asymptotiques. Tant que la pulsation est largement inférieure à  $\omega_i$ , c'est la partie réelle qui domine donc la phase est proche de 0. Dès que la pulsation est bien plus grande que  $\omega_i$ , c'est la partie imaginaire et la phase tend vers  $+/- \frac{\pi}{2}$ . C'est ce qu'illustre la figure ci-dessous. On remarque le passage par  $+/- \frac{\pi}{4}$  au passage par  $\omega_i$ .



La multiplication des termes précédents par une constante réelle G, dans un diagramme de Bode en échelle log-log, introduit un simple décalage vertical du tracé égal à  $20\log(G)$  sans introduire de déphasage supplémentaire.

Il est possible qu'une racine soit multiple. Si elle apparaît  $k$  fois, on verra un terme du type  $(1 + j\frac{\omega}{\omega_i})^k$  dans la fonction de transfert. Le passage en décibel de ce terme donne :  $20\log((1 + j\frac{\omega}{\omega_i})^k) = 20k \cdot \log(1 + j\frac{\omega}{\omega_i})$ . On retrouve donc le même genre de tracé asymptotique qu'au-dessus, mais le rythme de croissance (ou de décroissance) du module au-dessus de la fréquence de coupure est de  $+20kxk$  dB/dec. Dans le cas d'une racine double, la pente sera de 40 dB/dec ; 60 dB/dec pour une racine triple ... Dans l'exemple ci-contre, on considère une racine double. Ci-dessous, la phase de ce terme est tracé. Comme précédemment, on observe deux tendances asymptotiques : une phase tendant vers 0 en-dessous de  $\omega_i$ , puis une phase tendant vers  $\pi$  au-dessus de  $\omega_i$ . Dans le cas où la racine apparaît  $k$  fois, le déphasage tendra vers  $k \cdot \frac{\pi}{2}$ .



Nous n'avons considéré que des cas particuliers de fonctions de transfert relativement simple. Comment faire lorsque l'expression de la fonction de transfert présente plusieurs termes au numérateur et au dénominateur. Là encore, le tracé dans un graphe log-log simplifie grandement les choses. Pour le tracé du module, après un passage en décibel, l'équation 3.10 peut s'écrire sous la forme suivante. On retrouve les termes élémentaires vus précédemment. Le tracé asymptotique de cette fonction de transfert ne sera que l'addition des tracés asymptotiques individuels de chaque terme élémentaire. Si sur une plage de fréquence, deux termes ont une pente donnée, le comportement asymptotique résultant sera la somme de ces pentes.

$$20\log(H(\omega)) = 20\log(G \frac{\prod_{i=1}^m (1 + j\frac{\omega}{\omega_i})}{\prod_{j=1}^n (1 + j\frac{\omega}{\omega_j})}) = 20\log(G) + \sum_{i=1}^m 20\log(1 + j\frac{\omega}{\omega_i}) - \sum_{j=1}^n 20\log(1 + j\frac{\omega}{\omega_j}) \quad (3.11)$$

De la même manière, la phase de la fonction de transfert sera obtenue en additionnant les déphasages introduits par chacun des termes élémentaires, comme le montre l'équation ci-dessous.

$$\arctan(H(\omega)) = \sum_{i=1}^m \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right) - \sum_{j=1}^n \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_j}\right) \quad (3.12)$$

Nous allons illustrer comment réaliser cette opération à travers un exemple. Considérons la fonction de transfert suivante :

$$H(\omega) = 2 \frac{j\omega(1 + j\frac{\omega}{1000})}{1 + j\frac{\omega}{10}}$$

La fonction de transfert est déjà mise sous une forme équivalente à l'équation 3.10. On identifie trois termes :

1.  $2j\omega$
2.  $1 + j\frac{\omega}{1000} = 1 + j\frac{\omega}{\omega_2}$
3.  $1 + j\frac{\omega}{10} = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$

On trace individuellement le comportement asymptotique de chaque terme. On commence par le tracé du module. Sur la figure 3.7, le comportement asymptotique des trois termes est représenté. On repère les deux fréquences de transition  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Sur les trois plages de fréquence ainsi délimitées, on additionne les morceaux des tracés asymptotiques. Entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , l'augmentation en 20 dB/dec du module liée au terme 1 est compensée par la décroissance due au terme 2. Le coefficient multiplicateur 2 conduit à un décalage de +6 dB du module.

De la même manière, on réalise le tracé asymptotique de la phase. Le terme 1 introduit un déphasage constant de  $\frac{\pi}{2}$ . Le déphasage du terme 2 tend vers  $\frac{\pi}{2}$  à l'infini, tandis que celui du terme 3 tend vers  $-\frac{\pi}{2}$ . Le résultat de la construction est présenté sur la figure 3.8.

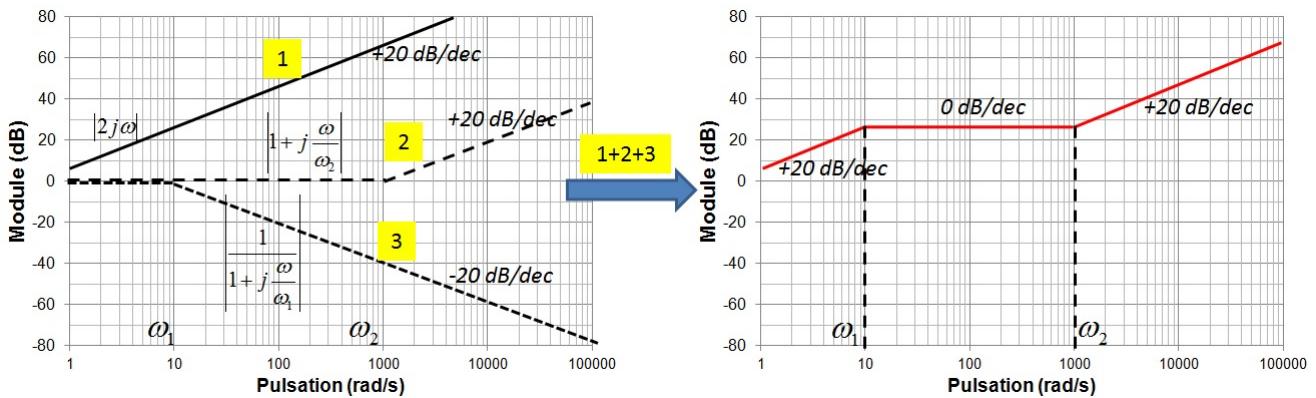


FIGURE 3.7 – Construction du tracé asymptotique du module de la fonction de transfert exemple

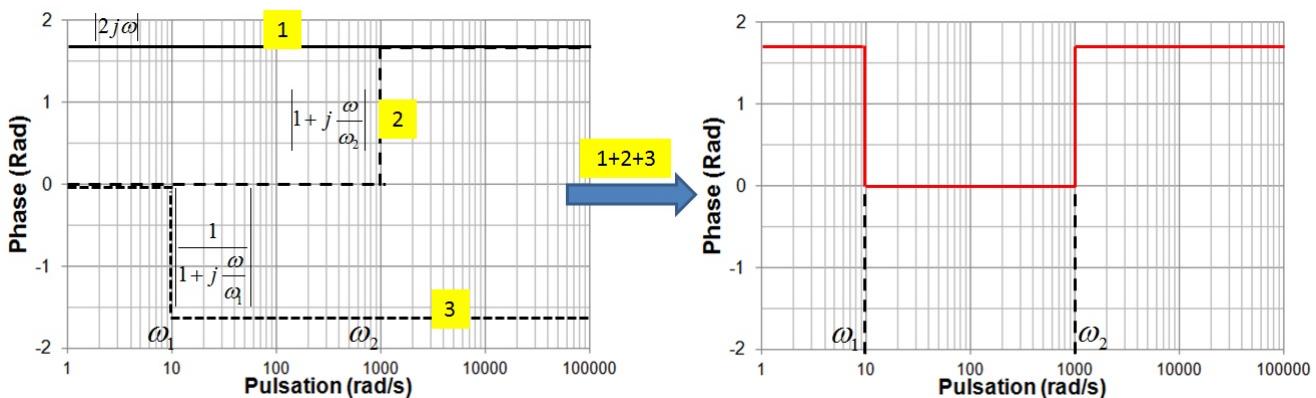


FIGURE 3.8 – Construction du tracé asymptotique de la phase de la fonction de transfert exemple

A titre de comparaison, le module et la phase de cette fonction de transfert sont tracés sur un diagramme de Bode. On vérifie que les tracés asymptotiques reflètent correctement les tendances du module et de la phase de la fonction de transfert.

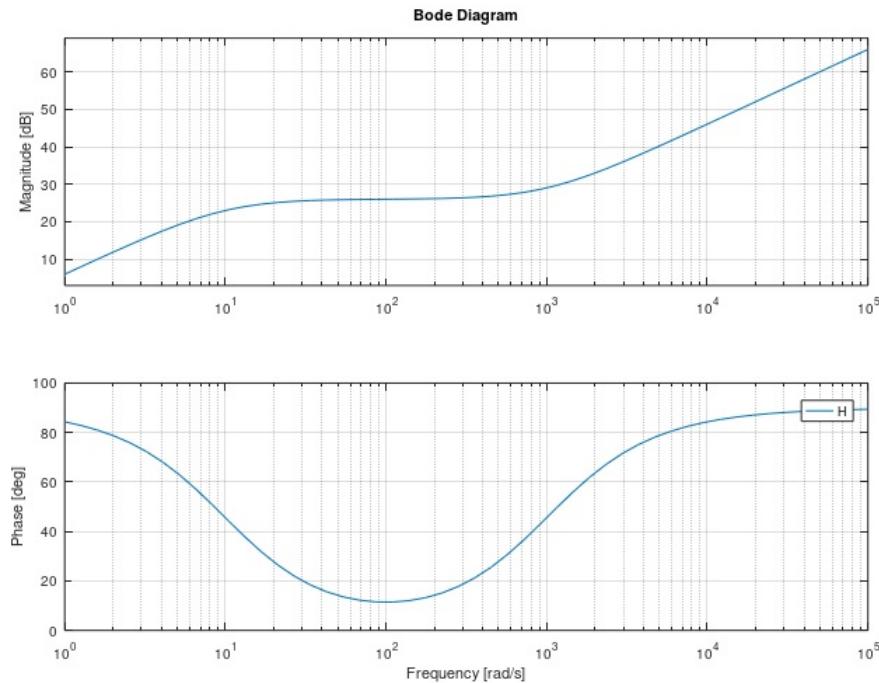


FIGURE 3.9 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert exemple

## 3.4 Les principales caractéristiques d'un filtre

Lorsqu'on analyse un filtre ou lorsqu'on cherche à le dimensionner, plusieurs caractéristiques sont étudiées. Celles-ci définissent le comportement fréquentiel global. Nous allons les définir ici.

### 3.4.1 Gain

Le gain est le module de la fonction de transfert et varie donc avec la fréquence. Néanmoins, on peut spécifier une valeur unique, qui correspond généralement à la valeur maximale du gain.

### 3.4.2 Fréquence(s) de coupure

Elles correspondent aux fréquences auxquelles le gain présente un changement de tendance. Dans la pratique, on considère un critère d'atténuation du gain de -3 dB (soit une division du gain par  $\sqrt{2}$ ). On appelle fréquence de coupure (en toute rigueur fréquence de coupure à -3dB) d'un filtre toute fréquence positive ou nulle  $f_c$  vérifiant :

$$|H(f_c)| = \frac{\max_{\forall f \in \mathbb{R}^+} (|H(f)|)}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{dB}(f_c) = \max_{\forall f \in \mathbb{R}^+} (G_{dB}(f)) - 3 \quad (3.13)$$

Tout filtre admet alors une ou plusieurs fréquences de coupures : un filtre de gabarit passe-bas ou de gabarit passe-haut n'a qu'une fréquence de coupure, tandis qu'un filtre passe-bande ou coupe-bande classique a deux fréquences de coupure.

### 3.4.3 Bande passante

La sélectivité du filtre est donnée par sa bande passante. Il s'agit de la plage de fréquence sur laquelle l'atténuation apportée par le filtre est faible. Elle est délimitée par deux fréquences, définies selon un critère d'atténuation par rapport au gain maximal obtenu dans la bande passante. Un critère courant consiste à considérer une atténuation de -3 dB. La bande passante est donc la bande de fréquence où le gain reste compris entre sa valeur maximale et sa valeur maximale atténuee de 3 dB. On définit la bande passante d'un filtre comme l'ensemble des fréquences  $f$  de  $\mathbb{R}^+$  pour lesquelles le module de la fonction de transfert demeure au moins égal à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  fois sa valeur maximale. La bande passante spécifie donc le domaine de fréquences à l'intérieur duquel le gain du filtre demeure plus ou moins constant, ou du moins ne chute pas de plus de 3 dB. Elle donne ainsi la plage de fréquences que le filtre va laisser passer, d'où son nom de bande passante !

La bande passante d'un filtre est constituée d'un ou plusieurs intervalles de  $\mathbb{R}^+$ , les bornes de ces intervalles étant données par les fréquences de coupure du filtre. Par exemple, la bande passante d'un filtre passe-bas est de la forme  $[0; f_c]$  où  $f_c$  est l'unique fréquence de coupure, tandis que la bande passante d'un filtre passe-haut est de la forme  $[f_c; +\infty]$ ; la bande passante d'un filtre passe-bande classique (i.e. avec une seule bande passante) est de la forme  $[f_{c1}; f_{c2}]$  où  $f_{c1}$  et  $f_{c2}$  sont les deux fréquences de coupure, tandis que la bande passante d'un filtre coupe-bande classique (i.e. avec une seule bande coupée) est de la forme  $[0; f_{c1}] + [f_{c2}; +\infty]$ .

### 3.4.4 Ordre du filtre

L'ordre du filtre est lié au nombre de pôles de sa fonction de transfert. Il conditionne la pente de la variation du gain en dehors de la bande passante. Si l'ordre du filtre est égal à  $n$ , la pente évolue en  $+/- 20 \cdot n \text{ dB/dec}$ .

### 3.4.5 Fréquences de résonance et d'antirésonance

Lorsque les filtres présentent des racines complexes, elles sont généralement doubles et conjuguées. Prenons l'exemple d'un filtre présentant deux pôles complexes et conjuguées  $p_0$  et  $p_0^*$ , où  $p_0 = \alpha + j\omega_0$ .

$$H(p) = \frac{1}{(p + p_0)(p + p_0)^*} = \frac{1}{(p + \alpha)^2 + (\omega_0)^2}$$

Supposons que la partie réelle  $\alpha$  des racines est faible et plaçons nous en régime harmonique. La fonction de transfert est donnée par :

$$H(\omega) = \frac{1}{(j\omega + \alpha)^2 + (\omega_0)^2}$$

Si on excite le filtre à une pulsation proche de  $\omega_0$ , alors le dénominateur tend vers 0, faisant croître fortement le module de la fonction de transfert autour de  $\omega_0$ . On assiste à un phénomène de résonance. La fréquence  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  est appelée fréquence de résonance. Si on excite un filtre par un signal (co)sinusoidal à cette fréquence, le signal de sortie sera affecté par une forte oscillation.

Inversement, si la fonction de transfert présente deux zéros complexes et conjuguées, le module tendra vers 0 autour de  $\omega_0$ . On parlera de phénomène d'antirésonance, autour d'une fréquence dite d'antirésonance. Un filtre aura tendance à éliminer efficacement un signal (co)sinusoidal à cette fréquence.

## 3.5 Les différents types de filtres

On classifie les filtres en quatre types selon leur sélectivité fréquentielle :

- un filtre passe-bas laisse passer les basses fréquences et atténue les hautes fréquences
- un filtre passe-haut laisse passer les hautes fréquences et atténue les basses fréquences
- un filtre passe-bande ne laisse passer que les fréquences contenues dans un intervalle donné
- un filtre coupe-bande n'atténue que les fréquences contenues dans un intervalle donné

Dans cette partie, nous allons rapidement passer en revue les expressions et les caractéristiques de ces différents filtres, pour les ordres 1 et 2. Nous tracerons aussi leur diagramme de Bode.

### 3.5.1 Filtre passe-bas d'ordre 1

L'expression général de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 est donnée par l'équation 3.14, où  $f_c$  est la fréquence de coupure. Au-dessus de cette fréquence, le filtre apporte une atténuation augmentant en 20 dB/dec. A la fréquence de coupure, le gain est égal à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  d'où une atténuation de 3 dB. Le tracé dans le diagramme de Bode est présenté à la figure 3.10.

$$H(f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad (3.14)$$

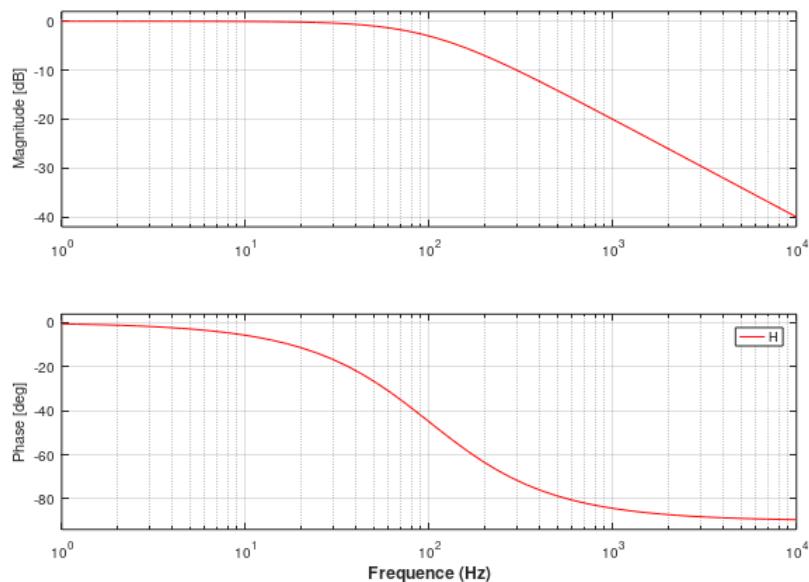


FIGURE 3.10 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas d'ordre 1 ( $f_c = 100\text{Hz}$ )

### 3.5.2 Filtre passe-haut d'ordre 1

L'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut d'ordre 1 est donnée par l'équation 3.15, où  $f_c$  est la fréquence de coupure. En dessous de cette fréquence, le filtre apporte une atténuation diminuant en 20 dB/dec. A la fréquence de coupure, le gain est égal à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  d'où une atténuation de 3 dB. Le tracé dans le diagramme de Bode est présenté à la figure 3.11.

$$H(f) = \frac{j \frac{f}{f_c}}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad (3.15)$$

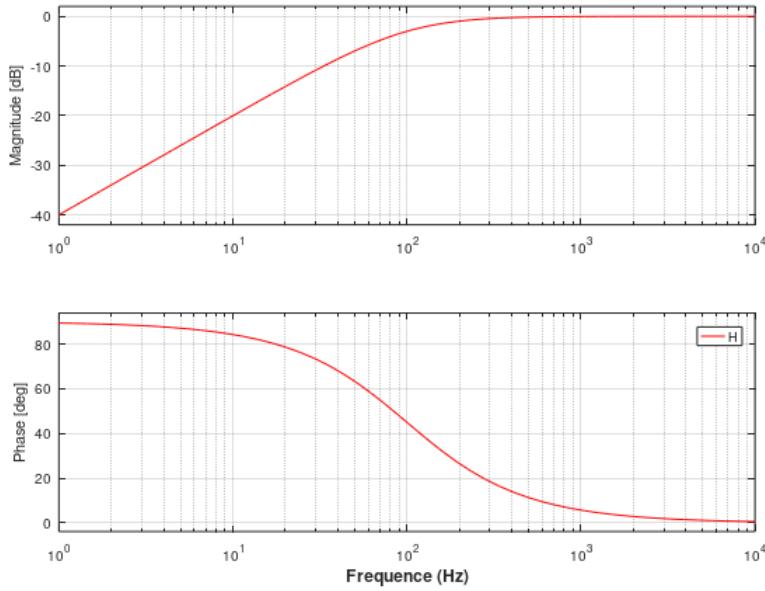


FIGURE 3.11 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut d'ordre 1 ( $f_c = 100\text{Hz}$ )

### 3.5.3 Filtre passe-bas d'ordre 2

L'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 2 est donnée par l'équation 3.16, où  $f_c$  est la fréquence de coupure et  $\zeta$  le coefficient d'amortissement. Au-dessus de cette fréquence, le filtre apporte une atténuation augmentant en 40 dB/dec. Selon la valeur du coefficient d'amortissement, on observe un accroissement du gain autour de la fréquence de coupure. Le tracé dans le diagramme de Bode est présenté à la figure 3.10 pour deux valeurs du coefficient d'amortissement.

$$H(f) = \frac{1}{1 + 2\zeta j \frac{f}{f_c} + (j \frac{f}{f_c})^2} \quad (3.16)$$

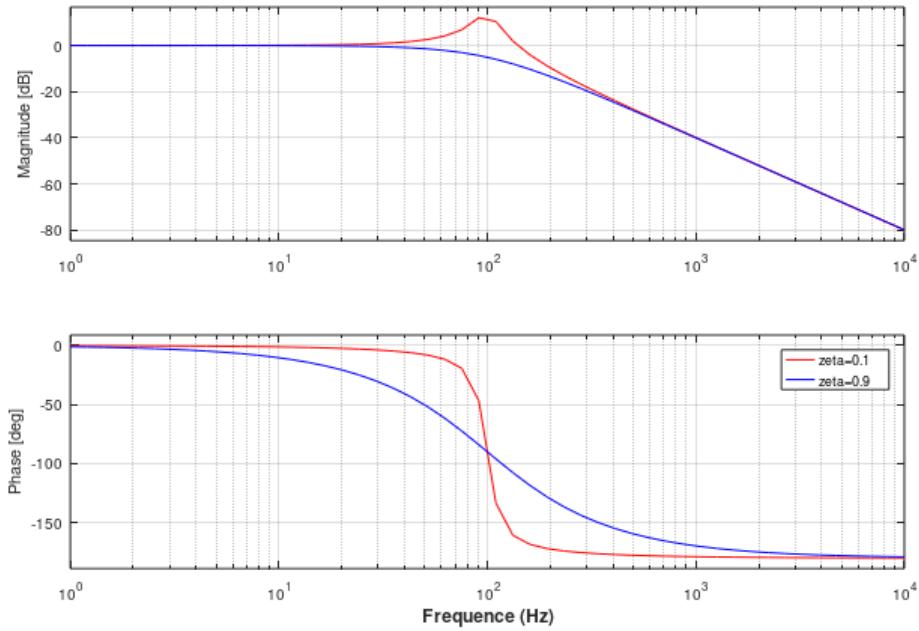
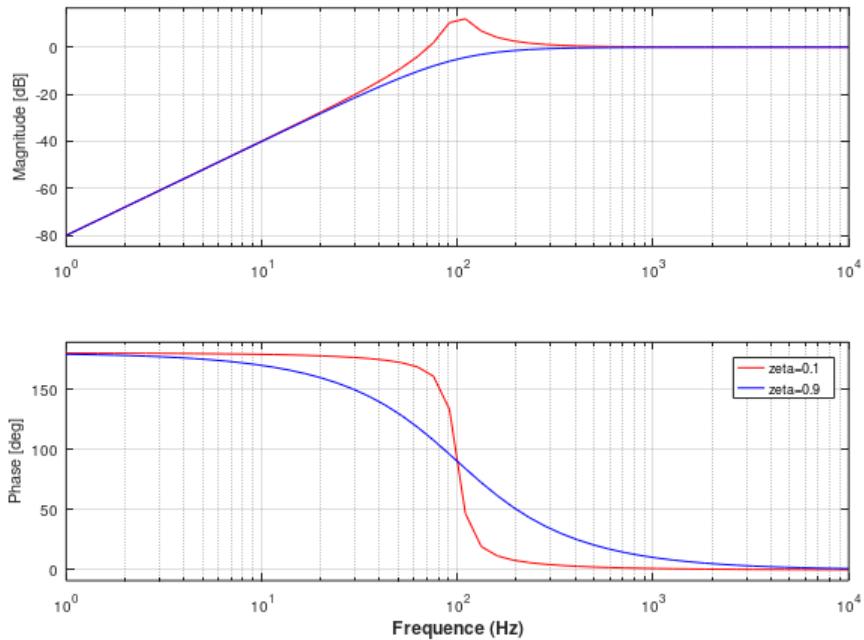
### 3.5.4 Filtre passe-haut d'ordre 2

L'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut d'ordre 2 est donnée par l'équation 3.17, où  $f_c$  est la fréquence de coupure et  $\zeta$  le coefficient d'amortissement. En dessous de cette fréquence, le filtre apporte une atténuation diminuant en 40 dB/dec. Selon la valeur du coefficient d'amortissement, on observe un accroissement du gain autour de la fréquence de coupure. Le tracé dans le diagramme de Bode est présenté à la figure 3.13 pour deux valeurs du coefficient d'amortissement.

$$H(f) = \frac{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}{1 + 2\zeta j \frac{f}{f_c} + (j \frac{f}{f_c})^2} \quad (3.17)$$

### 3.5.5 Filtre passe-bande d'ordre 2

L'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre 2 est donnée par l'équation 3.18, où  $f_c$  est la fréquence de résonance ou fréquence centrale et  $\zeta$  le coefficient d'amortissement. Il n'existe pas de filtre passe-bande d'ordre 1. Le filtre atténue toutes les fréquences

FIGURE 3.12 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas d'ordre 2 ( $f_c = 100\text{Hz}$ )FIGURE 3.13 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut d'ordre 2 ( $f_c = 100\text{Hz}$ )

de part et d'autre de la fréquence de résonance, avec une pente en 40 dB/dec. Selon la valeur du coefficient d'amortissement, le gain est plus ou moins important dans la bande passante. Cependant, plus l'amortissement est élevé, plus la bande passante s'élargit. Le tracé dans le diagramme de Bode est présenté à la figure 3.14 pour deux valeurs du coefficient d'amortissement.

$$H(f) = \frac{(j\frac{f}{f_c})^2}{1 + 2\zeta j\frac{f}{f_c} + (j\frac{f}{f_c})^2} \quad (3.18)$$

On appelle  $Q = \frac{1}{2\zeta}$  le facteur de qualité. La bande passante de ce filtre est donnée par  $\Delta f = \frac{f_c}{Q}$ .

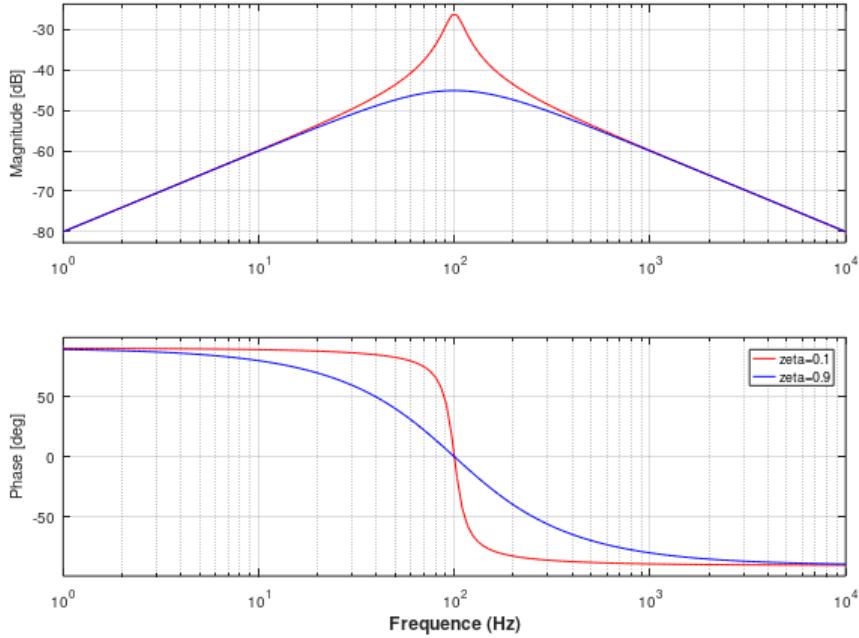


FIGURE 3.14 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bande d'ordre 2 ( $f_c = 100\text{Hz}$ )

### 3.5.6 Filtre coupe-bande d'ordre 2

L'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre coupe-bande d'ordre 2 est donnée par l'équation 3.19, où  $f_c$  est la fréquence d'antirésonance ou fréquence centrale et  $\zeta$  le coefficient d'amortissement. Il n'existe pas de filtre coupe-bande d'ordre 1. Le filtre laisse passer toutes les fréquences de part et d'autre de la fréquence centrale. La capacité du filtre à couper une bande de fréquence est liée au coefficient d'amortissement.

$$H(jf) = \frac{1 + (j\frac{f}{f_c})^2}{1 + 2\zeta j\frac{f}{f_c} + (j\frac{f}{f_c})^2} \quad (3.19)$$

### 3.5.7 Mise en cascade filtre

Pour augmenter la sélectivité des filtres, il est nécessaire d'accroître leur ordre. On se rend compte qu'on doit pouvoir créer des filtres d'ordre élevé à partir des filtres précédents en les chainant. Supposons que l'on mette en cascade N filtres comme le montre la figure 3.16. En supposant que le chainage de ces filtres n'influe pas sur leurs caractéristiques, les signaux de sortie et d'entrée sont reliés entre eux par l'équation 3.20.

$$Y(f) = H_N(f)Y_{N-1}(f) = H_N(f)H_{N-1}(f)Y_{N-2}(f) = H_N(f)H_{N-1}(f)\dots H_1(f)X(f)$$

$$Y(f) = X(f) \prod_{i=1}^N H_i(f) \quad (3.20)$$

La condition précédente doit être vérifiée pour utiliser la relation 3.20. Lorsqu'on réalise un filtre électronique, des conditions d'adaptation d'impédance sont requises pour garantir que le filtre en aval ne modifie pas la tension en sortie du filtre placé en amont.

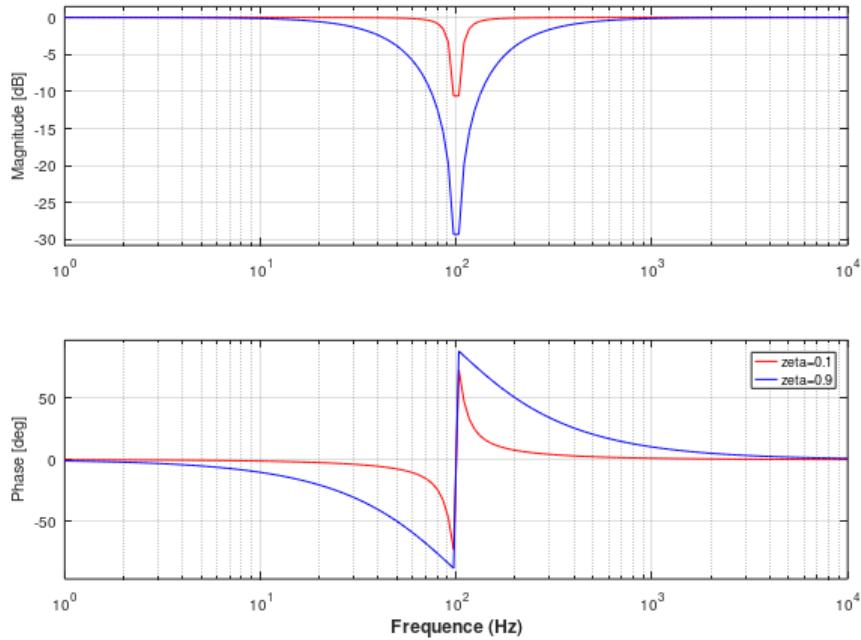
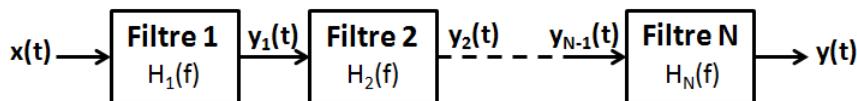
FIGURE 3.15 – Diagramme de Bode d'un filtre coupe-bande d'ordre 2 ( $f_c = 100\text{Hz}$ )

FIGURE 3.16 – Mise en cascade de filtre

## 3.6 Exercices

### Exercice 1

Soit les fonctions de transfert suivantes (en fonction de la fréquence). Esquissez le diagramme de Bode (asymptotique).

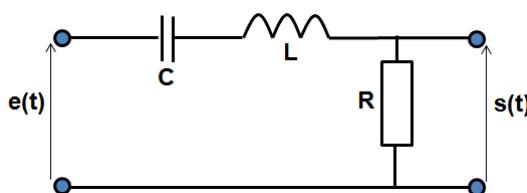
a.  $G(\omega) = \frac{j10\omega}{(1+j\frac{\omega}{628})(1+j\frac{\omega}{6280})(1+j\frac{\omega}{31400})}$

b.  $H(p) = \frac{p^3+4p^2+4p}{p^2+60p+800}$

c.  $Z(p) = \frac{p+10}{p(p+100)}$

### Exercice 2 - Circuit bouchon

On considère le filtre décrit ci-dessous.



1. Etablir la fonction de transfert  $H(\omega)$  de ce filtre. On la mettra sous la forme :  $H(\omega) = \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)}$ . Précisez la signification des termes  $\alpha$  et  $\omega_0$ .

2. Tracez l'évolution de la fonction de transfert de ce filtre en fonction de la fréquence. Précisez l'amplitude maximale et les fréquences caractéristiques. Quelle est la nature du filtre ? Son ordre ?

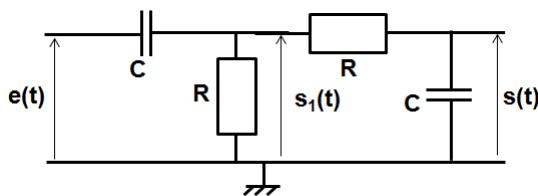
3. Déterminez la bande passante à 3 dB de ce filtre.

4. Déterminez le facteur de qualité de ce filtre.

5. On fixe  $L = 100\mu H$ . On souhaite réaliser un filtre centré sur 200 kHz avec une bande passante de 10 kHz. Proposez des valeurs pour R et C.

### Exercice 3

On considère le filtre passif ci-dessous. On utilisera les valeurs suivantes :  $R = 1 \text{ k}\Omega$  et  $C = 100 \text{ nF}$ .



1. Déterminez l'expression de l'impédance formée par le circuit en aval du premier condensateur.

2. En déduire la relation entre les tensions  $e$  et  $s_1$ . En déduire la fonction de transfert du circuit.

3. Quels sont les pôles et les zéros du filtre.

4. Pour les valeurs de R et de C, tracez le diagramme asymptotique de Bode. Précisez les fréquences de coupure du filtre, ainsi que la nature du filtre.

### Exercice 4

On dispose d'un filtre dont la fonction de transfert est donnée par  $H(p) = \frac{1}{(p+2)^2}$ .

1. Tracez la réponse fréquentielle du filtre dans le diagramme de Bode. Quelle est la nature du filtre ? Quelle est sa fréquence de coupure ?

2. Calculez sa réponse impulsionnelle.

3. Calculez sa réponse indicelle.

### Exercice 5 - Mise en cascade de filtres

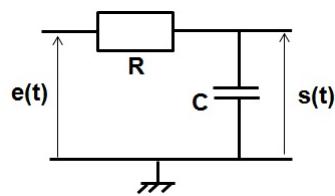
On considère le filtre RC ci-dessous.

1. Calculez la fonction de transfert de ce filtre  $H(f)$ .

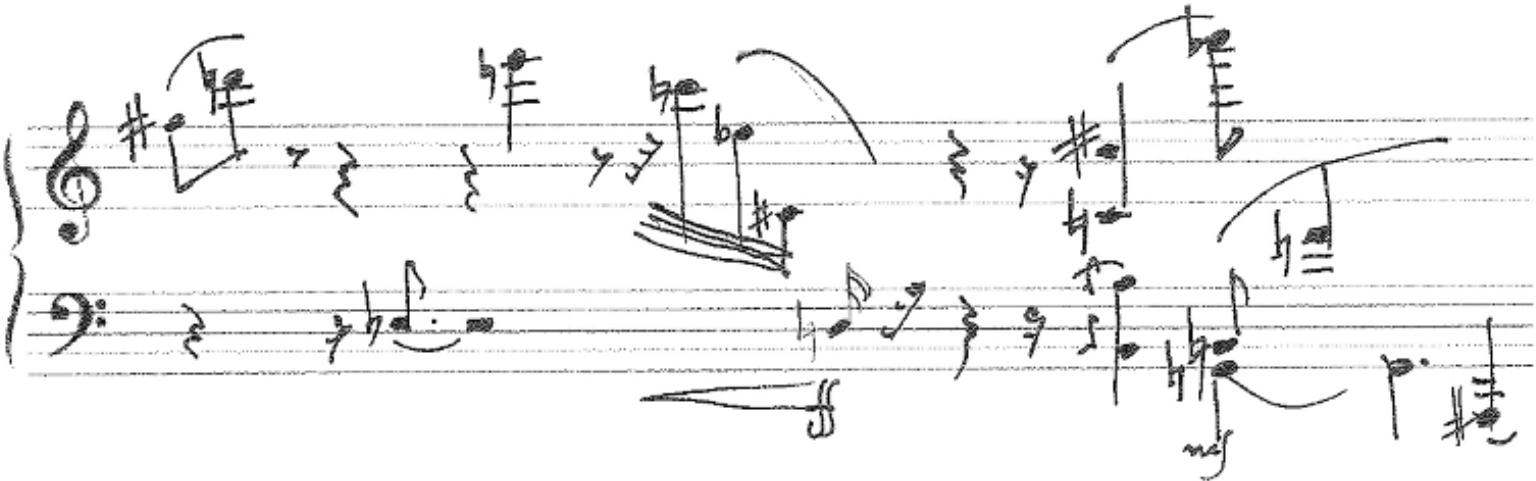
2. Précisez sa nature, sa fréquence de coupure, son ordre.

3. On cascadie deux filtres de ce type. Calculez sa fonction de transfert  $H_2(f)$ .

4. Vérifiez si  $H_2(f) = H(f)^2$  ? Pourquoi ?







## 4. Séries de Fourier - Analyse fréquentielle des signaux

Ce chapitre, ainsi que le suivant, s'intéresse à un outil fondamental de l'analyse des signaux : l'analyse fréquentielle ou spectrale. Elle vise à étudier un signal (temporel par exemple) dans un domaine dit dual : le domaine fréquentiel. En d'autres termes, cette analyse suppose que le signal peut être décomposé en une somme de fonctions périodiques, en l'occurrence (co)sinusoidales. L'analyse fréquentielle consiste à analyser l'évolution de l'amplitude et la phase de ces termes en fonction de leur fréquence. Cette décomposition offre un autre "éclairage" du signal permettant de déceler des caractéristiques qui passent inaperçues dans le domaine temporel. La base de cette décomposition est appelée développement en série de Fourier. Cependant, il ne s'applique qu'aux fonctions périodiques. Dans le chapitre suivant, nous verrons que le développement en série de Fourier peut être modifié pour s'étendre à toutes les autres fonctions : on parlera alors de transformée de Fourier. Le but de ces deux chapitres est de présenter les fondements théoriques de ces outils, leurs propriétés ainsi que leur mise en œuvre. L'analyse fréquentielle s'applique à toutes les fonctions, tous les signaux, réels ou complexes. Nous ne intéresserons ici qu'aux signaux à valeurs réels formant la majorité des cas d'étude en pratique.

### 4.1 Fonctions périodiques

On appelle une fonction périodique, de période  $T_0$ , se répète toutes les  $T_0$  secondes. Cette période de répétition est appelée période fondamentale. L'inverse  $F_0$ , donnée par 4.1, est appelée la fréquence fondamentale.

$$F_0 = \frac{1}{T_0} \quad (4.1)$$

Une fonction périodique  $f(t)$  vérifie donc la propriété suivante :

$$f(t) = f(t + kT_0), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

Cette fonction est nécessairement non bornée dans le temps. Seule la connaissance de la fonction pendant un intervalle est donc suffisant. Dans la suite, on se bornera à l'intervalle de temps  $[0; T_0]$ , voire  $[-\frac{T_0}{2}; +\frac{T_0}{2}]$ .

Parmi les fonctions périodiques, une famille particulière va nous intéresser : la famille des fonctions trigonométriques, intégrant les fonctions cosinusoïdales et sinusoïdales. Elles ont une propriété intéressante vis-à-vis de l'intégration. Dès qu'on intègre une fonction (co)sinusoïdale sur un intervalle de temps égal à la période fondamentale, alors celle-ci s'annule. De plus, si on considère des fonctions (co)sinusoïdales de fréquences multiples de la fréquence fondamentale et si on les intègre sur une période fondamentale, le résultat est encore une fois nul.

$$\int_{T_0} \cos(2\pi k F_0 t) dt = \int_{T_0} \sin(2\pi k F_0 t) dt = 0 \quad (4.3)$$

## 4.2 Développement d'une fonction périodique sous la forme d'une série

### 4.2.1 Principe

On peut montrer que toute fonction périodique  $x(t)$ , de période  $T_0$  peut être exprimée sous la forme d'une somme infinie ou série de termes  $\Phi(k)$ , comme le montre l'équation 4.4, à condition que :

- ces termes forment un base de fonctions orthogonales
- elles sont des fonctions périodiques

$$x(t) = C_0 \Phi_0(t) + C_1 \Phi_1(t) + C_2 \Phi_2(t) + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k \Phi_k(t) \quad (4.4)$$

Si les termes  $\Phi_k$  peuvent être déterminés, on dit alors que la fonction peut être décomposée sous la forme d'une série de fonctions  $\Phi_k$ , liés avec  $x(t)$  par une série de coefficients  $C_k$  qui sont les seuls inconnus à déterminer.  $k$  est appelé l'ordre de la fonction  $\Phi_k$ . L'orthogonalité est liée à l'opération de produit scalaire, définie par l'équation 4.5, où  $T$  est la période commune à tous les termes  $\Phi_k$ . Si les fonctions sont complexes, le produit scalaire est donné par 4.6, où le conjugué d'une des deux fonctions est requis.

$$\int_T \Phi_m(t) \Phi_n(t) dt \quad (4.5)$$

$$\int_T \Phi_m(t) \Phi_n^*(t) dt \quad (4.6)$$

Deux termes sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Ainsi, la base de fonctions  $\Phi_k$  forme une base orthogonale si les deux propriétés suivantes sont rencontrées :

$$\int_T \Phi_m(t) \Phi_n(t) dt = \begin{cases} K & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.7)$$

Cette propriété se comprend aisément car elle permet de définir une relation permettant de calculer les coefficients  $C_k$ . En effet, si on réalise le produit scalaire entre  $x(t)$  et n'importe quelle fonction de la base  $\Phi_k$ , on isole le coefficient  $C_k$ , dont on peut calculer la valeur à l'aide de l'équation 4.8. Dans le cas où les fonctions  $\Phi_k$  sont complexes, il faudra considérer son conjugué.

$$\int_T x(t) \Phi_k(t) dt = C_0 \int_T \Phi_0(t) \Phi_k(t) dt + C_1 \int_T \Phi_1(t) \Phi_k(t) dt + \dots + C_k \int_T \Phi_k(t) \Phi_k(t) dt + \dots = 0 + 0 + \dots + C_k K + 0 \dots$$

$$\int_T x(t) \Phi_k(t) dt = C_k K$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \Phi_k(t) dt \quad (4.8)$$

Cette décomposition en termes simples présente aussi un intérêt pour l'étude des systèmes linéaires. D'après le théorème de superposition, la réponse d'un système à une excitation  $x(t)$  se développant en une série de fonctions périodiques  $\Phi_k(t)$  peut être déterminée en additionnant les réponses individuelles aux fonctions  $\Phi_k(t)$ . Pour faciliter l'étude des systèmes linéaires, comme nous l'avons vu au chapitre 2, il est préférable de choisir des fonctions dont la forme générale n'est pas modifiée par l'effet du système linéaire, comme les fonctions de la famille exponentielle complexe.

### 4.2.2 Série de fonctions trigonométriques

Les fonctions de la famille exponentielle complexe, qui s'écrivent  $f(t) = Ae^{\sigma t} e^{j\omega t}$  ne sont pas périodiques sauf si  $\sigma = 0$ . Dans ce cas, la fonction s'écrit :  $f(t) = Acos(\omega t) + jAsin(\omega t)$  et représente une fonction trigonométrique complexe. En notant  $T_0$  la période commune de tous les termes, la famille de fonctions  $e^{jk\omega_0 t}$ , avec  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , forme une base de fonctions orthogonales. En effet, en posant  $\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ , on peut montrer que :

$$\int_0^{T_0} \Phi_m(t) \Phi_n^*(t) dt = \int_0^{T_0} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt$$

- si  $m = n$ , le produit scalaire est égal à :  $\int_0^{T_0} \Phi_n(t) \Phi_n^*(t) dt = \int_0^{T_0} 1 dt = T_0$ .
  - si  $m \neq n$ , le produit scalaire s'annule (le calcul revient à intégrer des fonctions (co)sinusoidales multiples de la fréquence fondamentale sur une période fondamentale) :
- $$\int_0^{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} \cos((m-n)\omega_0 t) dt + j \int_0^{T_0} \sin((m-n)\omega_0 t) dt = 0$$

En reprenant les équations 4.4 et 4.8, on en déduit que la fonction pourra se développer sous la forme de la série de fonctions exponentielles complexes suivantes :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.9)$$

où les coefficients  $C_k \in \mathbb{C}$  seront calculés par :

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (4.10)$$

Il aurait été possible de faire le même développement en faisant apparaître coefficients réels. En repartant de l'équation 4.10, on peut exprimer le coefficient complexe  $C_k$  en fonction de deux coefficients réels, que nous notons  $A'_k$  et  $B'_k$ .

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) (\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t)) dt \\ C_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt - j \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \\ C_k &= A'_k - jB'_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \text{avec } &\left\{ \begin{array}{l} A'_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\ B'_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \end{array} \right. \end{aligned}$$

On remarque que le coefficient  $B'_k = 0$  pour  $k = 0$ . De plus, on observe des symétries entre les coefficients pour les valeurs positives et négatives de  $k$  :  $A'_k = A'_{-k}$  et  $B'_k = -B'_{-k}$ . A partir de ces coefficients réels, on peut déterminer une nouvelle décomposition de la fonction  $x(t)$  en reprenant l'équation 4.9.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (A'_k - jB'_k) e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = (A'_0 - jB'_0) + \sum_{k=-\infty}^{-1} (A'_k - jB'_k) e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} (A'_k - jB'_k) e^{jk\omega_0 t}$$

En utilisant les propriétés de symétries des coefficients, on peut exprimer la décomposition précédente en n'utilisant que des valeurs positives ou nulles pour  $k$ . En factorisant les coefficients, les termes exponentielles complexes peuvent être regroupés afin de faire apparaître des fonctions cosinus et sinus, donnant l'équation 4.11.

$$x(t) = A'_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (A'_k - jB'_k) e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} (A'_k - jB'_k) e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = A'_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A'_k \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} B'_k \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2j}$$

$$x(t) = A'_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A'_k \cos(k\omega_0 t) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} B'_k \sin(k\omega_0 t)$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t) \quad (4.11)$$

Le développement de la fonction  $x(t)$  se fait avec des fonctions trigonométriques  $\Phi_k^{(1)}(t) = \cos(k\omega_0 t)$  et  $\Phi_k^{(2)}(t) = \sin(k\omega_0 t)$ , avec  $k \in \mathbb{N}^+$  et des coefficients réels  $A_k$  et  $B_k$  donnés par 4.12 à 4.14.

$$A_0 = A'_0 = C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (4.12)$$

$$A_k = 2A'_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt = 2\operatorname{Re}[C_k], \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad (4.13)$$

$$B_k = 2B'_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt = -2\operatorname{Im}[C_k], \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad (4.14)$$

On peut vérifier que la famille de fonctions composées de  $\Phi_k^{(1)}(t)$  et  $\Phi_k^{(2)}(t)$  forme une base de fonctions orthogonales, avec :

$$\int_T \Phi_m^{(k)}(t) \Phi_n^{(l)}(t) dt = \begin{cases} \frac{T_0}{2} & \text{si } m = n \text{ et si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.15)$$

On peut donc décomposer toute les fonctions périodiques  $x(t)$  de période  $T_0$  sous la forme d'une série de fonctions trigonométriques, de périodes  $\frac{T_0}{k}$ . Ce développement est appelé développement en série de Fourier, qui consiste à déterminer des coefficients appelés coefficients de Fourier. Il existe sous différentes formes, que nous allons récapituler dans la prochaine partie.

### 4.3 Calcul des coefficients d'une série de Fourier

Nous passons en revue les différentes formes de décomposition en série de Fourier d'une fonction, que l'on suppose à valeurs réels.

#### 4.3.1 Forme trigonométrique

Elle constitue une forme très courante de développement en série de Fourier. Elle est basée sur une décomposition en fonction cosinus et sinus, comme nous l'avons montré avec 4.11. Le développement d'une fonction périodique  $x(t)$ , de période  $T_0$  en série de Fourier sous la forme trigonométrique s'écrit :

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t), \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad (4.16)$$

avec les expressions suivantes pour les coefficients :

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad (4.17)$$

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt, \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad (4.18)$$

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt, \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad (4.19)$$

On remarque que le terme  $A_0$  représente la valeur moyenne ou composante continue de la fonction  $x(t)$ . Le développement en série de Fourier est donc la superposition de la valeur moyenne et de fonctions cosinusoidaux et sinusoïdaux de fréquences positives et multiples de la fréquence fondamentale.

#### Remarque : bornes de l'intégration pour le calcul des coefficients de Fourier :

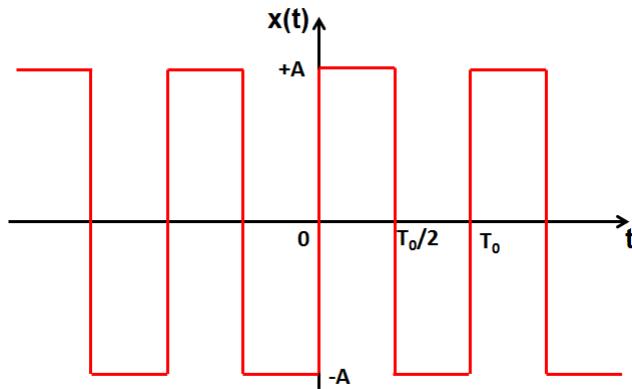
Comme le montre les équations 4.17 à 4.19, le calcul se fait par une intégration du produit entre la fonction à développer et une fonction trigonométrique, sur une période fondamentale. Une question légitime est : où doit-on commencer l'intégration ? La réponse est peu importante. La fonction étant périodique et non bornée dans le temps, on peut faire démarrer une période n'importe où. On peut aussi bien fixer les bornes d'intégration entre 0 et  $T_0$ , qu'entre  $-\frac{T_0}{2}$  et  $+\frac{T_0}{2}$ , le résultat du calcul des coefficients de Fourier restera le même. Le choix des bornes de l'intégration sera uniquement guidé par une simplification du calcul.

#### Exemple : Développement en série de Fourier d'un signal carré

On se propose de développer en série de Fourier, sous leur forme trigonométrique, la fonction  $x(t)$  décrite par la figure ci-dessous et représentant un signal carré de période  $T_0$  définie sur une période fondamentale par :

$$x(t) = \begin{cases} +A & \text{si } t \in [0; \frac{T_0}{2}] \\ -A & \text{si } t \in [\frac{T_0}{2}; T_0] \end{cases}$$

On remarque que le signal a une valeur moyenne nulle donc la composante  $A_0 = 0$ , ce que confirme le calcul de ce coefficient de Fourier :  $A_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} (\int_0^{\frac{T_0}{2}} Adt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} -Adt) = 0$ .

FIGURE 4.1 – Signal carré de période  $T_0$ 

Les coefficients de Fourier liés aux termes cosinusoidaux se calcule à l'aide de 4.18. La fonction sinus s'annulant pour tous les multiples entiers de  $\pi$ , les coefficients  $A_k$  sont tous nuls.

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \left( \int_0^{\frac{T_0}{2}} A \cos(k\omega_0 t) dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} -A \cos(k\omega_0 t) dt \right)$$

$$A_k = \frac{2A}{k\omega_0 T_0} ([\sin(k\omega_0 t)]_0^{\frac{T_0}{2}} - [\sin(k\omega_0 t)]_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}) = \frac{A}{k\pi} (\sin(k\pi) - 0 - \sin(k2\pi) + \sin(k\pi))$$

$$A_k = \frac{2A}{k\pi} \sin(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$$

Les coefficients de Fourier liés aux termes sinusoïdaux se calcule à l'aide de 4.19.

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \left( \int_0^{\frac{T_0}{2}} A \sin(k\omega_0 t) dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} -A \sin(k\omega_0 t) dt \right)$$

$$B_k = \frac{2A}{k\omega_0 T_0} ([-\cos(k\omega_0 t)]_0^{\frac{T_0}{2}} - [-\cos(k\omega_0 t)]_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}) = \frac{A}{k\pi} (\cos(0) - \cos(k\pi) - \cos(k\pi) + \cos(k2\pi))$$

$$B_k = \frac{2A}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)) \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$$

Selon la parité de l'ordre  $k$ , ce coefficient ne prend pas la même valeur :

$$B_k = \begin{cases} +0 & \text{si } k \text{ est pair.} \\ \frac{4A}{k\pi} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

La fonction carrée  $x(t)$  peut donc se décomposer à l'aide de la série de Fourier suivante :

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} (\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots) = \frac{4A}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_0 t)$$

On remarque que les coefficients de Fourier que l'on a déterminé sont indépendants de la valeur de la fréquence  $f_k = \frac{k}{T_0}$ , mais seulement de l'ordre du terme trigonométrique. Ainsi, quelle que soit sa fréquence fondamentale, un signal carré présentant la même forme d'onde que  $x(t)$  présentera la même décomposition en série de Fourier. Seule la pulsation fondamentale  $\omega_0$  changera.

### 4.3.2 Forme polaire

La forme trigonométrique, faisant apparaître des termes cosinusoïdaux et sinusoïdaux, peut être transformée pour ne faire apparaître que des termes cosinusoïdaux. En effet, on peut remarquer la série de Fourier 4.16 peut s'écrire :

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k \cos(k\omega_0 t - \phi_k) \quad (4.20)$$

avec :

$$\begin{cases} \rho_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \\ \phi_k = -\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_k = \rho_k \cos \phi_k \\ B_k = \rho_k \sin \phi_k \end{cases} \quad (4.21)$$

Les coefficients de Fourier définissent cette fois l'amplitude et la phase d'un terme cosinusoïdal. Ils constituent donc un vecteur de Fresnel ou phasor, d'où la notion de forme polaire.

#### Exemple : Développement en série de Fourier d'un signal carré

On reprend l'exemple précédent mais on cherche cette fois la représentation polaire des coefficients de Fourier. En repartant de la forme trigonométrique, on peut les déterminer :

$$\rho_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = B_k = \frac{4A}{k\pi}, \quad k \text{ entier impair}$$

$$\phi_k = -\arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

### 4.3.3 Forme complexe

Il s'agit de la forme la plus compacte de développement en série de Fourier que l'on privilégie souvent en pratique. Elle est basée sur la décomposition en exponentielle complexe, comme nous l'avons montré avec 4.9. Le développement d'une fonction périodique  $x(t)$ , de période  $T_0$  en série de Fourier sous la forme complexe s'écrit :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.22)$$

avec les expressions pour les coefficients :

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (4.23)$$

On remarque que le terme  $C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$  représente la valeur moyenne de  $x(t)$ . On remarque aussi le lien entre cette forme et les formes trigonométriques et polaires :

$$2C_k = A_{|k|} - jB_{|k|} = \rho_k e^{j\phi_k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^* \quad (4.24)$$

Cependant, contrairement aux deux autres formes précédentes, les coefficients de Fourier sont définis pour des ordres positifs et négatifs. En d'autres termes, pour des fréquences positives et négatives. On peut vérifier une propriété de symétrie des coefficients complexes entre les fréquences positives et négatives : ils sont égaux en module, mais opposés en phase. En d'autres termes, les

coefficients sont conjugués.

$$C_k = C_{-k}^* \Rightarrow |C_k| = |C_{-k}| \text{ et } \arg(C_k) = -\arg(C_{-k}) \quad (4.25)$$

#### **Exemple : Développement en série de Fourier d'un signal carré**

On reprend l'exemple précédent mais on cherche cette fois la représentation complexe des coefficients de Fourier. En utilisant l'équation 4.23, on détermine :

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left( \int_0^{\frac{T_0}{2}} A e^{-jk\omega_0 t} dt - \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} A e^{-jk\omega_0 t} dt \right) \\ C_k &= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} \left( [e^{-jk\omega_0 t}]_0^{\frac{T_0}{2}} - [e^{-jk\omega_0 t}]_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} \right) = \frac{jA}{k2\pi} (e^{-jk_p i} - 1 - e^{-jk2\pi} + e^{-jk_p i}) \\ &\quad \frac{jA}{k\pi} (e^{-jk\pi} - 1) \end{aligned}$$

Si  $k$  est pair,  $e^{-jk\pi} = 1 \Rightarrow C_k = 0$ . Si  $k$  est impair,  $e^{-jk\pi} = -1 \Rightarrow C_k = \frac{-2jA}{k\pi}$ . En comparant les différentes formes des coefficients de Fourier, on vérifie bien l'équation 4.24.

#### **4.3.4 Somme partielle**

Le développement en série de Fourier suppose la somme d'un nombre infini de termes trigonométriques ou exponentiels complexes. En pratique, si on cherche à calculer chacun des termes de la série de Fourier, on n'en calculera qu'un nombre fini  $N$ . On parle alors de somme partielle  $S_N$ , définie par :

$$S_n = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^N B_k \sin(k\omega_0 t) = \sum_{k=-N}^{+N} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.26)$$

Dans les cas où la série de Fourier d'une fonction existe (nous discuterons de ce point dans la prochaine partie), alors la somme partielle converge vers la décomposition en série de Fourier au fur et à mesure qu'on augmente le nombre  $N$  de termes additionnés. L'exemple ci-dessous reprend le signal carré étudié précédemment pour illustrer la convergence de la somme partielle. On prend  $A = 1$  et  $T_0 = 1s$ , d'où une fréquence fondamentale de 1 Hz. Le tableau ci-dessous donne les valeurs des coefficients de Fourier en fonction de l'ordre. Il montre clairement que plus l'ordre augmente, plus l'amplitude du terme décroît.

Ordre n	$A_n$	$B_n$	$C_n$
1	0	$\frac{4}{\pi}$	$-j\frac{2}{\pi}$
3	0	$\frac{4}{3\pi}$	$-j\frac{2}{3\pi}$
5	0	$\frac{4}{5\pi}$	$-j\frac{2}{5\pi}$
7	0	$\frac{4}{7\pi}$	$-j\frac{2}{7\pi}$
...	...	...	...

La figure 4.2 compare le signal carré et la somme partielle, pour différentes valeurs d'ordre de sommation  $N$ . Lorsque  $N$  est faible, on voit clairement l'effet de chacun des termes sinusoïdaux qui ajoute une oscillation de période  $\frac{T_0}{k}$ . Plus on augmente  $N$ , plus il est difficile de séparer leurs effets respectifs et la somme partielle reproduit de plus en plus fidèlement le signal carré. Cependant, même en augmentant fortement l'ordre  $N$  (par exemple, jusqu'à 99), on observe toujours des oscillations parasites notamment à proximité des transitions du signal. Ce phénomène s'appelle le phénomène de Gibbs. La somme partielle tronque la série de Fourier et supprime les termes

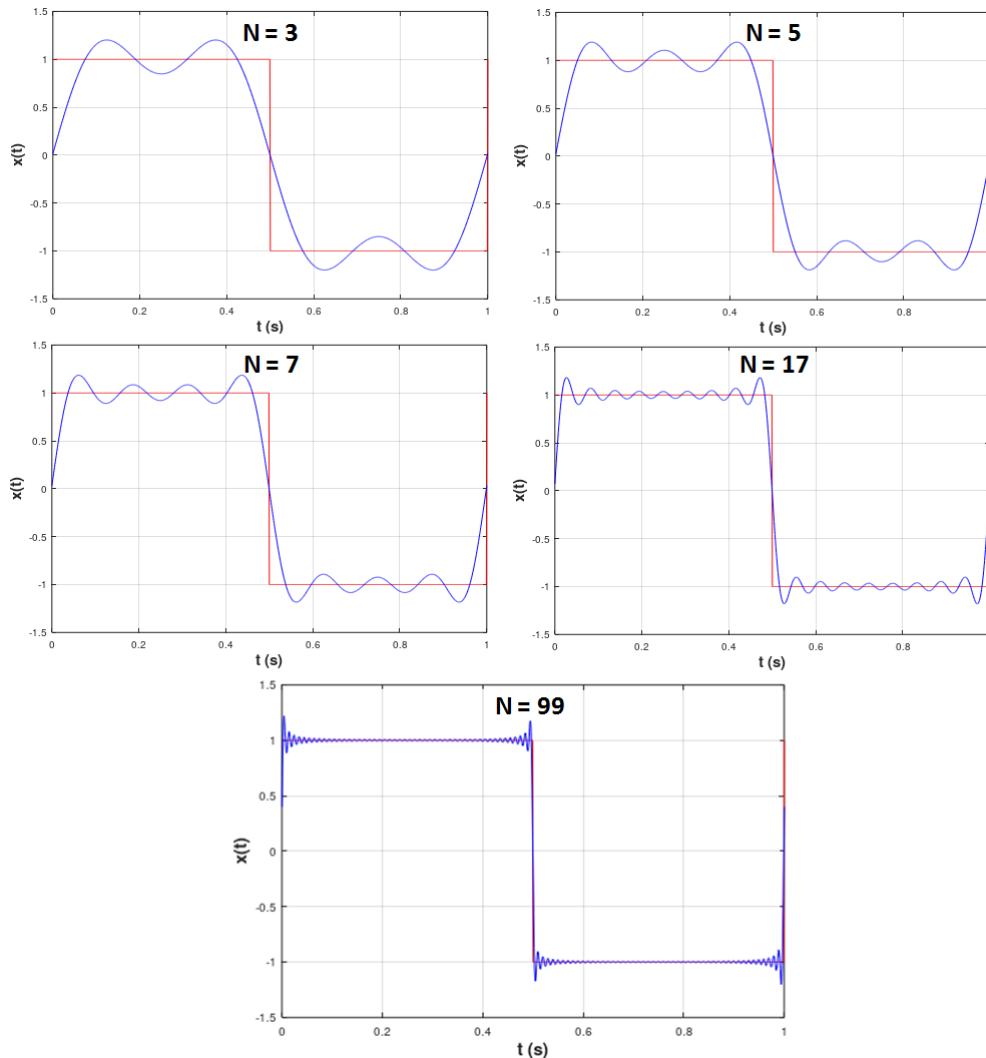


FIGURE 4.2 – Convergence d'une somme partielle (signal carré) en fonction de l'ordre maximale

sinusoïdaux de plus haute fréquence. Or, ce sont ceux-ci qui constituent les variations rapides d'une fonction. Dans un cas pratique, il est donc impossible de faire disparaître le phénomène de Gibbs. Au mieux, on peut le minimiser en augmentant très fortement l'ordre N.

#### 4.4 Convergence des séries de Fourier - Théorème de Dirichlet

Avant de lister les propriétés des séries de Fourier, nous devons aborder une question fondamentale avant de réaliser le développement en série de Fourier : qu'est-ce qui nous garantit la série de Fourier va converger vers la fonction  $x(t)$  ? En effet, le calcul des coefficients repose sur celui de l'intégrale 4.23. Or, si cette intégrale diverge, alors la série de Fourier ne peut pas converger et le développement en série de Fourier devient impossible. Il est donc indispensable de déterminer les conditions qui garantissent cette convergence.

Le but de cette partie n'est pas de démontrer rigoureusement ces conditions, mais simplement de les énoncer. Cette question sera traiter dans le cours d'Analyse et algèbre.

Les conditions de convergence des séries de Fourier sont définies par le théorème de Dirichlet.

Ces questions se posent naturellement dès que la fonction  $x(t)$  que l'on cherche à développer présente des discontinuités. Avant de l'énoncé, il est nécessaire de définir certains termes.

#### 4.4.1 Continuité par morceaux

Une fonction  $x(t)$  est dite continue par morceaux sur un intervalle  $I$  (par exemple  $[0; T_0]$ ) si elle est continue sur  $I$ , sauf en un nombre fini de points qui sont des points de discontinuités de première espèce. En un point de discontinuité de première espèce apparaissant en  $t_i$ , la fonction a une limite à droite  $x(t_i^+)$  et une limite à gauche  $x(t_i^-)$ .

#### 4.4.2 Classe $C^1$

On dit qu'une fonction  $x(t)$  défini sur un intervalle  $I$  est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $I$  si elle est continue par morceaux sur  $I$ , mais aussi si elle est dérivable sur  $I$  sauf en un nombre fini de points, avec la dérivée  $x'$  continue par morceaux sur  $I$ .

#### 4.4.3 Théorème de Dirichlet

Soit  $x$  une fonction périodique, de période  $T_0$ , de classe  $C^1$  par morceaux alors la série de Fourier associée à  $x$  converge en tout point de discontinuité vers  $\frac{x(t_i^+) + x(t_i^-)}{2}$ . Dans le cas complexe, en ce point, la série de Fourier converge vers :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t_i} = \frac{x(t_i^+) + x(t_i^-)}{2} \quad (4.27)$$

Dans le cas d'une forme trigonométrique, elle converge vers :

$$A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t_i) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t_i) = \frac{x(t_i^+) + x(t_i^-)}{2} \quad (4.28)$$

Dans cette situation, la série de Fourier converge en tout point de l'intervalle  $I$ . On peut donc décomposer la fonction  $x(t)$  en une série de Fourier. Dans la majorité des cas pratiques, les signaux périodiques sont continus et dérивables sur toute leur période. Il respecte les conditions du théorème de Dirichlet et sont donc décomposables en série de Fourier.

#### Exemple : signal périodique de forme exponentiel

On considère une fonction périodique  $x$ , définie sur l'intervalle  $[0; 2\pi[$  par  $x(t) = e^t$ . Peut-on développer cette fonction en série de Fourier ?

La fonction est continue sur tout l'intervalle, sauf en  $t = 0$ , puisque :

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = e^{2\pi} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = 1$$

Il en est de même pour tous les points  $t_k = k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . La question de convergence de la série de Fourier se pose donc. Cependant, on vérifie que la fonction est continue par morceau sur l'intervalle fondamental, sauf en  $t=0$ . Mais cette discontinuité est de première espèce puisqu'elle admet une limite à droite et à gauche. Le même raisonnement s'applique à sa dérivée, donc il s'agit d'une fonction de classe  $C^1$  par morceaux. Cela est vrai non seulement sur l'intervalle fondamental, mais aussi sur l'ensemble  $\mathbb{R}$ . Les hypothèses du théorème de Dirichlet sont satisfaites et on peut l'appliquer :

- si  $t \neq 2k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$ , alors la série de Fourier en  $t$  converge vers  $x(t)$ .
- si  $t = t_k = 2k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$ , alors la série de Fourier converge vers  $\frac{x(t_k^+) + x(t_k^-)}{2} = \frac{1+e^{2\pi}}{2}$

On pourra vérifier que le développement en série de Fourier, sous forme complexe, de cette fonction donne :

$$C_k = \frac{1}{2\pi(1-jk)}(e^{2\pi}e^{-jk} - 1)$$

## 4.5 Propriétés des séries de Fourier

Dans cette partie, nous passons en revue les propriétés des séries de Fourier. Certaines d'entre elles présentent un intérêt pratique certain car elles facilitent le calcul des coefficients de la série.

### 4.5.1 Linéarité

La décomposition en série de Fourier est une opération linéaire. Le principe de superposition s'applique donc. Soit deux fonctions périodiques  $x(t)$  et  $y(t)$  dont les développements en série de Fourier, dont les termes respectifs sont notés  $\alpha_k$  et  $\beta_k$ . Soit la fonction  $z(t) = ax(t) + by(t)$ , avec  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$ , alors la fonction  $z(t)$  est une fonction périodique qui peut aussi être développée en série de Fourier. Ces coefficients de Fourier sont  $\gamma_k = a \cdot \alpha_k + b \cdot \beta_k$ .

### 4.5.2 Changement de période

Soit une fonction  $x(t)$  possédant une forme donnée. Si sa fréquence fondamentale change, les coefficients de Fourier restent inchangés.

### 4.5.3 Théorème du retard

Lorsqu'une fonction temporelle est décalée (retardée ou avancée d'une durée  $t_0$ ), l'amplitude de ses coefficients de Fourier n'est pas affectée. Seule la phase est modifiée (traduisant un décalage temporel de l'ensemble des termes trigonométriques). Soit la fonction  $x(t)$  dont les coefficients de Fourier complexes sont notés  $\alpha_k$ , et une fonction  $y(t)$  une version retardée d'une durée  $t_0$ , alors le développement en série de Fourier de la fonction  $y$  peut s'écrire :

$$y(t) = x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k^{jk\omega_0(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{-jk\omega_0 t_0} e^{jk\omega_0 t}$$

Les coefficients de Fourier complexes  $\beta_k$  de la série représentant  $y(t)$  s'écrivent donc :

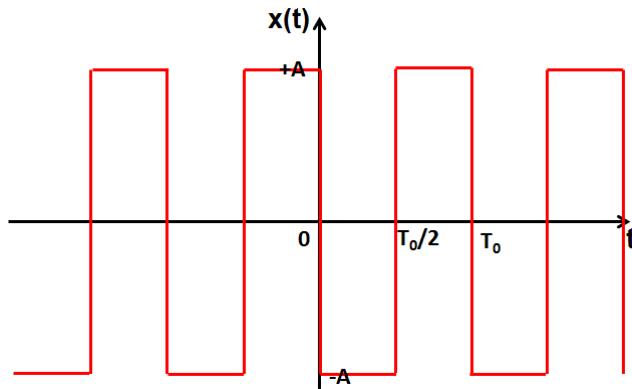
$$\beta_k = \alpha_k e^{-jk\omega_0 t_0} \quad (4.29)$$

Un retard d'une durée  $t_0$  se traduit donc comme une modification de phase égale à  $e^{-jk\omega_0 t_0}$  pour l'ensemble des termes de la série de Fourier.

**Exemple : signal carré retardé** On reprend l'exemple du signal carré précédemment étudié (figure 4.1), mais on le retarde d'une demi période (on remarquera que cela est équivalent à une avance d'une demi période), comme le montre la figure ci-dessous. A partir des coefficients de Fourier  $C_k$ ,  $A_k$  et  $B_k$  que nous avons déjà calculé pour le signal carré et du théorème du retard, nous pouvons aisément déduire ceux de cette version retardée. Les termes  $C_0$  et  $A_0$ , représentant la valeur moyenne ne sont pas modifiés. Les coefficients complexes deviennent :

$$C'_k = C_k e^{-jk\omega_0 \frac{T_0}{2}} = C_k e^{-jk\omega_0 i} = \frac{jA}{k\pi} (1 - e^{-jk\pi})$$

Seuls les coefficients d'ordre  $k$  impair sont non nuls et sont égaux à  $C'_k = +\frac{2jA}{k\pi}$ . Sous la forme trigonométrique, tous les coefficients  $A'_k$  restent nuls. Les coefficients  $B'_k$  sont non nuls pour les coefficients d'ordre  $k$  impair et égaux à  $B'_k = -\frac{4A}{k\pi}$ .



#### 4.5.4 Dérivée

Soit une fonction périodique  $x(t)$  présentant un développement en série de Fourier complexe, dont les coefficient sont notés  $\alpha_k$ . La fonction  $y(t) = \frac{dx}{dt}$  est aussi périodique et peut être développée en série de Fourier. Ses coefficients de Fourier  $\beta_k$  sont donnés par :

$$\beta_k = (jk\omega_0)\alpha_k \quad (4.30)$$

De même si  $y(t) = \frac{d^m x}{dt^m}$ , alors les coefficients de Fourier sont reliés par :

$$\beta_k = (jk\omega_0)^m \alpha_k \quad (4.31)$$

#### 4.5.5 Intégration

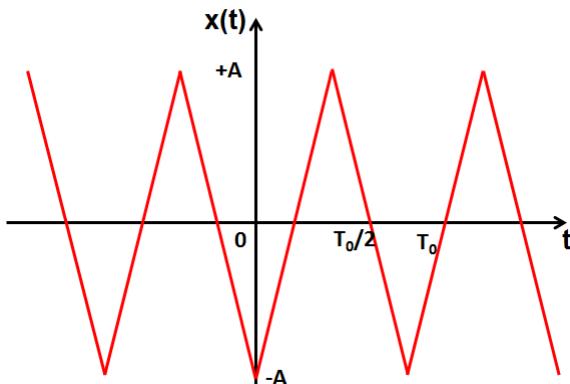
On retrouve la propriété inverse de la propriété de dérivée. Si la fonction  $y(t) = \int x(\tau)d\tau$ , alors les coefficients de Fourier sont reliés par :

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{jk\omega_0} \quad (4.32)$$

De même si la fonction  $y$  est une intégrale multiple d'ordre  $m$  de la fonction  $x$ , alors les coefficients de Fourier sont reliés par :

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{(jk\omega_0)^m} \quad (4.33)$$

**Exemple : signal triangulaire** On considère la fonction  $y$  de période  $T_0$  décrit à la figure ci-dessous. Développez en série de Fourier cette fonction.



On peut utiliser les équations 4.23 ou 4.17 pour déterminer l'expression théorique des coefficients de Fourier. Néanmoins, le calcul de l'intégrale va passer par une intégration par partie. Etant donné que nous avons déjà développé en série de Fourier le signal carré  $x(t)$  et en remarquant que  $y(t) = \frac{4}{T_0} \int x(\tau) d\tau$ , on peut facilement déterminer le développement en série de Fourier de la fonction  $y$  en appliquant la propriété d'intégration.

Soit  $\alpha_k = \frac{jA}{k\pi}(e^{-jk\pi} - 1)$  les coefficients de Fourier associés à  $x(t)$ , ceux de  $y(t)$ , notés  $\beta_k$  seront donnés par :

$$\beta_k = \frac{4}{T_0} \alpha_k \frac{1}{jk\omega_0} = \frac{2\alpha_k}{jk\pi}$$

$$\beta_k = \frac{2A}{(k\pi)^2} (e^{-jk\pi} - 1)$$

On trouve que  $\beta_k = 0$  si  $k$  est pair et  $\beta_k = \frac{4A}{(k\pi)^2}$  si  $k$  est impair. En forme trigonométrique, ce coefficient s'écrira :  $A_k = \frac{-8A}{(k\pi)^2}$  et  $B_k = 0$ . Le développement en série de Fourier de la fonction  $y(t)$  s'écrit donc :

$$y(t) = \frac{-8A}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\omega_0 t)$$

#### 4.5.6 Egalités entre coefficients de Fourier

Les coefficients de Fourier, selon la forme employée pour la décomposition de Fourier, sont reliés par les équations suivantes :

$$C_0 = A_0 \quad C_k = \frac{A_k - jB_k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \quad C_{-k} = \frac{A_k + jB_k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \quad (4.34)$$

$$A_k = C_k + C_{-k} \quad B_k = C_k - C_{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \quad (4.35)$$

#### 4.5.7 Symétries temporelles

Le signal temporel peut présenter différents types de symétries qui peuvent être exploitées pour déterminer efficacement le développement en série de Fourier.

##### Fonction paire

Si  $x$  est une fonction paire, alors  $x(t)=x(-t)$ . Or, ces deux notations peuvent se développer en série de Fourier :

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t)$$

$$x(-t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) - \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t)$$

Si  $x(t)=x(-t)$ , il en résulte que tous les termes  $B_k$  sont nuls  $\forall k \in \mathbb{N}^+$ . On peut aussi en déduire l'égalité suivante pour les coefficients complexes :

$$C_k - C_{-k} = 0 \Rightarrow C_k = C_{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$$

Il y a donc aussi une symétrie entre les coefficients complexes positifs et négatifs.

### Fonction impaire

Si  $x$  est une fonction impaire, alors  $x(t) = -x(-t)$ . On en déduit donc que tous les termes  $A_k$  sont nuls. Pour les coefficients complexes, on en déduit une symétrie inverse :

$$C_k + C_{-k} = 0 \Rightarrow C_k = -C_{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$$

### Symétrie demi-onde

Une fonction  $x$  présente une symétrie demi-onde si  $x(t) = -x(t - \frac{T}{2})$ . Il s'agit d'une fonction impaire, donc tous les coefficients  $A_k$  sont nuls. Cependant, si on analyse le calcul des termes  $B_k$ , on trouve :

$$B_k = \frac{2}{T_0} \left( \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt - \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \right)$$

Si  $k$  est paire, alors il y a le même nombre d'alternances de la fonction sinus sur l'intervalle  $[0; \frac{T_0}{2}]$  que sur l'intervalle  $[\frac{T_0}{2}; T_0]$ . Le terme  $B_k$  s'annule donc pour tous les ordres  $k$  pairs. On en déduit aussi que les coefficients  $C_k$  s'annulent pour tous les ordres  $k$  pairs.

### 4.5.8 Cas d'une suite d'impulsions de Dirac ou peigne de Dirac

Le peigne de Dirac  $pgn(t)$  est une suite périodique d'impulsions de Dirac. Nous verrons dans le chapitre 7 qu'elle a des propriétés intéressantes d'un point de vue pratique. Ce n'est pas une fonction à proprement parler, mais une distribution. Néanmoins, on peut déterminer une décomposition en série de Fourier.

$$pgn(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0) \quad (4.36)$$

En forme complexe, les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} pgn(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} e^{-jk\omega_0 0} = \frac{1}{T_0} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (4.37)$$

Il apparaît que les coefficients de Fourier d'un peigne de Dirac ont tous la même amplitude, quelle que soit la fréquence. La représentation fréquentiel d'un peigne de dirac est donc aussi un peigne de Dirac.

### 4.6 Représentation en spectre de raies

Le développement d'une fonction périodique en série de Fourier conduit en une somme de fonctions trigonométriques de fréquences différentes, toutes multiples de la fréquence fondamentale. On appelle l'harmonique de rang 1 l'harmonique ou composante fondamentale, car située à la fréquence fondamentale. Les autres sont appelés harmoniques, leur fréquences sont dites harmoniques car multiples de la fréquence fondamentale. Il suffit de connaître le module et la phase de ces fonctions pour reconstituer la fonction initiale.

On peut en déduire une représentation graphique du signal dans le domaine fréquentiel, nommé spectre de raies, illustrée à la figure 4.3. Il consiste à reporter graphique à deux dimensions, où l'axe des abscisses est l'axe fréquentiel, l'amplitude et/ou la phase (voire les parties réelles et imaginaires) des coefficients de Fourier associés à chacune des harmoniques. Le spectre n'est pas une fonction continue en fonction de la fréquence, mais discrète puisque les coefficients de Fourier n'existe que pour un ensemble discret de fréquences. La contribution de chaque harmonique apparaît donc

comme une raie dans le spectre.

Habituellement, on parle de spectre lorsqu'on reporte l'amplitude (représentation la plus courante). Il est cependant préférable de distinguer le spectre de raies d'amplitude, lorsqu'on reporte l'amplitude, du spectre de phase lorsqu'on reporte la phase. Si la fonction analysée porte une certaine unité, alors les raies tracées dans le spectre d'amplitude présentent la même unité.

Les figures ci-dessous présentent un exemple de spectre de raies, en amplitude et en phase. Cette représentation suppose des coefficients de Fourier complexes, définis pour des fréquences positives et négatives. Comme nous l'avons vu dans la partie III.3, il y a une symétrie entre les modules des coefficients complexes entre les fréquences positives et négatives, mais une antisymétrie pour la phase.

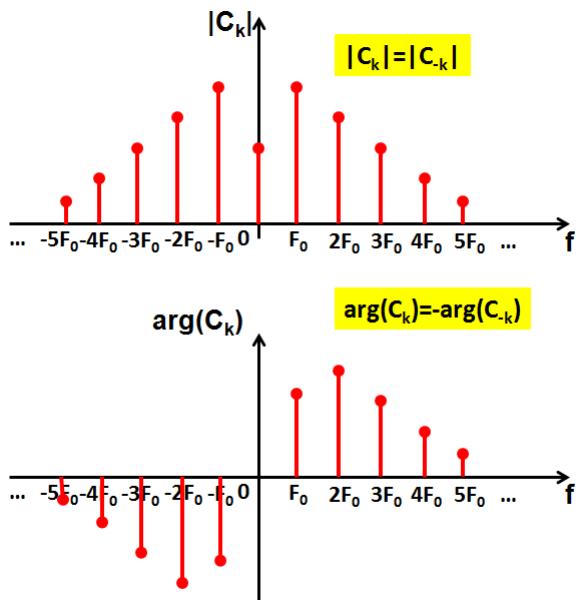


FIGURE 4.3 – Exemple de représentation du spectre de raies en amplitude (en haut) et en phase (en bas)

#### 4.6.1 Analyse spectrale d'un signal

Le développement en série de Fourier permet l'analyse spectrale d'un signal périodique, c'est-à-dire la richesse en composantes harmoniques. L'analyse du signal dans le domaine temporel ne le permet pas nécessairement.

Lorsqu'un signal ne contient qu'une composante fondamentale, on parle de signal monochromatique. Par exemple, le signal sonore généré par un diapason, est caractérisé par une fréquence fondamentale égale à 440 Hz. Ce type de signal est modélisé par une fonction exponentielle de la forme  $Re[e^{j\omega_0 t}]$  où  $\omega_0 = 2\pi \times 440$ . Pour un instrument de musique, cette fréquence fondamentale est accompagnée de fréquences harmoniques c'est-à-dire de composantes sonores dont les fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale. La richesse en harmoniques donne à l'instrument sa spécificité et son timbre pour chaque note. Si on s'intéresse maintenant au langage parlé, les voyelles sont des sons composés de la superposition de signaux dont les fréquences sont des multiples entiers d'une fréquence fondamentale appelée hauteur du son (*pitch* en anglais). Le phénomène physique de génération du son d'une voyelle repose sur l'impact des cordes vocales qui obturent périodiquement l'écoulement continu de l'air provenant des poumons. En aval des cordes, on pourrait mesurer une succession d'impulsions de pression d'air. La fréquence fondamentale de ces impulsions est d'environ 100 Hz pour les hommes et 200 Hz pour les femmes. Ces impulsions

répétitives très brèves sont riches en harmoniques. Le son d'une voyelle différera de celui d'une autre voyelle par l'importance respective des différentes harmoniques.

## 4.7 Excitation d'un système linéaire par un signal périodique

Lorsqu'un signal périodique  $x(t)$  excite un système linéaire à temps invariant, sa réponse peut être facilement déterminée à partir de la décomposition en série de Fourier de l'excitation. C'est ce qu'illustre la figure 4.4. En effet, en raison des propriétés de linéarité du développement en série de Fourier, la réponse  $y(t)$  sera égale à la décomposition en série de Fourier de l'excitation  $x(t)$ , mais dont les coefficients  $C_k$  seront pondérés par la fonction de transfert du système  $H$  en chacune des fréquences harmoniques de l'excitation. Cette propriété offre un moyen alternatif à la transformée de Laplace pour calculer la réponse d'un système linéaire.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k\omega_0)C_k e^{jk\omega_0 t} \quad (4.38)$$

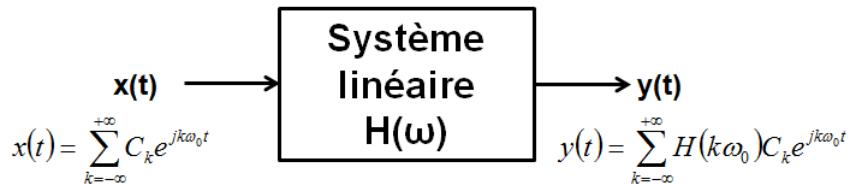


FIGURE 4.4 – Exemple de représentation du spectre de raies en amplitude (en haut) et en phase (en bas)

Une autre propriété des systèmes linéaires apparaît ici : lorsqu'il est excité par un signal avec un contenu spectral donné, un système linéaire ne peut enrichir ce contenu spectrale. Autrement dit, de nouvelles composantes harmoniques ne peuvent pas apparaître si le système est linéaire. Autrement, le système est non-linéaire.

## 4.8 Egalité de Parseval

On considère un signal périodique  $x(t)$  de période  $T_0$ , décomposable une série de Fourier. Chaque terme de la série de Fourier contribue à une partie de la puissance du signal. La puissance moyenne  $P_n$  de chacun de ces membres peut être reliée au coefficient de Fourier, dans leur version complexe selon 4.39. Chacun des coefficients au carré est homogène à une puissance.

$$P_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 \quad (4.39)$$

La même égalité peut s'écrire avec la version trigonométrique :

$$P_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = |A_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (|A_k|^2 + |B_k|^2) \quad (4.40)$$

Nous reviendrons sur les questions de puissance et d'énergie des signaux au chapitre 8.

## 4.9 Exercices

### Exercice 1

Développez en série de Fourier la fonction  $f(t) = |\sin(\alpha t)|$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  donné.

### Exercice 2

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction périodique de période 4, impaire, définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{si } t \in [0;1[ \\ 0 & \text{si } t \in [1;2[ \end{cases}$$

1. Dessinez le graphe de  $f$ . Calculer  $f(7)$ ,  $f(\frac{9}{2})$  et  $f(\frac{11}{2})$ .

2. Calculez les coefficients de Fourier de  $f$ .

### Exercice 3

Cet exercice est en relation avec l'exemple d'un signal rectangulaire présenté dans le cours. On considère un signal de même nature, de moyenne nulle, de période  $T_1$ , de fréquence  $f_1$  et d'amplitude 2, représenté par la fonction périodique  $s$ . On s'intéresse au produit scalaire de la fonction  $s$  avec les fonctions de base  $\cos(n\omega_1 t)$ ,  $n = 1, 2$  et  $3$  où  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ . La figure ci-dessous représente sur la première ligne, dans la colonne de gauche, le graphe de la fonction  $s$  superposé à celui de la fonction  $\cos(\omega_1 t)$  et dans la colonne de droite, le graphe du produit scalaire  $s(t)\cos(\omega_1 t)$  sur une période  $T_1$ . Sur la deuxième ligne sont représentés, dans la colonne de gauche, le graphe de la fonction  $s$  superposé à celui de la fonction  $\cos(2\omega_1 t)$  et dans la colonne de droite, le graphe du produit scalaire  $s(t)\cos(2\omega_1 t)$  sur une période  $T_1$ . Sur la troisième ligne sont représentés, dans la colonne de gauche, le graphe de la fonction  $s$  superposé à celui de la fonction  $\cos(3\omega_1 t)$  et dans la colonne de droite, le graphe du produit scalaire  $s(t)\cos(3\omega_1 t)$  sur une période  $T_1$ .

1. Définir la fonction  $s$ .
2. Que représente le produit scalaire de  $s$  par une fonction de base  $\cos(n\omega_1 t)$ ,  $n = 1, 2$  ou  $3$  ?
3. Interpréter qualitativement (sans calcul) les trois produits scalaires représentés sur la figure 4.5 en donnant leur signe et une indication de leur valeur algébrique.
4. A quel résultat (sans calcul) peut-on s'attendre si on effectue le produit scalaire de  $s$  par les fonctions de bases  $\sin(n\omega_1 t)$ ,  $n = 1, 2$  ou  $3$  ??
5. En considérant le signal  $s$  comme un signal retardé par rapport au signal étudié en cours et en utilisant les résultats établis dans le cours, calculer les coefficients de Fourier exponentiels de  $s$ . Donner la série de Fourier associée à  $s$ .

### Exercice 4

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0;1]$  de  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = t$ . On considère  $f$  comme la restriction de fonctions  $g_i$  avec  $i = 1, 2, 3$ , périodiques et continues par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . On se propose de déterminer plusieurs expressions de  $f$  sur  $]0;1[$  à partir du développement en séries de Fourier des fonctions  $g_i$ .

1. On considère la fonction  $g_1$ , périodique, de période  $T_1 = 3$ , définie par  $\forall t \in [0;3[ \quad g_1(t) = t$ .
- a. Représentez la fonction  $g_1$  sur l'intervalle  $[-3;6]$ .
  - b. Calculez les coefficients de Fourier de  $g_1$  et donnez la série de Fourier  $S_1$  associée à  $g_1$ .
  - c. Etudiez la convergence de  $S_1$ .
  - d. En déduire le développement en série de Fourier de  $f$  sur  $]0;1[$ .

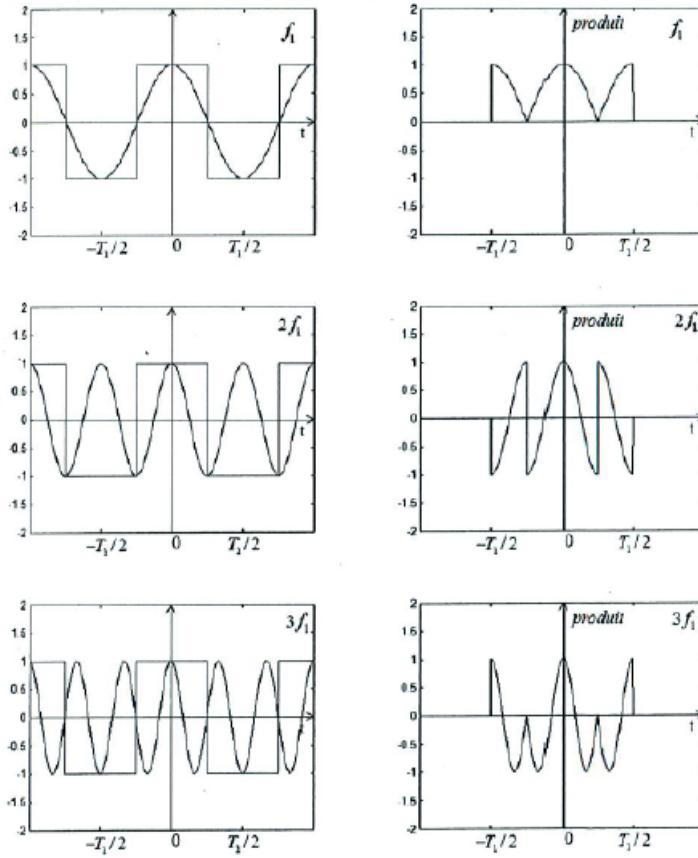


FIGURE 4.5 – Colonne de gauche : graphe de  $s$  et de  $\cos(\omega_1 t)$ ,  $\cos(2\omega_1 t)$ ,  $\cos(3\omega_1 t)$  - Colonne de droite : graphes de  $s(t)\cos(\omega_1 t)$ ,  $s(t)\cos(2\omega_1 t)$  et  $s(t)\cos(3\omega_1 t)$ .

2. On considère la fonction  $g_2$ , impaire, périodique, de période  $T_2 = 2$ , définie par  $\forall t \in [0;1[$   $g_2(t) = t$ .
- Représentez la fonction  $g_2$  sur l'intervalle  $[-3;3]$ .
    - Calculez les coefficients de Fourier de  $g_2$  et donnez la série de Fourier  $S_2$  associée à  $g_2$ .
    - Etudiez la convergence de  $S_2$ .
    - En déduire le développement en série de Fourier de  $f$  sur  $]0;1[$ .
3. On considère la fonction  $g_3$ , paire, périodique, de période  $T_3 = 2$ , définie par  $\forall t \in [0;1[$   $g_3(t) = t$ .
- Représentez la fonction  $g_3$  sur l'intervalle  $[-4;4]$ .
    - Calculez les coefficients de Fourier de  $g_3$  et donnez la série de Fourier  $S_3$  associée à  $g_3$ .
    - Etudiez la convergence de  $S_3$ .
    - En déduire le développement en série de Fourier de  $f$  sur  $]0;1[$ .

### Exercice 5

Donnez la définition, la période et la parité des fonctions représentées par les séries de Fourier suivantes et tracez leur graphe :

- $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2nt) = \sin(t) \text{ avec } t \in [0; \pi]$

$$2. 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi t) = 1 \text{ avec } t \in [0; 1]$$

$$3. \pi - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \sin(nt) = t \text{ avec } t \in [0; 2\pi]$$

### Exercice 6 - Signal de forme exponentielle

On considère la fonction  $x$  définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , de période  $T = 2\pi$ , par  $x(t) = e^t$  pour  $t \in [0; +2\pi[$ .

1. Tracez la fonction  $x(t)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; +2\pi[$ .
2. Cette fonction admet-elle un développement en série de Fourier ?
3. Montrez que les coefficients de Fourier sous la forme exponentielle sont égaux à  $c_n = \frac{1+jn}{2\pi(1+n^2)} (e^{2\pi} - 1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ .
4. En déduire les expressions des coefficients de Fourier sous leur forme trigonométrique.
5. Calculez la puissance moyenne des harmoniques, quelle que soit leur rang.
6. Calculez la puissance moyenne du signal.

### Exercice 7 - Modulation à largeur d'impulsion

La modulation à largeur d'impulsion (MLI) (Pulse Width Modulation PWM en anglais) est une technique couramment utilisée en électronique pour générer un signal analogique à partir d'un signal discret à deux états. Le signal MLI  $s_p(t)$  est constitué d'une suite périodique, de période  $T$ , d'impulsions  $s_i(t)$  définie par :

$$s_i(t) = \begin{cases} A & \text{si } t \in [0; \alpha T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\alpha \in [0; 1]$  est appelé le rapport cyclique du signal (duty ratio en anglais). Le principe est illustré à la figure 4.6. A partir d'un signal analogique de valeurs comprises entre 0 et  $A$ , un modulateur MLI va produire le signal MLI à partir de deux niveaux de tension seulement.

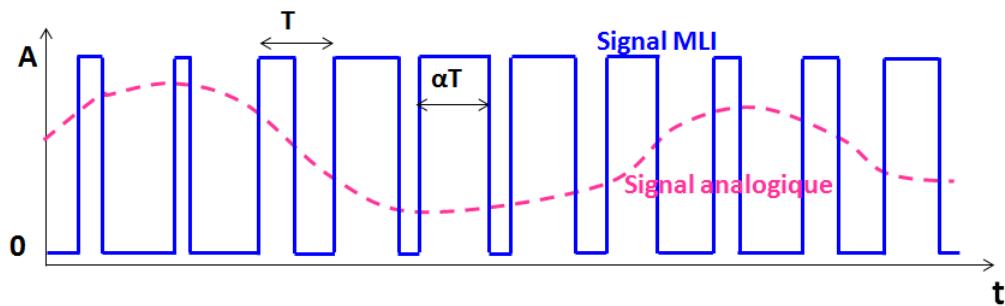


FIGURE 4.6 – Illustration modulation MLI

1. Vérifiez si on peut développer  $s_i(t)$  et  $s_p(t)$  en séries de Fourier.

2. Calculez les coefficients de Fourier exponentiels du signal MLI  $s_p(t)$  et vérifiez la relation avec les coefficients de Fourier réels.

3. Que deviennent ces coefficients si l'on considère le signal  $s_p(t)$  de même période mais retardé d'un temps  $\tau \in \mathbb{R}^*$ .

4. Calculez la puissance moyenne du signal, ainsi que celles de la somme de tous les termes de la série de Fourier. Sont-elles égales ?

5. Quelle est la puissance moyenne transportée par le premier harmonique ?

6. Une manière économique de reconstituer un signal analogique à partir du signal MLI est de le filtrer, à l'aide d'un filtre passe-bas que l'on supposera idéal. Sa fréquence de coupure est notée  $f_c$ . Quelle est la forme du signal selon  $f_c$  ? Quelle fréquence de coupure choisiriez-vous pour que le signal en sortie du filtre soit constant et proportionnel au rapport cyclique ? Est-ce un bon choix pour reconstituer le signal analogique ?

7. Quelle est l'énergie du signal en sortie du filtre ? En déduire le rendement du système de conversion ?



## 5. Transformée de Fourier

La décomposition en série de Fourier est un formidable outil d'analyse des signaux, mais aussi un moyen d'étude de la réponse des systèmes linéaires. Cependant, il est limité aux signaux périodiques, non bornés dans le temps. La transformée de Fourier constitue une extension de la décomposition en série de Fourier à toutes les fonctions dites apériodiques, bornées dans le temps. Dans ce chapitre, nous allons présenter de manière simple le passage de la décomposition en série de Fourier vers la transformée de Fourier, dont nous préciserons l'expression. Elle permet le passage du domaine temporel vers le domaine fréquentiel. Une transformée inverse est donc requise pour assurer le passage du domaine fréquentiel au domaine temporel : c'est le rôle de la transformée de Fourier. Nous préciserons les propriétés de la transformée de Fourier. Nous verrons qu'elles sont similaires non seulement à celles des séries de Fourier, mais aussi à celles de la transformée de Laplace.

### 5.1 De la série de Fourier à la transformée de Fourier

Le développement en série de Fourier suppose un signal périodique. Le raisonnement que nous proposons dans cette partie va nous permettre d'étendre ce développement aux signaux apériodiques. Un signal apériodique peut être vu comme un signal périodique de période infinie. Analysons les conséquences de ce passage à l'infini sur le développement en série de Fourier et le calcul des coefficients de Fourier.

Prenons le signal périodique  $x(t)$  illustré ci-dessous. Le signal est constitué d'une impulsion à durée  $\Delta$  limitée, répétée tous les  $n \cdot T_0$ . Un développement en série de Fourier peut être réalisé pour déterminer le contenu spectral du signal. Le spectre est discret, avec une infinité d'harmoniques de la composante fondamentale à la fréquence  $f_0 = \frac{1}{T_0}$ . L'amplitude des coefficients décroît avec la fréquence selon une enveloppe donnée.

Supposons qu'on élargisse la période sans toucher à la durée  $\Delta$  de l'impulsion, comme le montre la figure 5.2. Dans le domaine fréquentiel, les raies se rapprochent puisque la fréquence fondamentale  $f_0$  a diminué. Leurs amplitudes suivent toujours la même enveloppe. Que se passe-t-il si on poursuit l'augmentation de la période, en faisant tendre  $T_0$  vers l'infini ? Le signal  $x(t)$  devient un signal apériodique, borné dans le temps. Dans le domaine fréquentiel, l'écart entre chaque raie

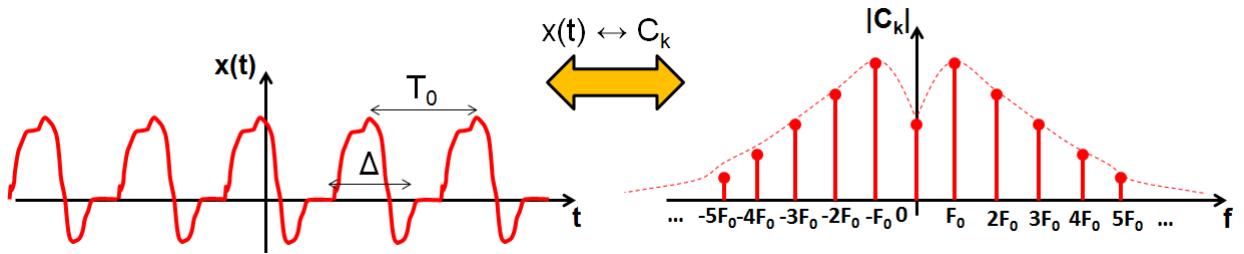


FIGURE 5.1 – Signal périodique (à gauche) et spectre (à droite)

s’annule et le spectre devient continu. Le spectre est donc défini à toutes les fréquences  $f$ ,  $\forall f \in \mathbb{R}$ .

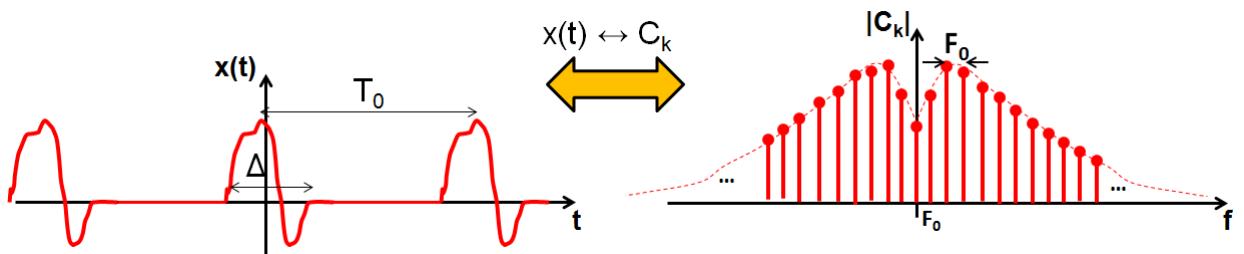


FIGURE 5.2 – Augmentation de la période du signal (à gauche) et effet sur le spectre (à droite)

Un premier problème se pose : la décomposition du signal comme une somme discrète de composantes harmoniques n'est plus adaptée puisque le spectre est continu. Ce problème est facilement résolu : en faisant tendre  $T_0$  vers l'infini, la somme devient une intégration. Le second problème dans le calcul des coefficients de Fourier vient du terme  $\frac{1}{T_0}$ , qui annule l'ensemble des coefficients de Fourier  $C_k$ . Une solution consiste à multiplier les coefficients de Fourier par la période  $T_0$  permettant de revenir à une valeur finie. En considérant ces deux modifications, et en notant  $f_0 = df$  tel que  $\lim_{T_0 \rightarrow +\infty} df = 0$  et  $kxdf = f$ , on peut écrire une nouvelle formule pour calculer le spectre (5.1) en repartant de la formule de calcul des coefficients de Fourier. Comme celui-ci est continu, on le note  $X(f)$  (figure 5.3).

$$\lim_{T_0 \rightarrow +\infty} T_0 \cdot C_k = \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} T_0 \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = X(f) \quad (5.1)$$

De même, on peut modifier la formule de décomposition en série de Fourier et déterminer une relation entre le signal  $x(t)$  et son spectre  $X(f)$ .

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk2\pi f t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k T_0 f_0 e^{jk2\pi f t}$$

$$\lim_{T_0 \rightarrow +\infty} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} dt \quad (5.2)$$

Ces deux nouvelles relations constituent la transformée de Fourier directe (du domaine temporel au domaine fréquentiel) et inverse (du domaine fréquentiel au domaine temporel).

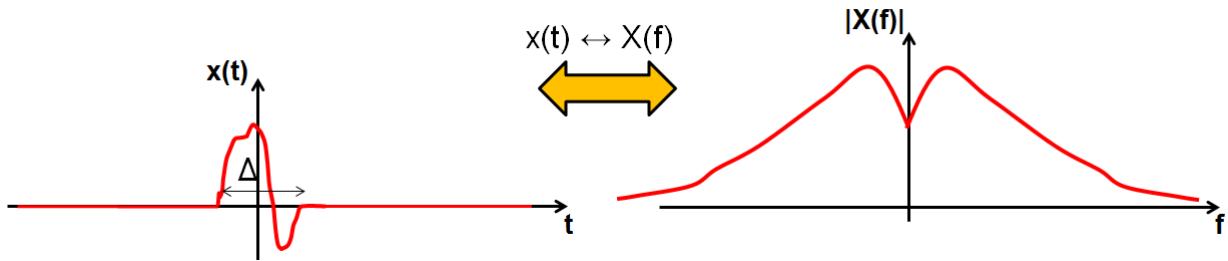


FIGURE 5.3 – Signal apériodique (à gauche) et spectre continu (à droite)

## 5.2 Transformées de Fourier

La transformation de Fourier constitue donc une généralisation du développement en série de Fourier pour les signaux apériodiques à support temporel borné. Elle dispose des mêmes propriétés que les séries de Fourier. On peut aussi étendre la transformée de Fourier aux signaux périodiques.

L'équation 5.3 donne l'expression de la transformée de Fourier, que l'on qualifie parfois de directe. Elle peut être vue comme un opérateur noté  $\mathcal{F}$ . Elle permet de calculer le spectre  $X(f)$  d'un signal temporel  $x(t)$ ,  $\forall f \in \mathbb{R}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}$ . La transformée de Fourier s'applique sur des signaux temporels à valeurs réels ou complexes. Dans ce chapitre, nous ne considérerons que des signaux temporels à valeurs réels. Par contre, le spectre  $X(f)$  est à valeurs complexes.

$$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (5.3)$$

L'équation donne l'expression de la transformée de Fourier inverse, permettant de retrouver le signal temporel  $x(t)$  à partir de son spectre. Elle peut aussi être vue comme un opérateur noté  $\mathcal{F}^{-1}$ .

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} df \quad (5.4)$$

La transformation de Fourier est bijective et unique : la transformée de Fourier de deux signaux temporels différents donnent deux spectres différents. Inversement, la transformée de Fourier inverse de deux spectres différents donne deux signaux temporels différents.

Les transformées de Fourier directe et inverse peuvent être réécrites en remplaçant la fréquences par la pulsation  $\omega = 2\pi f$ , donnant des relations plus compactes.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.5)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{+j\omega t} d\omega \quad (5.6)$$

**Lien avec la transformée de Laplace :** Lorsqu'on compare les expressions des transformées de Fourier et de Laplace bilatérale (équation 2.5), on remarque que les expressions sont quasi identiques. En prenant le cas particulier où  $p = j\omega$ , on retrouve l'expression de la transformée de Fourier à partir de celle de Laplace. Même chose pour leur transformées inverses.

La transformation de Laplace constitue donc une généralisation de la transformation de Fourier. Les propriétés de la transformée de Laplace, vues dans le chapitre 3, se retrouveront donc lorsqu'on étudiera celles de la transformée de Fourier.

### 5.3 Représentation du spectre

Comme pour le développement en série de Fourier, le résultat de la transformée de Fourier peut être visualisé sous la forme d'un spectre tracé dans le domaine fréquentiel. A la différence du spectre d'un signal périodique, le spectre d'un signal apériodique est continu, donc défini pour toutes les fréquences  $f \in \mathbb{R}$ .

Le résultat de la transformée de Fourier étant une grandeur complexe, le module et la phase sont représentées, comme l'illustre la figure 5.4. Une représentation des parties réelles et imaginaires est aussi envisageable. Le mot spectre est généralement réservé pour la représentation de l'amplitude. En effet, il s'agit de la représentation la plus courante, car elle permet de visualiser très rapidement la distribution de l'énergie d'un signal dans le domaine fréquentiel. Cela est à l'origine d'une erreur courante. En ne représentant que l'amplitude du spectre, on omet la phase faisant du spectre une valeur réelle. Si on cherche à retrouver la forme temporelle du signal en omettant la phase, le résultat est bien entendu faussé.

Lorsqu'on trace le spectre d'un signal  $x(t)$  périodique, l'unité de chaque raie du spectre d'amplitude est la même que le signal  $x(t)$ , puisque chaque raie symbolise un terme de la décomposition en série de Fourier. Par exemple, si le signal  $x(t)$  représente l'évolution temporelle d'une tension exprimée en V, chaque raie représente une tension exprimée en V. L'unité du spectre de raies en amplitude est donc le volt dans cet exemple. Mais est-ce toujours le cas pour le spectre continu d'un signal périodique  $x(t)$ ? Est-ce que l'amplitude de son spectre  $|X(f_0)|$  à une fréquence  $f_0$  porte la même unité que le signal temporel ?

En repartant de l'équation de la transformée de Fourier inverse (5.4), on se rend compte que ça n'est pas le cas. En effet, on retrouve le signal temporel en l'intégrant sur un intervalle du domaine fréquentiel. En d'autres termes, on le retrouve en multipliant le spectre à chaque fréquence par un intervalle élémentaire de fréquence, et en sommant ces produits élémentaires. On en déduit que le spectre n'est pas homogène à l'amplitude, mais à une densité spectrale d'amplitude, soit un rapport entre l'amplitude et un intervalle de fréquence. Ainsi, lorsqu'on trace l'amplitude du spectre, on trace en fait sa densité spectrale d'amplitude. Pour alléger la tournure, on préfère parler abusivement d'amplitude. En reprenant l'exemple du signal électrique exprimé en V, la représentation de la densité spectrale d'amplitude est exprimée en V/Hz (ou en  $V/rad.s^{-1}$ ).

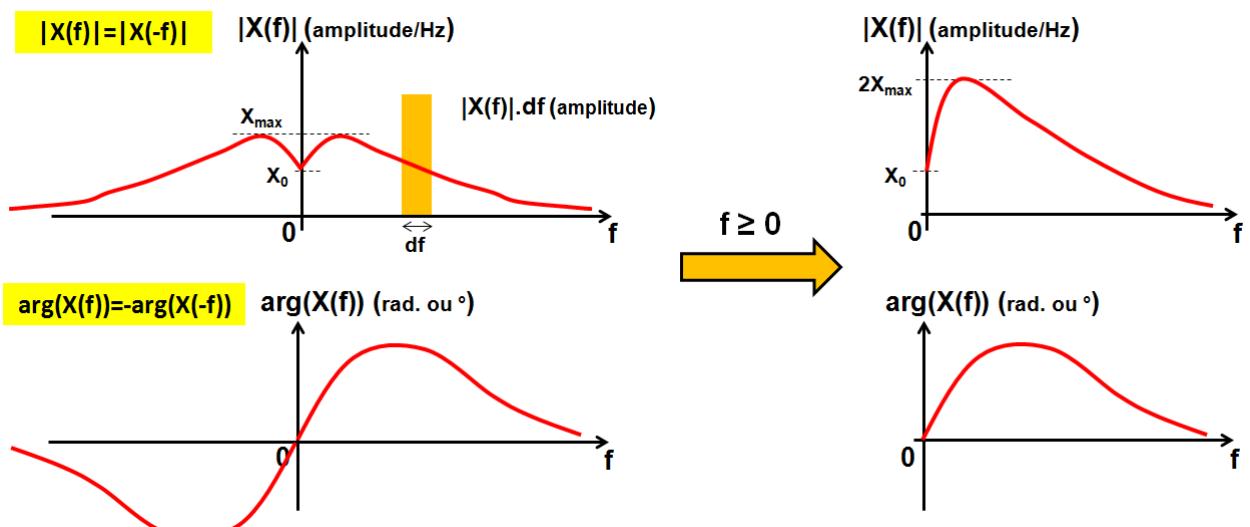


FIGURE 5.4 – Représentation du spectre : symétrique (à gauche) et asymétrique (à droite)

On retrouve les mêmes propriétés de symétries du spectre entre les fréquences positives et

négatives qu'avec la décomposition en série de Fourier. Le module est symétrique par rapport à  $f = 0$ , tandis que la phase est antisymétrique. Autrement dit, le spectre à la fréquence  $-f$  est le conjugué du spectre à la fréquence  $f$ . Leurs parties réelles sont égales, mais leurs parties imaginaires sont opposées.

$$|X(f)| = |X(-f)| \quad \text{Arg}(X(f)) = -\text{Arg}(X(-f)) \quad (5.7)$$

$$X(f) = X(-f)^* \Rightarrow \text{Re}(X(f)) = \text{Re}(X(-f)) \quad \text{et} \quad \text{Im}(X(f)) = -\text{Im}(X(-f)) \quad (5.8)$$

Dans le cas d'un signal temporel à valeurs réels, la représentation que nous avons présenté est dite symétrique car elle présente le spectre sur les fréquences positives et négatives. Afin d'alléger cette représentation, il est courant de tracer une représentation asymétrique, c'est-à-dire ne représentant le spectre que pour les fréquences positives ou nulles. Elle est illustrée à la figure 5.4. Cependant, si on conserve inchangé la densité spectrale d'amplitude et si on n'exploite que le spectre sur le domaine fréquentiel positif, on risque de diviser par deux l'amplitude du signal. Afin d'éviter toute ambiguïté, cette représentation asymétrique nécessite de doubler la densité spectrale d'amplitude (sauf en  $f = 0$ ). Ainsi, en intégrant sur tout le domaine fréquentiel les densités spectrales d'amplitude des deux représentations, on retrouve la même amplitude. Pour retrouver la représentation spectrale symétrique, il faudra :

- on divise par deux le module et on le duplique du côté des fréquences négatives
- on duplique la phase que l'on inverse du côté des fréquences négatives.

Il est à noter que le même procédé aurait pu être utilisé pour une représentation spectrale asymétrique de la décomposition en série de Fourier.

## 5.4 Exemples de calcul de transformée de Fourier

Dans cette partie, le calcul de la transformée de Fourier est illustré à travers trois exemples de fonctions courantes.

### 5.4.1 Fonctions porte et sinus cardinal

La fonction porte  $\pi_\tau(t)$ , illustrée ci-dessous, est une impulsion rectangulaire de durée  $\tau$  centrée en  $t = 0$ . Nous normalisons son amplitude à 1. Nous cherchons la transformée de Fourier de cette fonction, en appliquant l'équation 5.3.

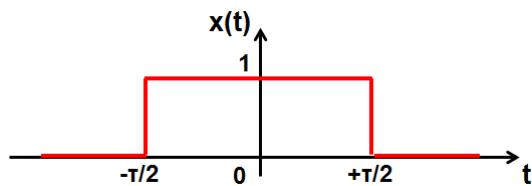


FIGURE 5.5 – Fonction porte

$$\Pi_\tau(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_\tau(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} 1 e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-j2\pi f} [e^{-j2\pi f t}]_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}}$$

$$\Pi_\tau(f) = \frac{1}{-j2\pi f} (e^{+j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}}) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f}$$

Le résultat fait apparaître une fonction particulière appelée sinus cardinal  $sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ , qui s'annule à chaque fois que  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ . Cette fonction est maximale en  $x = 0$  et devient égale à 1. Le résultat de la transformée de Fourier d'une fonction porte est donc une fonction sinus cardinal tel que :

$$\Pi_\tau(f) = \tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = \tau \text{sinc}(\pi f \tau) \quad (5.9)$$

Le résultat est illustré sur la figure 5.6. Le spectre est purement réel. Il est maximal en  $f = 0$  (composante continue). Il s'annule à chaque fois que  $\pi f \tau = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ , donc pour  $f = \frac{k}{\tau}$ .

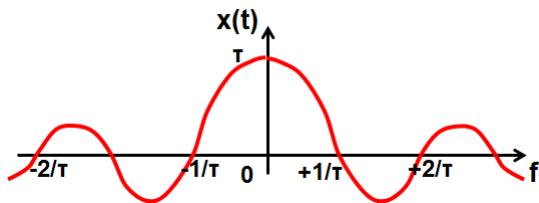


FIGURE 5.6 – Transformée de Fourier d'une fonction porte : sinus cardinal

Ces deux fonctions sont fortement liées par la transformée de Fourier. Pour l'illustrer, considérons le spectre  $X(f)$  d'un signal qui serait borné dans le domaine fréquentiel. En notant  $\frac{1}{\tau}$  la plage fréquentielle occupée par le spectre, celui-ci peut être modélisé par une fonction porte  $\Pi_{\frac{1}{\tau}}(f)$ . On cherche à déterminer le signal temporel  $x(t)$  qui possède un tel spectre, en calculant la transformée de Fourier inverse.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{\frac{1}{\tau}}(f) e^{+j2\pi ft} df = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} e^{+j2\pi ft} df \\ x(t) &= \frac{1}{j2\pi t \tau} [e^{+j2\pi ft}]_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{\pi t \tau} \frac{e^{j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}}}{2j} = \frac{\sin(\pi \frac{t}{\tau})}{\pi t \tau} = \frac{1}{\tau} \text{sinc}(\pi \frac{t}{\tau}) \end{aligned}$$

Le résultat indique que la transformée de Fourier d'une fonction sinus cardinal est une fonction porte ! Il est intéressant de noter une dualité entre les domaines temporels et fréquentiels : le spectre d'un signal borné dans le temps est non borné dans le domaine fréquentiel. Inversement, un signal borné en fréquence n'est pas borné dans le domaine temporel.

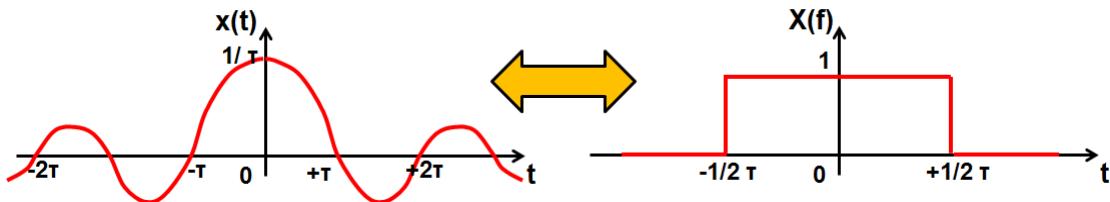


FIGURE 5.7 – Transformée de Fourier d'une fonction sinus cardinal : une fonction porte

### 5.4.2 Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac n'est certes pas une fonction (c'est une distribution), mais on peut calculer sa transformée de Fourier.

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f0} = 1 \quad (5.10)$$

La transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac est constant et égal à 1. Le spectre est donc uniforme quelle que soit la fréquence, correspondant à un signal "blanc". Il rejoint la remarque faite précédemment sur la dualité entre des signaux bornés dans le temps et bornés en fréquence. La durée de l'impulsion de Dirac est infiniment brève. Il en résulte un spectre infiniment large !

Ce résultat est conforme à la définition de l'impulsion de Dirac, dont l'amplitude est infinie. La valeur '1' correspond à une densité spectrale d'amplitude. Pour revenir à l'amplitude du signal, il faudrait intégrer cette valeur sur tout le domaine fréquentiel, conduisant à une amplitude infinie.

On peut aussi s'intéresser à la transformée de Fourier inverse d'une impulsion de Dirac, centrée sur une fréquence  $f_0$ . Une telle distribution se note  $\delta(f - f_0)$ . Elle indique un spectre dont toute la densité spectrale d'amplitude est concentrée en un point de fréquence  $f_0$ . L'amplitude du signal temporel associé sera donc finie et il pourra être représentée par une fonction. On peut cependant remarquer qu'un tel spectre ne peut être celui d'un signal réel, puisque le spectre n'est pas symétrique. Le résultat, indiqué ci-dessous, le confirme : la transformée de Fourier inverse d'une impulsion de Dirac est une exponentielle complexe. Dans le cas où l'impulsion de Dirac est centrée en  $f=0$ , le spectre redevient symétrique et correspond à celui d'un signal continu égal à 1.

$$\mathcal{F}(\delta(f - f_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_0 t} \quad (5.11)$$

### 5.4.3 Fonctions cosinus et sinus

De prime abord, la transformée de Fourier d'une fonction sinusoïdal ou cosinusoïdal ne semble pas une question compliquée. Comme il s'agit de fonctions périodiques, on peut les développer en séries de Fourier. Celles-ci ne sont constituées que de la composante harmonique fondamentale. On s'attend donc à ce que la transformée de Fourier de ces fonctions puissent être représentée par deux impulsions de dirac, centrées en  $f_0$  et en  $-f_0$ .

Cependant, si on applique la transformée de Fourier à une fonction (co)sinusoïdale, on arrive à une difficulté de calcul sérieuse. Prenons l'exemple d'une fonction cosinusoïdale et appliquons l'opérateur transformée de Fourier. Le cosinus peut être développé sous la forme de deux exponentielles complexes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-j\omega t} dt \\ \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j(\omega_0 - \omega)t} + e^{-j(\omega_0 + \omega)t}}{2} dt \end{aligned}$$

Il nous faut intégrer deux termes exponentiels complexes sur l'ensemble des réels, sachant que ces fonctions ne convergent pas vers une valeurs finie lorsque  $t$  tend vers l'infini. La résolution de ces intégrales n'est pas triviale et nécessite la mise en œuvre de concepts mathématiques qui dépassent le cadre de ce cours.

Une solution, plus simple, consiste à utiliser le résultat de la partie précédente, qui nous à montrer que la transformée de Fourier d'une exponentielle complexe, de fréquence  $f_0$ , est l'impulsion de Dirac  $\delta(f - f_0)$ . Puisque la fonction cosinus est la superposition de deux exponentielles complexes, de fréquence  $f_0$  et  $-f_0$ , on peut facilement en déduire la transformée de Fourier d'une fonction cosinusoïdale :

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right] = \frac{1}{2} \mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \frac{\delta(f - f_0)}{2} + \frac{\delta(f + f_0)}{2} \quad (5.12)$$

De même, on peut en déduire celle d'une fonction sinusoïdale :

$$\mathcal{F}[\sin(2\pi f_0 t)] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] - \frac{1}{2j}\mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \frac{\delta(f - f_0)}{2j} - \frac{\delta(f + f_0)}{2j} \quad (5.13)$$

Le spectre de ces deux fonctions est représenté sur la figure 5.8 .

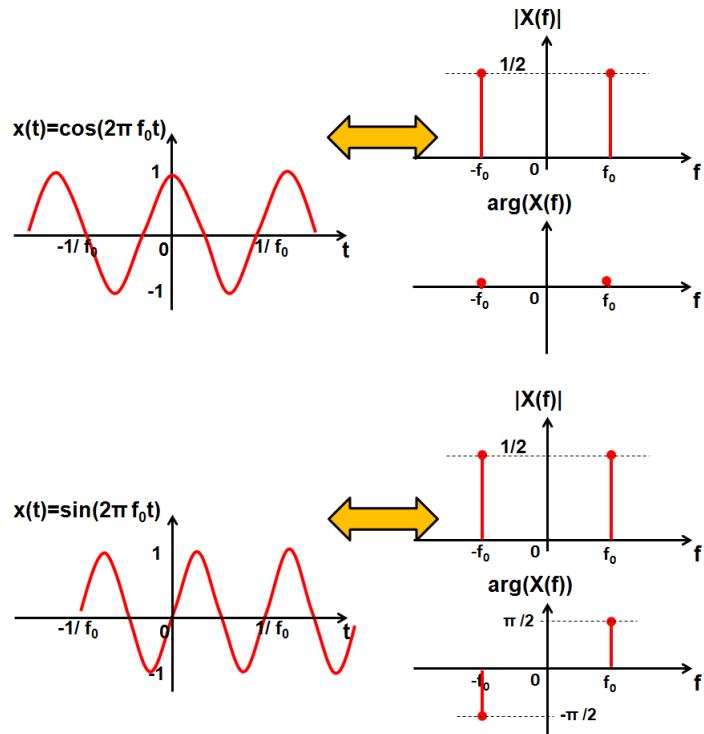


FIGURE 5.8 – Transformée de Fourier des fonctions cosinus et sinus

## 5.5 Propriétés de la transformée de Fourier

On retrouve les mêmes propriétés que pour la décomposition en série de Fourier et la transformée de Laplace. Le tableau 5.1 récapitule les propriétés principales.

TABLE 5.1 – Tableau récapitulatif des propriétés de la transformée de Fourier

Linéarité	$ax(t) + by(t) \Leftrightarrow aX(f) + bY(f)$
Théorème du retard	$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Théorème du changement d'échelle $y(t) = x(at)$	$Y(f) = \frac{1}{ a }X(\frac{f}{ a })$
Dérivée temporelle	$y(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k} \Leftrightarrow Y(f) = (j2\pi f)^k X(f)$
Dérivée fréquentielle	$Y(f) = \frac{d^k X(f)}{df^k} \Leftrightarrow y(t) = (-j2\pi t)^k x(t)$
Intégration temporelle	$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow Y(f) = \frac{1}{2}X(0)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$
Produit de convolution dans le domaine temporel	$y(t) = x_1 * x_2(t) \Leftrightarrow Y(f) = X_1(f) \cdot X_2(f)$
Dualité	si $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ alors $X(t) \Leftrightarrow x(-f)$
Produit de convolution dans le domaine fréquentiel	$y(t) = x_1 \cdot x_2(t) \Leftrightarrow Y(f) = X_1 * X_2(f)$

## 5.6 Table de transformée de Fourier courante

Le tableau 5.2 récapitule les transformées de Fourier de fonctions courantes.

TABLE 5.2 – Tableau récapitulatif des propriétés de la transformée de Fourier

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
Fonction porte $x(t) = \pi_\tau(t)$	$X(f) = \tau \text{sinc}(\pi f \tau)$
Sinus cardinal $x(t) = \frac{1}{\tau} \text{sinc}(\pi \frac{t}{\tau})$	$X(f) = \Pi_{\frac{1}{\tau}}(f)$
Fonction triangle $x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{\tau} & \text{si }  t  < \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$X(f) = \text{sinc}(\pi \frac{t}{\tau})^2$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Cosinus $\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$
Sinus $\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}$
Fonction signe $x(t) = \text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$	$X(f) = \frac{1}{j\pi f}$
Echelon de Heaviside $x(t) = u(t)$	$X(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$
$x(t) = \alpha e^{-\alpha t} u(t)$	$X(f) = \frac{\alpha}{\alpha + j2\pi f}$
$x(t) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha t }$	$X(f) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$
$x(t) = \alpha 2t e^{-\alpha t } u(t)$	$X(f) = \frac{\alpha^2}{(\alpha + j2\pi f)^2}$
$x(t) = e^{-\alpha t} \cos(2\pi f_0 t) u(t)$	$X(f) = \frac{\alpha + j2\pi f}{(\alpha + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$
$x(t) = e^{-\alpha t} \sin(2\pi f_0 t) u(t)$	$X(f) = \frac{2\pi f_0}{(\alpha + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$

## 5.7 Excitation d'un système linéaire par un signal périodique

Lorsqu'un signal  $x(t)$  excite un système linéaire à temps invariant, sa réponse peut être facilement déterminée à partir de sa transformée de Fourier de l'excitation. C'est ce qu'illustre la figure 5.9. En effet, en raison des propriétés de linéarité de la transformée de Fourier, la réponse  $y(t)$  sera égale à celle-ci, mais pondérée par la fonction de transfert du système  $H$ . Cette propriété offre un moyen alternatif à la transformée de Laplace pour calculer la réponse d'un système linéaire.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(f)] = \mathcal{F}^{-1}[H(f)X(f)] \quad (5.14)$$

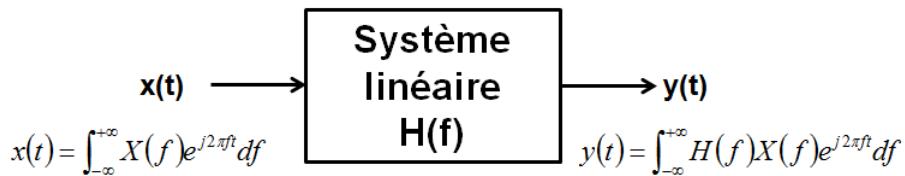


FIGURE 5.9 – Exemple de représentation du spectre de raies en amplitude (en haut) et en phase (en bas)

## 5.8 Exercices

### Exercice 1

On considère le signal  $s_1$  défini pour tout réel  $t$  par :

$$s_1(t) = e^{-at} u(t)$$

où  $u(t)$  est la fonction échelon de Heaviside et  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Tracez le graphe de  $s_1$ . Déterminez sa transformée de Fourier  $S_1$ .

2. En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier, déterminer après avoir tracé le graphe des signaux  $s_2$  et  $s_3$  :

- la transformée de Fourier  $S_2$  du signal  $s_2$  défini pour tout réel  $t$  par  $s_2(t) = e^{at}u(-t)$ .
- la transformée de Fourier  $S_3$  du signal  $s_3$  défini pour tout réel  $t$  par  $s_3(t) = e^{-a|t|}$ .
- la transformée de Fourier  $S_4$  du signal  $s_4$  défini pour tout réel  $t$  par  $s_4(t) = -e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t)$ .

### Exercice 2

Calculez les transformées de Fourier de signaux suivants :

- $v(t) = \cos(2\pi f_0 t)\pi_{T_0}(t)$
- $w(t) = \delta(t - T_e) + \delta(t) + \delta(t + T_e)$
- $x(t) = \delta(t - 2T_e) + \delta(t) + \delta(t + 2T_e)$
- $x(t) = te^{-at}u(t)$ ,  $a > 0$

e. La fonction  $y(t)$  décrite sur la figure 5.10.

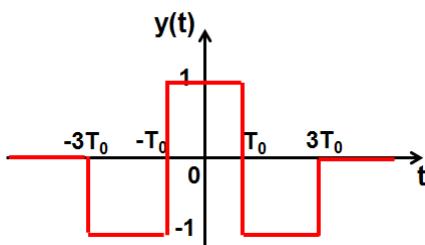


FIGURE 5.10 – Figure exercice 2

### Exercice 3 - Signal numérique

On considère l'impulsion de forme trapézoïdale présentée sur la figure 5.11. Celle-ci constitue un modèle simplifié des signaux électriques numériques.

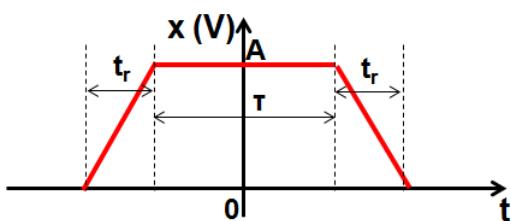


FIGURE 5.11 – Figure exercice 3

1. Calculez la transformée de Fourier du signal.
2. Esquissez l'allure de son spectre (module seulement). Précisez l'unité.
3. Calculez l'énergie de ce signal.
4. Le spectre est-il à bande limitée ? Quelle(s) paramètre(s) affectent l'occupation spectrale du signal ?

**Exercice 4**

Soit un filtre passe-bas RC, avec  $R = 1 \text{ k}\Omega$  et  $C = 1 \mu\text{F}$ . On envoie en entrée un signal  $x(t) = e^{-10^3 t} u(t)$ .

1. Etablir la fonction de transfert du filtre en fonction de la fréquence.
2. Calculez la transformée de Fourier  $X(f)$  du signal  $x(t)$ .
3. Déterminez le spectre de la réponse du filtre.
4. Calculez la réponse du filtre dans le domaine temporel.





## 6. Analyse dans le domaine temporel

Jusque-là, nous avons principalement calculé la réponse de systèmes LTI en passant par le domaine fréquentiel, en utilisant les notions de fonctions de transfert, de transformée de Fourier et de Laplace. Cette approche permettait de calculer facilement cette réponse. Tous les calculs auraient pu être effectué en restant dans le domaine temporel à partir de la réponse impulsionnelle du système, que nous avions introduite au chapitre 2. Nous l'avions laissé de côté momentanément car son utilisation passait par un calcul relativement complexe, appelé produit de convolution. Nous allons le détailler dans ce chapitre. Nous pourrions croire que nous sommes en train de présenter un nouvel outil pour analyser l'effet d'un même système LTI. Nous allons voir au contraire que les concepts de fonction de transfert et de réponse impulsionnelle sont intimement liées.

### 6.1 Réponse impulsionnelle

#### 6.1.1 Définition

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, il s'agit de la réponse d'un système LTI à une excitation impulsionnelle élémentaire, modélisée par une impulsion de Dirac. Sa connaissance permet de déterminer la réponse du système quelle que soit l'excitation appliquée à l'aide de la relation suivante, présentée au chapitre 2.

$$y(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = x * h(t) \quad (6.1)$$

La réponse impulsionnelle et la fonction de transfert d'un système sont reliées par la transformée de Laplace. Plusieurs moyens permettent de le démontrer. Le plus simple consiste à exploiter le lien entre la multiplication et le produit de convolution : un produit de convolution dans le domaine temporel est équivalent à une multiplication dans le domaine fréquentiel.

$$y(t) = h * x(t) \longleftrightarrow Y(p) = H(p) \cdot X(p) \quad (6.2)$$

Dans la prochaine partie, nous allons détailler les propriétés du produit de convolution et voir comment le mettre en œuvre pour résoudre l'équation 6.1.

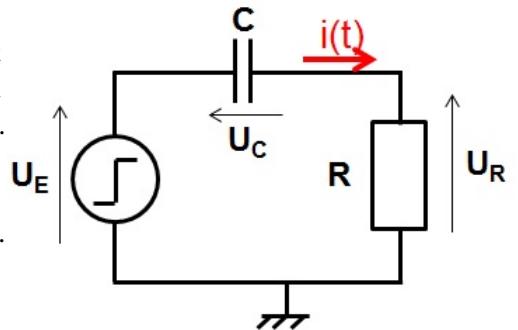
### 6.1.2 Extraction de la réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système peut s'obtenir de différentes manières. Expérimentalement, elle peut s'extraire en excitant le système par une impulsion élémentaire (tout du moins une forme s'en approchant). La réponse impulsionnelle sera directement la réponse du système. Une manière alternative est d'utiliser échelon unitaire  $a(t)$ , parfois plus simple à générer qu'une impulsion. La réponse impulsionnelle est ensuite déduite en dérivant de la réponse indicelle.

$$h(t) = \frac{da}{dt} \quad (6.3)$$

La réponse impulsionnelle peut aussi être déterminée à partir de la fonction de transfert. Dans le domaine de Laplace, nous avons vu que la réponse impulsionnelle est égale à la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert. De même, dans l'espace des fréquences, la réponse impulsionnelle est la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert. Si l'expression de la fonction de transfert est disponible, on peut en déduire celle de la réponse impulsionnelle, à condition de savoir calculer sa transformée de Laplace ou Fourier inverse. Nous allons l'illustrer avec l'exemple suivant.

On reprend l'exemple du circuit RC (filtre passe-haut d'ordre 1) dans le chapitre 3, dont nous avions déterminé la fonction de transfert ( $H(p)$ ) et la réponse  $u_R(t)$  à un échelon. On considère qu'initialement le condensateur C n'est pas chargé. Nous allons vérifier qu'on retombe sur la même réponse impulsionnelle à partir de ces deux informations. La fonction de transfert du circuit est donnée par :



$$H(p) = \frac{p}{p + \frac{1}{\tau}}, \text{ avec } \tau = RC$$

On obtient la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du circuit à partir de la transformée de Laplace inverse de la fonction de transfert. On remarquera que le "p" au numérateur introduit un effet déivateur. La transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction nécessite de connaître la condition initiale. En  $t = 0^+$ , comme le condensateur est initialement déchargé, la tension aux bornes de la résistance est égale à l'excitation :  $u_R(0^+) = \delta(t)$ .

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[p \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}] \implies h(t) = u_R(0^+) + \frac{d}{dt}(e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A partir de la réponse à un échelon, en considérant un échelon unitaire qui démarre en  $t = 0$ , la réponse indicelle du circuit est donnée par :  $a(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$ . On en déduit la réponse impulsionnelle en dérivant la réponse indicelle.

$$h(t) = \frac{da(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t))$$

$$h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{du(t)}{dt} + \frac{d}{dt}(e^{-\frac{t}{\tau}}) u(t)$$

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

Les deux approches nous donnent bien la même réponse.

## 6.2 Produit de convolution

### 6.2.1 Définition

Soient deux fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$  définis sur l'ensemble  $L^1(\mathbb{R})$ . Leur produit de convolution est donné par l'équation 6.4.

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \quad (6.4)$$

### 6.2.2 Propriétés

Le tableau ci-dessous résume les principales propriétés du produit de convolution.

TABLE 6.1 – Propriétés du produit de convolution

Commutativité	$x * y(t) = y * x(t)$
Distributivité	$z * (x + y)(t) = z * x(t) + z * y(t)$
Associativité	$z * (x * y)(t) = (z * x) * y(t)$
Retournement temporel	$z(t) = x * y(t) \Rightarrow z(-t) = x * y(-t)$
Point de départ	Si $x(t)=0$ pour $t < t_{x0}$ et $y(t)=0$ pour $t < t_{y0}$ , alors $z(t) = x * y(t) = 0$ pour $t < t_{x0} + t_{y0}$
Point final	Si $x(t)=0$ pour $t > t_{x1}$ et $y(t)=0$ pour $t > t_{y1}$ , alors $z(t) = x * y(t) = 0$ pour $t > t_{x1} + t_{y1}$
Durée	Soit $x(t)$ et $y(t)$ de durées finies $T_x$ et $T_y$ . Si $z(t) = x * y(t)$ , la durée du signal $z(t)$ est égale à $T_z = T_x + T_y$ .

Une propriété importante est l'équivalence entre le produit de convolution dans le domaine temporelle et la multiplication dans le domaine fréquentiel. Soient  $x(t)$  et  $y(t)$  deux signaux temporels, dont les transformées de Fourier sont  $X(f)$  et  $Y(f)$ . La propriété précédente est donnée par (6.5). C'est cette propriété qui rend l'analyse fréquentielle intéressante dans l'étude des systèmes, puisque l'effet d'un système sur une excitation peut être déterminé par une simple multiplication, si les signaux sont exprimés dans le domaine fréquentiel.

$$x * y(t) \iff X(f) \cdot Y(f) \quad (6.5)$$

La réciproque existe : la multiplication entre deux signaux dans le domaine temporel est équivalente à un produit de convolution dans le domaine fréquentiel (6.6).

$$x \cdot y(t) \iff X * Y(f) \quad (6.6)$$

Une dernière propriété importante est liée à l'impulsion de Dirac. Celle-ci correspond à l'élément neutre du produit de convolution (l'équivalent d'une multiplication par 1), comme le montre 6.7. Cependant, si l'impulsion est décalée de  $t_0$ , alors le résultat du produit de convolution sera aussi décalée de  $t_0$  (6.8).

$$x(t) \cdot \delta(t) = x(t) \quad (6.7)$$

$$x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (6.8)$$

#### Exemple :

Soit un filtre caractérisé par une réponse impulsionnelle  $h(t)$ . Il est excité en entrée par le signal  $x(t) = 2\delta(t) + 3\delta(t - 1) - 4\delta(t - 2)$ . Déterminez la réponse  $y(t)$  de ce filtre.

En utilisant la propriété de distributivité du produit de convolution, on trouve facilement que la réponse du filtre est donnée par :

$$y(t) = 2h(t) + 3h(t-1) - 4h(t-2)$$

### 6.2.3 Mise en œuvre du produit de convolution

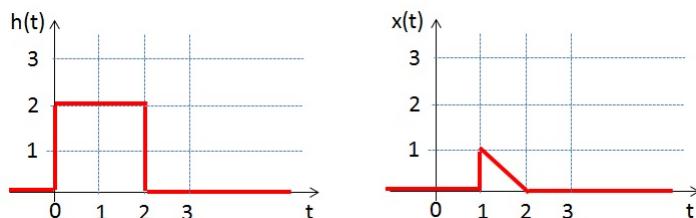
Dans cette partie, nous allons décrire une démarche permettant de calculer manuellement le résultat d'un produit de convolution. Nous considérons un système causal dont on connaît la réponse impulsionale  $h(t)$  ainsi que l'excitation  $x(t)$ . On appelle  $y(t)$  le résultat du produit de convolution. L'opération considérée s'écrit donc :

$$y(t) = h * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau$$

Pour déterminer chaque point en un temps  $t_0$  donné de la fonction  $y(t)$ , les différentes étapes à suivre sont les suivantes et sont illustrées à la figure 6.1 :

1. Changement de variable : on remplace  $t$  par  $\tau$ .
2. On trace  $h(\tau)$ .
3. Pliage de la fonction  $x(\tau)$  c'est-à-dire qu'on inverse l'axe temporel. On trace donc  $x(-\tau)$ .
4. Décalage de la fonction pliée : on décale de  $t_0$  la fonction  $x(-\tau)$  pour tracer la fonction  $x(t_0 - \tau)$ . Si  $t_0 > 0$ , alors la fonction  $x(t_0 - \tau)$  est décalée vers la droite.
5. Multiplication terme à terme de  $h(\tau)$  et  $x(t_0 - \tau)$ .
6. Intégration du produit sur  $\mathbb{R}$ . L'aire sous la courbe donne  $y(t_0)$ .

Cette suite d'opérations est répétée pour obtenir les valeurs de tous les points de  $y(t)$ .



### 6.2.4 Durée du produit de convolution

Dans l'exemple graphique ci-dessous, les signaux  $h(t)$  et  $x(t)$  sont de durées finies, respectivement égales à 2 et 1. On remarque que celle du résultat du produit de convolution l'est aussi, et sa durée est égale à 3. Ce résultat se comprend à partir de la formule du produit de convolution, mais aussi par l'analyse graphique du calcul. De manière générale, si on réalise le produit de convolution de deux signaux  $x(t)$  et  $h(t)$  de durées  $T_x$  et  $T_h$ , la durée  $T_y$  du résultat  $y(t)$  du produit de convolution est donnée par 6.9. Si le signal  $x(t)$  démarre en  $T_{x_{min}}$  et s'arrête en  $T_{x_{max}}$  et si le signal  $h(t)$  démarre en  $T_{h_{min}}$  et s'arrête en  $T_{h_{max}}$ , alors les bornes  $T_{y_{min}}$  et  $T_{y_{max}}$  du signal  $y(t)$  sont données par 6.10.

$$T_y = T_h + T_x \quad (6.9)$$

$$T_{y_{min}} = T_{h_{min}} + T_{x_{min}} \quad T_{y_{max}} = T_{h_{max}} + T_{x_{max}} \quad (6.10)$$

### 6.3 Exemple : calcul de la réponse d'un filtre à partir de sa réponse impulsionnelle

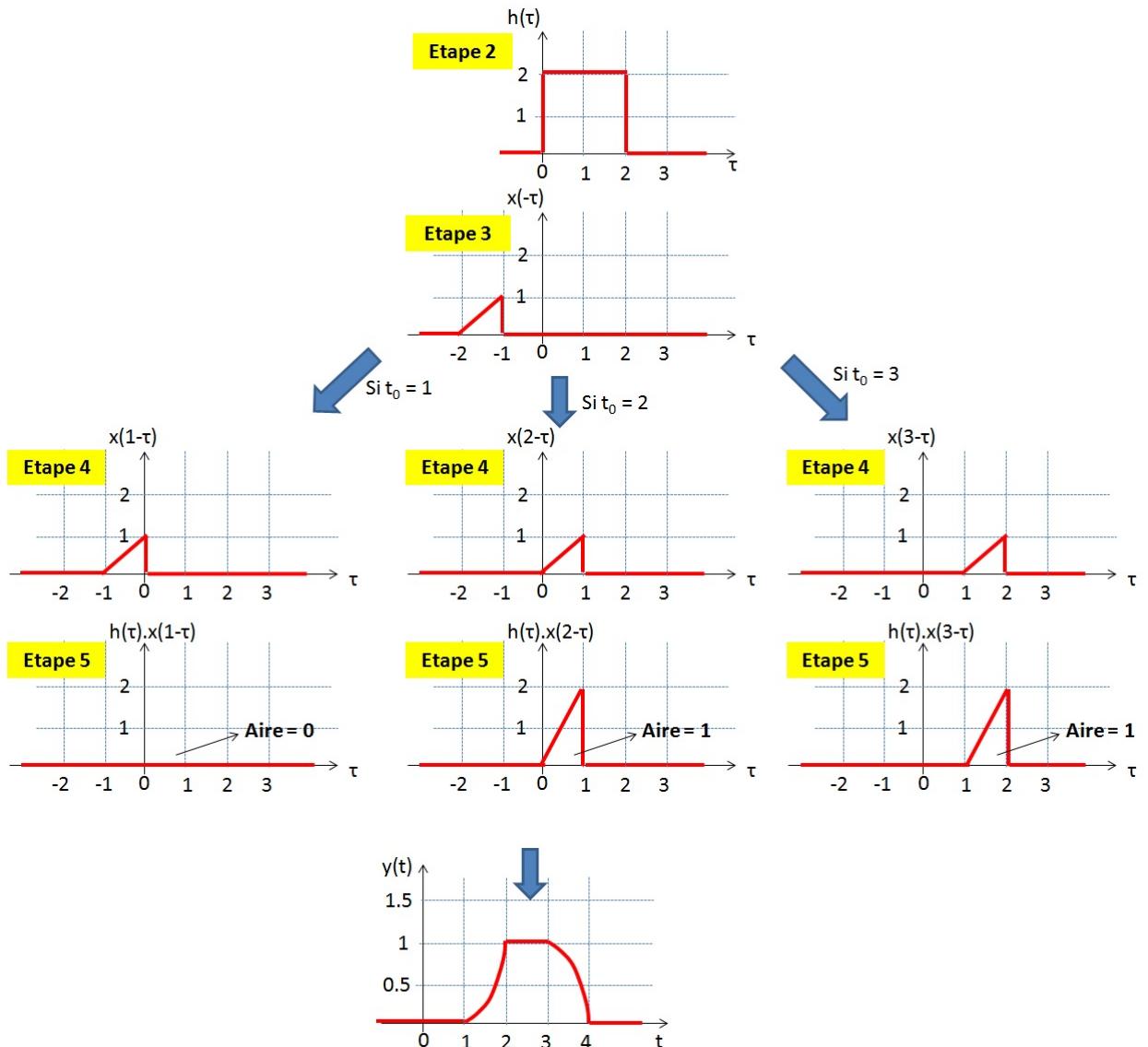


FIGURE 6.1 – Illustration de la mise en œuvre d'un produit de convolution

### 6.3 Exemple : calcul de la réponse d'un filtre à partir de sa réponse impulsionnelle

On considère le filtre passe-bas ci-dessous (Fig. 6.2). La constante de temps  $RC$  du circuit est supposée être égale à 1, afin de simplifier les calculs. On suppose que le condensateur est initialement déchargé. On cherche la réponse temporelle  $y(t)$  du circuit lorsqu'il est excité par le signal  $x(t)$ , présenté à la figure 6.3. Pour cela, nous allons mettre en œuvre le calcul du produit de convolution. Dans un premier temps, nous utiliserons la méthode graphique présentée ci-dessus. Dans un second temps, nous résoudrons directement l'intégrale 6.4.

Il est d'abord nécessaire de calculer la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du circuit. Elle peut facilement être déduite de sa fonction de transfert  $H(p)$ .

$$H(p) = \frac{1}{RC} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} \implies h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = e^{-t}u(t) \quad (6.11)$$

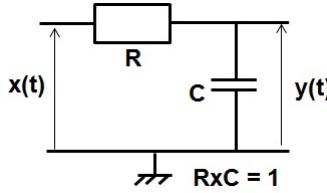


FIGURE 6.2 – Filtre passe-bas étudié

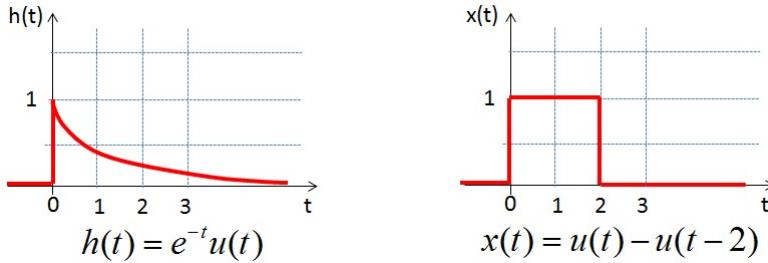


FIGURE 6.3 – Réponse impulsionnelle du circuit (à gauche) et excitation (à droite)

La réponse du filtre est obtenue en résolvant l'intégrale du produit de convolution ci-dessous.

$$y(t) = h * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \text{ avec } t \in \mathbb{R} \quad (6.12)$$

#### Méthode graphique :

Commençons par utiliser la méthode graphique présentée dans la partie précédente pour déterminer l'allure et l'expression de la réponse du circuit. Sur la figure 6.4, on a tracé la réponse impulsionnelle en fonction de  $\tau$ , ainsi qu'une version pliée et décalée de  $t$  de l'excitation ( $x(t-\tau)$ ).

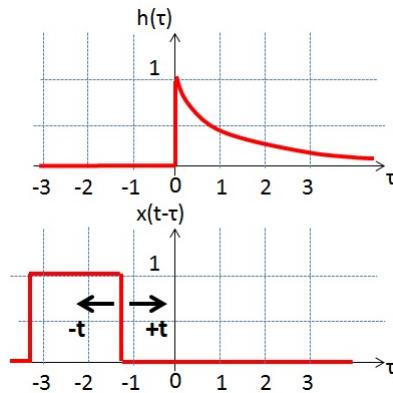


FIGURE 6.4 – Mise en œuvre graphique du produit de convolution pour le filtre passe-bas

Selon la valeur de  $t$ , l'intégrale du produit  $h(\tau)x(t-\tau)$  prend des valeurs différentes. On distingue trois situations différentes :

1. si  $t < 0$ , alors  $h(\tau)$  et  $x(t-\tau)$  ne se recouvrent pas, donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = 0$  si  $t < 0$ .
2. si  $0 \leq t < 2$ , seule une partie de  $x(t-\tau)$  est recouvert par le début de  $h(\tau)$ . Le résultat du produit de convolution croît selon une exponentielle au fur et à mesure que  $t$  augmente. On a alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau = 1 - e^{-t}$ .

### 6.3 Exemple : calcul de la réponse d'un filtre à partir de sa réponse impulsionnelle

3. si  $t \geq 2$ , alors  $x(t - \tau)$  est complètement recouvert par  $h(\tau)$ . Le résultat du produit de convolution décroît exponentiellement quand  $t$  augmente. On a alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_{t-2}^t h(\tau)x(t - \tau)d\tau = e^{-(t-2)} - e^{-t}$ .

L'allure de la réponse du circuit est tracée sur la figure 6.5. Puisque la réponse impulsionnelle est à durée infinie, c'est aussi le cas pour la réponse du filtre. Comme la réponse impulsionnelle et l'excitation démarre en  $t=0$ , c'est encore le cas pour la réponse  $y(t)$ . Une expression peut aussi être déduite des résultats précédents :

$$y(t) = (1 - e^{-t})(u(t) - u(t - 2)) + (e^{-(t-2)} - e^{-t})u(t - 2) = (1 - e^{-t})u(t) - (1 - e^{-(t-2)})u(t - 2) \quad (6.13)$$

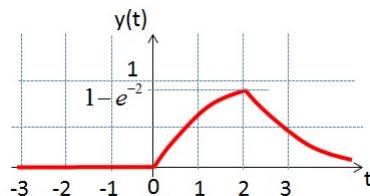


FIGURE 6.5 – Réponse du filtre passe-bas étudié

#### Calcul intégrale :

Dans un second temps, nous essayons de résoudre directement l'intégrale 6.12. En remplaçant  $h(\tau)$  et  $x(t - \tau)$  par leurs expressions respectives, on obtient :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau) \cdot (u(t - \tau) - u(t - (\tau - 2)))d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

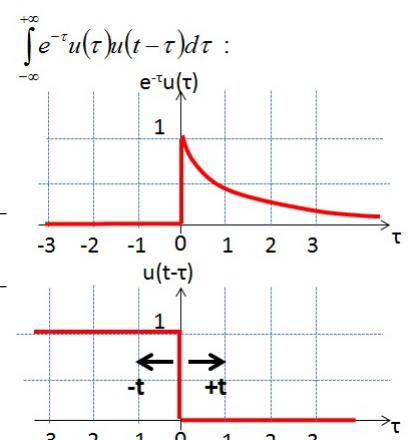
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-\tau}u(\tau)u(t - \tau) - e^{-\tau}u(\tau)u(t - (\tau - 2))]d\tau \quad (6.14)$$

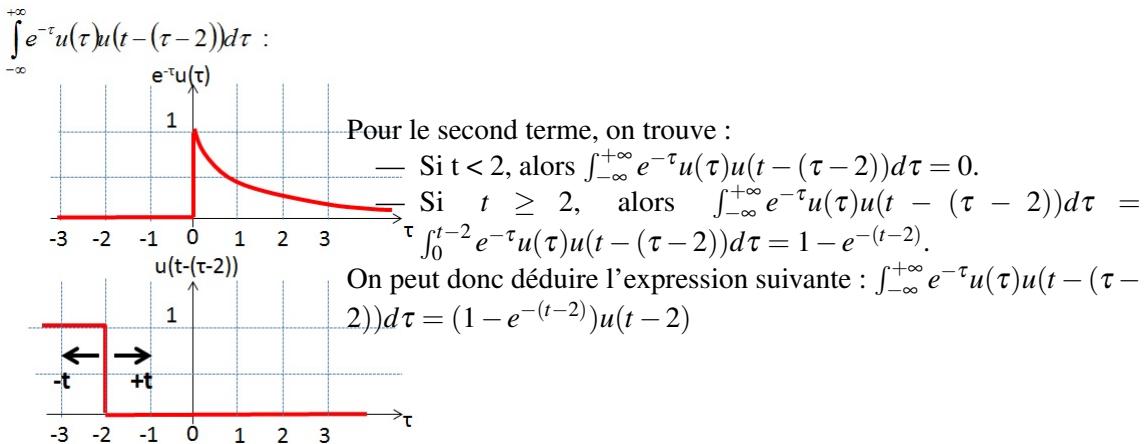
Dans l'intégrale 6.14, on identifie deux termes. Calculons-les séparément.

Concernant le premier terme, on trouve :

- Si  $t < 0$ , alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau)u(t - \tau)d\tau = 0$ .
- Si  $t \geq 0$ , alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau)u(t - \tau)d\tau = \int_0^t e^{-\tau}u(\tau)u(t - \tau)d\tau = 1 - e^{-t}$ .

On peut donc déduire l'expression suivante :  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau)u(t - \tau)d\tau = (1 - e^{-t})u(t)$





En combinant les deux résultats, on en déduit l'expression de la réponse, qui correspond à celle déterminée avec la méthode graphique.

$$y(t) = (1 - e^{-t})(u(t) - u(t - 2)) + (e^{-(t-2)} - e^{-t})u(t - 2) = (1 - e^{-t})u(t) - (1 - e^{-(t-2)})u(t - 2) \quad (6.15)$$

On peut vérifier la validité de ce résultat en calculant la réponse à partir de la transformée de Laplace. On commence par calculer celles de la réponse impulsionnelle (càd la fonction de transfert) et de l'excitation.

$$H(p) = \mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{p+1} \quad (6.16)$$

$$X(p) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{p} - \frac{e^{-2p}}{p} \quad (6.17)$$

La réponse est ensuite obtenue en multipliant la fonction de transfert et l'excitation dans le domaine des fréquences complexes.

$$Y(p) = H(p) \cdot X(p) = \frac{1}{p(p+1)} - \frac{e^{-2p}}{p(p+1)} = \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) (1 - e^{2p})$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = (1 - e^{-t})u(t) - (1 - e^{-(t-2)})u(t - 2)$$

## 6.4 Exercices

### Exercice 1

Déduire les réponses impulsionales des systèmes décrits par les fonctions ci-dessous :

- $G(p) = \frac{1}{p(p+2)} + \frac{1}{2} \left( \frac{e^4}{p+2} - \frac{1}{p} \right) e^{-2p}$
- $H(j\omega) = \frac{2j\omega}{2+j\omega}$
- $a(t) = t^2 u(t)$  où  $a(t)$  est la réponse indicelle
- $a(t) = u(t)(2 - e^{-t})$  où  $a(t)$  est la réponse indicelle

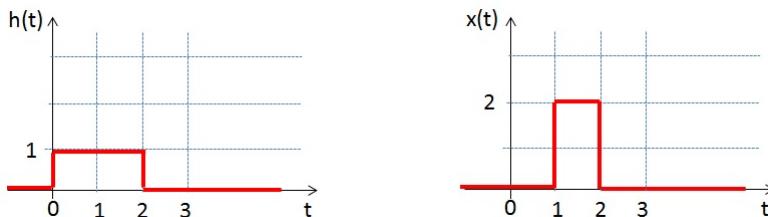
**Exercice 2**

Calculez les produits de convolution suivants :

- $e(t) = u * u(t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$
- $f(t) = \sin(t) * \Pi_{2a}(t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$
- $g(t) = \cos(t) * \Pi_{2a}(t)$  avec  $t \in \mathbb{R}$
- $h(t) = \Pi_{2a}(t) * e^{-bt}$  avec  $t \in \mathbb{R}$
- $m(t) = (\delta(t-1) - \delta(t-2)) * (u(t+1) - u(t-1))$  avec  $t \in \mathbb{R}$

**Exercice 3**

On considère les fonctions  $h(t)$  et  $x(t)$  dont le profil est représenté ci-dessous.



- Proposez une expression mathématique pour ces deux fonctions.
- On note  $y(t)$  le résultat du produit de convolution de  $x(t)$  et  $h(t)$ . Déterminez l'expression de  $y(t)$  en calculant directement le produit de convolution. Tracez l'allure de cette fonction.
- En utilisant la transformée de Laplace, vérifiez la validité du résultat précédent.
- Même chose en utilisant la transformée de Fourier.

**Exercice 4**

On considère un filtre linéaire à temps invariant dont la fonction de transfert est donnée par  $H(\omega) = \frac{j\omega}{1+j\omega}$ .

- On l'excite à l'aide d'un signal échelon. Calculez la réponse du filtre en utilisant sa réponse impulsionnelle. Esquissez sa forme temporelle.
- Même question si on excite le filtre à partir du signal  $e(t) = u(t) - u(t-2)$ .

**Exercice 5 - Convolution de spectre**

On considère deux signaux, définis par les fonctions  $f_1(t) = \cos(\omega_1 t)$  et  $f_2 = \cos(\omega_2 t)$ .

- Déterminez l'expression du spectre du signal  $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$  (on prendra  $\omega_1 > \omega_2$ ). Représentez-le graphiquement.
- Même chose avec  $f_2(t) = \sin(\omega_2 t)$ .
- Même chose avec  $f_2(t) = \text{sinc}(t)$ .

4. Conclure sur l'effet de la multiplication par un signal sinusoïdal.

### Exercice 6

On considère la fonction porte  $\pi_{[-a;a]}(t) = \pi(t)$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$ .

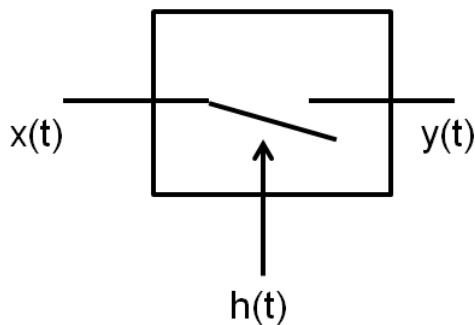
1. Calculez le produit de convolution  $s(t) = \pi(t) * \pi(t)$ .
2. Calculez la transformée de Fourier  $\Pi(f)$  de la fonction  $\pi(t)$ . En déduire l'expression de la transformée de Fourier  $S(f)$  de la fonction  $s(t)$ .
3. Soit le signal  $l(t) = \pi(t) \cdot \pi(t)$ . Calculez la transformée de Fourier  $L(f)$  de la fonction  $l(t)$ .

On pose  $a = 0.5$ . On considère  $t \in (\mathbb{R})$ .

4. Calculez le produit de convolution  $p(t) = \pi(t) * \pi(\frac{t}{2})$ .
5. On considère les fonctions définies par  $s_1(t) = \pi(\frac{t-1}{2})$  et  $s_2(t) = s_1(t) - s_1(t-2)$ . Tracez  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ . Calculez le produit de convolution entre  $s_1$  et  $s_2$ .

### Exercice 7 - Échantillonnage

On considère le circuit de principe ci-dessous, formé d'un interrupteur idéal et appelé échantillonneur.  $x(t)$  est le signal d'entrée,  $h(t)$  le signal de commande d'ouverture/fermeture de l'interrupteur, et  $y(t)$  le signal de sortie. L'interrupteur est ouvert lorsque la commande est nulle. Il se ferme lorsque la commande  $h(t) = 1$ . Dans cet exercice, on considère que la commande est formée par un peigne de Dirac de période  $T$ . Dans un premier temps, le signal d'entrée est une fonction sinus cardinal, tel que  $x(t) = A \cdot \frac{\sin(\pi \frac{t}{\tau})}{\pi \frac{t}{\tau}}$ .



1. Donnez la relation entre les signaux de sortie, d'entrée et de commande.
2. Tracez l'allure du signal de sortie. Le nom d'échantillonneur donné au circuit est-il justifié ? Sa présence est-il nécessaire dans un circuit de traitement du signal ?
3. Donnez les transformées de Fourier des signaux  $x(t)$  et  $h(t)$  ? Esquissez leur spectre (en amplitude).
4. Déterminez la transformée de Fourier du signal  $y(t)$ . Esquissez son spectre dans le cas où  $T < \tau$ , puis dans le cas où  $T > \tau$ .

5. Est-il possible de retrouver le signal  $x(t)$  à partir de l'acquisition du signal  $y(t)$ . Comment et sous quelles conditions ?

6. Pourquoi est-il nécessaire de limiter la bande passante des signaux à échantillonner ?





## 7. Aspects énergétiques et corrélation

Jusqu'ici, nous avons négligé les notions de puissance et l'énergie, qui sont des caractéristiques essentielles dans l'analyse des signaux. Elles ont un intérêt pratique dans de nombreux domaines d'ingénierie car elles quantifient le travail effectué par un système physique (que ce soit dans les systèmes électriques, mécaniques, de télécommunications ...). En traitement du signal, elles ont un intérêt supplémentaire. Dans de nombreux cas pratiques, on ne dispose pas de l'expression exacte de la transformée de Fourier d'un signal. Par contre on connaît la répartition de l'énergie ou de la puissance en fonction de la fréquence. Ces termes sont appelés densité spectrale en puissance ou en énergie. Dans ce chapitre, nous allons voir qu'à partir de l'expression temporelle du signal, on peut toujours remonter à ces densités. Pour cela, nous allons introduire une nouvelle notion : la corrélation. Elle présente un autre intérêt pratique : la mesure du degré de ressemblance entre deux signaux.

Dans certains cas, que vous rencontrerez dans les cours de signaux aléatoires, les expressions exactes des signaux ne sont pas disponibles. Nous allons voir dans ce chapitre que la corrélation va nous permettre de déterminer la manière dont la puissance ou l'énergie est répartie dans le domaine fréquentiel. Ces notions nous permettront aussi de déterminer l'impact du système sur le transfert d'énergie ou de puissance.

### 7.1 Définitions de la puissance et de l'énergie d'un signal

Selon leur nature, les signaux transportent une énergie, que l'on peut quantifier soit sous la forme de puissance, soit sous la forme d'énergie. Nous allons préciser ici les définitions de ces grandeurs.

#### 7.1.1 Puissance

La puissance correspond à la quantité d'énergie transportée par un signal pendant une unité de temps donnée. Celle-ci peut varier au cours du temps. On parle alors de puissance instantanée. Avant de préciser sa définition, considérons l'exemple d'un signal électrique, caractérisé par un courant ou par une tension. Soit une résistance  $R$  traversée par un courant  $i(t)$ , avec une tension  $u(t)$

à ses bornes. La puissance instantanée  $p(t)$  du signal, et fournie à la résistance, est donnée par 7.1.

$$p(t) = \frac{u(t)^2}{R} = R i(t)^2 \quad (7.1)$$

On remarque que la puissance est obtenue en élevant au carré la grandeur physique formant le signal (ici, la tension ou le courant). La puissance est donc une grandeur quadratique. Dans le cas précédent, la puissance électrique dépend de la résistance électrique  $R$ . On pourrait s'affranchir de cette dernière en considérant une résistance unitaire, normalisant ainsi la puissance.

De manière générale, la puissance instantanée  $p(t)$  d'un signal temporel quelconque défini par une fonction  $f(t)$  est le carré de cette fonction (7.2). La puissance est définie en Joules/s ou, de manière plus courante, en Watts (W). Dans le cas d'un signal complexe, on doit considérer le module.

$$p(t) = f(t)^2 \quad (7.2)$$

$$p(t) = |f(t)|^2 \quad (7.3)$$

La puissance instantanée étant fluctuante dans le temps, d'autres manières de mesurer cette puissance sont souvent requises en pratique. On peut par exemple définir la puissance moyenne d'un signal  $\bar{P}$  à l'aide de 7.4. Ce n'est rien d'autre que la moyenne temporelle de la puissance instantanée.

$$\bar{P} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt \quad (7.4)$$

### 7.1.2 Energie

D'après la définition de la puissance, l'énergie transportée par un signal est liée à la puissance instantanée. L'énergie  $E$  transportée par un signal pendant une période délimitée par  $t_1$  et  $t_2$  est donnée par 7.5. Son unité est le Joule (J).

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt \quad (7.5)$$

L'énergie totale du signal se calcule donc à l'aide de la relation 7.5, en l'intégrant sur tout le domaine de définition du signal.

$$E_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \quad (7.6)$$

On peut aussi relier l'énergie totale à la puissance moyenne à l'aide de la relation suivante.

$$E_{tot} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \bar{P} \cdot 2T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt \quad (7.7)$$

### 7.1.3 Signaux à énergie/puissance finie

Les signaux peuvent être classés en deux catégories en prenant comme critère leur énergie. Si l'équation 7.6 donnant l'énergie totale du signal converge, alors le signal est dit à énergie finie. C'est notamment le cas des signaux apériodiques et à supports temporels bornés. Ces signaux ont cependant une puissance moyenne qui tend vers zéro. Ils ne peuvent donc pas être caractérisés par leur puissance moyenne.

Si l'équation 7.6 ne converge pas, on ne peut pas caractériser le signal par son énergie totale. On utilise alors la puissance moyenne, qui sera toujours finie. On parle alors de signaux à puissance finie. C'est notamment le cas des signaux périodiques ou de signaux apériodiques à support temporel non borné (signaux aléatoires). Comme ils sont à support infini, leur énergie l'est aussi. Par contre, on retrouve la puissance moyenne sur une période T du signal, donnée par 7.8.

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)^2 dt \quad (7.8)$$

## 7.2 Calcul de la puissance dans le domaine fréquentiel

Dans la partie précédente, nous avons défini la puissance d'un signal directement à partir de son expression dans le domaine temporel. Dans cette partie, nous allons voir comment les calculer à partir de l'expression du signal dans le domaine fréquentiel.

### 7.2.1 Densité spectrale d'amplitude

Revenons sur l'unité de l'amplitude de l'amplitude ou module de la transformée de Fourier (ou spectre) d'un signal non périodique. S'il est périodique, le résultat de la transformée de Fourier est un spectre de raies ; l'unité de l'amplitude du spectre est la même que le signal. Le spectre indique alors directement la distribution de l'amplitude dans le domaine fréquentiel.

Ce n'est pas le cas pour un signal non périodique. Pour un signal  $f(t)$ , sa transformée de Fourier  $F(f)$  lui est reliée par la transformée de Fourier inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df \quad (7.9)$$

Pour assurer l'homogénéité des unités,  $F(f)$  ne peut pas avoir la même unité que  $f(t)$ , puisque  $f(t)$  est le résultat de l'intégration du spectre sur un intervalle de fréquence. Le module de  $F(f)$  est une densité spectrale en amplitude. Par exemple, si le signal  $f(t)$  est une tension exprimée en V, le module de sa transformée de Fourier  $|F(f)|$  représente une densité spectrale de tension exprimée en  $V/\text{Hz}$  (ou  $V/\text{rad.s}^{-1}$  si on considère une pulsation au lieu d'une fréquence). Cette notion de densité spectrale d'amplitude se comprend : le spectre permet d'analyser la répartition de l'amplitude du signal dans le domaine fréquentiel. Déterminer l'amplitude du signal sur une plage de fréquence donnée revient à intégrer la transformée de Fourier du signal sur cet intervalle de fréquence. C'est ce qu'illustre la figure 7.1.

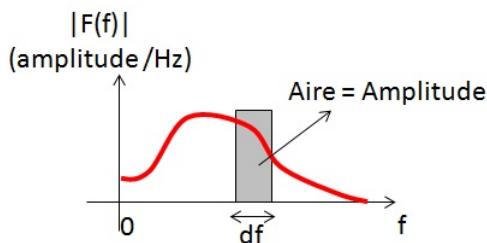


FIGURE 7.1 – Densité spectrale d'amplitude

### 7.2.2 Cas des signaux périodiques - Egalité de Parseval

On considère un signal périodique  $f(t)$  de période  $T_0$  avec  $f_0 = \frac{1}{T_0}$ . Ce signal peut être décomposé en une série de Fourier, selon 7.10. L'ensemble des coefficients de Fourier  $F(n)$  peuvent être

représentés sous la forme d'un spectre de raies d'amplitude, comme le montre la figure 7.2.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n)e^{jn2\pi f_0 t} \quad (7.10)$$

Chaque membre  $f_n(t)$  de la série de Fourier transporte une partie de la puissance du signal. La puissance moyenne  $P_n$  de chacun de ces membres peut être reliée au coefficient de Fourier selon 7.11.

$$P_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |f_n(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |F(n)|^2 dt \quad (7.11)$$

A partir de cette définition, une nouvelle représentation du spectre est possible : un spectre de puissance où chaque raie porte une puissance  $P_n$ . Celui-ci permet d'indiquer la répartition de la puissance dans le domaine spectral (figure 7.2).

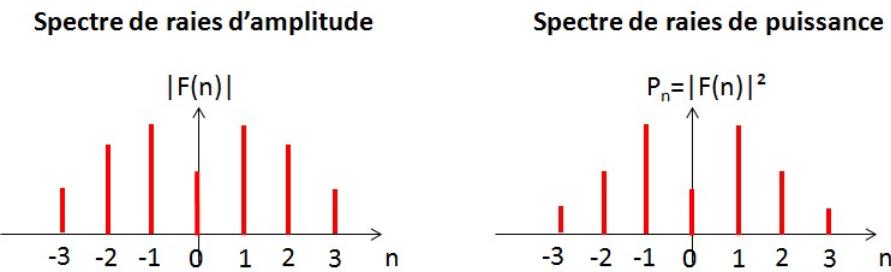


FIGURE 7.2 – Spectre de raies d'amplitude et de puissance pour un signal périodique

La puissance moyenne du signal peut aussi être exprimée en fonction des coefficients de Fourier : il s'agit de l'égalité de Parseval (pour un signal périodique), donnée par 7.12. La puissance moyenne est donc égale à la somme du module au carré de chaque coefficient du spectre. En d'autres termes, la puissance moyenne est la somme des différentes raies de puissance.

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{T_0} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{T_0} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(t) \right|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(n)|^2 dt$$

$$\bar{P} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(n)|^2 \quad (7.12)$$

### 7.2.3 Cas des signaux non périodiques - Densité spectrale de puissance

Considérons un signal  $f(t)$  quelconque. Le module de sa transformée de Fourier  $|F(f)|$  représente une densité spectrale d'amplitude. Chaque portion du spectre transporte une partie de la puissance du signal. Pour caractériser la répartition de la puissance du signal dans le domaine fréquentiel, on introduit la notion de densité spectrale de puissance du signal, notée  $S_F(f)$ , qui est le carré du module de la transformée de Fourier du signal (7.13). La densité spectrale de puissance est exprimée en W/Hz (ou en  $W/rad.s^{-1}$ ).

$$S_F(f) = |F(f)|^2 = F(f) \cdot F(f)^* \quad (7.13)$$

A partir de cette définition, on remarque qu'intégrer la densité spectrale de puissance sur un intervalle de fréquence revient à calculer une puissance. Cependant, la notion de densité spectrale de puissance n'a de sens que pour les signaux à puissance finie, comme les fonctions périodiques

ou à support temporel non borné. Pour les signaux à énergie finie, il est préférable d'utiliser une répartition fréquentielle donnée en densité spectrale d'énergie.

Le théorème de Parseval peut être étendu au cas des signaux non périodiques. Dans le cas où le signal est à énergie finie, il permet de calculer l'énergie totale du signal à partir de sa densité spectrale d'énergie (7.14). En l'intégrant sur tout l'espace des fréquences, on détermine l'énergie totale du signal. Si le signal est à puissance finie, la puissance moyenne peut être calculée à partir de sa densité spectrale de puissance (7.15).

$$E_{tot} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df \quad (7.14)$$

$$\bar{P} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df \quad (7.15)$$

## 7.3 Corrélation

### 7.3.1 Définition

Comment comparer deux signaux ? Comment mesurer leur ressemblance ?

Une première tentative de définition d'une telle grandeur consiste à utiliser les outils dont nous disposons, par exemple le produit scalaire. Dans un premier temps, nous considérons des signaux bornés dans le temps sur un intervalle  $[t_1; t_2]$ . Ce produit correspond à la moyenne temporelle de la multiplication des deux signaux à comparer  $s_1$  et  $s_2$ , définie par la relation ci-dessous.

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s_1(t)s_2(t)dt$$

La figure 7.3 présente deux exemples permettant d'estimer l'intérêt de cette définition. A gauche, deux fonctions portes de même largeur apparaissent en même temps. La définition précédente renvoie une valeur maximale, indiquant une très grande ressemblance entre les deux signaux. A droite, on a décalé le signal  $s_2$  par rapport à  $s_1$ . Ils se ressemblent autant que dans le cas précédent, seul un délai a été ajouté entre eux. Pourtant, l'indicateur de ressemblance utilisé renvoie une valeur nulle que nous interprétons comme une faible corrélation.

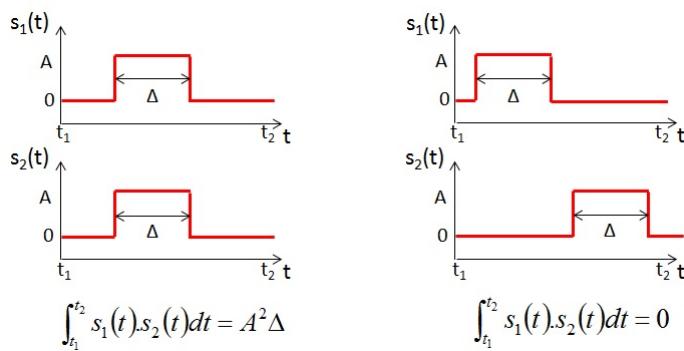


FIGURE 7.3 – Mesure du degré de "ressemblance" entre deux signaux par le produit scalaire

La définition choisie n'est pas satisfaisante car elle prend en compte la position relative des deux signaux. Une astuce consiste à refaire le même calcul, mais pour différentes positions relatives

entre les deux signaux, que nous noterons  $\tau$ . L'expression est donnée par 7.16. L'indicateur calculé correspond à la corrélation  $R(\tau)$  entre ces deux signaux. Il n'est pas à valeur unique puisqu'il dépend de  $\tau$ . De manière générale, lorsqu'on travaille avec des signaux complexes, il est nécessaire de prendre le conjugué du signal  $s_2$ . Dans le cas où le signal est à support temporel infini (signal à puissance finie), la relation prend la forme 7.17.

$$R(\tau) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s_1(t)s_2^*(t - \tau)dt \quad (7.16)$$

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s_1(t)s_2^*(t - \tau)dt \quad (7.17)$$

Dans le cas où les fonctions sont périodiques et de même période  $T_0$ , le calcul de la corrélation est donné par la relation ci-dessous.

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} s_1(t)s_2^*(t - \tau)dt \quad (7.18)$$

Lorsque les signaux sont à énergie finie, la division par  $T$  n'est pas indispensable, sinon la corrélation risque de tendre vers 0. La définition (7.19) est préférable.

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s_1(t)s_2^*(t - \tau)dt \quad (7.19)$$

Reprendons l'exemple précédent et calculons la corrélation entre deux signaux pour vérifier la pertinence de cet indicateur. On décale la position respective du signal  $s_2$  par rapport au signal  $s_1$ . Pour chaque position, on calcule la corrélation. Le résultat est présenté sur la figure 7.4. La corrélation est maximale lorsque  $\tau = 0$ , c'est-à-dire lorsque l'on superpose  $s_1$  et  $s_2$ . Dès que l'on décale  $s_2$  vers la droite ou vers la gauche, la corrélation décroît jusqu'à devenir minimale lorsque les deux signaux ne se recouvrent plus. L'indicateur définit fournit une meilleure mesure du degré de ressemblance entre deux signaux.

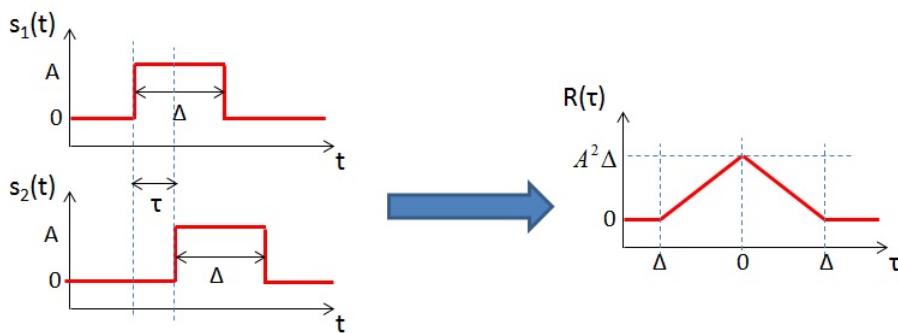


FIGURE 7.4 – Corrélation entre deux signaux

On remarque que le calcul de la corrélation est assez proche de celui du produit de convolution. En effet, dans les deux cas, il s'agit d'un calcul d'une intégrale appliquée à un produit de deux signaux que l'on décale. La seule différence est qu'on ne "retourne" pas un des deux signaux, comme le montre le rappel des deux formules ci-dessous.

Produit de convolution	Corrélation
$s_1 * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau)s_2(t - \tau)d\tau$	$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2(t - \tau)dt$

On peut exprimer le calcul de la corrélation sous la forme d'un produit de convolution, comme le montre 7.20 :

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2^*(t - \tau)dt = s_1 * s_2(-\tau) \quad (7.20)$$

Si on analyse ce que représente la corrélation, on remarque qu'elle est équivalente à une puissance. En effet, il s'agit d'une grandeur quadratique. Nous verrons plus loin qu'elle est intimement liée à la puissance des signaux.

### 7.3.2 Autocorrélation et intercorrélation

Selon les signaux considérés dans le calcul de corrélation, on distinguera deux cas :

- si le calcul s'effectue sur le même signal ( $s_1 = s_2$ ), on parlera d'autocorrélation que l'on notera  $R_{11}(\tau)$
- si le calcul s'effectue sur deux signaux différents, on parlera d'intercorrélation que l'on notera  $R_{12}(\tau)$ .

L'autocorrélation permet de mesurer le degré de ressemblance d'un signal à une version décalée de lui-même. Comme nous allons le voir plus tard dans le cours, cela peut avoir de nombreuses applications comme la détection de composantes périodiques.

L'intercorrélation permet de mesurer le degré de ressemblance entre deux signaux. Si deux signaux sont complètement décorrélés, alors leur intercorrélation restera minimale quelle que soit le décalage temporel que l'on applique entre ces deux signaux.

### 7.3.3 Propriétés de la corrélation

#### Changement de variable

On démontre que :

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f^*(t - \tau)dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau)f^*(t)dt \quad (7.21)$$

En effet, retarder la première fonction revient à avancer la seconde. Cette même propriété se retrouve pour la fonction d'intercorrélation.

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2^*(t - \tau)dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t + \tau)f_2^*(t)dt \quad (7.22)$$

#### Parité

La fonction d'autocorrélation est une fonction paire. En effet, on peut montrer que :

$$R_{11}^*(-\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)f(t + \tau)dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t - \tau)f(t)dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f^*(t - \tau)dt = R_{11}(\tau) \quad (7.23)$$

Par contre, ce n'est pas nécessairement le cas pour la fonction d'intercorrélation.

### Valeur à l'origine

Lorsqu'on analyse la formule de l'autocorrélation à l'origine ( $\tau = 0$ ), on retrouve la formule de la puissance moyenne pour les signaux à puissance finie (7.4) ou celle de l'énergie totale pour les signaux à énergie finie (7.6). A partir du théorème de Parseval, on peut donner les valeurs à l'origine de la fonction d'autocorrélation :

- signal périodique :  $R_{11}(0) = \bar{P} = \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(n)|^2$
- signal non périodique à puissance finie :  $R_{11}(0) = \bar{P} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df$
- signal à énergie finie :  $R_{11}(0) = E_{tot} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df$

### Valeur(s) maximale(s)

L'autocorrélation présente toujours un maximum à l'origine, pour  $\tau = 0$ , égale soit à la puissance moyenne, soit à l'énergie totale du signal. On en déduit donc la propriété suivante :

$$R_{11}(0) \geq R_{11}(\tau) \quad (7.24)$$

Ce n'est pas forcément le cas pour la fonction d'intercorrélation.

La fonction d'autocorrélation peut présenter des maxima en d'autres points d'abscisse, notamment lorsque le signal est périodique. Pour un signal de période  $T_0$ , alors la fonction d'autocorrélation présente des maxima pour toutes les valeurs d'abscisse  $\tau = k \cdot T_0$  où  $k$  est un nombre entier. Cette propriété fournit un des intérêts pratiques de la fonction d'autocorrélation et de son tracé : elle permet de repérer des composantes périodiques dans un signal complexe.

Cet outil d'analyse du signal est illustré dans les deux exemples ci-dessous.

#### Exemple 1 : bruit blanc

Par définition, un bruit est un signal aléatoire. Sa valeur à tout instant reste imprévisible. Selon la loi statistique suivie par ses valeurs, il peut être qualifié différemment : par exemple, on parle de bruit blanc gaussien si ses valeurs suivent une loi normale. Le qualificatif blanc vient de la répartition spectrale du signal, qui est quasiment constante quelle que soit la fréquence. Nous le comprendrons à la partie IV. Considérons un bruit blanc gaussien centré, c'est-à-dire de moyenne nulle. L'écart-type des valeurs prises par le signal est noté  $\sigma$ . Ce signal constitue un excellent modèle du bruit d'origine thermique affectant les composants électroniques et les récepteurs radio.

La figure ci-dessous présente un exemple de simulation d'un tel bruit, avec  $\sigma = 0.5$  : en haut, le relevé temporel ; en bas la fonction d'autocorrélation calculée. On remarque que la fonction d'autocorrélation est minimale pour toutes les valeurs de  $\tau$ , sauf pour  $\tau = 0$ . L'amplitude de ce pic est égale à  $\sigma^2 = 0.25$ . Comme le signal est totalement aléatoire, comparer ce signal à une version décalée de lui-même revient à comparer deux signaux décorrélés. L'autocorrélation d'un tel signal peut être modélisée par une impulsion de Dirac.

#### Exemple 2 : extraction d'une composante périodique dans un signal bruité

Dans ce deuxième exemple, on considère un signal fortement affecté par un bruit blanc gaussien. Un relevé temporel de ce signal est présenté à la figure 7.6. Ce signal aléatoire semble contenir une composante périodique, de période proche de 20 ms. Sa présence est clairement révélée par le tracé de la fonction d'autocorrélation du signal. On retrouve un fort pic à l'origine, lié à la présence du bruit blanc gaussien. Mais on ne retrouve pas une fonction d'autocorrélation minimale pour  $|\tau| > 0$ . On observe des maxima locaux se répétant périodiquement, tous les  $\tau = k \cdot 0.02$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Ce résultat confirme la présence d'une composante périodique de 20 ms cachée dans le signal.

### Valeur minimale

Puisqu'on aborde la question de la valeur maximale, on pourrait s'interroger sur la valeur minimale prise par la fonction de corrélation. On atteint un minimum lorsque les deux fonctions à comparer ne présentent aucune corrélation. On serait tenté de penser que la valeur prise par la

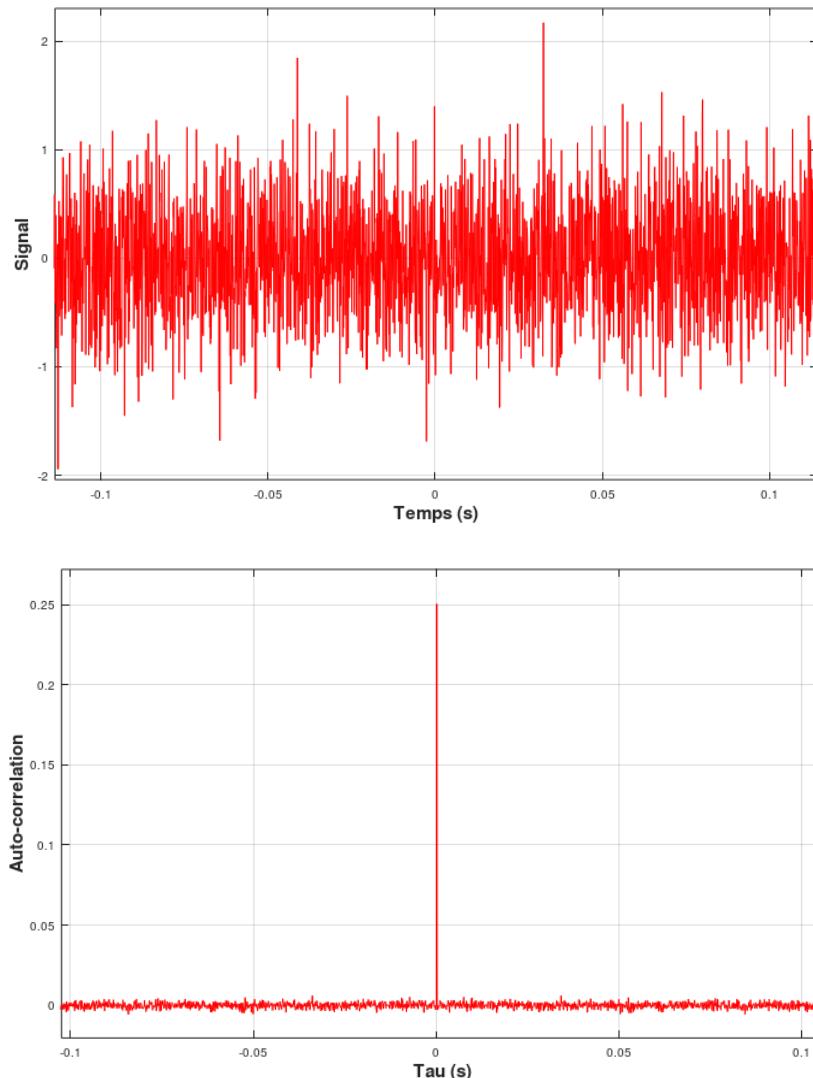
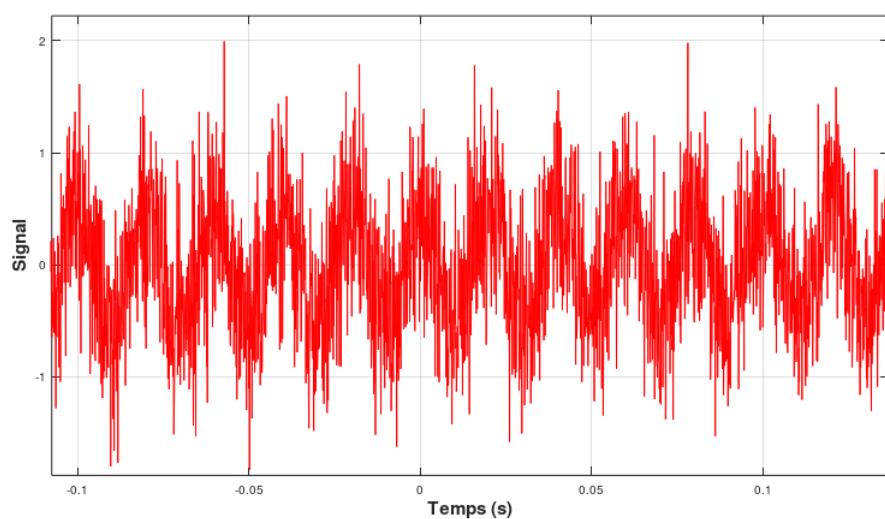


FIGURE 7.5 – Bruit blanc gaussien ( $\sigma = 0.5$ ) (en haut) et sa fonction d'autocorrélation (en bas)



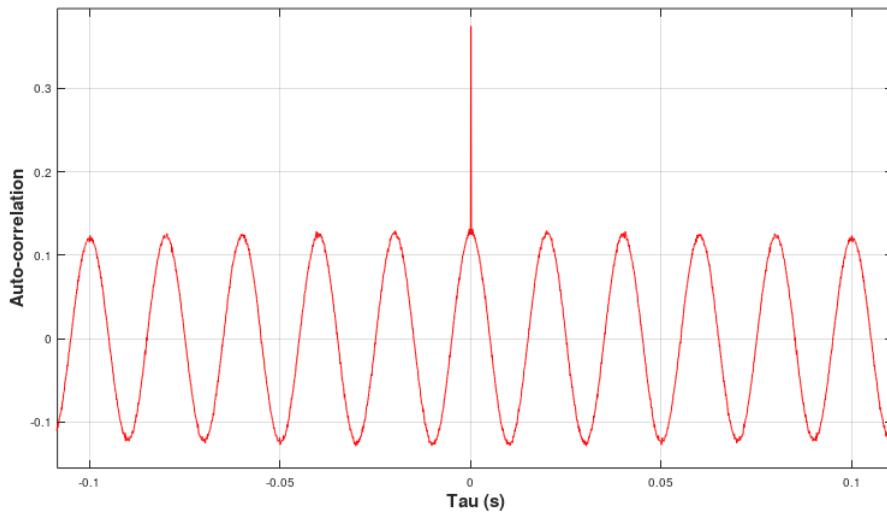


FIGURE 7.6 – Signal bruité (en haut) et analyse par son autocorrélation (en bas)

corrélation est nulle, mais ce n'est pas le cas. La fonction de corrélation dépend aussi des amplitudes et des valeurs moyennes prises par les signaux. Comparer les valeurs minimales et maximales de deux fonctions de corrélation, calculées sur des signaux différents, avec des amplitudes et moyennes différentes, n'a pas de sens. Cela n'indiquera pas qu'il y a plus de corrélation dans un cas que dans un autre.

### 7.3.4 Exemples

#### Exemple 1 : autocorrélation d'une fonction cosinusoidale

On considère le signal périodique  $s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$ , où  $f_0$  est la fréquence du signal et  $\theta_0$  sa phase initiale. Déterminez la fonction d'autocorrélation de ce signal et tracez son allure.

La fonction d'autocorrélation est obtenue en calculant l'intégrale 7.18. Celle-ci peut être résolue en utilisant la relation trigonométrique suivante :  $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$ .

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A^2 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \cos(2\pi f_0(t - \tau) + \theta_0) dt, \text{ avec } T_0 = \frac{1}{f_0}$$

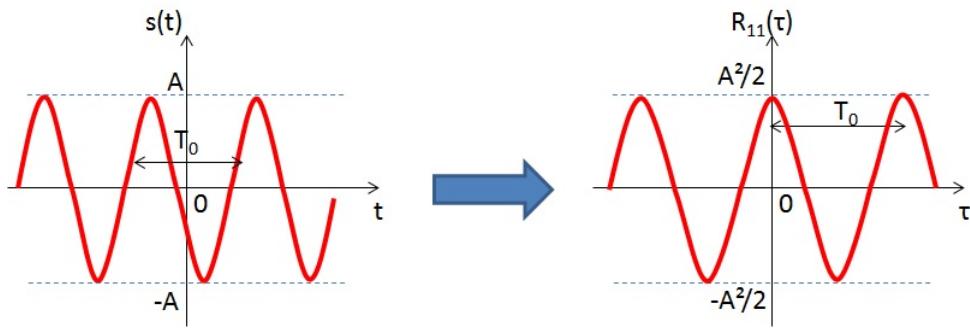
$$R_{11}(\tau) = \frac{A^2}{2T_0} \left[ \int_0^{T_0} \cos(2\pi f_0 \tau) dt + \int_0^{T_0} \cos(2\pi f_0(2t - \tau) + 2\theta_0) dt \right]$$

Le second terme de l'équation étant une fonction périodique de  $t$ , son intégration sur une période renvoie une valeur nulle. La relation précédente se simplifie :

$$R_{11}(\tau) = \frac{A^2}{2T_0} \cos(2\pi f_0 \tau) \int_0^{T_0} dt = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

L'allure de la fonction d'autocorrélation est présentée ci-dessous. La fonction est paire et présente plusieurs maxima : un pour  $\tau = 0$ , mais aussi pour tous les multiples de la période  $T_0$  du signal. Cela se comprend intuitivement : si on crée une réplique du signal que l'on décale d'un multiple de la période, lorsqu'on superpose le signal original et sa réplique, ceux-ci sont confondus.

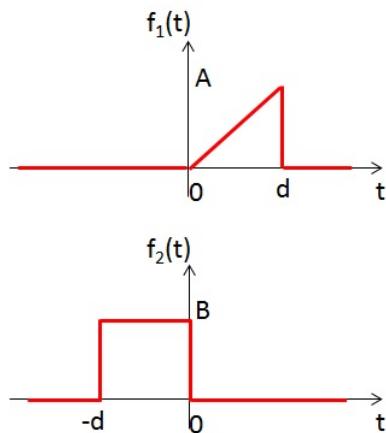
La puissance moyenne du signal est donnée par :  $\bar{P} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0) dt = \frac{A^2}{2T_0} \int_0^{T_0} (1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\theta_0)) dt = \frac{A^2}{2}$ . On vérifie ainsi que la valeur maximale prise par la fonction d'autocorrélation à l'origine est égale à la puissance moyenne du signal.



On peut aussi remarquer que l'effet de la phase du signal  $\theta_0$  a disparu dans la fonction d'autocorrélation. En effet, la fonction d'autocorrélation de ce signal est indépendante de la position initiale du signal (en d'autres termes, de l'origine des temps). Cet effet a une conséquence majeure : l'irréversibilité de la corrélation. A partir de la fonction d'autocorrélation, il est impossible de remonter au signal puisqu'à une fonction d'autocorrélation donnée, il n'y a pas un signal unique.

### Exemple 2 : calcul d'intercorrélation

On considère les signaux  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  présentées ci-dessous. Déterminez la fonction d'intercorrélation de ces deux signaux.



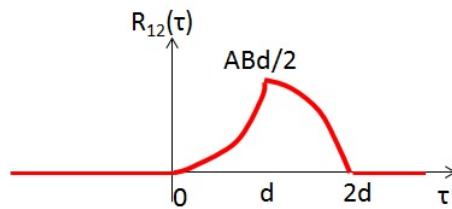
Les expressions des deux signaux sont :  $f_1(t) = \frac{At}{d}(u(t) - u(t-d))$  et  $f_2(t) = (u(t+d) - u(t))$ . Leur produit d'intercorrélation est donné par :

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t-\tau)dt$$

On peut distinguer les quatre intervalles suivants :

- si  $\tau < 0$  ou  $\tau > 2d$ , alors les deux fonctions ne se recouvrent pas et  $R_{12}(\tau) = 0$ .
- si  $0 \leq \tau < d$ ,  $R_{12}(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{AB}{d} dt = \frac{AB}{2d} \tau^2$
- si  $d \leq \tau < 2d$ ,  $R_{12}(\tau) = \int_{\tau-d}^d \frac{AB}{d} dt = \frac{AB}{2d} (d^2 - (\tau-d)^2)$

L'allure de la fonction d'intercorrélation est présentée sur la figure ci-dessous. Contrairement à la fonction d'autocorrélation, la fonction d'intercorrélation n'est pas paire et ne passe pas par un maximum à l'origine. Son maximum est atteint lorsqu'on décale le signal  $f_2$  de  $+d$  par rapport à  $f_1$ .



### 7.4 Théorème de Wiener-Khintchine

Le théorème de Wiener-Khintchine relie la corrélation d'un signal avec sa densité spectrale de puissance. Il fait donc le lien entre une grandeur définie dans le domaine temporel et une autre dans le domaine fréquentiel. Celui-ci peut facilement être démontré en repartant de la formule de la corrélation. Considérons un signal  $f(t)$  quelconque, dont l'autocorrélation est donnée par :

$$R_{11}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f^*(t-\tau)dt$$

On peut exprimer les signaux  $f(t)$  et  $f(t-\tau)^*$  à partir de leur spectre. En utilisant la définition de la transformée de Fourier inverse, on peut montrer que :

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)e^{j2\pi ft}df \\ f(t-\tau)^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)^*e^{j2\pi f(t-\tau)^*}df = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)^*e^{-j2\pi f(t-\tau)}df \end{aligned}$$

En combinant ces différentes équations, on trouve :

$$\begin{aligned} R_{11}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)e^{j2\pi ft}df \right] \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)^*e^{-j2\pi f(t-\tau)}df \right] dt \\ R_{11}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)F(f)^*e^{j2\pi f\tau}df \right] dt \\ R_{11}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)F(f)^*e^{j2\pi f\tau}df \cdot \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, on peut remplacer le produit des spectres par la densité spectrale de puissance du signal  $f(t)$ . La relation 7.25 correspond au théorème de Wiener-Khintchine.

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)F(f)^*e^{j2\pi f\tau}df = R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_F(f)e^{j2\pi f\tau}df \quad (7.25)$$

L'autocorrélation du signal  $f(t)$  n'est rien d'autre que la transformée de Fourier inverse de sa densité spectrale de puissance  $S_F$ . Inversement, on peut affirmer que la densité spectrale de puissance du signal  $f(t)$  est la transformée de Fourier de son autocorrélation, comme le montre l'équation 7.26.

$$S_F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{11}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (7.26)$$

#### Cas d'un signal périodique

Si le signal est périodique de période  $T_0$  et de fréquence  $F_0 = \frac{1}{T_0}$ , le théorème de Wiener-Khintchine est toujours exacte. On peut la réécrire en remplaçant la transformée de Fourier par la série de Fourier. Dans le cas d'une fonction périodique, la notion de densité spectrale de puissance n'a plus de raison d'être, puisque le spectre est constitué de raies portant chacune une partie de la puissance du signal. Le théorème de Wiener-Khintchine relie alors la fonction d'autocorrélation et le spectre de puissance  $S_F(n)$  du signal. Ces grandeurs sont reliées par les équations 7.27 et 7.28, où  $n$  est l'indice d'une raie du spectre.

$$R_{11}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_F(n) e^{jn2\pi F_0 \tau}, n \in \mathbb{Z} \quad (7.27)$$

$$S_F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} R_{11}(\tau) e^{jn2\pi F_0 \tau} d\tau, n \in \mathbb{Z} \quad (7.28)$$

Le théorème de Wiener-Khintchine présente un intérêt pratique fort dans la situation suivante. Si on ne dispose pas de l'expression exacte de l'évolution temporelle d'un signal  $x(t)$ , il est impossible de déterminer celle de sa transformée de Fourier  $X(f)$ . C'est notamment le cas lorsque l'on traite des signaux aléatoires. Cependant, si on dispose de l'expression de son autocorrélation, même si on ne peut déterminer la transformée de Fourier du signal, on peut déduire l'expression de la densité spectrale de puissance  $S_X(f)$  qui est reliée à l'amplitude du spectre du signal  $|X(f)|$ . L'information de phase du spectre est perdue donc il est impossible de reconstituer le signal temporel. Néanmoins, la densité spectrale de puissance peut être suffisante pour analyser le signal dans le domaine fréquentiel, en montrant comment l'énergie est répartie en fonction de la fréquence. A partir de cette information, un filtre peut être dimensionné pour modifier ou supprimer une partie du contenu fréquentiel du signal, jugée gênante.

### **Exemple 1 : spectre de puissance d'un signal cosinusoidal**

Reprendons l'exemple du signal cosinusoidal  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$  dont on a calculé l'autocorrélation précédemment. Calculez sa transformée de Fourier puis son spectre de puissance. En déduire la fonction d'autocorrélation.

La transformée de Fourier de la fonction  $s(t)$  donne :

$$S(f) = \frac{A}{2} e^{j\theta_0} \delta(f - f_0) + \frac{A}{2} e^{-j\theta_0} \delta(f + f_0)$$

Son spectre de puissance est donc égale à :

$$S_F(f) = |S(f)|^2 = S(f) \cdot S(f)^* = \frac{A^2}{4} \delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4} \delta(f + f_0)$$

On peut remarquer que la puissance moyenne du signal est bien égale à  $\frac{A^2}{2}$ .

L'autocorrélation du signal  $s(t)$  peut être déduite du théorème de Wiener-Khitchine, à partir de la transformée de Fourier inverse du spectre de puissance :

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_F(f) e^{j2\pi f \tau} df = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

On retrouve l'expression de la fonction d'autocorrélation déterminée dans la partie III.4.

### **Exemple 2 : densité spectrale de puissance d'un bruit blanc gaussien**

Reprendons l'exemple du bruit blanc gaussien abordé dans la partie III.3. Sa fonction d'autocorrélation est assimilable à une impulsion de Dirac :  $R_{bruit}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$ . Comme ce signal est aléatoire, on ne peut pas définir son évolution temporelle par une fonction mathématique. Le calcul de sa transformée de Fourier est donc impossible. Cependant, puisqu'on dispose de sa fonction d'autocorrélation, on peut extraire sa densité spectrale de puissance à l'aide du théorème de Wiener-Khintchine.

$$S_{bruit}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{bruit}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (7.29)$$

$$S_{bruit}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \delta(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \sigma^2 \quad (7.30)$$

La transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac étant une fonction constante en fonction de la fréquence, le spectre d'un bruit blanc est constant quelle que soit la fréquence. On remarque que la puissance moyenne d'un tel signal est infinie et est donc irréalisable dans la pratique. Le bruit blanc que nous avons généré dans la partie III.3 n'est qu'un modèle, discret et à support temporel borné, dont l'énergie est forcément finie.

## **7.5 Relations entre le signal, la densité spectrale de puissance et l'autocorrélation**

Les différentes relations que nous avons vu entre le signal  $f(t)$ , son spectre  $F(f)$ , sa densité spectrale de puissance  $S_F(f)$  et son autocorrélation  $R_{11}(\tau)$ , peuvent être résumées sur la figure 7.7. Les flèches à double sens indiquent qu'à partir du spectre du signal, on peut retrouver l'expression du signal et inversement. Même chose pour l'autocorrélation et la densité spectrale de puissance. Cependant, on observe deux flèches à sens unique. La première, entre le signal et son autocorrélation, indique qu'un signal présente une fonction d'autocorrélation unique mais l'inverse n'est pas vraie. La seconde indique qu'on ne peut pas retrouver le spectre d'un signal à partir de sa densité spectrale de puissance. En effet, l'information de phase a été perdue.

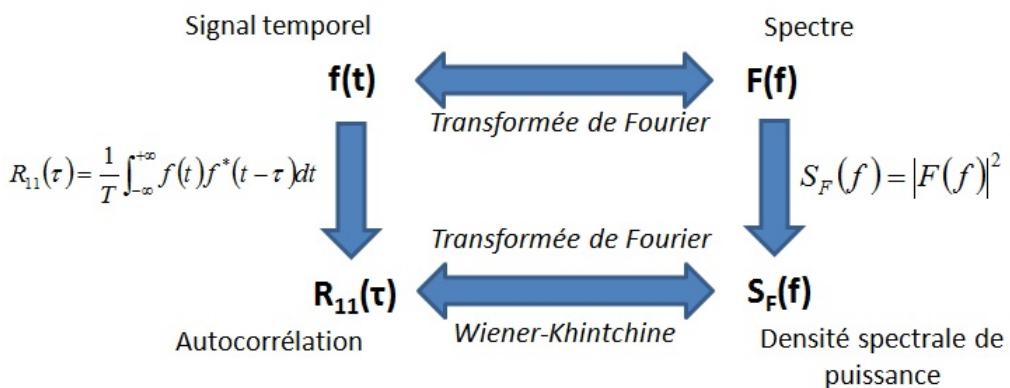


FIGURE 7.7 – Vue d'ensemble des relations entre le signal, son spectre, sa densité spectrale de puissance et son autocorrélation

## 7.6 Transfert d'énergie à travers un système linéaire

Avant de terminer ce chapitre, on cherche à savoir comment un système linéaire modifie la densité spectrale de puissance (ou d'énergie) d'un signal apportée sur son entrée. A partir du théorème de Wiener-Khintchine, on pourra aussi déterminer comme le système affecte sa fonction d'autocorrélation.

Prenons le système décrit sur la figure 7.8. On connaît sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  ou sa fonction de transfert  $H(f)$ . Un signal  $x(t)$  est appliqué sur son entrée, dont on connaît la densité spectrale de puissance  $S_X(f)$ . On cherche à déterminer la densité spectrale de puissance  $S_Y(f)$  du signal de sortie  $y(t)$ .

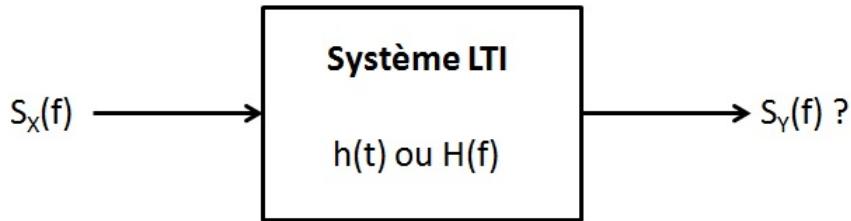


FIGURE 7.8 – Effet d'un système linéaire sur la densité spectrale de puissance appliquée sur son entrée

Le système étant linéaire, les spectres des signaux d'entrée et de sortie sont reliés par l'intermédiaire de la fonction de transfert. A partir de cette relation, on peut exprimer la densité spectrale de puissance de  $y(t)$  à partir de celle de  $x(t)$ . On obtient la relation 7.31. Les densités spectrales de puissance en entrée et en sortie du système sont reliées par de carré du module de sa fonction de transfert.

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$$S_Y(f) = H(f) \cdot H^*(f) \cdot |X(f)|^2 = |H(f)|^2 S_X(f) \quad (7.31)$$

Cette relation peut être utilisée pour déterminer la fonction d'autocorrélation du signal de sortie  $R_{YY}(\tau)$ , connaissant celle du signal d'entrée  $R_{XX}(\tau)$ . Pour cela, on utilise le théorème de Wiener-Khintchine. En notant que la transformée de Fourier inverse d'un produit est un produit de convolution et que  $H^*(f) = H(-f)$ , on obtient la relation 7.32.

$$R_{YY}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(S_Y(f)) = \mathcal{F}^{-1}(H(f)H^*(f)S_X(f))$$

$$R_{YY}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(H(f)) * \mathcal{F}^{-1}(H^*(f)) * \mathcal{F}^{-1}(S_X(f))$$

$$R_{YY}(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_{XX}(\tau) \quad (7.32)$$

## 7.7 Exercices

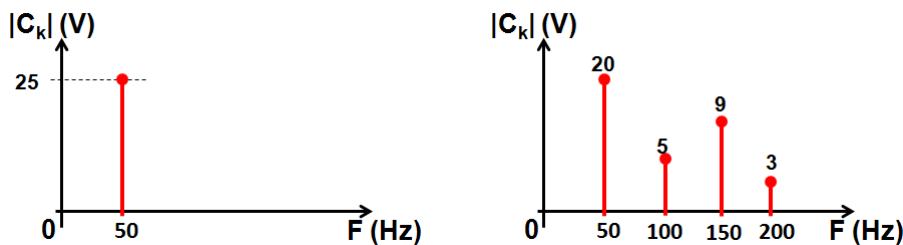
### Exercice 1

Calculez la puissance moyenne et l'énergie totale des signaux suivants :

- a.  $\frac{1}{2} + \sin(4\pi t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$
- b.  $\cos(\pi t)$ ,  $t \in [0;3]$
- c.  $e^{-t}u(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$
- d. Une impulsion rectangulaire, d'amplitude pic-à-pic de 2 V, centrée en -1 V, d'une durée de 0.1 s et de période égale à 1 s.

**Exercice 2****Exercice 2 - Distorsion harmonique**

On dispose du relevé d'un spectre d'amplitude de raies en sortie d'un système (figure ci-dessous à gauche). Le signal est à support temporel non borné.



1. Quelle est la nature du signal ? Précisez ses caractéristiques.
2. Quelle est la puissance moyenne du signal ?
3. Ce signal traverse un système. On relève le spectre en amplitude en sortie de ce système (figure ci-dessous à droite). Le système est-il linéaire ?
4. Calculez la puissance moyenne du signal en sortie du système.
5. On définit le taux de distorsion harmonique total (*Total Harmonic Distortion* (THD) en anglais) du signal par rapport au fondamental à l'aide de l'équation suivante :

$$THD_F = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{+\infty} A_i^2}}{A_1}$$

avec  $A_i$  l'amplitude de l'harmonique de rang  $i$ . Calculez ce taux sur les signaux d'entrée et de sortie du système.

**Exercice 3**

1. Soit le signal porte  $x(t) = A \cdot \Pi_{\frac{b}{2}(t)}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ .
  - a. Calculez l'énergie totale et la puissance moyenne du signal.
  - b. Calculez la fonction d'autocorrélation du signal.
  - c. Calculez la densité spectrale de puissance ou d'énergie
2. La fonction  $x(t)$  est répétée avec une période  $T$  pour former le signal  $f(t)$ . On prendra  $b < \frac{T}{2}$ .
  - a. Calculez l'énergie totale et la puissance moyenne du signal.
  - b. Calculez la fonction d'autocorrélation du signal.

c. Calculez la densité spectrale de puissance ou d'énergie

#### Exercice 4

Un signal noté  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$  excite un filtre passe-bas d'ordre 1, dont la fréquence de coupure est  $f_0$ . Le signal en sortie du filtre est noté  $y(t)$ .

1. Donnez l'expression de la transformée de Fourier  $X(f)$  du signal  $x(t)$ . Tracez son module et son argument.
2. Donnez l'expression de la fonction de transfert  $H(f)$  du filtre. Tracez son module et son argument dans le diagramme de Bode. Quel est son gain et son déphasage en  $f_0$  ?
3. A partir de  $X(f)$  et  $H(f)$ , déterminez la transformée de Fourier  $Y(f)$  du signal  $y(t)$ .
4. Déterminez l'expression du signal  $y(t)$  à partir de  $Y(f)$ .
5. Calculez la puissance moyenne du signal d'entrée. En déduire celle du signal de sortie.

#### Exercice 5 - Détection de discontinuité

On considère un signal  $x(t)$  avec plusieurs discontinuités, par exemple :  $x(t) = u(t) - 2u(t - 4) + u(t - 6)$ . On se propose de trouver une méthode basée sur un calcul d'intercorrélation pour détecter la position de ces discontinuités. On utilise comme signal de détection la fonction  $y(t) = \sin(2\pi t)(u(t) - u(t - 1))$ .

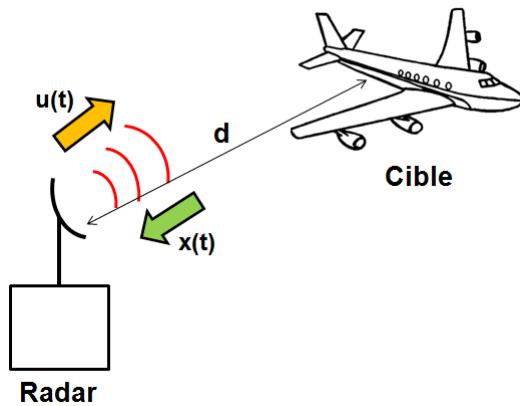
1. Esquissez l'allure des signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ .
2. Déterminez l'expression de l'intercorrélation  $R_{xy}(\tau)$  entre les signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ . Tracez son évolution temporelle. Les discontinuités sont-elles détectées ? Peut-on détecter leur polarité ?
3. On choisit un nouveau signal de détection :  $y(t) = \sin(2\pi \frac{t}{8})(u(t) - u(t - 4))$ . Reprendre la question précédente. Comment améliorer la précision de la détection ?
4. Le dispositif de détection est-il sensible au bruit ?

#### Exercice 6 - Radar

La figure ci-dessous illustre le principe de détection d'une cible par le traitement d'un écho radar, et l'estimation de sa distance.

Le radar transmet un signal connu, noté  $u(t)$ , qui se propage à une vitesse  $v$ . Son autocorrélation  $R_u(\tau)$  est connu. Si un obstacle intercepte ce signal, il en réfléchit une partie. Celle-ci repart en arrière et atteint le radar un temps  $t_1$  après son émission. Le radar mesure alors l'écho du signal  $u(t)$ , noté  $x(t)$ . Celui-ci est la superposition d'une version atténueée du signal  $u(t)$  (on supposera l'atténuation constante et on la notera  $a$ ) et d'un bruit  $b(t)$ , lié au bruit de mesure et aux interférences électromagnétiques externes.

1. Proposez une relation entre les signaux  $x(t)$ ,  $u(t)$  et  $b(t)$ .
2. Calculez le produit de convolution :  $x(t) * u(-t)$ .



3. Exprimez l'intercorrélation entre les signaux  $u(t)$  et  $x(t)$ . Exprimez-la en fonction d'autres termes de corrélation.
4. Que devient cette expression si le signal de bruit est faiblement corrélé avec le signal  $u(t)$  ?
5. Proposez une méthode d'estimation de la distance de la cible à partir de la mesure de l'écho du signal radar.
6. Quelles propriétés doit vérifier le signal  $u(t)$  pour améliorer la précision de la détection ?

Vecteur de Fresnel.

Phaseur : Considérons le cas d'une excitation sinusoïdale pure. La grandeur complexe  $\hat{X} = |X| \cdot \exp(j\theta(t))$  représente un vecteur, appelé vecteur de Fresnel, amplitude complexe ou phaseur. Il s'agit d'un vecteur tournant dans le plan complexe à la fréquence  $\omega$ . La projection de ce phaseur sur l'axe réel donne la valeur instantanée prise par le signal.