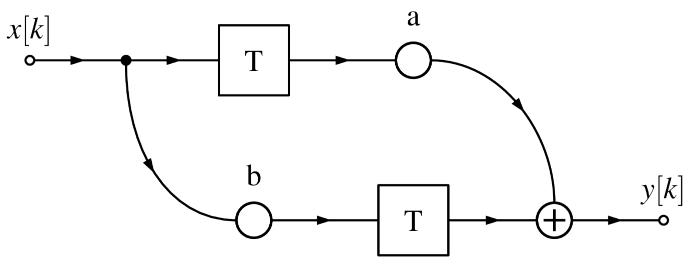
1. Systèmes

Corrigé MA 1.1 Corrigé AR 1.2 Corrigé ARMA 1.3

1.1 MA : systèmes Mooving Average à moyenne glissante.



Les cercles sont des multiplieurs, l'opérateur T est le retard unitaire, le cercle avec un + est un additionneur.

Q1 : Bloc → Récurrence ou Équation différentielle

Vidéo MA1 : Bloc → récurrence

Passez du schéma bloc à l'équation aux différences (récurrence) que vous mettrez sous forme :

— $y[k+1] = \dots$

— $y[k] = \dots$

Simplifiez les expressions et dites de quel ordre est ce système.

Q2 : Récurrence → Fonction de transfert $G(z)$

Vidéo MA1 : Récurrence → G(z)

En se rappelant que z^{-1} est le système/signal associé à l'opérateur retard T, donnez la fonction de transfert en Z en partant de chaque récurrence :

— $y[k] = \ldots \implies Y(z) = \overbrace{\ldots}^{G(z)} . X(z)$
— $y[k+1] = \ldots \implies z.Y(z) = \overbrace{\ldots}^{G(z)} . z.X(z)$

Q3 : Caractérisation et propriétés (LTI, causal, ...)

Identifiez les trois types d'opérateurs utilisés et dites pour chacun si ce sont des systèmes LTI (Linéaire à Temps Invariant), des systèmes causaux. Conclure si le système entier est lui-même LTI, causal.

Le système est-il :
— auto-régressif ?
— récurrent ?
— à moyenne glissante (mooving average) ?
— bouclé ?

Q4 : G(z) $\rightarrow$ Réponse Impulsionnelle (RIp)

Vidéo MA2 : Transformée inverse de H(z)

Utilisez la fonction de transfert $Y(z) = G(z).X(z)$ pour trouver la transformée de la réponse impulsionnelle $H(z) = G(z).\mathcal{Z}\left\{\vec{\delta_0}\right\}$.

Utilisez la transformée inverse pour retrouver la réponse impulsionnelle temporelle $\vec{h} = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$

> **R** Rappelez-vous comment un système/opérateur $X(z)$ (à base des opérateurs cités en Q3) est associé à un signal unique $\vec{x} : k \mapsto x[k]$ temporel.
>
> Indice : signal RIp $\rightarrow$ système. Gros indice : $\vec{x} = X(z)\left\{\vec{\delta_0}\right\}$
>
> Utilisez la phrase « Une impulsion unité en entrée d'un gain de 1 produit une impulsion unité » pour en déduire $\mathcal{Z}\left\{\vec{\delta_0}\right\}$: la transformée en z de l'impulsion unité δ_0.
>
> Traduisez la définition de la fonction de transfert $Y(z) = G(z).X(z)$ en un schéma bloc qui explique comment produire un signal de sortie temporel $\vec{y} : k \mapsto y[k]$ à partir d'une impulsion unité. Indice : $\vec{y} = G(z)\left\{\overbrace{X(z)\left\{\vec{\delta_0}\right\}}^{\vec{x}}\right\}$
>
> L'association $X(z)\left\{\vec{\delta_0}\right\} = \vec{x}$ définit la transformée $X(z) = \mathcal{Z}\{\vec{x}\}$. La transformée inverse $\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \vec{h}$ se trouve, sans calcul analytique à faire !, par l'association inverse.
>
> Indice : Système $\rightarrow$ RIp. Gros indice $\vec{h} = H(z)\left\{\vec{\delta_0}\right\}$

À partir de la réponse impulsionnelle concluez si le système est FIR (Finite Impulse Response) ou IIR (Infinite Impulse response) ?

Q5 : Schéma Bloc MA $\rightarrow$ RIp

Vidéo MA2 : RIp et Causalité

Donnez la réponse impulsionnelle des systèmes : « gain de a » ; « gain de b » ; d'un retard unitaire T.

Rappelez la relation temporelle entre la sortie $\overrightarrow{y}$ d'un système de RIp $\overrightarrow{h}$ pour une entrée $\overrightarrow{x}$.

Dans le schéma bloc, remplacez l'entrée $x[k]$ par l'impulsion $\overrightarrow{\delta_0}$ et propagez le signal dans le schéma bloc jusqu'à la sortie (par exemple la sortie du gain b donnerait $\overrightarrow{\delta_0} \star (b.\overrightarrow{\delta_0}) = b.\overrightarrow{\delta_0}$).

Que devient la relation $Y(z) = G(z).X(z)$ en schéma bloc puis en temporel $\overrightarrow{y} = \dots$

Q6

Retrouvez la propriété de causalité de la Q1 mais à partir de la RIp h.

Q7

Quelle propriété doit vérifier la RIp pour que le système soit stable ? Est-ce une condition nécessaire et suffisante ?

Concluez si ce système est BIBO stable à partir de sa RIp.

BONUS : démontrez que Σh ACV $\implies$ H stable

Q8

Donnez un schéma bloc en transformée en Z sous forme simplifiée Directe I (chaîne de retards puis combinaison linéaire). Retrouvez de quel ordre est ce système.

Q9

On appelle BIBO la propriété de stabilité : "Bounded Input Bounded Output"

A-t-on :

— $MA \implies FIR$?
— $FIR \implies BIBO$? Ou $BIBO \implies FIR$? Ou $BIBO \iff FIR$?
— $MA \implies FIR \implies BIBO$?
— $BIBO \iff FIR \implies MA$?

1.2 AR : Système Auto-Régressif (AR)

La réponse impulsionnelle d'un système continu du premier ordre est :

$$Y(p) = \frac{1}{1+\tau.p}X(p) \quad \underset{\overrightarrow{x}=X(p)\left\{\overrightarrow{\delta_0}\right\}}{\longleftrightarrow} \quad \tau\dot{\overrightarrow{y}} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \quad \underset{\overrightarrow{x}=\overrightarrow{\delta_0}}{\longleftrightarrow} \quad h(t) = e^{-t/\tau}.\Gamma(t)$$

Ce système de pôle $\widehat{p_c} = \frac{-1}{\tau}$ est stable s.s.i. $h(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$ donc s.s.i. $\tau \succ 0$ (dans le cas général où $\tau \in \mathbb{C}$, $\tau \succ 0$ veut dire que la partie réelle de τ est positive). Cela permet de retrouver le fait qu'un pôle est stable s.s.i $\widehat{p_c}$ est dans le demi-plan gauche de Laplace : $\widehat{p_c} \prec 0$.

Nous voulons créer un système discret capable de générer la même réponse impulsionnelle de durée infinie (asymptotique) :

$$Y(z) = \frac{\dots}{\dots + \dots z}X(z) \quad \underset{\overrightarrow{x}=X(z)\left\{\overrightarrow{\delta_0}\right\}}{\longleftrightarrow} \quad \dots\overrightarrow{y[\bullet]} + \dots.\overrightarrow{y[\bullet-1]} = \dots.\overrightarrow{x} \quad \underset{\overrightarrow{x}=\overrightarrow{\delta_0}}{\longleftrightarrow} \quad h[k] = h(k.T_e) = a^k.\Gamma[k]$$

Les pôles $\widehat{p_d}$ de cette fonction de transfert discrète pourraient, de même, donner un lieu géométrique des pôles discrets stables comme le demi-plan gauche du continu.

Q1 : discrétisation de h

Discrétisez le signal $t \mapsto h(t)$, avec une période d'échantillonnage temporelle T_e, pour obtenir le signal $\overrightarrow{h} : k \mapsto h[k] = h(\overbrace{kT_e}^{t})$, et montrez qu'il s'agit d'une suite géométrique $h[k] = a^k.u[k]$ où vous exprimerez a en fonction de τ et T_e.

Q2 : condition de stabilité en temporel avec h

Représentez h graphiquement pour $a = \frac{1}{2}$, puis $a = 1$, puis 2, puis $a = -\frac{1}{2}$, puis -1, puis -2.

Déduisez une condition nécessaire et suffisante de stabilité BIBO du système H avec a puis avec τ (Il y a une CNS de CVA des séries géométriques à utiliser) :

— en discret, H BIBO stable $\iff$ $|a|\dots$

— de même en continu, H BIBO stable $\iff$ $\tau\dots$

Pour trouver l'équivalent du demi-plan gauche stable en discret, les 3 questions suivantes sont des manières différentes de trouver la fonction de transfert du système discret de réponse impulsionnelle du premier ordre $h[k] = a^k.\Gamma[k]$.

Q3 : h $\rightarrow$ récurrence $\rightarrow G(z)$

Vidéo AR1 : Récurrence

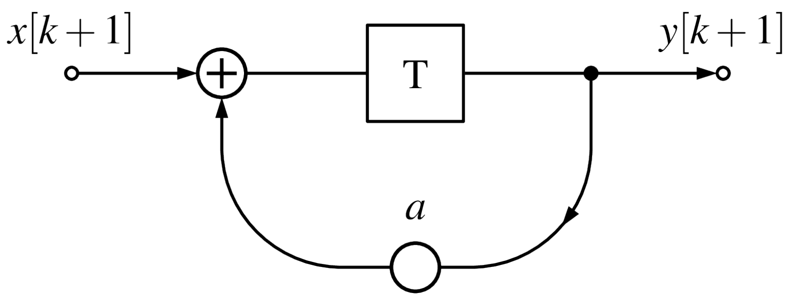
Donnez l'expression sous forme de récurrence d'une suite géométrique de raison a et essayez d'identifier cette récurrence à celle d'une récurrence d'un système discret d'entrée x et de sortie y.

R Une récurrence avec condition initiale est un *système à mémoire* (avec dans notre cas $y[0] = 1$ et $y[k < 0] = 0$) mais *sans entrée* (le système à entrée nulle est dit autonome) :
$y[k] = a.y[k-1] \quad \forall k > 0$ avec condition initiale $y[0] = 1$
De manière équivalente, on construit un *système sans mémoire* (à mémoire nulle $y[k \leq 0] = 0$) mais *avec entrée* $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\delta_0}$ pour établir la *condition initiale (CI)* $y[0] = 1$:
$y[k] = a.y[k-1] + x[k] \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ avec C.I. nulles $y[k < 0] = 0$.

Si vous n'y arrivez-pas facilement, faites d'abord la question suivante.

Sinon, donnez la fonction de transfert $G_1(z)$ de cette récurrence et faites le lien avec celle de la question suivante.

Q4 (optionnelle) : Schéma Bloc $\rightarrow$ récurrence $\rightarrow$ $h[\bullet - 1]$



Traduisez ce schéma bloc en récurrence, puis en fonction de transfert (notée $G_T(z)$).

Calculez-en la réponse impulsionnelle h à partir de l'équation de récurrence.

R Vidéo G(z) $\rightarrow$ RIp Apprenez à faire une division par les puissances décroissante.
Puis vérifiez les premiers termes de h en faisant la division par les puissances décroissantes de :

— $\frac{z}{z^2 - az}$ (récurrence en $y[k+2] = \dots$) ; ou de

— $\frac{1}{z-a}$ (récurrence en $y[k+1] = \dots$) ; ou encore de

— $\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$ (récurrence en $y[k] = \ldots$).

On doit obtenir notre suite géométrique avec un peu de retard ;-) ...

La fonction de transfert $G_1(z)$ de la Q3 donne la suite géométrique h en RIp.

La fonction de transfert $G_T(z)$ donne cette suite avec un retard unitaire.

Donnez donc la relation $G_?(z) = z^?.G_?(z)$ qui exprime qu'un système est en avance sur l'autre.

Q5 (Optionnelle) : $h \quad \rightarrow \quad H(z) = G(z)$

La fonction de transfert $G_1(z)$ de notre système à pour réponse impulsionnelle h donc

$$H(z) = G_1(z).\underbrace{1}_{Z\{\delta_0\}}$$

Il en résulte que $G_1(z) = H(z)$ et donc $G_1(z) = \mathcal{Z}\left\{\overrightarrow{h}\right\}$. On peut donc trouver la fonction de transfert en calculant la transformée de la RIp $\overrightarrow{h}$.

R Tout signal se décompose dans le temps sous forme de somme d'impulsions unité :
$\overrightarrow{h} = h[0].\overrightarrow{\delta_0} + h[1].\overrightarrow{\delta_1} + h[2].\overrightarrow{\delta_2} + \ldots.$
La transformée en Z de cette combinaison linéaire de retards d'impulsions unité est triviale :
$H(z) = h[0].\underbrace{1}_{z\{\overrightarrow{\delta_0}\}} + h[1].\underbrace{z^{-1}}_{z\{\overrightarrow{\delta_1}\}} + h[2].\underbrace{z^{-2}}_{z\{\overrightarrow{\delta_2}\}} + \ldots.$
Ce qui donne la formule analytique de la transformée en Z :

$$\mathcal{Z}\left\{\overrightarrow{h}\right\} = H(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[j].z^{-j}$$

Dans la plupart des ouvrages, z est un nombre complexe et le domaine de convergence de cette série entière doit être donné : valeur de $z \in \mathbb{C}$ où la somme converge.
Dans ce cours, la variable z est l'opérateur avance unitaire et on décrit simplement le système $H(z)$, qui produit h en RIp, en utilisant la décomposition de $\overrightarrow{h}$ dans le temps.

Dans notre cas, la suite géométrique temporelle $(h[k])$ devient une suite géométrique de l'opérateur z.

Retrouvez la formule de la somme d'une série géométrique pour retrouver $H(z)$ sous forme d'une fraction rationnelle en z^{-1}.

R La somme partielle d'une suite géométrique se trouve facilement par effet télescopique :

$$\begin{array}{ccccccc} S_n & = & q^0 & +q^1 & +\ldots & +q^n & \\ -q.S_n & = & & -q^1 & +\ldots & -q^n & -q^{n+1} \\ \hline (1-q).S_n & = & q^0 & & & & -q^{n+1} \end{array}$$

Lorsque la raison q de la suite est inférieure en module à 1, la limite de S_n, lorsque $n \to \infty$, se simplifie car $q^{n+1} \to 0$.

Vous obtenez ainsi la fonction de transfert $H(z) = G_1(z)$ sous forme de fraction rationnelle.

R Apprenez à faire une division par les puissances croissantes et faites une division par les puissances croissante de z^{-1} de $H(z)$ pour retrouver $H(z)$ sous forme d'une suite géométrique...

Vidéo G(z) → RIp

Q6 : conditions de stabilité avec $G(z)$

Déterminez l'ordre, le pôle $\widehat{p_c}$ et les zéros de $G(p) = \frac{1}{1+\tau.p}$ en fonction de τ.

Déterminez de même l'ordre, le pôle $\widehat{p_d}$ et les zéros de $G_1(z)$ en fonction de a puis de τ (et de T_e bien sur). **Attention ! Il faut exprimer en fonction de z et non z^{-1}**

On montre, en continu, qu'un pôle est stable $\iff h(t) \to 0 \iff \tau \succ 0 \iff$ pôle continu $\prec 0$ et donc le fameux “demi-plan gauche stable ”.

On a montré, en discret, que stable $\iff h[k] \to 0 \iff |a| < 1$. Quelle est alors la région du plan complexe où les pôles discrets sont stables.

Pour mémoriser ce résultat fondamental, dessinez à gauche le plan complexe et la région des pôles stable en continu, en donnant la fonction de transfert $g(p)$ et indiquant la valeur du pôle continu $\widehat{p_c}$. Puis indiquez à droite de ce schéma la fonction de transfert $G_1(z)$, l'expression de son pôle discret $\widehat{p_d}$ et la région stable des pôles en discret. Quelle est la condition de stabilité en discret en fonction des zéros et des pôles ?

R La relation $\widehat{p_d} = e^{-\widehat{p_c}.T_e}$ permet de faire le lien entre un pôle oscillant amortis en continus et son équivalent (même RIp mais échantillonnée) en discret. Cela est utile pour savoir où placer les pôles lors du calcul d'une commande par placement de pôles.

Q5

Ce système est-il MA (moyenne pondérée glissante) ? AR (auto-régressif) ? Récursif ? Bouclé ?

Q7

Donnez un schéma bloc en transformée en Z sous forme Directe I (chaîne de retards et combinaison linéaire).

Retrouvez de quel ordre est ce système.

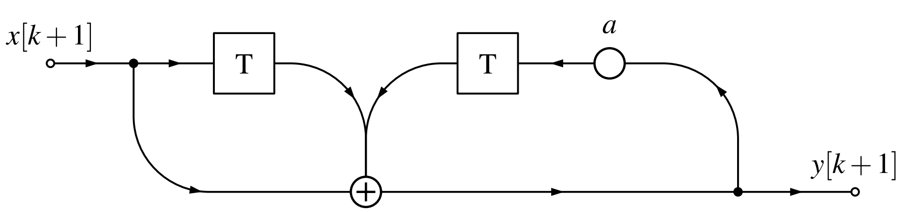
Q8

On appelle BIBO la propriété de stabilité : "Bounded Input Bounded Output"

A-t-on :

— $IIR \implies AR$?
— $IIR \implies \overline{BIBO}$? Ou bien $\overline{BIBO} \implies IIR$? Ou bien $\overline{BIBO} \iff IIR$?
— $AR \iff IIR \implies \overline{BIBO}$?
— $\overline{BIBO} \implies IIR \implies AR$?

1.3 ARMA : Auto Regressive Mooving Average



Q1 : Manipulation de schéma bloc

Repérez le(s) bouclages(s) (AR) et les moyennes glissantes (MA) et décomposez le schéma bloc en séparant clairement MA puis AR.

$\vec{x} \xrightarrow{MA} \vec{w} \xrightarrow{AR} \vec{y}$

Vidéo Schéma bloc MA-AR (s'arrêter avant AR-MA)

Q2 : Bloc $\rightarrow$ Fonction de transfert

On note l'opérateur retard $q = z^{-1}$. Donnez, en les exprimant d'abord avec des retards q puis avec des avances z, les fonctions de transfert :

— $MA(z) = \frac{W(z)}{X(z)}$,

— $AR(z) = \frac{Y(z)}{W(z)}$,

— la fonction de transfert totale $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \underbrace{\frac{Y(z)}{W(z)}}_{AR(z)} \cdot \underbrace{\frac{W(z)}{X(z)}}_{MA(z)} = \underbrace{\frac{W(z)}{X(z)}}_{MA(z)} \cdot \underbrace{\frac{Y(z)}{W(z)}}_{AR(z)}$.

Q3 :Stabilité - Pôles et zéros

Identifiez les pôles et les zéros du système et concluez sur la stabilité en fonction de a.

Q4 : F. Transfert $\rightarrow$ Équation aux Différences

Donnez, à partir de $G(1/q)$, la récurrence du système sous forme
$y[k+1] = \ldots y[k] + \ldots x[\ldots] \ldots x[\ldots]$
et vérifiez qu'elle correspond au schéma bloc.

Q5 : F.T. $\rightarrow$ Réponse Impulsionnelle

Trouvez la réponse impulsionnelle (on prendra $a = \frac{1}{2}$) en décomposant $G(z)$ en $MA(z)$ (numérateur FIR) puis $AR(z)$ (dénominateur IIR) :

— exprimez la réponse impulsionnelle du MA sous forme de deux impulsions

— exprimez la réponse impulsionnelle de l'AR en réutilisant les résultats de l'exercice MA (1er ordre)

— par linéarité du système, trouvez h comme la somme des réponses AR à une somme finie d'impulsions issue du MA(FIR)

R N'oubliez pas que les systèmes sont causaux et que *si l'on retarde un signal causal, il faut aussi retarder l'échelon de Heaviside* : utiliser par exemple $a^{k-1}u[k-1]$ pour annuler la réponse pour $k < 1$

Q6 : Idem par division en puissances croissantes

Vérifiez le résultat en faisant une division par les puissances croissantes de $q = z^{-1}$ de la fonction de transfert totale $G(z)$ prise avec une entrée impulsionnelle.

Vous vérifierez ainsi sur les quelques premiers termes que la réponse de la Q5 fonctionne.

Q7 : RIp $\rightarrow$ causalité et stabilité

À partir de h dites pourquoi le système est stable et causal. Vérifiez la cohérence avec la Q3.

Q8 : Manipulation de blocs $\rightarrow$ forme canonique Directe II

Vidéo ARMA : Forme Directe II

Nous avons $G(z) = MA(z).AR(z) = AR(z).MA(z)$. Redessinez le schéma bloc en séparant d'**abord le AR** puis le MA.

$\overrightarrow{x} \xrightarrow{AR} \overrightarrow{w} \xrightarrow{MA} \overrightarrow{y}$

En permutant le multiplieur avec le retard, regroupez les deux blocs mémoires pour n'en faire qu'un, dont l'entrée sera $w[k+1]$ et la sortie $w[k]$.

Vous obtenez ainsi la *forme Directe II* canonique (et optimale en termes de mémoire).

Q8 (Optionnelle) : Équa. Diff. $\rightarrow$ Espace d'état

Donnez l'ordre de ce système et la récurrence sous forme de représentation d'état discrète avec pour vecteur d'état

${}^{T}W_k = {}^{T}[w[k-N],\ w[k-(N-1)],\ \dots, w[k]]$ de taille adéquate :

$$\begin{cases} W_{k+1} & = & A.W_k & +B.x[k] \\ y[k] & = & C.W_k & +D.x[k] \end{cases}$$

Q9 : F.T. $\rightarrow$ Réponse harmonique (Bode)

Nous prenons maintenant $a=1$. Donnez la réponse harmonique de ce système. Pour cela passez de $AR(z) = AR(\frac{1}{q})$ à une représentation en fréquence $AR(i\omega)$, puis pour $MA(z)$ et enfin pour $G(z)$.

Dans chaque expression faites apparaître uniquement des termes en $e^{i2\pi\tilde{f}}$ où on note $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_e} = \tilde{f} = \frac{f}{Fe}$ la fréquence normalisée.

Dans chaque expression vérifiez :

— que la réponse harmonique en f est f_e périodique (et donc 1 périodique en $\tilde{f}$)

— que la réponse est celle d'un système réel, c'est-à-dire, spectre de Hilbert : $G(-\tilde{f}) = \overline{G(\tilde{f})}$

R Astuce de *l'arc moitié* : Simplifiez bien les paires d'exponentielles ! C'est *très fréquent en discret* :

$1+e^{i.b} = e^{-i.b/2}(e^{i.b/2}+e^{-i.b/2}) = e^{-i.b/2}.2.\cos(b)$ et

$1-e^{i.b} = e^{-i.b/2}(e^{i.b/2}-e^{-i.b/2}) = e^{-i.b/2}.2i.\cos(b)$ et

$e^{i.a}+e^{i.b} = e^{i.\frac{a+b}{2}}(e^{i.\frac{a-b}{2}}+e^{-i.\frac{a-b}{2}}) = e^{i.\frac{a+b}{2}}.2.\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$e^{i.a}-e^{i.b} = e^{i.\frac{a+b}{2}}(e^{i.\frac{a-b}{2}}-e^{-i.\frac{a-b}{2}}) = e^{i.\frac{a+b}{2}}.2i.\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Comme le dit M. Lebotlan : "Seul un Lycéen mémoriserait ces formules. Alors qu'en maternelle ils savaient déjà factoriser par la moitié et puis faire comme Euler et puis c'est tout !"

Pour faire le tracé de la réponse harmonique, faites des équivalents pour avoir les asymptotes :

— un équivalent pour $\tilde{f} \rightarrow 0$ doit donner une constante ;

— un équivalent pour $\tilde{f} \rightarrow \infty$ est impossible, car la réponse est périodique !

— La fréquence discrète la plus haute que l'on puisse imaginer est $\frac{F_e}{2}$: faites donc un équivalent $\tilde{f} \rightarrow \frac{1}{2}$