

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les bases de FOURIER</b>	<b>3</b>
<b>1.1</b>	<b>Signaux et espaces vectoriels</b>	<b>3</b>
1.1.1	Transformations par changement de base	5
1.1.2	Projection par échantillonnage	7
<b>1.2</b>	<b>Les bases temporelles et espaces</b>	<b>8</b>
1.2.1	Espaces discrets de dimension infinie	9
1.2.2	Espaces discrets à support fini ou périodique	10
1.2.3	Signal discret périodique pair : $\mathbb{R}_{DCT-II}^{[0, N_0]}$	13
<b>1.3</b>	<b>Les espaces et produits scalaires associés</b>	<b>14</b>
<b>1.4</b>	<b>Les bases fréquentielles : transformations</b>	<b>15</b>
1.4.1	Base de la TF	16
1.4.2	Base des SdF	17
1.4.3	Base de la TFSD	18
1.4.4	Base de la TFD et FFT	19
<b>1.5</b>	<b>Dualité des transformées</b>	<b>21</b>
1.5.1	Filtrage et fenêtrage : opérations duales	24
1.5.2	Interpolation et gavage de zéro : opérations duales	24
1.5.3	Sur-échantillonnage et multiplication de période : opérations duales	24
1.5.4	Décimation et division de période : opérations duales	24
<b>2</b>	<b>Systèmes discrets</b>	<b>27</b>
<b>2.1</b>	<b>Systèmes linéaires</b>	<b>28</b>
<b>2.2</b>	<b>Systèmes invariants</b>	<b>29</b>
<b>2.3</b>	<b>Réponse d'un système LTI</b>	<b>30</b>
2.3.1	Réponse impulsionnelle	30

<b>2.4</b>	<b>Stabilité d'un système LTI</b>	<b>32</b>
2.4.1	Stabilité BIBO	33
<b>2.5</b>	<b>Stabilité simple</b>	<b>34</b>
<b>2.6</b>	<b>Calcul opérationnel</b>	<b>35</b>
2.6.1	Similitude entre signal et système	35
2.6.2	Algèbre des systèmes et signaux	37
2.6.3	Systèmes élémentaires : fonction de transfert en Z	41
2.6.4	Système non-bouclé – moyenne glissante (MA) – régressif – FIR	43
2.6.5	Système bouclé – récurrence – autorégressif – IIR	43
<b>2.7</b>	<b>Transformée en Z</b>	<b>43</b>
2.7.1	Fonction de transfert et récurrence	43
2.7.2	Signaux/systèmes usuels	43
2.7.3	Décomposition élémentaire et stabilité	43
2.7.4	Domaine de convergence et causalité	43
<b>2.8</b>	<b>Réponse fréquentielle</b>	<b>43</b>
2.8.1	Lien avec les transformées de Fourier	43
2.8.2	Dualité entre système et filtre	43
<b>2.9</b>	<b>Calcul opérationnel : Transformée en Z</b>	<b>43</b>
2.9.1	Principe du calcul opérationnel	43
<b>3</b>	<b>La distribution de Dirac</b>	<b>47</b>
<b>3.1</b>	<b>La notion de densité</b>	<b>47</b>
<b>3.2</b>	<b>Dérivée de fonctions discontinues</b>	<b>49</b>
<b>3.3</b>	<b>Opérateur dérivée et sa réciproque</b>	<b>50</b>
3.3.1	Calcul opérationnel en continu	50
<b>3.4</b>	<b>Propriété sous l'intégrale de l'impulsion de DIRAC et de l'impulsion unité</b>	<b>52</b>
<b>3.5</b>	<b>Propriété de convolution avec le DIRAC et l'impulsion unité</b>	<b>52</b>

# 1. Les bases de FOURIER

Ce chapitre aborde les signaux et leurs transformées avec le point de vue des espaces vectoriels. Les notions apprises pour les signaux continus sont ainsi revues et étendues aux signaux discrets.

## 1.1 Signaux et espaces vectoriels

La Fig. 1.1 illustre le cas d'un espace vectoriel de dimension 3 et d'une relation possible avec les espaces des fonctions continues et discrètes.

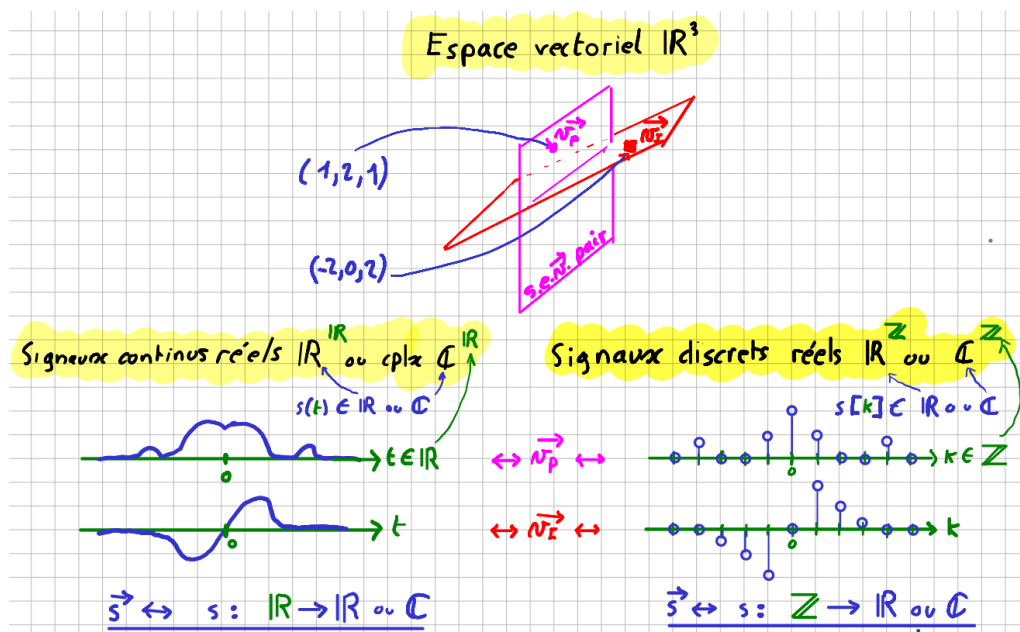


FIGURE 1.1 – Liens entre l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^3$  et les espaces de fonctions. La notion de sous espace vectoriel est illustrée par l'exemple des sous espaces pair (violet) et impair (rouge).

### R Notation et rigueur

On appelle et notera indifféremment un signal  $s$  ; la fonction  $s$  (ou dans le cas discret la suite numérique  $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sera simplement notée  $s$ ) ; et le vecteur  $\vec{s}$  de l'espace des signaux associé. On différencie, en notant  $s[k]$ , l'évaluation de la fonction discrète  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  à l'instant  $k$  de celle d'un signal continu  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  à un instant  $t$  classiquement notée  $s(t)$ .

Le segment discret est noté  $\llbracket n, m \rrbracket = \{k \in \mathbb{Z} \mid n \leq k < m\}$  différemment d'un segment continu  $[a, b[ = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t < b\}$

La notation des espaces  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  choisie est assez courante et s'explique par l'extension de la notation des produits carthésiens  $\times$  car :

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{3 \text{ fois}} = \{(z_0, z_1, z_2) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

En indiquant que le nombre de produits est associé aux éléments  $k$  d'un ensemble discret et prenant cette fois-ci des valeurs complexes, on note :

$$\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^{\{0,1,2\}} = \underbrace{\mathbb{C}}_{k=0} \times \underbrace{\mathbb{C}}_{k=1} \times \underbrace{\mathbb{C}}_{k=2} \quad \text{avec } (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^{\llbracket 0,3 \rrbracket} = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3\}$$

En prenant un ensemble de dimension infini dénombrable comme  $\mathbb{Z}$  par exemple :

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \dots \times \underbrace{\mathbb{R}}_{k=-1} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{k=0} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{k=1} \times \dots \quad \text{avec } s = (\dots, \underbrace{s_{-1}}_{k=-1}, \underbrace{s_0}_{k=0}, \underbrace{s_1}_{k=1}, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

Un élément est donc un n-uplet de dimension infini dénombrable qui est le graphe d'une application de  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  et donc celui d'une suite numérique  $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  que l'on appelle signal discret  $s$ . On note donc  $s[1]$  l'évaluation de  $s$  pour  $k = 1$  qui est la valeur  $s_1$  représenté dans ce n-uplet. On assimilera donc ces deux notations  $s_k = s[k]$ , l'une indiquant le terme de rang  $k$  de la suite  $s$  et l'autre l'évaluation de l'application  $s$  avec l'argument  $k$ .

La préreprésentation d'un tel graphe se fait sous forme de graphe en « batonnets » comme en bas à droite de la Fig. 1.1

La puissance du continu est obtenu en prenant l'ensemble infini indénombrable  $\mathbb{R}$  ce qui donne :

$$\mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \dots \times \underbrace{\mathbb{C}}_{t=0} \times \dots \times \underbrace{\mathbb{C}}_{t=\pi} \times \dots \quad \text{avec } s = (\dots, \underbrace{z_0}_{t=0}, \dots, \underbrace{z_\pi}_{t=\pi}, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Un élément de cet ensemble est donc un n-uplet de dimension infinie indénombrable (remarquez qu'il y a une infinité indénombrable de valeurs entre  $z_0$  et  $z_\pi$  !). Ce n-uplet constitue le graphe d'une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  et donc celui du signal continu  $s$ . Contrairement aux suites numériques du discret, il est rare de voir noté  $s_t$  une évaluation de cette fonction à l'instant  $t$  et la notation  $s(t)$  sera toujours utilisée.

Ainsi que ce soit en continu avec le cas le plus général des fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , ou en discret celui des suites complexes de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , on manipulera les signaux comme des vecteurs et utiliserons les notions de :

**produit scalaire**  $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle$  — sera un scalaire complexe dont le module indiquera si deux fonctions  $f$  et  $g$  se ressemblent. Calculer le produit scalaire entre  $f$  et  $g$  avec différents retards  $\tau$  appliqués à  $g$  permet de définir la *fonction de corrélation* ;

**norme de vecteur (au carré)**  $\|\vec{s}\|^2 = \langle \vec{s}, \vec{s} \rangle$  — sera associé à l'énergie totale du signal ou à la puissance moyenne dans le cas de signaux à support fini comme l'espace des fonctions périodiques, etc.

**bases vectorielles** — permet de représenter des signaux par des signaux de base. Deux bases seront importantes : une base temporelle faite de signaux localisés autour d'un instant mais diffus en fréquence ; et une base fréquentielle faite de signaux localisés en fréquence et diffus dans le temps.

**projection sur un sous-espace** — Revient à trouver un signal d'un sous espace vectoriel qui soit le plus proche du signal projeté. Projeter sur un sous-espace en enlevant des vecteurs d'une base correspond à un sous-échantillonnage du signal et ajouter des vecteurs à une base (avec des composantes nulles)

**changement de base** — correspond aux transformations de FOURIER (base temporelle vers fréquentielle) et aux transformées inverses. Dans le cas des signaux discrets bornés, la base étant finie on peut représenter la transformée TFD (algorithme FFT) par une matrice de passage. Le calcul de la transformée se fait par produit matriciel et l'inverse par le produit avec la matrice inverse.

### 1.1.1 Transformations par changement de base

La Fig. 1.2 met en évidence l'analogie du changement de base et d'une transformée.

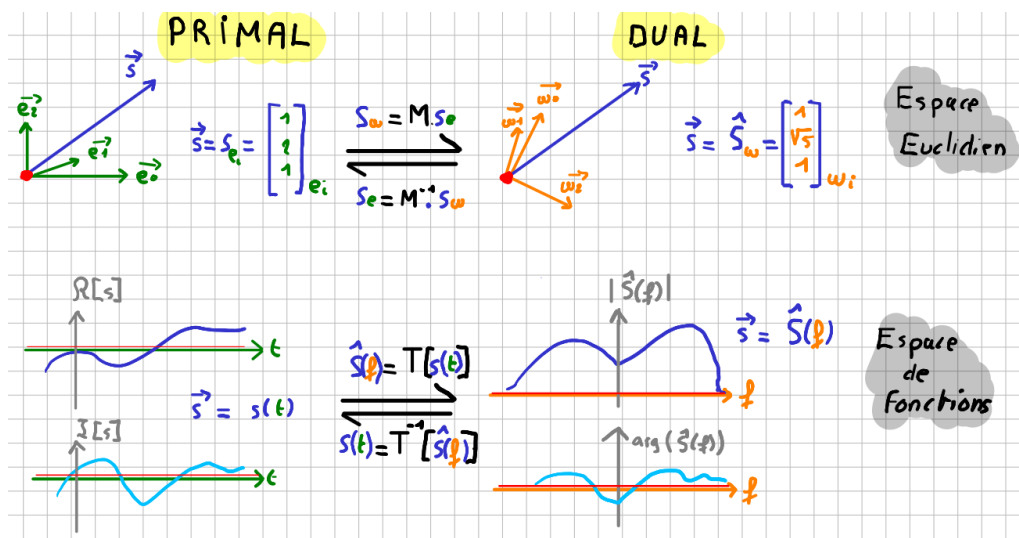


FIGURE 1.2 – Changement de base d'un vecteur dans un espace Euclidien de  $\mathbb{R}^3$  et transformation d'une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dans un espace de Hilbert.

Si l'on note  $E$  un espace vectoriel des signaux qui pourrait être :

- $L_2 = \{s \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \mid \|s\|_2 \in \mathbb{R}\}$  – celui des signaux continus à énergie finie pour les transformées de FOURIER (TF) ;
- $L_2^p$  les signaux continus et périodiques à puissance moyenne finie pour les séries de FOURIER (SdF) ;
- les signaux discrets de carré sommable pour les transformées de FOURIER des signaux discrets (TFSD) ;
- les signaux discrets périodiques pour les transformées de FOURIER discrètes (TFD) avec son algorithme de calcul optimisé *Fast Fourier Transform* (FFT).

On peut obtenir des fonctions/suites de coordonnées dans deux bases incontournables :

**Espace temporel (souvent le primal)** —  $(E, B_c)$  — Un signal  $\vec{s} \in E$  peut être décomposé dans une base temporelle canonique  $B_c = (e_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}$  de dimension infinie indénombrable où chaque vecteur  $e_\tau$  de la base est un signal continu. Souvent considéré en premier, cet espace est appelé *l'espace primal*.

Les coordonnées sont alors exprimées sous la forme d'une fonction  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  qui, pour chaque instant réel  $\tau \in \mathbb{R}$  associé à un vecteur  $\vec{e}_\tau$ , indique l'amplitude  $s(\tau)$  de sa composante. Si l'on a une base orthonormée, alors cette composante s'obtient en projetant  $\vec{s}$  sur chaque

vecteur  $\vec{e}_\tau$  de la base avec le produit scalaire :

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \tau & \longmapsto & \langle \vec{s}, \vec{e}_\tau \rangle = s(\tau) \end{array}$$

Dans le cas du temps discret on a une base infinie dénombrable  $B_c = (e_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de signaux discrets et les coordonnées sont :

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ j & \longmapsto & \langle \vec{s}, \vec{e}_j \rangle = s[j] \end{array}$$

**Espace fréquentiel (souvent le dual)** —  $(E, B_w)$  — Ce même signal  $\vec{s} \in E$  peut être décomposé dans une base fréquentielle  $B_w = (w_f)_{f \in \mathbb{R}}$  où chaque vecteur  $\vec{w}_f$  de la base est un signal localisé en fréquence.

Les coordonnées sont alors exprimées sous la forme d'une fonction  $\hat{S}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  qui, pour chaque fréquence réelle  $f$  associée à un vecteur  $\vec{w}_f$ , indique l'amplitude  $\hat{S}(f)$  de cette composante.

On retrouve la formule de transformée en utilisant le produit scalaire ainsi :

$$\hat{S}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \langle \vec{s}, \vec{w}_f \rangle = \hat{S}(f) \end{array}$$

Dans le cas des *fréquences discrètes*, la base est infinie dénombrable  $B_w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et les coordonnées sont :

$$\hat{S}: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \langle \vec{s}, \vec{w}_n \rangle = \hat{S}[n] \end{array}$$

Pour une physicienne, une fonction du temps n'est pas la même chose qu'une fonction de la fréquence. Pour une mathématicienne ce sont toutes les deux des fonctions de la variable réelle !

Ainsi le signal  $\vec{s}$  est associé à une fonction  $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dans la base temporelle et à une fonction  $\hat{S}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dans la base fréquentielle.

On peut s'abstraire et considérer  $\hat{S}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dans la base temporelle : ce qui donnera un signal différent de  $\vec{s}$ . Et aussi considérer  $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dans la base fréquentielle ce qui donnera encore un autre signal différent.

### **R** Notation et rigueur

On peut alors être tentée d'écrire  $s(t)$  et  $\hat{S}(t)$  pour indiquer que ces fonctions sont des coordonnées dans une base temporelle. Mais c'est une erreur de typage, car  $s(t) \in \mathbb{C}$  dans le cas général et on veut parler de fonctions de  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ . La fonction se note  $s$ , son évaluation en un point  $s(t)$  et si l'on veut évoquer la fonction en insistant qu'elle est dans une base temporelle on peut noter  $t \mapsto s(t)$ .

Cette notation est lourde, on utilisera la notation *assez rare et spécifique* suivante qui remplace la variable  $t$  qui pourrait aussi bien être  $x$  ou  $f$  (on parle de variable muette) par le symbole  $\bullet$ . Ainsi on note :

$$s = t \mapsto s(t) = f \mapsto s(f) = s(\bullet)$$

La transformée de FOURIER est donc l'opérateur identité dans l'espace vectoriel des signaux  $E$  qui consiste juste à changer de système de coordonnées.

$$\mathcal{F} := I_d: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{s} & \longmapsto & \vec{s} \end{array}$$

En revanche pour ce qui est des fonctions (coordonnées) associées, une transformée est une application linéaire qui transforme une fonction en une fonction :

$$\mathcal{F}: \begin{array}{ccc} (E, B_c) & \longrightarrow & (E, B_w) \\ s: t \mapsto \langle \vec{s}, \vec{e}_t \rangle = s(t) & \longmapsto & \hat{S}: f \mapsto \langle \vec{s}, \vec{w}_f \rangle = \hat{S}(f) \end{array}$$

### 1.1.2 Projection par échantillonnage

La base fréquentielle de FOURIER permet au moins de décrire l'espace des fonctions de carré sommable (noté  $L_2$ ) dont la dimension est infinie indénombrable et possède la puissance du continu. La décomposition d'un signal dans cette base constitue la TF.

**Définition 1.1.1** L'échantillonnage (on dira *decimation* dans le cas d'espaces de puissance discrète) est un type de projection d'un espace de dimension infinie dans un espace de dimension inférieure. Il consiste à prélever un sous-ensemble de vecteurs d'une base de manière régulière : avec un espacement constant nommé *période d'échantillonnage* et parfois *résolution*.



On peut échantillonner aussi bien :

- des bases temporelles continues et on parlera d'échantillonnage de période  $T_e \in \mathbb{R}$  pour obtenir un signal primal discret ;
- des bases temporelles discrètes où on nommera *decimation* l'opération avec un paramètre  $M \in \mathbb{N}$  nommé *facteur de decimation* (on garde un point tout les M points) pour obtenir un dual discret ;
- des bases fréquentielles continues et on parlera d'échantillonnage en fréquence avec une période notée  $F_0$  (qui évoque les SdF) et parfois  $\Delta_f$  pour évoquer la *résolution fréquentielle* ;
- des bases fréquentielles discrètes et on parlera de *decimation en fréquence*.

On peut discrétiser la base de FOURIER  $(t \mapsto e^{i2\pi f t})_{f \in \mathbb{R}}$  qui est continue en temps et en fréquences selon le temps, la fréquence ou les deux :

**temps discret** où la variable  $t \in \mathbb{R}$  sera remplacée par une variable discrète  $k \in \mathbb{N}$  avec la relation  $t = kT_e$  où  $T_e$  est la valeur qui sépare deux échantillons en temps est nommé *période d'échantillonnage* et parfois *résolution temporelle* notée  $\Delta_t$  à ce moment.

**fréquences discrètes** où la variable  $f \in \mathbb{R}$  sera remplacée par une variable discrète  $n \in \mathbb{N}$  avec la relation  $f = n\Delta_f$  où  $\Delta_f$  est la valeur qui sépare deux échantillons en fréquence est nommé *résolution fréquentielle*. On peut noter  $F_0$  cette même *période d'échantillonnage en fréquence* pour évoquer le cas des SdF.

QUIZZ — On note la fonction  $w(t, f) = e^{i2\pi f t}$

**Q1 - Typage :** la fonction  $w$  est un vecteur de l'espace :

1.  $L_2$  : l'espace des fonctions à énergie finie
2.  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$
3.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$
4.  $\mathbb{R}^{2\mathbb{C}}$  mais ça fait bizarre

**Q2 - Discret temporel :** je dispose d'un enregistrement audio 256 kb/s en 8bit :

1. je suis à temps discret car en 8bit la résolution temporelle est  $T_e = 1/2^8$  ;
2. temps discret et ma fréquence d'échantillonnage est plus rapide ou égale à  $F_e = \frac{256}{8} \text{ kHz}$  ;
3. une base fréquentielle peut être :  $(k \mapsto e^{i2\pi f k T_e})_{f \in \mathbb{R}}$
4. un vecteur de la base fréquentielle peut être :  $w_n = k \mapsto e^{i2\pi n F_0 k T_e}$

**Q2 - Discret fréquentiel :** un vecteur d'une base fréquentielle discrète pourrait s'écrire

1.  $w_n[k] = \sin(2\pi n F_0 k T_e)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
2.  $w_f = f \mapsto \sin(2\pi f k T_e) = \sin(2\pi \bullet k T_e)$
3.  $w_f = k \mapsto \sin(2\pi f k T_e) = \sin(2\pi f k T_e)$
4.  $w_n = t \mapsto \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right)$

Selon la dimension continue (infinie indénombrable) ou discrète (infinie dénombrable ou

finie) des espaces primal et dual, on utilisera différents produits scalaires pour effectuer différentes transformations entre primal et dual.

L'appellation primal/dual est utilisée car elle exprime le fait qu'il existe une opération permettant de passer de primal au dual et que cette *même opération* appliquée cette fois au dual permet de revenir au primal : comme appliquer deux fois un conjugué à un nombre complexe ou deux fois la transposée à une matrice.

La section §1.5 montre que la transformée de FOURIER et sa version discrète sont toutes deux des opérateurs bi-duaux car :

$$\dots \xrightarrow{\mathcal{F}} s \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{S} \xrightarrow{\mathcal{F}} s(-\bullet) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{S}(-\bullet) \xrightarrow{\mathcal{F}} s \xrightarrow{\mathcal{F}} \dots$$

$$\text{et donc } \dots \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \mathcal{F}} s \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \mathcal{F}} s(-\bullet) \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \mathcal{F}} s \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \mathcal{F}} \dots$$

L'opérateur  $\mathcal{F}^2$  transforme donc un signal  $s$  en un signal inversé, appelé *antipodal*,  $s(-\bullet)$  qui est le dual de  $s$ . De même le dual de  $\hat{S}$  est son antipodal  $\hat{S}(-\bullet)$ .

On dit que  $s$  est le dual de  $\hat{S}$  un peu par abus.

### **R Pourquoi des signaux complexes alors qu'ils sont toujours réels ?**

Cela permet justement d'appliquer plusieurs fois un même changement de base, comme la transformée de FOURIER à un signal. Ainsi si l'on considère uniquement des signaux de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & \hat{F} = T\{f\} \end{array} \quad \not\subset \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ g & \longmapsto & \hat{G} \end{array}$$

Car la transformée d'un signal réel est dans le cas général un signal à valeur complexe ( $a(f)$  et  $b(f)$ ). En considérant le cas général  $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$  on peut composer les transformations :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{R}} & = & \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ \cdots f & \longmapsto & \hat{F} = T\{f\} & = & g = \hat{F} \longmapsto \hat{G} = s(-\bullet) \cdots \end{array}$$

De plus il est pratique de considérer des bases imaginaires  $B_w = (t \mapsto e^{i2\pi ft})_{f \in \mathbb{R}}$ , quitte à admettre des fréquences négatives et avoir une seule fonction de coordonnées  $f \mapsto c(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ . Alors qu'en restant en réel avec des fréquences positives il faut traiter une union de deux bases  $B_w = (t \mapsto \cos(2\pi ft))_{f \in \mathbb{R}^+} \cup (t \mapsto \sin(2\pi ft))_{f \in \mathbb{R}^{++}}$  et deux fonctions de coordonnées  $f \mapsto a(f) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$  et  $f \mapsto b(f) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^{++}}$

## **1.2 Les bases temporelles et espaces**

Nous allons définir les différents espaces des signaux (fonctions) et y associer une base vectorielle « canonique » et parfois des variantes. Comme ces vecteurs de bases seront choisis de manière à être très localisés dans le temps, la majorité de l'énergie est localisée autour d'un instant, les bases seront dites temporelles.

Nous cherchons donc une famille de fonctions  $t \mapsto p_{\tau}(t)$  ( $p$  comme impulsion) localisées autour d'un instant  $\tau$  en continu ; et des suites  $k \mapsto p_j[k]$  localisées autour de l'échantillon de rang  $j$  pour le temps discret.

Ainsi un vecteur  $\vec{s}$  d'un espace vectoriel de signaux discrets  $E$  sera décomposé dans la base temporelle par :

$$\vec{s} = \sum_j s[j] \cdot \overrightarrow{k \mapsto p[k-j]} = \sum_j s[j] \cdot \overrightarrow{p[\bullet-j]}$$

où le coefficient  $s[j]$  de la composante à l'instant  $j$  est obtenu par projection :

$$s[j] = \langle \vec{s}, \overrightarrow{p[\bullet-j]} \rangle$$



Dans le cas continu nous avons :

$$\vec{s} = \int s(\tau) \cdot \overrightarrow{t \mapsto p(t-\tau)} d\tau$$

où le coefficient  $s(\tau)$  de la composante à l'instant  $\tau$  est obtenu par projection :

$$s[\tau] = \langle \vec{s}, \overrightarrow{t \mapsto p(t-\tau)} \rangle$$

Le plus simple est de considérer une suite finie de nombres : incontournable lorsque l'on traite le signal avec des processeurs numériques. La mémoire étant finie, on ne peut qu'utiliser des mesures faites périodiquement dans le temps (temps discret) nommées *échantillons* et de plus sur une durée finie (nombre d'échantillons fini).

### 1.2.1 Espaces discrets de dimension infinie

L'espace des signaux discrets réels (resp. complexes) à support infini est l'ensemble des applications de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ) noté  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$  (resp.  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \{s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}\}$ ).

#### **R** Rappel sur les notations

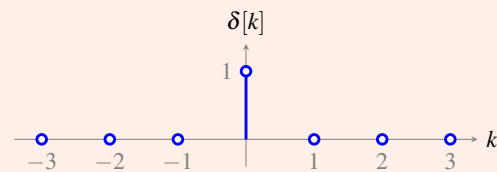
Un élément de cet espace est donc une fonction d'une variable discrète que l'on notera souvent  $k$  lorsqu'il s'agit d'un indice du temps avec la relation  $t \leftrightarrow kT_e$ , ou bien  $n$  lorsque l'indice est relié aux fréquences par  $f \leftrightarrow nF_0$ . Une fonction de la variable continue évaluée à un instant  $t$  étant notée  $f(t)$ , on utilisera des crochets et notera  $f[k]$  une fonction de la variable discrète évaluée en  $k$ .

Pour différencier la notation d'une fonction de celle de son évaluation en un point, car  $f \neq f(t)$ , on notera de manière allégée  $f(\bullet)$  la fonction continue  $t \mapsto f(t)$  où  $\bullet$  remplace la variable muette  $t$ . De même on différencie le scalaire  $f[k]$  de la fonction  $k \mapsto f[k]$  en notant simplement une fonction  $f[\bullet]$ .

On veut trouver une base permettant de décomposer un signal/vecteur  $\vec{f}$  quelconque avec des vecteurs/signaux  $\vec{w}_i$  d'une base qui sera dite temporelle si le signal est localisé autour d'un instant. La fonction discrète la plus localisée dans le temps que l'on puisse utiliser pour construire cette base est l'*impulsion unitée* que l'on définit ci-dessous.

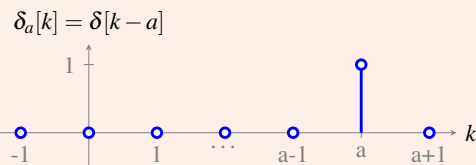
**Définition 1.2.1** L'*impulsion unitée*, notée  $\delta_0$  ou simplement  $\delta$ , est le signal discret tel que :

$$\delta = \delta_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ k \longmapsto \delta_0[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



L'*impulsion unitée centrée en  $a$*  est notée  $\delta_a$  et définie par :

$$\delta_a = \delta_0[\bullet - a] : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ k \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } k = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



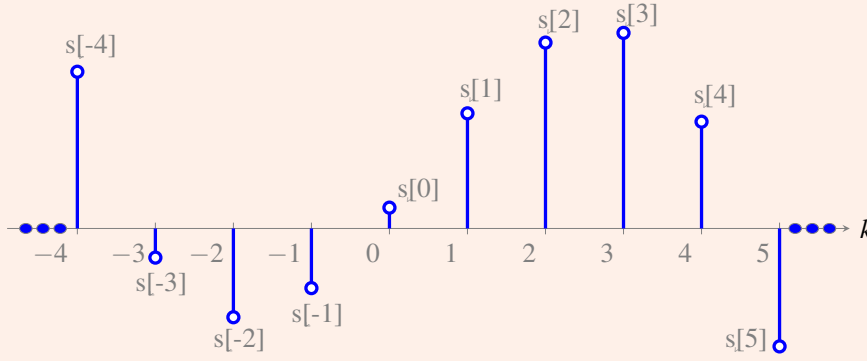
**R** Bien qu'utilisant le même symbole  $\delta$ , il ne faut pas confondre l'impulsion unitée discrète avec l'impulsion de DIRAC. L'impulsion unitée est un signal discret tout à fait classique d'amplitude égale à 1 ; alors que l'impulsion de DIRAC est une fonction généralisée ou distribution, voir Chap. 3, d'amplitude infinie et de poids unité.

Ainsi on peut définir l'espace vectoriel des fonctions discrètes en donnant une base canonique.

**Définition 1.2.2** — L'espace des signaux discrets  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  ou  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  (à support infini)

Est l'espace vectoriel de dimension infinie dénombrable des suites réelles défini par la base vectorielle  $B_{\mathbb{Z}} = (\delta_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ . Un vecteur/signal  $\vec{s}$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  a donc des coordonnées avec une infinité de composantes :

$$\vec{s} = (\dots, s[-1], s[0], s[1], \dots)_{B_{\mathbb{Z}}} = \dots + s[-1] \cdot \delta_{-1} + s[0] \cdot \delta_0 + s[1] \cdot \delta_1 + \dots = \sum_{j \in \mathbb{Z}} s[j] \cdot \delta_j$$



Cet espace est utile du point de vue théorique car il permet de modéliser l'échantillonnage d'un signal continu. En revanche, en pratique, il est impossible de stocker une quantité infinie d'échantillons dans la mémoire d'un système. On va donc utiliser une fenêtre d'observation pour limiter cette quantité d'information.

**1.2.2 Espaces discrets à support fini ou périodique**

Ainsi un échantillonnage de  $N_0$  points réels (resp. complexes) est un vecteur de  $\mathbb{R}^{N_0}$  (resp.  $\mathbb{C}^{N_0}$ ). On peut établir des bijections entre ce vecteur et différents *sous-espaces* de l'ensemble des signaux discrets à support infini  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

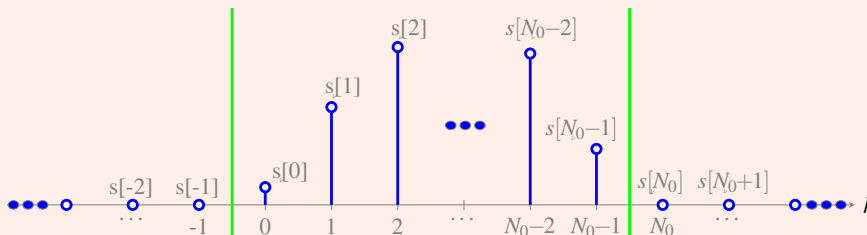
**Signal discret borné :  $\mathbb{R}^{\llbracket 0, N_0 \rrbracket}$  ou  $\mathbb{C}^{\llbracket 0, N_0 \rrbracket}$** 

L'ensemble des signaux discrets bornés à valeurs réelles (resp. complexes)  $\{s : \llbracket 0, N_0 \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}\}$  (resp.  $\{s : \llbracket 0, N_0 \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}\}$ ) est défini uniquement pour  $k \in \llbracket 0, N_0 \rrbracket$ . On plonge ces fonctions dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (resp.  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ) avec un prolongement nul pour  $k$  en dehors de l'intervalle de définition (appelé parfois fenêtre d'observation naturelle).

**Définition 1.2.3** — L'espace des signaux discret borné  $\mathbb{R}^{\llbracket 0, N_0 \rrbracket}$  ou  $\mathbb{C}^{\llbracket 0, N_0 \rrbracket}$  (à support fini)

Est un sous espace vectoriel noté  $\mathbb{R}^{\llbracket 0, N_0 \rrbracket}$  (resp.  $\mathbb{C}^{\llbracket 0, N_0 \rrbracket}$ ) des suites réelles  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (resp. suites complexes  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ) défini par la base vectorielle  $B_{N_0}^b = (\delta_j)_{j \in \llbracket 0, N_0 \rrbracket}$ . Ce signal est donc, sans perte de généralité, nul pour tout  $k < 0$  et  $N_0 \leq k$  et se décompose ainsi :

$$(\dots, 0, s[0], \dots, s[N_0 - 1], 0, \dots) \leftrightarrow s[0] \cdot \delta_0 + \dots + s[N_0 - 1] \cdot \delta_{N_0 - 1} = \sum_{0 \leq j < N_0} s[j] \cdot \delta_j$$



Remarquons que l'indice  $j$  est un indice indiquant un vecteur de la base temporelle qui est différents de la variable muette  $k$  que nous utilisons pour désigner l'argument d'une fonction discrète. Ainsi il faut bien analyser la somme précédente décomposant un signal  $s$  par :

$$s = \sum_{0 \leq j < N_0} s[j] \cdot \delta_j : \begin{matrix} \mathbb{N} & \longrightarrow \\ k & \longmapsto \end{matrix} \sum_{0 \leq j < N_0} s[j] \cdot \delta_j[k] = \sum_{0 \leq j < N_0} s[j] \cdot \delta[k-j] \quad \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \quad (1.1)$$

■ **Exemple 1.1** On associe un enregistrement de 3 échantillons discrets de valeur 1, 2 puis 3 au vecteur  $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ . On fait une bijection entre ce vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et le signal discret  $s = 1 \cdot \delta_0 + 2 \cdot \delta_1 + 3 \cdot \delta_2$  en échangeant la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  ayant par exemple pour vecteur  $\vec{e}_0 = (1, 0, 0)$  avec le signal/vecteur de la base canonique des signaux discrets borné  $B_3^b = (\delta_j)_{0 \leq j < 3}$  correspondant :  $\vec{w}_0 = \delta_0$ .

Nous avons bien un sous-espace vectoriel de dimension 3 de l'espace des suites réelles (resp. complexes) avec

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_3^b} = 1 \cdot \vec{w}_0 + 2 \vec{w}_1 + 3 \vec{w}_2 = 1 \cdot \delta_0 + 2 \cdot \delta_1 + 3 \cdot \delta_2$$

On obtient le signal :

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot \delta_0 & = & (\dots, 0, 1, 0, 0, 0, \dots) \\ + \quad 2 \cdot \delta_1 & = & (\dots, 0, 0, 2, 0, 0, \dots) \\ + \quad 3 \cdot \delta_2 & = & (\dots, 0, 0, 0, 3, 0, \dots) \\ \hline = s & = & (\dots, 0, 1, 2, 3, 0, \dots) \end{array}$$

■

**R** Si l'on veut décomposer un signal discret borné dans une base fréquentielle avec des signaux étalés dans le temps, mais localisés en fréquences ; nous verrons que toutes les fréquences  $f$  du segment continu  $[0, F_e[$  sont nécessaires et que les composantes fréquentielles sont périodiques de période  $F_e$  : nous obtiendrons **la transformée de FOURIER des signaux discrets (TFSD)** pour représenter un **signal discret borné**

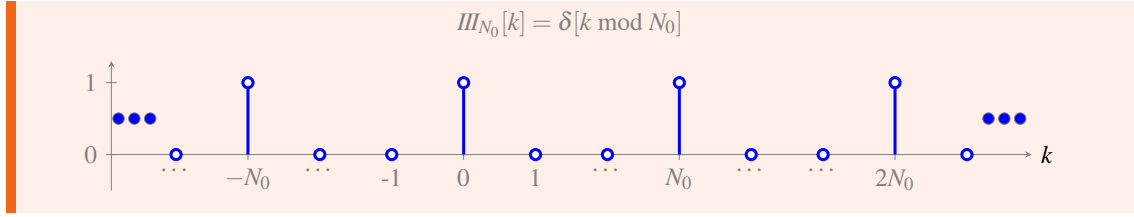
**Signal discret périodique** :  $\mathbb{R}_P^{[0, N_0[}$  ou  $\mathbb{C}_P^{[0, N_0[}$

En prolongeant le signal de manière périodique, nous obtenons une représentation fréquentielle plus légère qui sera aussi une fonction discrète périodique (au lieu d'une fonction continue périodique dans le cas des TFSD précédent).

Pour cela nous devons introduire la version périodique de l'impulsion unité.

**Définition 1.2.4** Un **peigne d'impulsions de période  $N_0$**  est le signal noté  $\text{III}$  (lettre cyrillique *Sha*) définit par :

$$\text{III}_{N_0} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_{m \cdot N_0} : \begin{matrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow \\ k & \longmapsto \end{matrix} \delta_0[k \bmod N_0] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m \cdot N_0, \quad m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$



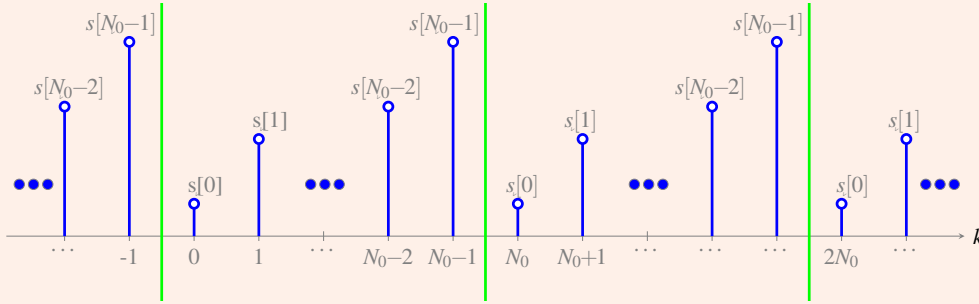
Nous pouvons utiliser les peignes d'impulsions comme base de signaux pour définir le sous-espace vectoriel des signaux discrets périodiques :

**Définition 1.2.5** — L'espace des signaux discrets  $N_0$ -périodiques  $\mathbb{R}_P^{[0, N_0]}$  ou  $\mathbb{C}_P^{[0, N_0]}$

Est un sous espace vectoriel noté  $\mathbb{R}_P^{[0, N_0]}$  (resp.  $\mathbb{C}_P^{[0, N_0]}$ ) des suites réelles (resp. suites complexes) défini par la base vectorielle

$B_{N_0}^P = (\text{III}_{N_0}[\bullet - j])_{0 \leq j < N_0}$ . Ce signal est donc de période  $N_0$  et se décompose ainsi :

$$s = s[0] \cdot \text{III}_{N_0} + \dots + s[N_0 - 1] \cdot \text{III}_{N_0}[\bullet - (N_0 - 1)] = \sum_{0 \leq j < N_0} s[j] \cdot \text{III}_{N_0}[\bullet - j]$$



Ne pas confondre l'indice  $j$  de la base temporelle et la variable muette  $k$  que nous utilisons pour désigner l'argument d'une fonction discrète. Ainsi il faut bien analyser la somme précédente décomposant un signal  $s$  par :

$$s[k] = \sum_{0 \leq j < N_0} s[j] \cdot \text{III}_{N_0}[k - j] \quad (1.2)$$

■ **Exemple 1.2** On associe maintenant  $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$  au signal discret périodique  $s = 1 \cdot \text{III}_3 + 2 \cdot \text{III}_3[\bullet - 1] + 3 \cdot \text{III}_3[\bullet - 2]$  qui est 3-périodique.

Nous avons bien un sous-espace vectoriel de dimension 3 de l'espace des suites réelles (resp. complexes) avec

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_3^P} = 1 \cdot \vec{w}_0 + 2 \cdot \vec{w}_1 + 3 \cdot \vec{w}_2 = 1 \cdot \text{III}_3 + 2 \cdot \text{III}_3[\bullet - 1] + 3 \cdot \text{III}_3[\bullet - 2]$$

On obtient le signal :

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot \text{III}_3 & = & (\dots, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) \\ + 2 \cdot \text{III}_3[\bullet - 1] & = & (\dots, 0, 2, 0, 0, 2, 0, \dots) \\ + 3 \cdot \text{III}_3[\bullet - 2] & = & (\dots, 0, 0, 3, 0, 0, 3, \dots) \\ \hline = s & = & (\dots, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots) \end{array}$$

■

**R** Si l'on veut décomposer un signal discret  $N_0$ -périodique dans une base fréquentielle, nous verrons que seul  $N_0$  fréquences discrètes du segment  $[0, F_e[$  sont nécessaires et que les composantes fréquentielles sont périodiques de période  $F_e$  :

Nous obtiendrons **la transformée de FOURIER discrète (TFD)** pour représenter un **signal discret périodique**. Un algorithme optimisé de calcul de la TFD est la **Fast Fourier Transform (FFT)**

### 1.2.3 Signal discret périodique pair : $\mathbb{R}_{DCT-II}^{[0, N_0]}$

Deux inconvénients du prolongement périodique précédant sont :

- une parité quelconque d'un signal réel fait que sa transformée est complexe,
- le signal n'est pas forcément continu au point de raccordements périodique

Il en résulte une transformée de signaux réels qui est imaginaire et l'introduction de composantes haute fréquences due à l'introduction d'une discontinuité périodique.

#### Prolongement pair en continu : CT – Cosine Transform

En continu, le développement en série de cosinus (CT pour Cosine Transform) est facile à définir car il y n'y a qu'un seul prolongement pair de période double d'un signal à support borné  $[0, T_0]$ . C'est donc une version réelle des SdF  $c(n)$  où l'on prend une période double avec :

$$CT[n] = a\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2}{2T_0} \int_0^{2T_0} f_{\text{paire}}(t) \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{2T_0}\right) dt \stackrel{\text{parité}}{=} \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{2T_0}\right) dt$$

Il n'y a pas de  $b(n)$  ! Et tout est réel, en revanche la résolution fréquentielle est double :  $\frac{F_0}{2}$

#### Prolongements pairs en discret : DCT – Discrete Cosine Transform

En discret pour prolonger la suite bornée (a, b, c, d) par exemple, il y a deux choix à faire à chaque borne :

- a est à l'instant 0 et donc non répété :  $\dots, b, a, b, \dots$
- a est répété et donc à l'instant  $\frac{T_e}{2}$  :  $\dots, b, a, a, b, \dots$
- d est non répété et donc à  $(N-1) \cdot T_e$  de l'échantillon a :  $\dots, c, d, c, \dots$
- d est répété et donc à l'instant  $(N-1) \cdot T_e + \frac{T_e}{2}$  de a :  $\dots, c, d, d, c, \dots$

La Fig. ?? illustre un prolongement pair dit de type II où toutes les valeurs sont répétées de manière paire.

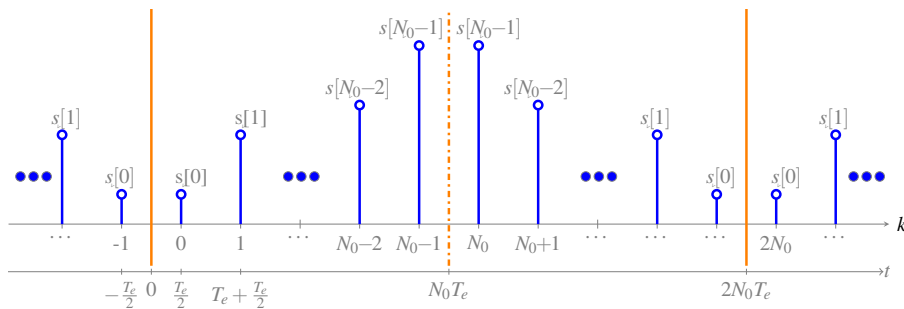


FIGURE 1.3 – Un prolongement pair possible en discret dit de type II : exemple donnant la transformée DCT-II. La parité s'obtient en décalant l'axe temporel avec la relation  $t = kT_e$  qui devient  $t = kT_e + \frac{T_e}{2}$

**R** En discret il y a 4 prolongements pairs donnant 4 **Direct Cosine Transform** DCT car il y a 4 prolongements pairs "aux deux bornes" conduisant à 4 espaces pairs périodiques, et 4 prolongements pairs en "a" et impair en "d".

Type de DCT	Prolongement (N=4)	Décalage de “a”	parité en “d”	Période
Type-I	(..., a, b, c, d, c, b, a, b, ...)	0	pair	2.(N-1)
Type-II	(..., a, b, c, d, d, c, b, a, ...)	+1/2	pair	2.N

Le prolongement de type II est très utilisé dans les algorithmes de compressions d'image et de son (mpeg, avi, etc.) car la transformée DCT-II se calcule de manière efficace avec le même algorithme FFT utilisé pour les TFD et de plus le prolongement n'ajoute pas de discontinuité ce qui fait les composantes hautes fréquences deviennent négligeables. Ces dernières sont ignorées ou codées avec une faible résolution au moment de la réduction de la taille du stockage : ce type de compression est appelé *compression avec pertes* ou *lossy compression*.

### 1.3 Les espaces et produits scalaires associés

Nous allons considérer des espaces de fonctions tantôt à variables continues puis discrètes, et en même temps sur des supports infinis ou bornés. Dans le cas de fonctions bornées (définies sur un intervalle  $[a, a + T_0[$  en continu ou  $\llbracket a, a + N \rrbracket$  en discret), on peut **toujours** prolonger cette fonction en dehors du support de manière périodique, plutôt que par des zéros, car cela permet d'avoir une représentation en séries de FOURIER (SdF) (cas continu) ou en Transformée de Fourier Discrète (TFD) dans le cas discret.

Les produits scalaires pour différents espaces de fonctions sont définis et illustrés dans la Tab. 1.1 en prenant :

- en rangées du tableau les signaux de la *variable continue* (intégrale continue) ou bien de la *variable discrète* (somme discrète);
- en colonnes du tableau les *supports infinis* (de  $-\infty$  à  $\infty$ ) ou bien support *périodique/borné* (de 0 à  $T_0$  ou  $N$ ).

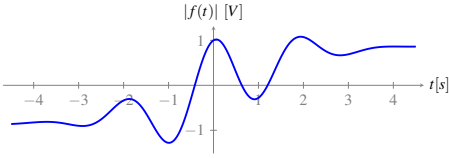
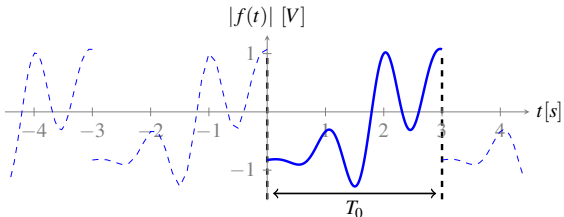
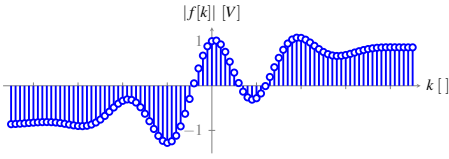
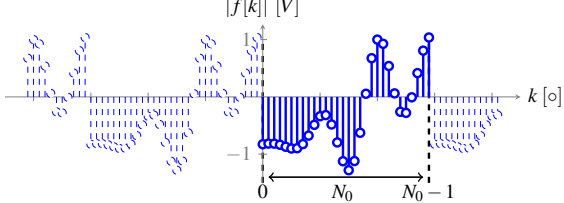
	Support infini	Support fini ou périodique
variable continue	 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt \quad \propto \left[ \frac{V^2}{\text{Hz}} \right]$	 $f : [0, T_0[ \mapsto \mathbb{C}$ $\langle f, g \rangle_P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt \quad \propto [V^2]$
variable discrète	 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ $\langle\langle f, g \rangle\rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} f[k] \cdot \overline{g[k]} \quad \propto [V^2]$	 $\llbracket 0, N_0 \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$ $\langle\langle f, g \rangle\rangle_P = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} f[k] \cdot \overline{g[k]} \quad \propto [V^2]$

TABLE 1.1 – Les proxduits scalaires adaptés aux différents espaces de fonctions. Par clarté, on ne représente que le module de la fonction qui est dans le cas général complexe.

**Exercice 1.1 Propriété de scalaire et norme dans le cas général**

On aurait pu définir ces produits scalaires en ne prenant jamais le conjugué d'une fonction  $g$  (ou en considérant des fonctions à valeurs réelles de manière à ignorer ce conjugué car  $\bar{g} = g$ ).

1. Vérifiez dans le cas réel (sans conjugué) que le produit  $\langle f, g \rangle$  a les propriétés d'un produit scalaire, en déduire la norme induite  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$  et déterminer la dimension de  $\|f\|^2$  : est-ce de la puissance ou de l'énergie, est-ce une valeur ou une densité ?
2. Appliquez cette norme (toujours sans le conjugué) au signal imaginaire pur  $f : t \mapsto i$ . Quelle propriété de la norme n'est pas respectée ?
3. Refaites de même en prenant cette fois-ci les formules de Tab. 1.1 avec le conjugué de  $g$  et vérifiez que cette propriété est vérifiée dans le cas général des fonctions à variables complexes.
4. Vérifiez que  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$  et que donc le produit scalaire est linéaire à gauche  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$  et à moitié linéaire à droite  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle f, \lambda g \rangle = \bar{\lambda} \langle f, g \rangle$

On comprend maintenant pourquoi, dans le cas général des fonctions à valeurs complexes, on utilise le conjugué dans l'expression des produits scalaires et pourquoi on parle de produit *sesqui-linéaire* pour ces produits scalaires : *sesqui* en latin voulant dire « un et demi » en latin. ■

Le produit scalaire est très utile, car il permet d'obtenir :

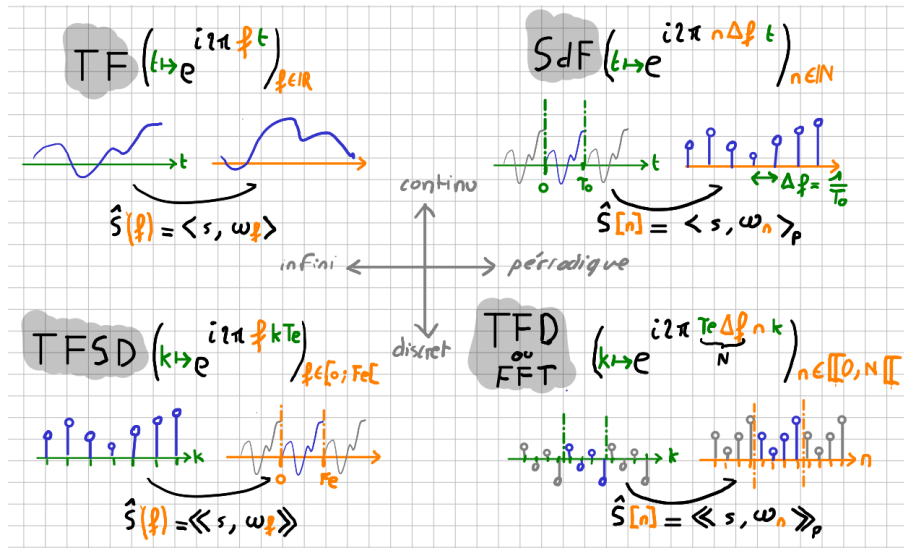
- de mesurer des longueurs de signaux avec la norme induite par le produit scalaire  $\|\vec{s}\| = \langle \vec{s}, \vec{s} \rangle$ , et de mesurer des distances entre signaux avec la norme de la différence  $\|\vec{u} - \vec{v}\|$  ;
- de projeter un vecteur sur un autre ou sur un sous-espace vectoriel : cela revient à minimiser une distance  $P_v(u) = \min_{x \in \text{vect}(u)} (\|u - x\|)$  par simple calcul direct ;
- trouver les meilleures, au sens de la distance avec la norme engendrée, décompositions d'un signal  $u$  sur une base de vecteurs données : calculer des transformées de signaux.

La Tab. 1.2 montre le parallèle entre l'utilisation du produit scalaire sur des vecteurs et sur des signaux, chacune permet de retrouver des formules bien connues des SdF et des TF.

## 1.4 Les bases fréquentielles : transformations

En prenant la base des ondes complexes adaptée à chaque espace de signaux (discrétisée ou non, sur un intervalle infini ou borné/périodique), et en utilisant les produits scalaires adaptés, on peut définir quatre types de transformations et leurs réciproques entre un primal avec une base canonique purement localisée dans le temps (et infiniment étendue en fréquence) et un dual composé d'une base d'ondes purement localisées fréquentielles (et infiniment étendue en dans le temps).

Le schéma ci-dessous résume ces transformées, leurs bases et les produits scalaires associés à chaque transformation :



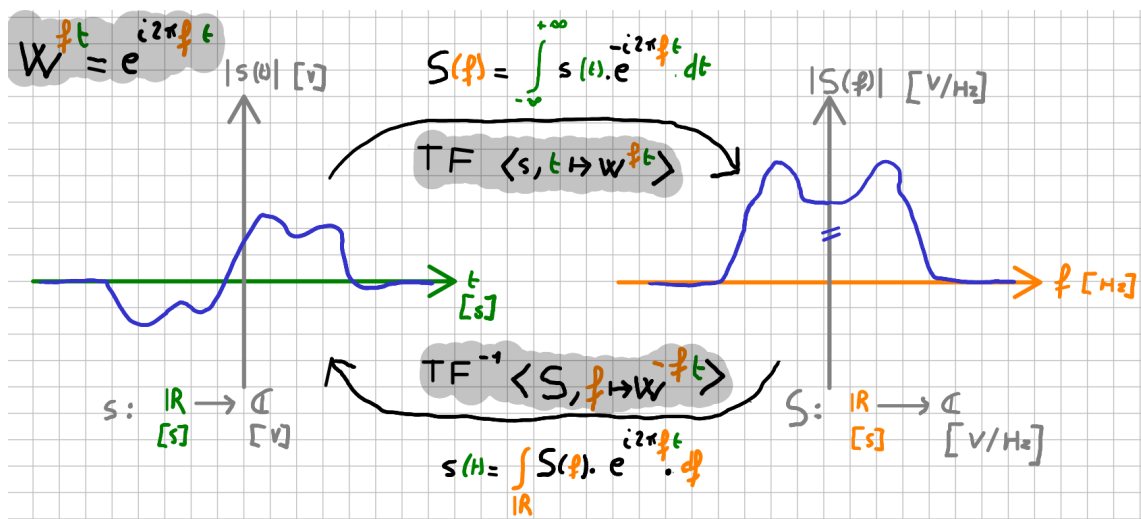
### 1.4.1 Base de la TF

La TF (Transformée de FOURIER), ou FT (*Fourier Transform*) en anglais, s'applique aux fonctions continues et utilise une base d'ondes complexes  $B_F = \left( \underbrace{t \mapsto e^{i2\pi ft}}_{w_f} \right)_{f \in \mathbb{R}}$ .

**Exercice 1.2** Tentez de retrouver la formule de la transformée et son inverse et d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en se rappelant juste que c'est une application de

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{TF} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire continu noté  $\langle, \rangle$  avec la base continue  $B_F = (w_f)_{f \in \mathbb{R}}$  ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens mais pas l'amalgame, car :

- le produit scalaire  $\langle, \rangle$  est défini dans le cas de fonctions de carré intégrable ou *fonction à énergie finie*, que nous notons  $\mathcal{L}_2$ ,
- les vecteurs de la base ne sont pas normés car de norme infinie ;
- la base n'est pas finie, ni infinie dénombrable mais infinie indénombrable.

Mais lorsque l'on se place dans le cas de fonctions de carré intégrable (ou fonction à énergie



finie) que nous notons  $\mathcal{L}_2$ , l'espace est complet (les suites de Cauchy convergent). Donc les sommes infinies se comporte bien dans  $\mathcal{L}_2$  : c'est une espace de Banach. De plus le produit scalaire associé à la norme 2 existe et on a donc un espace de HILBERT où la norme et le produit scalaire sont des applications linéaires dans  $\mathcal{L}_2$ . Comme il s'agit d'une espace de dimension infinie, il ne suffit pas d'avoir une base de dimension infinie pour couvrir tout l'espace, mais dans le cas de  $\mathcal{L}_2$  avec la base  $B_F$  on montre que tout l'espace est engendré.

Bref ! Cela fonctionne tout comme un espace Euclidien sans en être un.

**Exercice 1.3** Prendre la base  $B_F = (w_f)_{f \in \mathbb{R}}$  et utiliser la partie espace indénombrable de la Tab. 1.2 pour retrouver les formules de PLANCHEREL et PARSEVAL. ■

### 1.4.2 Base des SdF

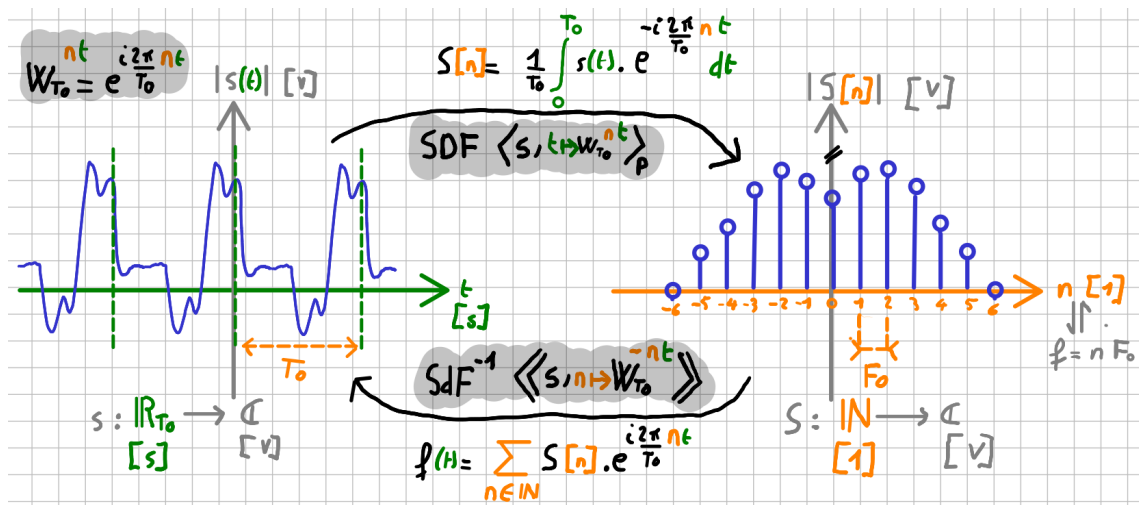
Les SdF (Séries de FOURIER), ou FS (*Fourier Series*) s'appliquent aux fonctions continues périodiques et utilisent une base dénombrable  $B_F =$

$$\left( t \mapsto W_{T_0}^{nt} = e^{i \frac{2\pi}{T_0} nt} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{avec } W_{T_0} = e^{i \frac{2\pi}{T_0}}.$$

**Exercice 1.4** Tentez de retrouver la formule de la décomposition et recomposition en SdF et d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en se rappelant juste que c'est une application de

$$\mathbb{R}_{T_0} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\text{SdF}} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire continu périodique noté  $\langle, \rangle_P$  et avec la base discrète  $B_F = (W_{T_0}^n)$ . ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens mais pas l'amalgame, car :

- le produit scalaire  $\langle, \rangle_P$  est défini dans le cas de fonctions périodiques de carré intégrable, *fonctions de puissance moyenne finie*, que nous notons  $\mathcal{L}_{p2}$
- ce n'est pas un isomorphisme car, on passe d'un espace continu périodique à un espace discret ! La transformée inverse se fait avec le produit scalaire discret  $\langle, \rangle$
- la base n'est pas finie, mais infinie dénombrable ;

Bref ! elle fonctionne un peu comme un espace Euclidien fini sans en être un...

**Exercice 1.5** Prendre la base

$$B_F = \left( \underbrace{t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} nt\right)}_{\cos_n} \right)_{n \geq 1} \cup \left( \underbrace{t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} nt\right)}_{\sin_n} \right)_{n \geq 1} \cup (t \mapsto 1)$$

et voir que l'on retrouve les formules des coefficients  $a[n]$ ,  $b[n]$  et  $a_0$  à un facteur 2 près !

Et oui ! La base n'est pas normée, car un rapide calcul montre que la norme des vecteurs vaut  $\frac{1}{2}$  (on peut se rappeler que la valeur efficace d'un cosinus d'amplitude 1 est  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ; sa puissance moyenne sur une période est donc le carré de  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ )

En prenant la base normée

$$B_F' = \left( \underbrace{\sqrt{2} \cos_n}_{\cos'_n} \right)_{n \geq 1} \cup \left( \underbrace{\sqrt{2} \sin_n}_{\sin'_n} \right)_{n \in \mathbb{Z}^*} \cup (t \mapsto 1)$$

on obtient une définition des SdF chère aux physiciennes :

$$s(t) = \left( \begin{array}{l} \underbrace{\langle s, t \mapsto 1 \rangle_P}_{a_0} 1 \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \cos'_n \rangle_P}_{a'[n]} \cos'_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \sin'_n \rangle_P}_{b'[n]} \sin'_n(t) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} a_0 \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \sqrt{2} \cos_n \rangle_P}_{\sqrt{2} a[n]} \sqrt{2} \cos_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \sqrt{2} \sin_n \rangle_P}_{\sqrt{2} b[n]} \sqrt{2} \sin_n(t) \end{array} \right) \quad (1.3)$$

Avec  $\|t \mapsto 1\|^2 = 1$ ,  $\|\cos'_n\|^2 = \|\sqrt{2} \cos_n\|^2 = 1$  et  $\|\sin'_n\|^2 = 1$

On peut ne pas normer les vecteurs, et c'est le plus fréquent, mais introduire un facteur 2 dans la formule de calcul des coefficients  $a[n]$  et  $b[n]$  qui n'apparaît pas dans les coefficients  $c[n]$  :

$$s(t) = \left( \begin{array}{l} \underbrace{2 \langle s, t \mapsto 1 \rangle_P}_{a_0} 1 \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2 \langle s, \cos_n \rangle_P}_{a[n]} \cos_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2 \langle s, \sin_n \rangle_P}_{b[n]} \sin_n(t) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \frac{a_0}{2} \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2 \langle s, \cos_n \rangle_P}_{a[n]} \cos_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2 \langle s, \sin_n \rangle_P}_{b[n]} \sin_n(t) \end{array} \right) \quad (1.4)$$

Avec  $\|t \mapsto 1\|^2 = 1$ ,  $\|\cos_n\|^2 = \|\sin_n\|^2 = \frac{1}{2}$ .

■

**1.4.3 Base de la TFSD**

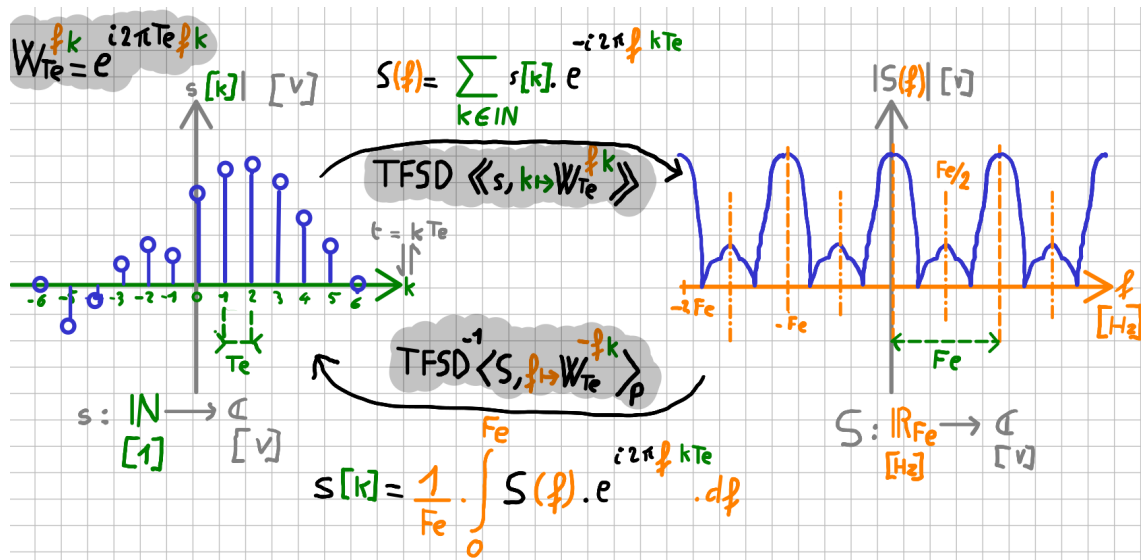
La TFSD (Transformée de FOURIER des Signaux Discrets), ou DTFT (*Discrete Time Fourier Transform* en anglais), s'applique aux fonctions à variable discrète et utilise une base d'ondes

complexes indénombrable  $B_F = \left( \underbrace{k \mapsto W_{T_e}^{fk} = e^{i2\pi T_e f k}}_{w_{T_e}^f} \right)_{f \in [0, F_e[}$  avec  $W_{T_e} = e^{i2\pi T_e}$ .

**Exercice 1.6** Tentez de trouver la formule de cette TFSD et son inverse, d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en pensant que c'est la « duale » de la SdF. Il s'agit d'une application de

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{TFSD} \mathbb{R}_{F_e} \rightarrow \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire discret noté  $\langle\langle, \rangle\rangle$  avec la base continue  $B_F = (w_{T_e}^f)_{f \in [0, F_e[}$  ■



On peut difficilement faire l'analogie avec les espaces Euclidiens car :

- le produit scalaire  $\langle\langle, \rangle\rangle$  fonctionne dans le cas de suites discrètes absolument convergentes ;
- ce n'est pas un isomorphisme, car on passe d'un espace discret à un espace continu périodique ! La transformée inverse se fait avec le produit scalaire continu périodique  $\langle, \rangle_P$  (Attention la période dans l'espace des fréquences est  $F_e$ ) ;
- la base n'est pas finie ni dénombrable, mais infinie indénombrable.

**Exercice 1.7** On admet pour le moment que la TFSD d'un signal  $s[k]$  quelconque est une fonction  $S(f)$  de période  $F_e$ . On peut donc voir  $S(f)$  comme une fonction de période  $F_e$  de la variable réelle  $f$  et y appliquer une décomposition en séries de FOURIER !

Faites-le et comparez avec la TFSD inverse. Vous venez de basculer dans un dual ! D'ailleurs on peut voir  $s[k]$  comme les coefficients de FOURIER d'une fonction de fréquence fondamentale  $T_e$  et appliquer une recombinaison de la série et trouver  $S(f)$ .

Donc  $TFSD = SdF^{-1}$  et inversement  $SdF = TFSD^{-1}$  ■

#### 1.4.4 Base de la TFD et FFT

La TFD (Transformée de FOURIER Discrète), ou DFT (*Direct Fourier Transform*) en anglais, s'applique aux fonctions discrètes à support fini et utilisent une base d'ondes complexes discrète

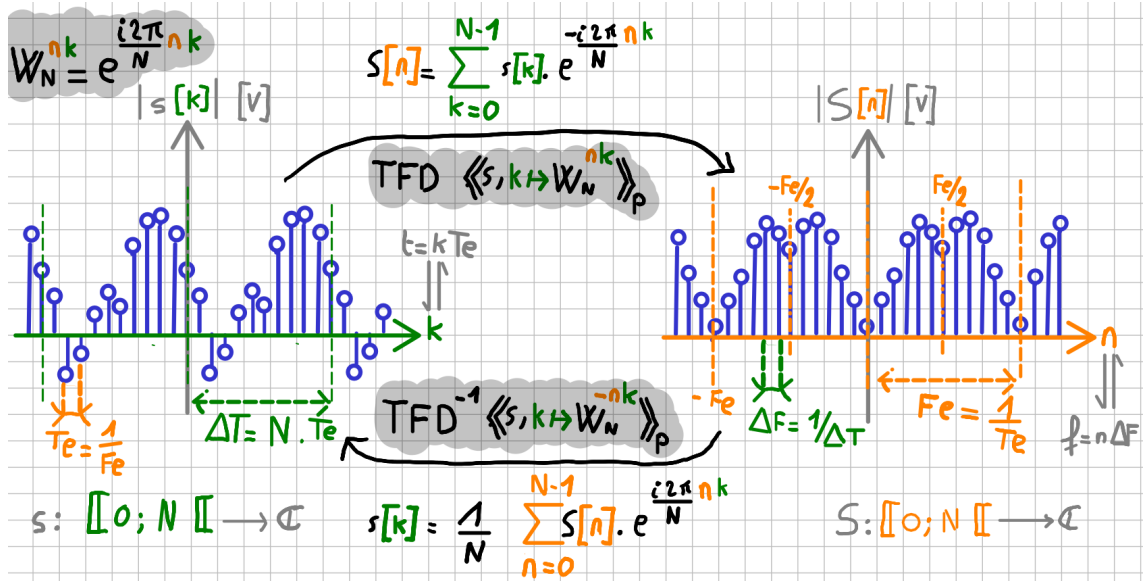
finie  $B_F = \left( \underbrace{k \mapsto W_N^{nk} = e^{i\frac{2\pi}{N} nk}}_{\vec{w}_N^k} \right)_{n \in [0, N_0[}$  avec  $W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ .

La FFT (Fast Fourier Transform en anglais uniquement) est un algorithme efficace de calcul de la TFD : c'est donc la même transformation avec les mêmes valeurs !

**Exercice 1.8** Tentez de trouver la formule de cette TFD et son inverse, d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder. Il s'agit d'une application de

$$[[0, N_0[[ \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{TFD} [[0, N_0[[ \rightarrow \mathbb{C}$$

basée sur le p.s. discret périodique noté  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_P$  avec la base continue  $B_F = \left( \overrightarrow{w_N^k} \right)_{k \in [[0, N_0[[}$  ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens finis et **on peut faire l'amalgame!** Car c'en est un mais dans  $\mathbb{C}$  donc :

- le produit scalaire n'est pas symétrique mais « symétrique et demi » c.-à-d. *sesquilinéaire* car  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ .

#### **R** Base orthogonale non normée

Au produit scalaire  $\langle f, g \rangle_P = \text{Le terme } W_N = e^{-i \frac{2\pi}{N}}$  est en fait une racine Nième de l'unité. Le calcul de la norme  $\|w_n\|$  du vecteur de la base  $w_n = k \mapsto W_N^{-nk}$  devient donc :

$$\langle\langle w_n, w_n \rangle\rangle_P = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} nk} \cdot e^{-i \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

La formulation normée et symétrique de la TFD (1.5) fait donc intervenir un facteur  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  pour la TFD et son inverse :

$$s[k] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\langle\langle s, w'_n \rangle\rangle_P}_{S[n]} w'_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle\langle s, \frac{w_n}{\sqrt{N}} \rangle\rangle_P \frac{w_n}{\sqrt{N}} \quad \text{avec } \|w'_n\|^2 = \left\| \frac{w_n}{\sqrt{N}} \right\|^2 = 1 \quad (1.5)$$

Pour des raisons de simplicité et de contrainte de calcul numérique, la formulation non normée (1.6) est largement utilisée. Cela fait donc apparaître le terme  $\frac{1}{N}$  dans la TFD inverse.

$$s[k] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\langle\langle s, w_n \rangle\rangle_P}_{S[n]} \frac{w_n}{N} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle\langle s, w_n \rangle\rangle_P \frac{w_n}{N} \quad \text{avec } \|w_n\|^2 = N \quad (1.6)$$

La transformée s'écrit aisément sous forme matricielle soit en considérant la transformée comme une application linéaire effectuant le changement de coordonnées entre les vecteurs de la base canonique et la base fréquentielle, soit en faisant le changement de repère sous forme vectorielle :

$$\begin{aligned}
 \text{TFD} [\vec{s}] = \hat{S} = s_{B_F} &= \begin{pmatrix} \langle s, w_0 \rangle_P \\ \vdots \\ \langle s, w_{N-1} \rangle_P \end{pmatrix}_{B_F} \\
 &= \begin{pmatrix} T_{s \cdot \overline{w_0}} \\ \vdots \\ T_{s \cdot \overline{w_{N-1}}} \end{pmatrix}_{B_F} = \begin{pmatrix} T_{\overline{w_0} \cdot s} \\ \vdots \\ T_{\overline{w_{N-1}} \cdot s} \end{pmatrix}_{B_F} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{w_0[0]} & \dots & \overline{w_0[N-1]} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{w_{N-1}[0]} & \dots & \overline{w_{N-1}[N-1]} \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{F}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} s[0] \\ \vdots \\ s[N-1] \end{pmatrix}}_{s_{B_C}}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$S_{B_F} = M_{\mathcal{F}} \cdot s_{B_C}$$

On peut donc calculer la TFD d'un signal en multipliant le vecteur du signal temporel par une matrice  $M_{\mathcal{F}}$  pour obtenir le vecteur des composantes fréquentielle : la TFD du signal.

Donc la matrice  $M_{\mathcal{F}}$  représente un changement de base d'une base orthonormée canonique  $B_C$  vers la base orthogonale fréquentielle  $B_F$ , c'est donc la matrice de l'application identité Id du signal d'une base vers l'autre, ou plus simplement la matrice de passage  $M_{\mathcal{F}} = P_{B_F \leftarrow B_C} = \text{mat}(\text{Id}, B_F, B_C)$

## 1.5 Dualité des transformées

On remarque que la TF et la TFD sont des endomorphismes (de E dans E) isomorphiques (il existe une réciproque), on parle d'automorphisme :

- la TF transforme une fonction complexe du primal en fonction complexe du dual et la transformée inverse du dual vers le primal existe ;
- la TFD transforme une suite périodique complexe du primal en suite périodique complexe du Dual et la transformée inverse du primal vers le dual existe.

Contrairement aux SdF et TFSD qui sont des isomorphismes (de E dans F et elles sont réciproques entre-elles) :

- la SdF transforme une fonction complexe périodique du primal en suite complexe du dual, sa réciproque est la TFD du dual ;
- la TFSD transforme une suite complexe du primal en fonction complexe périodique du Dual.

Sans rentrer dans la véritable définition d'un dual et de la dualité, nous pouvons garder cette notion de transformation d'un espace primal en son espace dual, et que si l'on retransforme le dual de la même manière alors on obtient à nouveau le primal.

L'idée d'appliquer la TFSD à la SdF  $n \mapsto \hat{S}[n]$  de la fonction primale  $t \mapsto s(t)$ , soit de faire le dual du dual, nous laisse espérer retomber sur la fonction primale  $s$ . Et cela marche car ces espaces sont duaux.

**Exercice 1.9** Prenons le signal constant périodique  $s : t \mapsto 1$ , toutes ses projections  $\langle s, t \mapsto e^{j2\pi t n F_0} \rangle_P$  sont nulles pour  $n \neq 0$  sauf pour le vecteur  $w_0 : t \mapsto 1$ . Donc sa SdF est la suite complexe nulle partout sauf pour  $n=0$  soit l'impulsion unité en 0 :  $n \mapsto \delta_0[n]$ .

Si l'on applique la TFSD à la SdF  $\hat{S}$  on obtient la fonction périodique constante et égale 1 soit la fonction de départ du primal  $s$  !

Essayez de faire cela pour une fonction périodique  $s(t)$  quelconque : soit montrer que  $TFSD[SdF[s]] = s$  et donc  $TFSD \circ SdF = \text{Id}$  où  $\text{Id}$  est l'application identité des fonctions périodiques. Ou son dual : soit pour une suite complexe  $s[k]$  montrer que  $SdF \circ TFSD = \text{Id}$  où  $\text{Id}$  est l'application identité des suites complexes.

La SdF permet de créer l'espace dual des fonctions périodiques, en utilisant le produit scalaire avec les signaux de la base de FOURIER, qui est alors un espace des suites complexes. La TFSD permet de créer le dual des suites complexes, en utilisant le produit scalaire avec la base de FOURIER, qui est un espace des fonctions périodiques.

L'idée d'appliquer la TF à la transformée  $\hat{S}$  d'une fonction  $s$  primale, soit de faire le dual du dual, nous laisse espérer retomber sur la même fonction du primal  $s$  : cela est vrai au signe près !

**Exercice 1.10** Prenons un signal pair de transformée connue (comme la fonction porte et son sinus cardinal) et calculez la transformée de la transformée (aussi connue à tous les coups). Vous vérifierez que **pour les fonctions paires réelles**  $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = \text{Id}$  des fonctions réelles paires.

On pourrait faire de même avec des fonctions imaginaires impaires et montrer que le dual du dual est le primal.

Dans le cas général ce n'est pas vrai, nous allons voir que le signal est retourné dans le temps.

Si on calcule la transformée de  $\text{Sy}[s] : t \mapsto s(-t)$ , où  $\text{Sy}$  est l'opérateur qui retourne une fonction dans le temps (défini ci-après dans def. 1.5.1), on obtient par changement de variable  $x = -t$  la transformée inverse :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\text{Sy}[s]](f) &= \mathcal{F}[t \mapsto s(-t)](f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(-t) e^{-i2\pi f t} dt \\ &\stackrel{x=-t}{=} \int_{\infty}^{-\infty} s(x) e^{i2\pi f x} dx = \mathcal{F}^{-1}[s](f) \\ \mathcal{F} \circ \text{Sy} &= \mathcal{F}^{-1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

**Définition 1.5.1** Opérateur symétrie ou « retournement »

L'opérateur symétrie noté  $\text{Sy}$  transforme une fonction discrète de  $L_e$  (resp. fonction continue de  $L_c$ ) en fonction discrète de  $L_e$  (resp. fonction continue de  $L_c$ ) retournée par changement du signe de sa variable, soit :

$$\begin{aligned} \text{Sy} : L_e &\longrightarrow L_e \\ k \mapsto s[k] &\longmapsto k \mapsto s[-k] \\ \text{Sy} : L_c &\longrightarrow L_c \\ t \mapsto s(t) &\longmapsto t \mapsto s(-t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

En appliquant successivement cette relation au signal  $s$  ; à son symétrique  $\text{Sy} \circ s$  ; à la transformée  $\hat{S}$  et à son symétrique  $\text{Sy} \circ \hat{S}$ , on trouve le graphique Fig. 1.4.

**Exercice 1.11** Si on applique (1.8) au primal (flèches vertes), puis au dual (flèches oranges) et à leurs symétriques on obtient les 4 relations :

$$\text{— } \mathcal{F} \circ \text{Sy}[s] = \mathcal{F}^{-1}[s] = ?$$

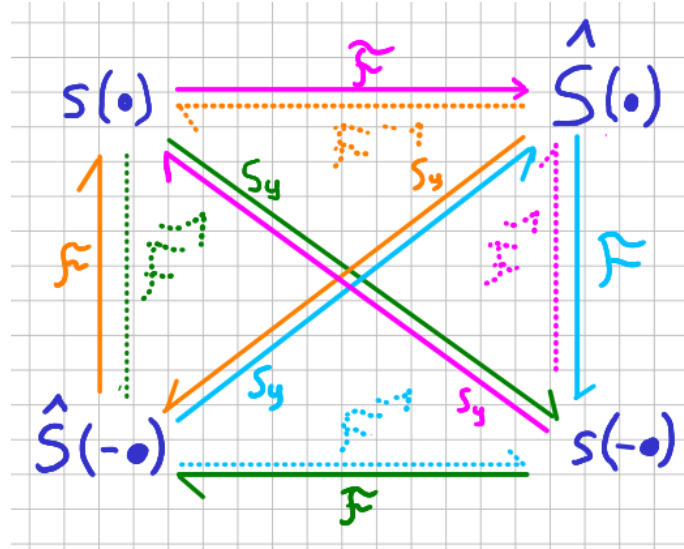


FIGURE 1.4 – Dualité de la transformation symétrie temporelle  $Sy$ , car le symétrique du symétrique est lui-même et bi-dualité de la transformée de FOURIER car transformer deux fois un signal, c'est le retourner donc  $\mathcal{F}^2 = Sy$  est duale et  $\mathcal{F}$  est dite biduale.

- $\mathcal{F} \circ Sy [\hat{S}] = \mathcal{F}^{-1} [\hat{S}] = \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F} [s]] = ?$
- $\mathcal{F} \circ Sy [t \mapsto s(-t)] = \mathcal{F}^{-1} [t \mapsto s(-t)] = ?$
- $\mathcal{F} \circ Sy [f \mapsto \hat{S}(-f)] = \mathcal{F}^{-1} [f \mapsto \hat{S}(-f)] = ?$

Associez ces 4 relations aux quatre couleurs de flèches (vert, orange, cyan, rose) du diagramme et remplacez-les « ? »

Prenez en primal le signal porte  $s(t) = \Pi_T(t) = u(t + \frac{T}{2}) - u(t - \frac{T}{2})$  (signal nul partout sauf sur un intervalle de largeur  $T$  autour de 0) dont on connaît la transformée sous forme de sinus cardinal  $\hat{S}(f) = T \text{sinc}(\pi f T)$  (utiliser la transformée de LAPLACE, le théorème du retard et le passage à la transformée avec  $p = i2\pi f$  pour retrouver cette formule ou par calcul direct). Appliquez ces formules pour trouver la transformée d'un sinus cardinal (fonction paire !) ■

On obtient ainsi des relations intéressantes du point de vue des opérateurs  $\mathcal{F}$  et  $Sy$ , notamment sur le fait qu'ils commutent bien :

$$\mathcal{F}^2 \circ \mathcal{F}^2 = Sy \circ Sy = \text{Id} = Sy^2 = \mathcal{F}^4$$

$$\mathcal{F}^{-1} = \underbrace{\mathcal{F} \circ Sy}_{\text{vert}} = \underbrace{Sy \circ \mathcal{F}}_{\hat{S}(-\bullet) \text{ ou orange}}$$

$$\mathcal{F} = \underbrace{\mathcal{F}^{-1} \circ Sy}_{\text{rose}} = \underbrace{Sy \circ \mathcal{F}^{-1}}_{\hat{S}(\bullet) \text{ ou orange}}$$

### R De même pour la TFD

On obtient le même type de diagramme avec la TFD mais avec un retournement temporel discret périodique  $Sy : k \mapsto s[-k] = s[N - k]$  ce qui permet de conserver la relation  $TFD \circ Sy = TFD^{-1}$ , mais avec une base normalisée ! Il faut donc faire attention et préférer la TFD normalisée en la divisant par  $\sqrt{N}$ .

Il suffit de partir de la TFD de  $s[-k]$  et retrouver la formule de la TFD inverse. On a de plus pour les signaux discrets une représentation matricielle. Ce qui donne pour le retournement

temporel d'un signal à 4 points :

$$\text{Sy}[s_4] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{\text{Sy}}} \cdot s_4 \quad (1.10)$$

avec  $M_{\text{Sy}}^{-1} = M_{\text{Sy}}$  car  $\text{Sy} = \text{Sy}^{-1}$

Et pour la TFD normalisée à 4 points :

$$\text{TFD}[s_4] = \hat{S}_4 = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{F}}} \cdot s_4 \quad (1.11)$$

avec  $M_{\mathcal{F}}^{-1} = {}^T M_{\mathcal{F}}$  la matrice transposée. Car lors d'un changement entre bases orthonormées, la matrice de passage est symétrique et orthogonale : la transposée est aussi l'inverse.

L'équation (1.8) devient alors  $\text{TFD} \circ \text{Sy} = \text{TFD}^{-1}$  ce qui donne en matriciel  $M_{\mathcal{F}} M_{\text{Sy}} = M_{\mathcal{F}}^{-1} = {}^T M_{\mathcal{F}}$

- 1.5.1 Filtrage et fenêtrage : opérations duales**
- 1.5.2 Interpolation et gavage de zéro : opérations duales**
- 1.5.3 Sur-échantillonnage et multiplication de période : opérations duales**
- 1.5.4 Décimation et division de période : opérations duales**



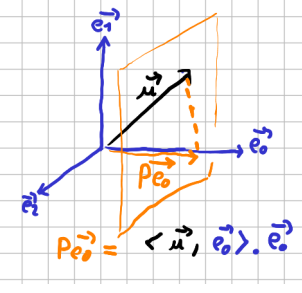
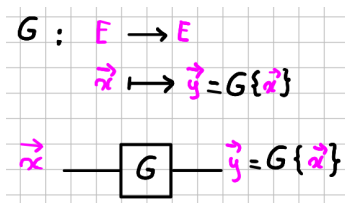
	Euclidien fini	Espace de fonctions
Base Ortho- normée	une base finie de vecteurs $B = (\vec{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}_{N_0}}$  normés $\ \vec{e}_n\  = 1$ et orthogonaux $\langle \vec{e}_n, \vec{e}_m \rangle = 0$	base dénombrable de fonctions $(\vec{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou indénombrable $(\vec{w}_f)_{f \in \mathbb{R}}$ repérées par leurs fréquences $f$ ou un indice $n$ associé ; fonctions d'énergie unitaire $\ \vec{w}_n\  = 1$ ou $\ \vec{w}_f\  = 1$ , et orthogonales $\langle \vec{w}_n, \vec{w}_m \rangle_P = 0$ ou $\langle \vec{w}_f, \vec{w}_{f'} \rangle = 0$
Analyse	décomposer un vecteur dans cette base en coefficients $V_n = \langle \vec{v}, \vec{e}_n \rangle$ et en donner les coordonnées  $\underbrace{V _B}_{\Rightarrow \vec{v}} = \begin{pmatrix} V_0 = \langle \vec{v}, \vec{e}_0 \rangle \\ \vdots \\ V_{N-1} = \langle \vec{v}, \vec{e}_{N-1} \rangle \end{pmatrix}_B$	décomposer une fonction $\vec{u}$ en fréquentiel avec la transformée $U(f)$ ou avec les coefficients $U(n)$ de la série :  $U(f) = \langle \vec{u}, \vec{w}_f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \overline{w_f(t)} dt$  $U(n) = \langle \vec{u}, \vec{w}_n \rangle_P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \overline{w_n(t)} dt$
Synthèse	recomposer un vecteur dans cette base $\vec{v} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{N_0}} \underbrace{U_0}_{\langle \vec{v}, \vec{e}_0 \rangle} \cdot \vec{e}_0$  	recomposer une fonction par transformation inverse de $U(f)$ ou recombinaison de série $U(n)$ :  $\vec{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{U(f)}_{\langle \vec{u}, \vec{w}_f \rangle} \cdot \vec{w}_f(t) dt$  $\vec{u}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{U(n)}_{\langle \vec{u}, \vec{w}_n \rangle_P} \cdot \vec{w}_n(t)$
Projeter avec Plan- cherel	calculer le produit scalaire de vecteurs par leurs composantes :  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle U_B, V_B \rangle = {}^T U _B \cdot V _B$  $\left( \underbrace{U_0 \quad \dots \quad U_{N-1}}_{{}^T U _B} \right) \cdot \begin{pmatrix} V_0 \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{pmatrix}$	on peut calculer un produit scalaire (utile aux corrélations et convolutions) à partir de sa transformée ou composantes de la série :  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \overline{v(t)} dt = \langle U, V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) \overline{V(f)} df$  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \overline{v(t)} dt = \langle\langle U, V \rangle\rangle_P = \sum_{k=0}^{N_0-1} U(k) \overline{V(k)}$
Normer avec Parseval	Calculer la norme en sommant les carrés des coordonnées :  $\ \vec{u}\ ^2 = \ U_B\ ^2 = \sum U_n^2$	calculer la puissance moyenne par la transformée $u(f)$ ou en sommant celle des composantes fréquentielles $U(n)$ :  $\ \vec{u}\ ^2 = \ U\ ^2 = \int_{-\infty}^{\infty}  u(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}  U(f) ^2 df$  $\ \vec{u}\ ^2 = \ U\ _P^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0}  u(t) ^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{N}}  U(k) ^2$

TABLE 1.2 – Structure Euclidienne à structure de Hilbert



## 2. Systèmes discrets

L'analogie entre systèmes continus et discrets est forte, nous proposons ici de revenir sur les systèmes continus et d'aborder les systèmes discrets avec une approche commune par calcul opérationnel.



Un système (continu ou discret) est vu comme un opérateur  $G$  transformant un signal  $\vec{x}$  d'un espace de signaux  $E$  en un signal  $\vec{y}$  du même espace. L'automaticienne associera un schéma-bloc (en rose les signaux et espaces de signaux, en noir les systèmes) à cet opérateur transformant un signal en signal.

Nous nous limitons dans ce chapitre aux systèmes à simple entrée et simple sortie :

### Definition 2.0.1 Système SISO (Single Input Single Output)

Un système discret SISO est une application qui associe à un signal d'entrée  $\vec{x}$  un signal de sortie unique  $\vec{y}$ . Les signaux  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  sont des fonctions prises dans un espace le plus général possible noté ici  $E$ . Ce qui donne pour un système SISO discret nommé  $G$  :

$$G: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{y} \end{array} \quad (2.1)$$

Les signaux peuvent être des fonctions de la variable réelle continue ou discrète, prenant des valeurs réelles, complexes voire composite. La Tab. 2.1 liste les principaux espaces de signaux.

**R** On choisit des notations permettant de distinguer clairement :

- un signal  $\vec{f}$  et une variable  $f$  ;
- une valeur  $f(v)$  d'un signal  $f$  continu évalué à un instant  $v \in \mathbb{R}$  et une valeur  $f[v]$  pour un signal discret pris à l'instant  $v \in \mathbb{N}$ . Dans le cas d'une période d'échantillonnage notée  $T_e$  on notera donc  $f[k] = f(k.T_e)$  ;
- une image de  $x$  par l'application  $f$  est notée  $f(x)$  alors que l'image d'un signal  $\vec{x}$  par l'opérateur  $F$  est notée  $F\{\vec{x}\}$ . Une application de la variable réelle ou entière est généralement appelée *fonction* alors qu'une application de fonction en fonction est appelée *opérateur*.

Espaces	à variable continue	à variable discrète
fonction réelle	$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f \in E$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $t \mapsto f(t)$	$E = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, f \in E$ $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ $k \mapsto f[k]$
fonction complexe	$E = \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $t \mapsto f(t)$	$E = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ $k \mapsto f[k]$
image réelle	$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto f(x, y)$	$E = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}$ $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(l, k) \mapsto f[l, k]$
image couleur	$E = \mathbb{R}^{3\mathbb{R}^2}$ $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f: (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{pmatrix} r(x, y) \\ v(x, y) \\ b(x, y) \end{pmatrix}$	$E = \mathbb{R}^{3\mathbb{Z}^2}$ $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f: (l, k) \mapsto f[l, k] = \begin{pmatrix} r[l, k] \\ v[l, k] \\ b[l, k] \end{pmatrix}$

TABLE 2.1 – Les différents espaces de signaux continus et discrets de différents types de scalaires ( $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ ) et différentes dimensions.

## 2.1 Systèmes linéaires

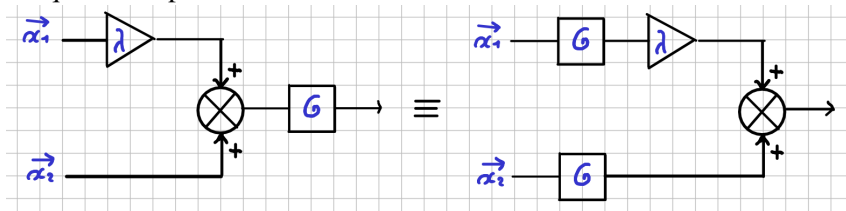
La classe des systèmes linéaires est fondamentale car elle offre de nombreux outils et propriétés mathématiques.

### Definition 2.1.1 Système linéaire

Un système est dit linéaire si, et seulement si, l'application  $G$  associée est linéaire, soit pour tout  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$  :

$$G[\vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2] = G[\vec{x}_1](t) + \lambda G[\vec{x}_2] \quad (2.2)$$

Ce qui donne pour l'automaticienne en schéma-bloc :



Une des conséquences de la linéarité est la possibilité d'appliquer le principe de superposition cher à l'électronicienne : « la réponse d'un système électronique à une combinaison de générateurs est la combinaison des réponses à chaque générateur. »

### Definition 2.1.2 Systèmes continus élémentaires

Les trois systèmes linéaires élémentaires que nous considérons dans l'étude des systèmes linéaires continus sont :

**le gain**  $a.x : t \mapsto ax(t)$  où  $a$  est une constante scalaire réelle ou complexe

**le dérivateur**  $D[x] = D \circ x : t \mapsto \frac{dx}{dt}(t)$

**l'intégrateur**  $I[x] = I \circ x : t \mapsto \int_0^t x(v) dv$

On peut aisément vérifier que ces systèmes respectent la condition de linéarité 2.2.

**R** De manière implicite, on choisit un espace de fonction  $L_c$  qui est stable par toute combinaison de compositions de ces opérateurs (même une infinité de compositions de  $D$  par exemple) soit un espace complet de fonctions.

On aimerait que les opérateurs dérivateur  $D$  et intégrale  $I$  commutent et soient réciproque sur  $L_c : D \circ I = I \circ D = \text{Id}$ . De manière à obtenir une composition de ces opérateurs qui ait la même propriété qu'un produit algébrique inversible.

Pour que cela soit vrai même avec les fonctions discontinues, il faut introduire les distributions de DIRAC voir Chap. 3.2.

### Definition 2.1.3 Systèmes élémentaires discrets

Dans le cas des systèmes discret, les systèmes élémentaires sont :

**le gain**  $a.x : k \mapsto ax[k]$  où  $a$  est une constante scalaire réelle ou complexe

**le retard unité**  $T[x] = T \circ x : k \mapsto x[k-1]$ .

**l'avance unité**  $A[x] = A \circ x : k \mapsto x[k+1]$

On peut aisément vérifier que ces systèmes respectent la condition de linéarité 2.2.

**R** La commutation et réciprocity des opérateurs retard  $T$  et avance  $A$  est évidente et ne pose pas de problème théorique, contrairement au cas continu :  $T \circ A = A \circ T = \text{Id}$ .

La composition  $\circ$  de ces opérateurs avec l'opérateur somme de systèmes  $+$  a donc une structure d'anneau commutatif :  $\circ$  et  $+$  des systèmes se comporte comme  $\times$  et  $+$  des nombres réels.

L'espace des signaux  $L_e$  (ou des suites complexes) est stable et complet par l'application des opérateurs élémentaires.

L'opérateur dérivée n'a pas de sens en discret, car la limite  $s'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h}$  n'aurait pas de sens pour  $h$  entier. On peut s'approcher de cet opérateur avec des combinaisons plus ou moins complexes et précises des opérateurs avance et retard élémentaires.

■ **Exemple 2.1** L'effet du système *différentiateur* sur le signal d'entrée est d'écrit par l'opérateur :

$$L : x \mapsto y = \frac{x - T[x]}{T_e}$$

Vérifions d'abord que cet opérateur est linéaire :

$$\begin{aligned} L[x_1 + \lambda x_2][k] &= L[x_1 + \lambda x_2][k] \\ &= \frac{x_1[k] + \lambda x_2[k] - T[x_1 + \lambda x_2][k]}{T_e} \\ &= \frac{x_1[k] + \lambda x_2[k] - (x_1[k-1] + \lambda x_2[k-1])}{T_e} = A \\ L[x_1][k] + \lambda L[x_2][k] &= \frac{x_1[k] - x_1[k-1]}{T_e} + \lambda \frac{x_2[k] - x_2[k-1]}{T_e} = A \end{aligned}$$

Le système est donc linéaire. ■

## 2.2 Systèmes invariants

Il est fréquent, et surtout théoriquement utile, qu'un système réagisse de la même manière indépendamment de l'instant où est appliqué le signal d'entrée. Ce qui conduit à la définition suivante :

**Definition 2.2.1** Système invariant dans le temps

Un système discret (resp. continu) est dit invariant dans le temps si et seulement si son application associée  $L$  (resp.  $L_c$ ) vérifie :

$$\forall x \in L_E, \forall (k, k_0) \in \mathbb{N}^2, \quad L[k \mapsto x(k - k_0)] = L[x](k - k_0) \quad (2.3)$$

$$\forall x \in L_E, \forall (t, t_0) \in \mathbb{R}^2, \quad L_c[t \mapsto x(t - t_0)] = L[x](t - t_0) \quad (2.4)$$

En terme d'opérateur ; un système  $L$  est invariant dans le temps si, et seulement si, son opérateur commute avec tout opérateur retard de  $k_0$  noté  $T_{k_0} = T^{k_0}[x] = k \mapsto x[k - k_0]$  :

$$L \circ T_{k_0} = T_{k_0} \circ L \quad \Longleftrightarrow \quad L[T_{k_0}[x]] = T_{k_0}[L[x]] \quad (2.5)$$

$$L_c \circ T_\tau = T_\tau \circ L_c \quad \Longleftrightarrow \quad L_c[T_\tau[x]] = T_\tau[L_c[x]] \quad (2.6)$$

Autrement dit « la réponse du système à un signal retardé est le retard de la réponse du système. » ; ou encore « la réponse du système ne dépend pas de l'origine des temps choisie. »



Il est facile de vérifier que les systèmes discrets élémentaires que sont le gain ; le retard unitaire et l'avance unitaire (gain, dérivateur et intégrateur pour le continu) sont invariants. Il en est de même pour tout système constitué de combinaisons linéaires et de composition de systèmes élémentaires.

Il suffit alors de montrer que le système se décompose avec des *coefficients constants* avec des systèmes élémentaires en le mettant sous forme d'*équation aux différences* ou *réurrence* à coefficients constants (*equations différentielle* en continu) ou en un schéma bloc à coefficients constant.

## 2.3 Réponse d'un système LTI

Rappelons qu'un système peut aussi bien représenter un correcteur dans une boucle d'asservissement, qu'un filtre utilisé en boucle ouverte, ou bien un modèle de système à commander ou observer : calculer la réponse d'un système à un signal, c'est aussi « faire du filtrage. »

Nous allons d'abord montrer que l'opération de filtrage consiste en temporel à effectuer une convolution du signal d'entrée  $x$  avec la réponse impulsionnelle  $h$  du système  $H$  ainsi défini.

En un second temps nous utiliserons la réponse impulsionnelle pour caractériser la propriété de stabilité du système.

Nous terminerons en montrant que l'opération duale du filtrage temporel est un *fenêtrage fréquentiel* ou multiplication par la transformée de la réponse impulsionnelle  $Z(h) = \hat{H}$ .

### 2.3.1 Réponse impulsionnelle

Dans le cas discret, l'obtention de la réponse d'un système est facile à obtenir en utilisant les propriétés LTI du système  $H$  et en décomposant le signal d'entrée  $x$  dans la base temporelle canonique.

Contrairement au cas continu, un signal d'entrée quelconque  $x$  se décompose facilement en impulsions unité (voir la base temporelle de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  dans §1.2.1). La Fig. 2.1 reprend la décomposition en impulsions d'un signal d'entrée  $s = k \mapsto \sum_{j \in \mathbb{Z}} s[j].d_j[k]$  et applique un système  $H$  de réponse impulsionnelle  $h$  à chaque impulsion pour obtenir la réponse  $y$  du système.

On retrouve ainsi la formule de convolution temporelle de  $y = s * h$ . Le résultat est démontré dans l'équation (2.7) en utilisant les propriétés de linéarité et invariance du système.

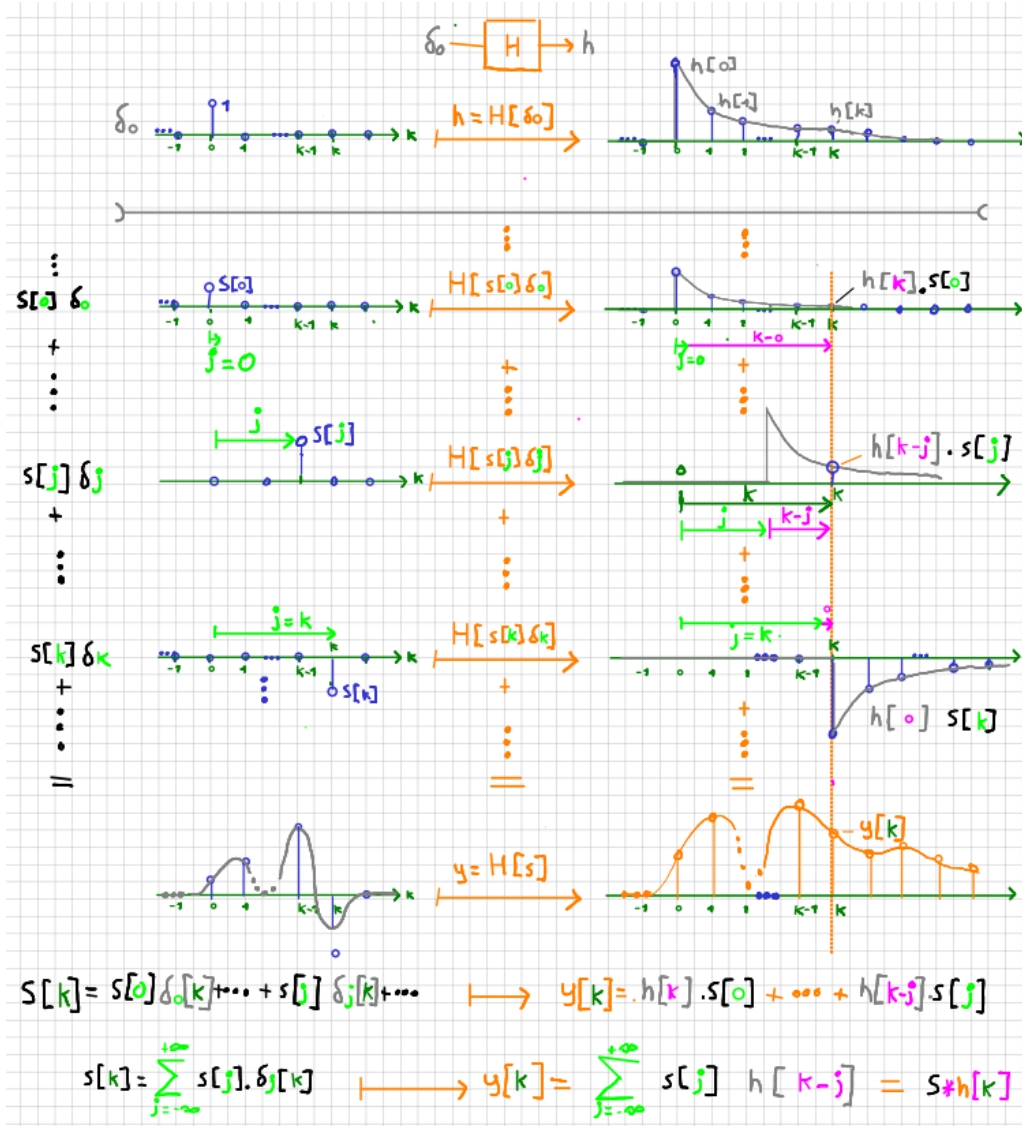


FIGURE 2.1 – La réponse d'un système linéaire invariant  $y$  est la somme des réponses impulsionnelles des impulsions qui composent le signal d'entrée  $s$ .

$$\begin{aligned}
 \underbrace{x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \delta_j}_{\text{signal}} &\implies y = H[x] = H \left[ \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \delta_j \right] \\
 &\xRightarrow{\text{linéarité de } H} y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} H \left[ \underbrace{x[j]}_{\text{constante!}} \delta_j \right] \xRightarrow{\text{linéarité de } H} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \underbrace{H[\delta_j]}_{H \circ T^j[\delta_0]} \\
 &\implies y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \cdot H \circ T^j[\delta_0] \xRightarrow{\text{invariance de } H} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \cdot \underbrace{T^j \circ H[\delta_0]}_h \\
 &\implies y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \cdot \underbrace{T^j[h]}_{k \mapsto h[k-j]} = x * h \\
 &\implies \forall k \in \mathbb{Z}, \quad y[k] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] h[k-j] = x * h[k] \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

où l'opérateur  $*$  est la convolution discrète définie ci-après.

**Définition 2.3.1** Convolution discrète

La convolution de signaux discrets  $u$  et  $v$  notée  $u*v$  est le signal discret défini par :

$$\begin{aligned} u*v & : k \mapsto u*v[k] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u[j] \cdot v[k-j] & = \sum_{j \leftrightarrow j+k}^{\infty} u[j+k] \cdot v[-j] \\ u*v & = \langle u, \underbrace{\overline{T^k \cdot \text{Sy}[v]}}_{j \mapsto v[k-j]} \rangle & = \langle T^{-k}[u], \overline{\text{Sy}[v]} \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

où  $T^k$  est le retard de  $k$  échantillons et  $T^{-k} = A^k$  son opérateur réciproque (inverse algébrique) : l'avance de  $k$  échantillons.



**Attention à l'ordre des opérations : la symétrie et le retard ne commutent pas !**

Même si nous avons vu dans §1.5 que les opérateurs  $\text{Sy}$  et  $\mathcal{F}$  commutent :  $\mathcal{F} \circ \text{Sy} = \text{Sy} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$ , il n'en est pas de même pour les opérateurs  $\text{Sy}$  et  $T$  !

Prendre un signal  $s$  de la variable discrète  $j$ , l'avancer de  $k$  échantillons avec  $A^k = T^{-k}$  puis le retourner avec  $\text{Sy}$  donne

$$\underbrace{\text{Sy} \circ}_{\text{Symétrie de}} \underbrace{T^{-k}}_{\text{avance } A^k} [s] = \text{Sy} \left[ \underbrace{T^{-k}[s]}_{j \mapsto s[j+k]} \right] : j \mapsto s \left[ \underbrace{(-j) + k}_{\text{symétrie}} \right] = s[k-j]$$

Alors que prendre un signal, le retourner avec  $\text{Sy}$  puis l'avancer avec  $T^{-k}$  donne

$$\underbrace{T^{-k} \circ}_{\text{Avance } A^k \text{ de}} \underbrace{\text{Sy}}_{\text{symétrie}} [s] = T^{-k} \left[ \underbrace{\text{Sy}[s]}_{j \mapsto s[-j]} \right] : j \mapsto s \left[ - \underbrace{(j+k)}_{\text{avance}} \right] = s[-j-k]$$

On remarque donc que  $T^{-k} \circ \text{Sy} \neq \text{Sy} \circ T^{-k}$ . En revanche prendre un signal, le retourner avec  $\text{Sy}$  puis le *retarder* avec  $T^k$  donne

$$\underbrace{T^k \circ}_{\text{Retard de}} \underbrace{\text{Sy}}_{\text{symétrie}} [s] = T^k \left[ \underbrace{\text{Sy}[s]}_{j \mapsto s[-j]} \right] : j \mapsto s[-(j-k)] = s[k-j]$$

Donc la commutation donne  $\text{Sy} \circ T^{-k} = T^k \circ \text{Sy}$ , autrement dit soit :

« La symétrie de l'avance d'un signal est le retard de son symétrique ».

L'analogie avec la convolution de signaux continus  $u$  et  $v$  notée  $u*v$  fonctionne aussi en utilisant le produit scalaire continu  $\langle u, \overline{T^k \cdot \text{Sy}[v]} \rangle$  au lieu du produit scalaire discret.

**Définition 2.3.2** Convolution continue

$$\begin{aligned} u*v & : t \mapsto u*v(t) = \int_{x=-\infty}^{\infty} u(x) \cdot v(t-x) dx & = \int_{t=-\infty}^{\infty} u(x+t) \cdot v(-x) dx \\ u*v & = \langle u, \overline{T^k \text{Sy}[v]} \rangle & = \langle T^{-k}[u], \overline{\text{Sy}[v]} \rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

## 2.4 Stabilité d'un système LTI

La réponse impulsionnelle (notée RIP) caractérise entièrement un système LTI, puisque l'opération de convolution permet d'obtenir la sortie d'un système pour n'importe quelle entrée.



Nous allons caractériser deux types de stabilité des systèmes LTI à partir de leur RIP :

**Stabilité BIBO** (*Borned Input Borned Output*, il n'y pas de sigle Français d'usage courant) associée à la propriété de donner des réponses bornées pour toutes entrées bornées ;

**Stabilité simple** chère aux automaticiennes qui exprime le fait qu'un système relâché (dont l'entrée reste nulle à partir d'un instant) retourne vers son état d'équilibre qui, dans le cas de systèmes linéaires, correspond à l'état nul et à une sortie nulle.

### 2.4.1 Stabilité BIBO

En pratique, la stabilité BIBO garantit qu'un système numérique puisse toujours calculer une valeur finie et donc codable à partir d'un signal réel forcément borné.



#### Notations

On rappelle qu'un signal  $s$  est borné ssi :

$$\exists A \in \mathbb{R} \mid \forall k \in \mathbb{Z}, \quad |s[k]| \leq A$$

On note de manière concise  $|x| \leq A$ , cette proposition.

Un signal non borné est, par négation de la proposition, tel que :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z} \mid |s[k]| > A$$

Cela revient à dire que la suite  $(s[k])_{k \in \mathbb{Z}}$  diverge vers l'infini (ne pas confondre avec simplement divergente qui est la négation de convergente ; par exemple  $k \mapsto \sin[k]$  est divergente mais non divergente vers l'infini).

On notera de manière concise  $s \rightarrow \infty$  le fait que  $s$  soit non-borné.

**Définition 2.4.1** Un système  $H$  est **stable en entrée bornée / sortie bornée** ou **stable BIBO** ssi pour toute entrée  $x$  bornée la réponse  $y = H[x]$  du système est bornée :

$$\forall x, \quad |x| \leq A \implies |y| \leq B$$

**Théorème 2.4.1** Un système  $H$  est stable BIBO si, et seulement si, sa réponse impulsionnelle  $k \mapsto h[k]$  est de module sommable, c.-à-d., la série  $\{h[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est absolument convergente :

$$H \text{ stable BIBO} \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| \in \mathbb{R}$$

La démonstration est intéressante et simple :

#### Démonstration 1 — Stabilité BIBO

Nous démontrons l'équivalence pour tout système  $H$  de réponse impulsionnelle  $h$  :

$$\sum |h| \in \mathbb{R} \iff \text{stable BIBO} \stackrel{\Delta}{\iff} (\forall x, \quad |x| < A \implies |y| < B)$$

par double implication.

$\implies :$

Supposons que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| = C \in \mathbb{R}^+$  et que  $|x| \leq A$  ; et montrons que  $|y| \leq B$ .

Si l'on écrit la réponse  $y$  du système à ce  $x$  borné en utilisant la convolution (3.4) et que l'on majore les termes par leurs valeurs absolues :

$$\begin{aligned}
y &= x * h : k \mapsto \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[j] \cdot x[k-j] \\
\forall k \in \mathbb{Z}, \quad y[k] &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h[j] \cdot x[k-j]| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h[j]| \cdot |x[k-j]| \\
\Rightarrow y[k] &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h[j]| \cdot A \quad \text{car } x \text{ est bornée par } A \\
\Rightarrow y[k] &\leq A \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h[j]| = A \cdot C \in \mathbb{R}^+ \quad \text{car } h \text{ est absolument sommable} \\
\Rightarrow \exists B = A \cdot C \in \mathbb{R}^+ \mid \forall k \in \mathbb{Z}, |y[k]| \leq B &\Rightarrow |y| \leq B
\end{aligned}$$

$\Leftarrow :$

La réciproque est plus astucieuse et s'exprime par :

$$\forall h, \quad \underbrace{(\forall x, |x| \leq A \Rightarrow |x * h| \leq B)}_P \Rightarrow \underbrace{\sum |h| \in \mathbb{R}}_Q$$

Il est plus aisé de montrer la contra-posée  $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$  et donc de supposer que  $\sum |h| \text{ DV}$  et montrer que  $\bar{P}$  :

$$\exists x \mid |x| \leq A \text{ et } |x * h| \rightarrow \infty$$

Pour cela nous construisons un signal  $x$  tel que, de manière arbitraire, la sortie  $y$  soit non-bornée pour  $k = 0$  et vaille  $\sum |h|$  et donc diverge (par hypothèse sur  $h$ ).

En prenant la formule de convolution pour  $k = 0$ , nous cherchons  $x$  tel que :

$$x * h[0] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \cdot h[0-j] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h[j]| = +\infty$$

On montre donc que ce signal existe en prenant  $x[j] = \frac{\overline{h[-j]}}{|h[-j]|}$  et si  $h[-j] = 0$  alors nous prenons  $x[j] = 0$ . Ce qui permet de conclure la réciproque avec :

$$\exists x = \frac{\overline{h[-j]}}{|h[-j]|} \mid x * h = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\overline{h[-j]}}{|h[-j]|} \cdot h[0-j] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h[-j]| = +\infty$$

L'implication et sa réciproque sont donc vraies : CDFQ. ■

## 2.5 Stabilité simple

Lorsque le système discret représente le comportement d'un processus, l'automaticienne préfère la notion de stabilité simple qui évoque le fait qu'un système libre (entrée nulle) retourne vers son état d'équilibre (valeur nulle pour les systèmes linéaires).

**Définition 2.5.1** Un système LTI est dit **simplement stable** si pour toute entrée  $x$  relâchée (nulle à partir d'un certain rang  $k_0$ ) sa réponse tends vers 0 en  $+\infty$ .

$$H \text{ stable} \stackrel{\Delta}{\iff} \forall x, \exists k_0 \mid \forall k > k_0, x[k] = 0 \implies y[k] \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

La encore, on peut déduire cette propriété de stabilité à partir de la réponse impulsionnelle.

**Theorème 2.5.1** Un système LTI est stable simplement si, et seulement si, sa réponse impulsionnelle  $k \mapsto h[k]$  tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .

$$H \text{ simplement stable} \iff \lim_{k \rightarrow +\infty} h[k] = 0$$

La démonstration se fait en utilisant le produit de convolution et en passant à la limite : elle est laissée aux soins de la lectrice.

## 2.6 Calcul opérationnel

La transformée en  $z$  joue le même rôle pour les systèmes discrets que la transformée de LAPLACE pour les systèmes continus. Elles permettent de définir une *fonction de transfert* du système et de manipuler les systèmes algébriquement (comme des nombres) sous formes de fonctions de variables associées à un système. Tout comme dans une fonction de transfert  $G(p)$  la variable  $p$  est associée au système « dérivée de » en continu ; nous aurons en discret des fonctions de transfert  $G(z)$  de la variable  $z$  qui est associée au système « avance d'un échantillon ».

Plutôt que de présenter sans justifier ces formules de transformées, nous allons introduire la vision par calcul opérationnel qui consiste justement à manipuler les opérateurs comme des nombres algébriques. Cette méthode a été développée et fortement utilisée par HEAVISIDE pour résoudre notamment l'équation des télégraphistes. Les justifications théoriques de cette approche et la relation entre l'opérateur  $p$  de HEAVISIDE et la variable  $s$  de la transformée de LAPLACE n'est apparue que plus tard.

Mathematics is an experimental science, and definitions do not come first, but later on.  
Olivier HEAVISIDE (1850–1925)

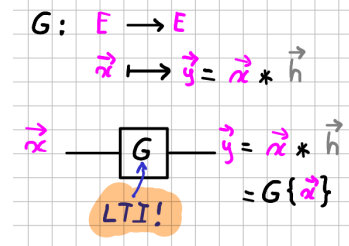
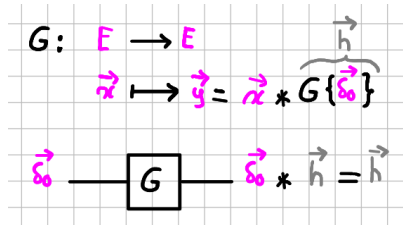
### 2.6.1 Similitude entre signal et système

Difficile de dire si  $\frac{1}{1+\tau p}$  est la transformée d'un système du premier ordre  $G(p)$  ou bien celle  $X(p)$  du signal exponentielle causale  $x(t) = e^{-t/\tau} \cdot u(t)$ . On peut dire que cette représentation est à la fois un signal et un système, car tout système  $G$  peut être associé à sa réponse impulsionnelle  $\vec{h}$  et réciproquement tout signal  $\vec{h}$  est associé au système dont il est la réponse impulsionnelle.

**Système  $G \leftrightarrow \text{RIP } h$**

Dans le cas où ce système est LTI, le §2.3.1 montre que l'opérateur  $G$  peut être entièrement défini par sa réponse impulsionnelle notée  $\vec{h}$ .

La réponse  $\vec{y}$  à une entrée arbitraire  $\vec{x}$  est la convolution de l'entrée par  $\vec{h}$ . On associe ainsi un signal  $\vec{h}$  à un système LTI. Le signal est représenté en gris pour indiquer son rôle spécial pour le système  $G$ .



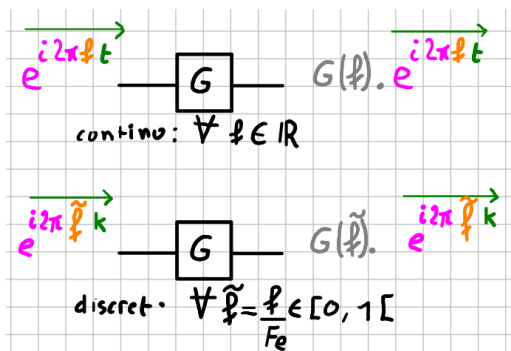
Pour associer un système  $G$  à un signal  $\vec{h}$ , il suffit d'introduire une impulsion  $\vec{\delta}_0$  (de Dirac pour l'espace des signaux continus, et impulsion unité pour l'espace de signaux discrets) en entrée du système  $G$  pour identifier la réponse impulsionnelle  $\vec{h}$ .

Une méthode d'identification<sup>1</sup> consiste à mesurer  $\vec{h}$  en mesurant la sortie du système à identifier pour une entrée impulsionnelle (en discret) ou la plus proche de l'impulsion de Dirac (en continu).

- R** La réponse impulsionnelle est une manière d'identifier un système et d'en trouver les équations. Par exemple si l'on considère le système d'un salle de concert où l'entrée est le son émis d'un point de la scène et sa sortie le son perçu à un endroit des gradins, on peut identifier entièrement ce système en enregistrant le son perçu lors d'un claquement sec le plus proche possible de l'impulsion de Dirac. Nous vous invitons à consulter le Notebook??.

### Système $G \leftrightarrow$ Réponse harmonique $G(f)$

Au lieu de prendre le vecteur temporel  $\vec{\delta}_0$  pour identifier le système à son signal de sortie, nous allons prendre plusieurs vecteurs de la base fréquentielle  $\vec{w}_f$  et associer un système à sa réponse harmonique  $G(f = \frac{\omega}{2\pi})$  qui est aussi une fonction de la variable réelle  $\omega$  ou  $f$ . Dans le cas continu l'onde pure est  $\vec{w}_f: t \mapsto e^{i2\pi f t}$  qui devient  $\vec{w}_f: k \mapsto e^{i2\pi f k T_e}$  pour les systèmes discrets.

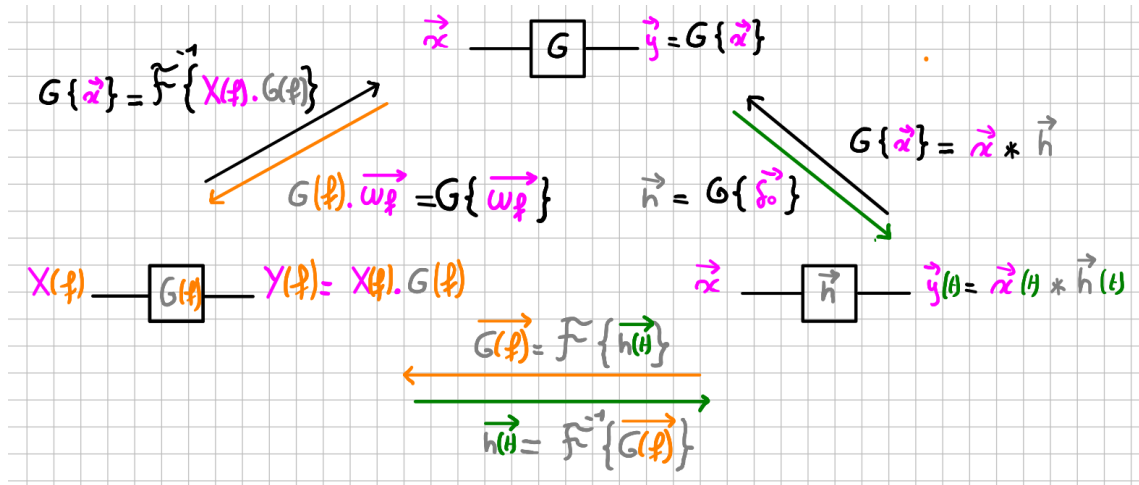


Lorsque l'on présente une onde pure  $\vec{w}_f$  à l'entrée d'un système LTI, cette onde ressort pure à la même fréquence mais avec un gain  $\rho(f)$  et un déphasage  $\varphi(f)$  qui dépend du système  $G$  et de la fréquence  $f$  de l'onde pure. La sortie est donc l'onde pure multipliée par un nombre complexe  $G(f)$  de module  $\rho(f)$  et d'argument  $\varphi(f)$  ce qui donne  $G(f) = \rho(f) \cdot e^{i\varphi(f)}$ .

La fonction  $f \mapsto G(f)$  est donc une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ( $F_e$  périodique dans le cas discret) qui est associée au système  $G$ . Nous allons voir dans la suite que cette fonction dite réponse harmonique est associée de manière bijective à un système.

1. méthode qui permet d'obtenir les valeurs numériques des paramètres d'un modèle mathématique à partir du processus réel

## Trois visions équivalentes : opérateur, Rlp, Bode



## 2.6.2 Algèbre des systèmes et signaux

Nous montrons qu'un système/signal produit par addition et multiplication de systèmes fondamentaux ont une algèbre d'anneau commutatif intègre et même de corps ce qui veut dire :

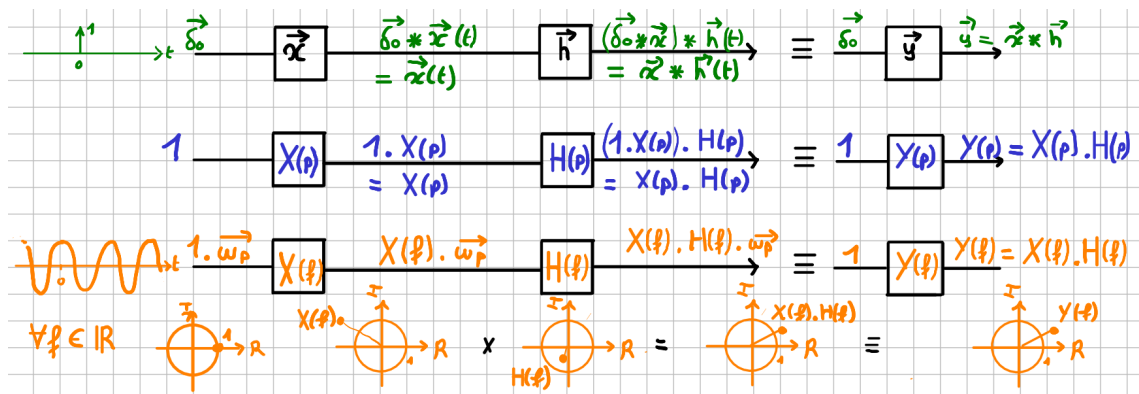
les systèmes se composent et s'assemblent comme les nombres, même si leur univers est beaucoup plus vaste.

quelle que soit la vision : convolution de signaux, systèmes opérateurs, ou produit de réponses harmoniques

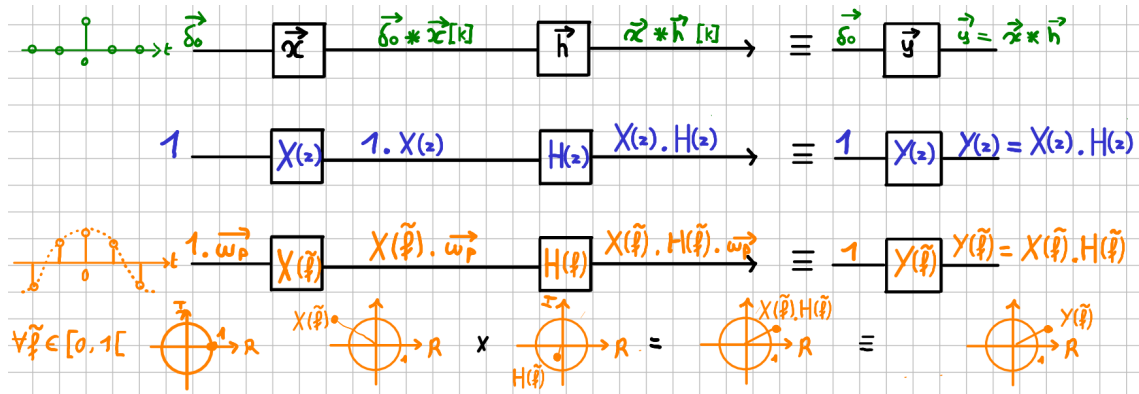
Nous montrons avec des schémas blocs et traitons en même temps :

- les transformées notées en lettres capitales  $X, Y, G$  et  $H$  seront dans le cas continus des transformées de Laplace de signaux  $X(p), Y(p)$ , et de fonctions de transfert  $G(p), H(p)$ . Dans le cas discrets les transformées en  $Z$  sont utilisées pour les signaux discrets  $X(z), Y(z)$  et les fonctions de transfert discrètes :  $G(z)$  et  $H(z)$ .
- les réponses impulsionnelles  $\vec{g}$  et  $\vec{h}$  des systèmes et les signaux temporels  $x, y$ .
- les réponses harmoniques ou fréquentielles des systèmes  $G(f), H(f)$  et les TF des signaux continus  $X(f), Y(f)$  et dans le cas discret les TFSD notées également  $X(f)$  et  $Y(f)$ . Rappelons que dans ce dernier cas la réponse est  $F_e$  périodique.

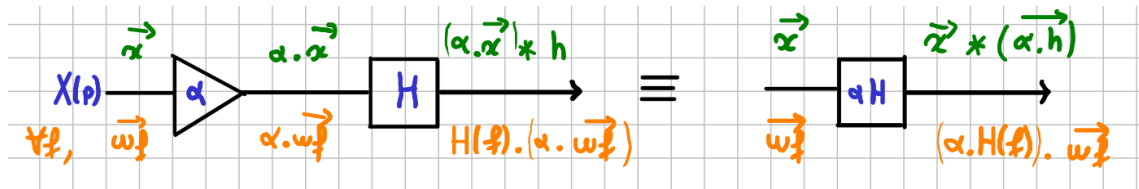
Ainsi nous représenterons sur ces trois points de vue, le fait de faire passer un signal  $\vec{x}$  dans un système  $G$  de réponse impulsionnelle  $\vec{g}$  comme le fait de faire passer une impulsion  $\vec{\delta}_0$  dans le système  $X$  produisant  $\vec{x}$  puis dans le système  $G$  :



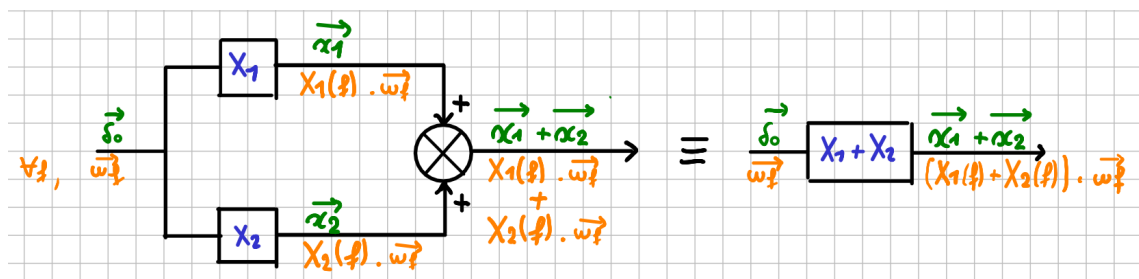
Ce qui donne pour des systèmes discrets :



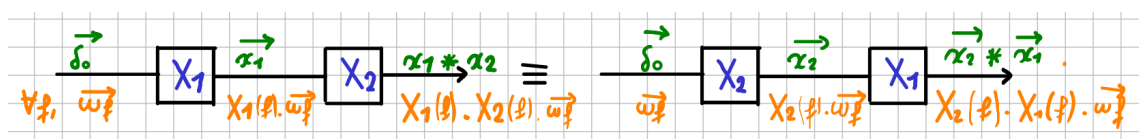
Produit avec un scalaire : Gain



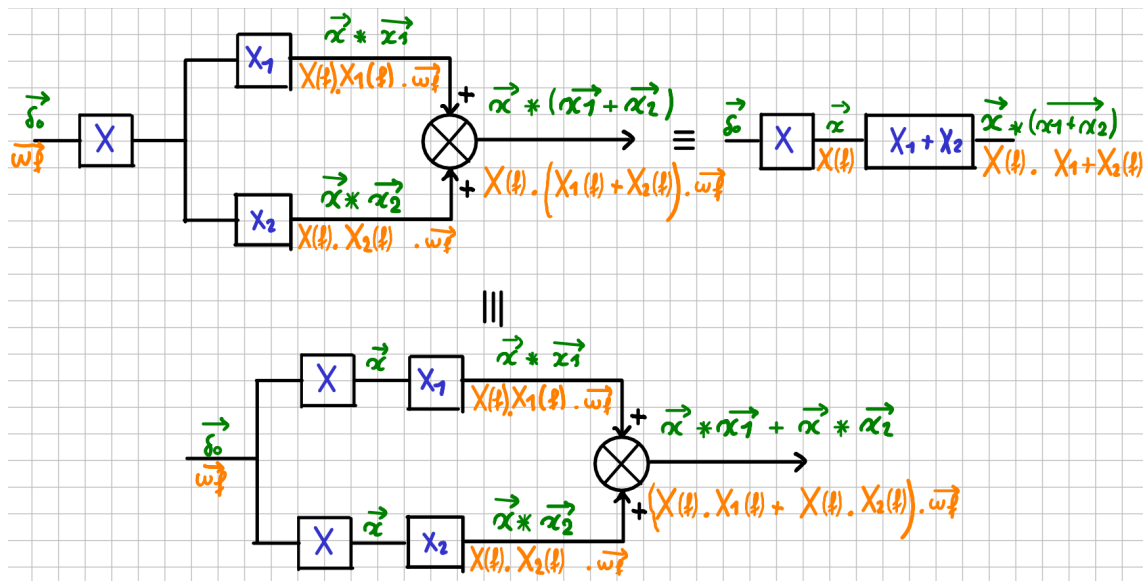
Somme de signaux : Sommateur



Commutativité des systèmes



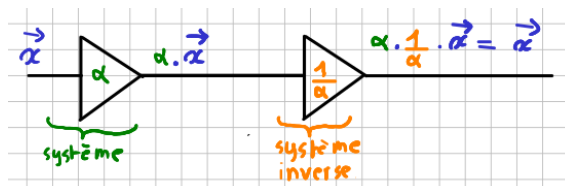
### Distributivité du produit sur la somme



### Inversion de système

On peut inverser un système gain car on possède des scalaires  $\alpha$  (même complexes) inversibles sauf pour l'élément neutre de l'addition : 0

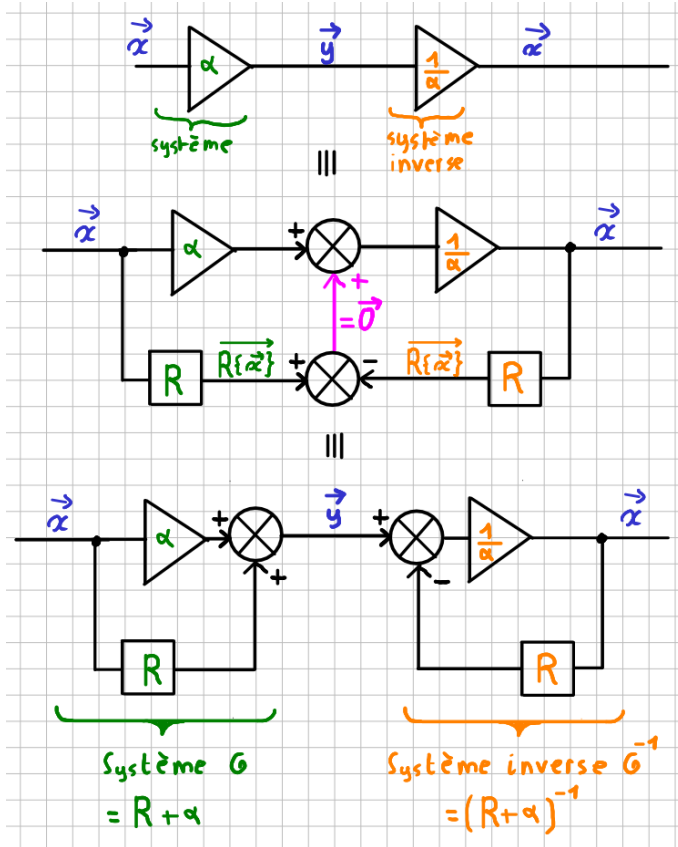
Un système qui comporte un gain non nul allant de l'entrée vers la sortie est appelé un système à transmission directe. Il est causal au sens large mais non strictement causal.



Si l'on décompose un système quelconque  $G = \alpha + R$  en une transmission directe  $\alpha$  et un reste  $R$  sans transmission directe et strictement causal. On peut construire le système inverse de  $G$  en réalisant un système bouclé à contre-réaction.

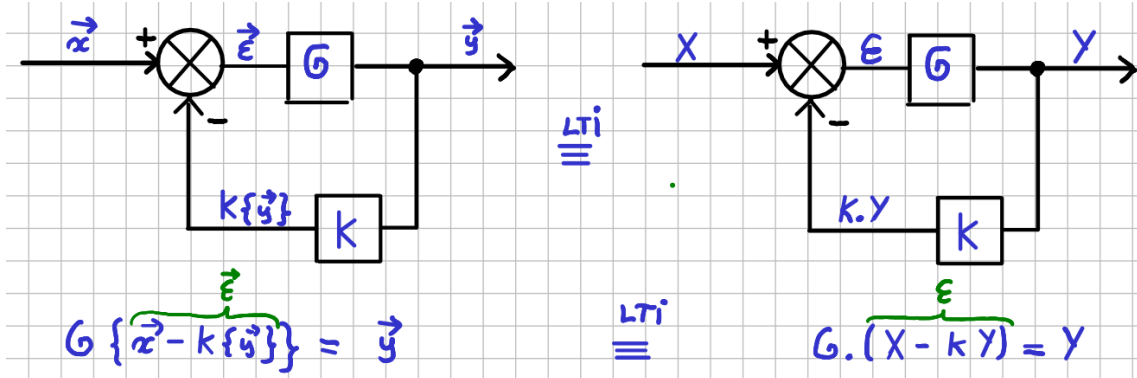
### Inversion par bouclage : manipulations algébriques

Il suffit de manipuler algébriquement l'inverse scalaire pour faire apparaître le système  $G = \alpha.R$  et son inverse  $G^{-1}$ .



### Inversion par bouclage : équation implicite

La boucle algébrique est souvent mise en œuvre par l'automaticienne et l'électronicienne pour inverser une fonction. Le schéma général ci-dessous fait apparaître un bouclage de contre réaction permettant d'inverser en quelque sorte le système à contrôler  $G$ .



Dans le cas général la sortie  $\vec{y}$  de la boucle doit résoudre l'équation implicite suivante :

$$\exists \vec{y} \mid G\{\vec{x} - K\{\vec{y}\}\} = \vec{y}$$

Si les opérateurs sont des systèmes linéaires on peut séparer les sommes en :

$$\begin{aligned} \exists \vec{y} \mid G\{\vec{x}\} - \overbrace{G\{K\{\vec{y}\}\}}^{G \circ K\{\vec{y}\}} &= \vec{y} \\ G\{\vec{x}\} &= \vec{y} + G \circ K\{\vec{y}\} = (\mathbf{1} + G \circ K)\{\vec{y}\} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{1}$  est le système qui ne change pas le signal (gain de 1).



Si l'on considère qu'il y a une solution à cette équation implicite, alors le système  $(\mathbf{1} + G \circ K)$  possède un inverse. La solution de l'équation implicite est donc :

$$\begin{aligned} \exists \vec{y} \mid (\mathbf{1} + G \circ K)^{-1} \{G\{\vec{x}\}\} &= (\mathbf{1} + G \circ K)^{-1} \{(\mathbf{1} + G \circ K)\{\vec{y}\}\} \\ ((\mathbf{1} + G \circ K)^{-1} \circ G)\{\vec{x}\} &= \vec{y} \\ \vec{y} &= \frac{G}{\mathbf{1} + G \circ K} \{\vec{x}\} \end{aligned}$$

On constate que l'opérateur de composition  $\circ$  et la somme de signaux  $+$  se comportent avec les systèmes comme une algèbre classique et l'existence d'inverse lui confère une structure d'anneau (comme les réels ou les complexes). On peut donc écrire la même équation en utilisant les transformées (de Laplace en continu avec  $G(p), Y(p)$ , etc. ; ou bien en  $\mathbb{Z}$  pour le temps discrets avec  $G(z), Y(z)$ , etc.) et les manipuler comme des nombres :

$$\begin{aligned} \exists Y \mid \overbrace{(X - K.Y)}^{\varepsilon} . G &= Y \\ X.G &= K.Y.G + Y = (\mathbf{1} + K.G).Y \\ (\mathbf{1} + K.G)^{-1} . X.G &= (\mathbf{1} + K.G)^{-1} . (\mathbf{1} + K.G).Y \\ Y &= \frac{G}{\mathbf{1} + K.G} . X \end{aligned}$$

### 2.6.3 Systèmes élémentaires : fonction de transfert en $\mathbb{Z}$

Un système discret est majoritairement réalisé de manière logicielle où le signal d'entrée  $\vec{x}$  est un tampon de mémoire contenant les échantillons de valeurs  $x[k]$  à traiter. Un calcul est effectué périodiquement et la sortie  $y[k]$  est envoyée en sortie (dans un tampon ou vers un périphérique).

Tout système discret linéaire invariant possédant une seule entrée  $x$  et une seule sortie  $y$  se représente ainsi par une équation aux différences du type :

$$a_n y[k-n] + \dots + a_1 y[k-1] + a_0 y[k] = b_m x[k-m] + \dots + b_0 x[k] \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (2.10)$$

On définit alors les trois opérateurs élémentaires et fondamentaux de la Tab. 2.2 que peut associer la programmeuse pour réaliser un système discret.

Les opérateurs discrets de base, retard unitaire, avance unitaire, gain commutent entre-eux (pour les systèmes invariants) et se combinent linéairement (pour les systèmes linéaires). On peut donc représenter la relation entrée/sortie par une combinaison linéaire de ces opérateurs de base :

$$\begin{aligned} a_n \cdot \left( \underbrace{\mathbf{T} \circ \dots \circ \mathbf{T}}_{n \text{ fois}} \right) [\vec{y}] + \dots + a_1 \cdot \underbrace{(\mathbf{T})}_{k \mapsto a_1.y[k-1]} [\vec{y}] + a_0 \cdot \underbrace{(\mathbf{Id})}_{a_0.y} [\vec{y}] \\ = \left( b_m \circ \underbrace{\mathbf{T} \circ \dots \circ \mathbf{T}}_{m \text{ fois}} \right) [\vec{x}] + \dots + (b_0 \circ \mathbf{Id}) [\vec{x}] \end{aligned} \quad (2.11)$$

**R** Remarquons bien que dans (2.13) les termes sont des scalaires réels ou complexe ; alors que dans l'écriture opérationnelle (2.14) les termes sont des fonctions (ou signaux ou plutôt des suites réelles ou complexes). Au lieu de prendre une égalité valable pour tout entier  $k$  ; nous passons à une équation de systèmes (ou opérateurs) prenant en argument des signaux.

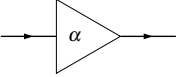
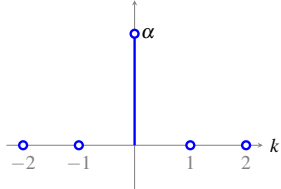
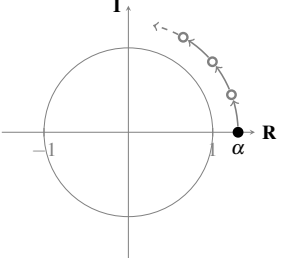

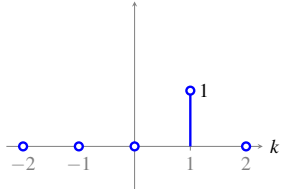
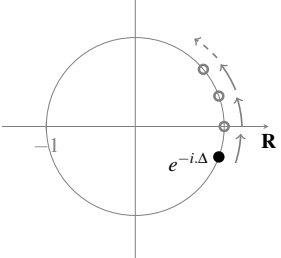
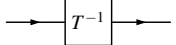
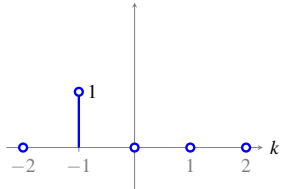
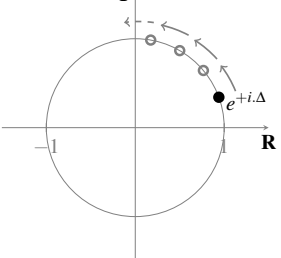
Système	Opérateur / Récurrence	Transformée en $Z$	Réponse impulsionnelle	Réponse harmonique
Gain 	$\vec{y} = \alpha \cdot \vec{x}$ $y[k] = \alpha \cdot x[k]$	$Y[z] = \alpha \cdot X[z]$	$\vec{h} = \alpha \cdot \vec{\delta}_0$ 	$H(f) = \alpha$ 
Retard 	$\vec{y} = T\{\vec{x}\}$ $y[k] = x[k-1]$	$Y[z] = z^{-1} \cdot X[z]$	$\vec{h} = \vec{\delta}_1$ 	$H(f) = e^{-i \cdot 2\pi \cdot \tilde{f}} = e^{-i\Delta}$ 
Avance 	$\vec{y} = T^{-1}\{\vec{x}\}$ $y[k] = x[k+1]$	$Y[z] = z \cdot X[z]$	$\vec{h} = \vec{\delta}_{-1}$ 	$H(f) = e^{+i \cdot 2\pi \cdot \tilde{f}} = e^{+i\Delta}$ 

TABLE 2.2 – Opérateurs discrets fondamentaux

Comme l'opérateur gain est invariant et qu'il commute avec l'opérateur retard on peut noter la composition  $\circ$  comme un simple produit car elle possède les mêmes propriétés de commutativité, associativité etc. La récurrence devient ainsi :

$$\underbrace{(a_n \cdot T^n)}_{\text{opérateur de fonction}} \underbrace{[y]}_{k \mapsto a_0 y[k]} + \dots + (a_1 \cdot T)[y] + \underbrace{a_0[y]}_{k \mapsto a_0 y[k]} = (b_m \cdot T^m)[x] + \dots + b_0[x] \quad (2.12)$$

**2.6.4 Système non-bouclé – moyenne glissante (MA) – régressif – FIR****2.6.5 Système bouclé – récurrence – autorégressif – IIR****2.7 Transformée en Z****2.7.1 Fonction de transfert et récurrence****2.7.2 Signaux/systèmes usuels****2.7.3 Décomposition élémentaire et stabilité****2.7.4 Domaine de convergence et causalité****2.8 Réponse fréquentielle****2.8.1 Lien avec les transformées de Fourier****2.8.2 Dualité entre système et filtre****2.9 Calcul opérationnel : Transformée en Z****2.9.1 Principe du calcul opérationnel**

Tout système discret linéaire invariant possédant une seule entrée  $x$  et une seule sortie  $y$  se représente par une équation aux différences du type suivant :

$$a_n y[k-n] + \dots + a_1 y[k-1] + a_0 y[k] = b_m x[k-m] + \dots + b_0 x[k] \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (2.13)$$

Les opérateurs discrets de base, retard unitaire, avance unitaire, gain commutent entre-eux (pour les systèmes invariants) et se combinent linéairement (pour les systèmes linéaires). On peut donc représenter la relation entrée/sortie par une combinaison linéaire de ces opérateurs de base :

$$\left( a_n \circ \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ fois}} \right) [y] + \dots + \underbrace{(a_1 \circ T)}_{k \mapsto a_1 \cdot y[k-1]} [y] + \underbrace{(a_0 \circ \text{Id})}_{a_0 \cdot y} [y] \quad (2.14)$$

$$= \left( b_m \circ \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{m \text{ fois}} \right) [x] + \dots + (b_0 \circ \text{Id}) [x] \quad (2.15)$$

**R** Remarquons bien que dans (2.13) les termes sont des scalaires réels ou complexe ; alors que dans l'écriture opérationnelle (2.14) les termes sont des fonctions (ou signaux ou plutôt des suites réelles ou complexes). Au lieu de prendre une égalité valable pour tout entier  $k$  ; nous passons à une équation de systèmes (ou opérateurs) prenant en argument des signaux.

Comme l'opérateur gain est invariant et qu'il commute avec l'opérateur retard on peut noter la composition  $\circ$  comme un simple produit car elle possède les mêmes propriétés de commutativité, associativité etc. La récurrence devient ainsi :

$$\underbrace{(a_n \cdot T^n)}_{\text{opérateur de fonction}} [y] + \dots + (a_1 \cdot T) [y] + \underbrace{a_0 [y]}_{k \mapsto a_0 y[k]} = (b_m \cdot T^m) [x] + \dots + b_0 [x] \quad (2.16)$$

■ **Exemple 2.2** Reprenons l'exemple du *différentiateur* 2.1 d'écrit par l'opérateur :

$$L : x \mapsto y = \frac{x - T[x]}{T_e}$$

Nous obtenons avec la notation algébrique la relation entrée/sortie :

$$T_e \cdot y = x - T[x]$$

Qui correspond à l'équation aux différences :

$$y[k] = \underbrace{\frac{1}{T_e}}_{b_0} x[k] - \underbrace{\frac{1}{T_e}}_{b_1} x[k-1]$$

■

**R** On ne peut pas noter des produits du type  $a_n.T^n.y$ , car cela signifierait la composition  $a_n \circ T^n \circ y$ . Alors que les systèmes gain et retard se composent et commutent (car se sont des opérateurs qui transforment des signaux discrets de  $L_E$  en signaux discrets de  $L_E$ ), la fonction  $y$  est un signal discret de  $L_E$  qui transforme un entier  $\mathbb{Z}$  en un scalaire complexe  $\mathbb{C}$  et ne peut se composer avec un opérateur : la composition (à droite ou à gauche) serait mal définie car :

$$\begin{array}{ccccc} a_n & \circ & T^n & \circ & y \\ L_E \xleftarrow{a_n} L_E & = & L_E \xleftarrow{T^n} L_E & \neq & \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{Z} \end{array}$$

Rappelons que les opérateurs  $a_n$  et  $T$  sont des « fonctions de fonctions discrètes donnant des fonctions discrètes ».

La composition  $a_n \circ y$  est donc mal définie et sa notation  $a_n.y$  est fautive quand  $a_n$  désigne l'opérateur (ou système) gain. En revanche la notation  $a_n.y$  où  $a_n$  est un scalaire est ambiguë mais correcte car elle peut désigner le produit d'un scalaire par une fonction. A part le système gain qui est noté comme un scalaire, les autres opérateurs comme  $T^k$  ne se composent pas avec une fonction et les notations  $T^k.y$  et  $T^k \circ y$  restent fautes sans ambiguïté !

Pour mener une approche par calcul opérationnel, il faut transformer la fonction  $y$  en un opérateur qui puisse commuter avec les autres. Or, comme le montre la remarque précédente, une fonction discrète prend un entier en argument pour donner un complexe, alors qu'un opérateur (ou système) prend une fonction pour la transformer en fonction.

Pour contourner ce problème, on remplace le signal  $y$  par un système noté  $Y$  dont la réponse à une excitation unitaire est le signal  $y$  lui-même. Dans le cas de systèmes discrets, on choisit comme signal unitaire l'impulsion unité  $\vec{\delta}_0$ .

**Définition 2.9.1** L'impulsion unité, notée  $\vec{\delta}_0$  ou simplement  $\delta$ , est le signal discret tel que :

$$\delta_0[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'impulsion unitaire centrée en  $a$  est notée  $\delta_a$  et définie par :

$$\delta_a[k] = \delta_0[k-a] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Bien qu'utilisant le même symbole  $\delta$ , il ne faut pas confondre l'impulsion unité discrète avec l'impulsion de DIRAC. L'impulsion unité est un signal discret tout à fait classique d'amplitude égale à 1 alors que l'impulsion de DIRAC est une fonction généralisée ou distribution, voir Chap. 3, d'amplitude infinie et de poids unité.

Ainsi au lieu de considérer un signal  $y$ , on considère le système discret  $Y$  dont la réponse impulsionnelle est :

$$y = Y[\vec{\delta}_0] \quad (2.17)$$

On exprime ainsi l'équation aux différences sous la forme pure d'opérateurs, ou systèmes, qui commutent entre-eux et se distribuent avec l'addition tout comme une multiplication classique :

$$a_n.T^n.Y + \dots + a_1.T.Y + a_0.Y = b_m.T^m.X + \dots + b_0.X \quad (2.18)$$

**R** Dans le cas des systèmes continus, on exprime les équations différentielles sous forme opérationnelle en remplaçant l'opérateur discret de retard  $T$  par l'opérateur de dérivation  $D$ . Un signal  $y$  est de même remplacé par un système  $Y$  dont la réponse impulsionnelle (à une impulsion de DIRAC cette fois-ci) est le signal  $y$ .

Initialement, HEAVISIDE avait introduit l'échelon unité, ou échelon éponyme, comme signal d'excitation de référence à la place de l'impulsion de DIRAC qui n'était pas encore définie à l'époque. Voir le §3.3 pour une définition de l'opérateur réciproque de la dérivée nécessitant l'impulsion de DIRAC.

Nous obtenons avec cette notation une écriture de l'équation aux différences qui ressemble à une équation algébrique polynomiale classique. Dans le calcul opérationnel, l'opérateur d'avance  $A$  (resp.  $T$ ) est assimilé à un nombre que l'on notera  $z$  (resp.  $z^{-1}$ ), les signaux  $x$  et  $y$  sont remplacés par leurs systèmes générateurs  $X$  et  $Y$  à partir de leur réponse impulsionnelle. Les systèmes générateurs  $X$  et  $Y$  pouvant être eux-même exprimés en fonction de l'opérateur  $z$ , ils sont représentés comme des fonctions de  $z$  soit  $X(z)$  et  $Y(z)$ . Nous verrons dans la suite que les fonctions  $X(z)$  et  $Y(z)$  sont les transformées en  $Z$  des signaux (ou systèmes)  $x$  et  $y$ .

Nous obtenons finalement l'équation algébrique associée à la récurrence (2.13) :

$$a_n z^{-n} Y(z) + \dots + a_1 z^{-1} Y(z) + a_0 Y(z) = b_m z^{-m} X(z) + \dots + b_0 X(z) \quad (2.19)$$

Les opérateurs réciproques  $T$  et  $A$  sont associés aux nombres  $z$  et  $z^{-1}$  car la division et la multiplication sont réciproques : comme la composition d'une avance et d'un retard  $A \circ T = \text{Id}$  donne le système identité, le produit algébrique  $z z^{-1} = z \frac{1}{z} = 1$  donne l'unité. L'unité algébrique 1 est donc associée au « système identité » (qui ne change pas le signal) dont la réponse impulsionnelle est l'impulsion unité  $\delta_0$ .

La résolution de l'équation aux différences peut alors se faire en traitant l'équation algébrique sous forme de fraction rationnelle puis de décomposition en éléments simples :

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_m z^{-m} + \dots + b_0}{a_n z^{-n} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0} = \underbrace{\frac{\beta_0}{z - \alpha_0}}_{\text{premier ordre}} + \dots + \underbrace{\frac{\mu_0 + \nu_0 z}{z^2 + b_0 z + c_0}}_{\text{second ordre}} + \dots \quad (2.20)$$

On décompose alors un système linéaire invariant comme une combinaison linéaire de systèmes de premier ordre et de second ordre. La résolution se fait alors par lecture de table de transformée en  $Z$  comme pour les transformées de LAPLACE dans le cas des systèmes continus.

■ **Exemple 2.3** Dans l'exemple du *différentiateur* 2.1 d'écrit par  $T_e.y = x - T[x]$ , nous pouvons remplacer  $x$  et  $y$  par les systèmes générateurs  $X(z)$  et  $Y(z)$  et finalement remplacer la composition avec  $T$  par une multiplication par  $z^{-1}$ . On obtient la fonction de transfert du système différentiateur :

$$H_d(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Il est alors facile de trouver l'opérateur *intégrateur*  $H_i$  réciproque du différentiateur  $H_d$  en se basant sur la propriété  $H_i \circ H_d = H_d \circ H_i = \text{Id}$  qui donne en équation algébrique :

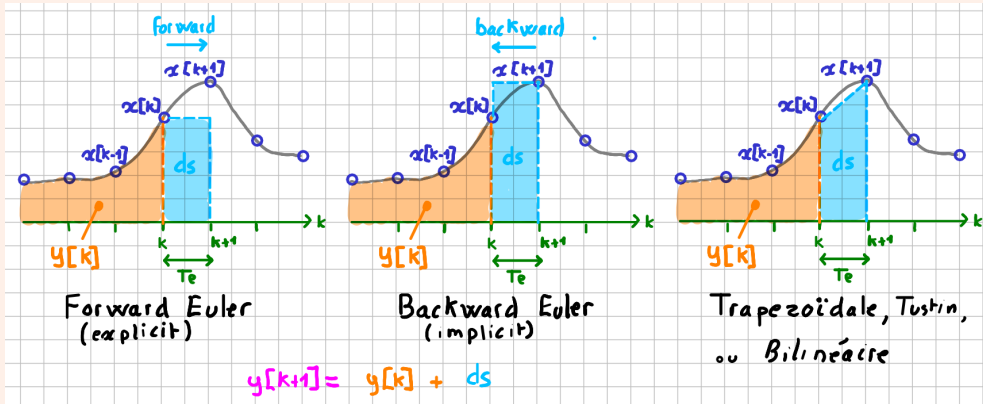
$$H_i(z) H_d(z) = 1 \implies H_i(z) = \frac{1}{H_d(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T_e}{1 - z^{-1}}$$

On obtient ainsi l'équation de récurrence de l'intégrateur dit *Backward Euler* :

$$\begin{aligned}
 Y(z) (1 - z^{-1}) &= T_e X(z) \iff Y(z) = z^{-1} Y(z) + T_e X(z) \\
 y[k] &= y[k-1] + T_e x[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
 \text{ou bien } y[k+1] &= y[k] + T_e x[k+1], \quad \forall k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

### Exercice 2.1 Trois intégrateurs différents et trois différentiateurs associés

L'exemple 2.3 précédent de l'intégrateur *Backward Euler* est illustré ci-dessous avec deux autres méthodes. On identifie alors dans (2.21) que l'incrément de surface  $ds$  ajouté à l'intégrale de  $x$  à l'instant  $k+1$  est la surface du rectangle bleu :  $y[k+1] = y[k] + \underbrace{T_e x[k+1]}_{ds}$



- Écrivez alors les récurrences correspondantes aux intégrateurs *Forward Euler* et *trapézoïdale* en adaptant la valeur de l'incrément de surface  $ds$  en fonction de  $T_e$ ,  $x[k]$  et/ou  $x[k+1]$ .
- De manière inverse à l'exemple précédent, retrouvez les fonctions de transfert  $H_i(z)$  de ces trois intégrateurs (remplacer  $x[k]$  par  $X(z)$ ,  $x[k+1]$  par  $zX(z)$  car  $z$  est associé à l'avance unitaire).

On remarque que l'écriture de la récurrence en  $y[k+1] = y[k] + \dots$  donne naturellement une fonction de transfert exprimée en  $z$ , alors que l'écriture en  $y[k] = y[k-1] + \dots$  donne une écriture en  $z^{-1}$  parfaitement équivalente : par exemple pour le *Backward Euler* on obtient les fonctions de transfert  $H_i(z) = \frac{T_e}{1-z^{-1}} = \frac{T_e z}{z-1}$

- On peut alors inverser algébriquement ces fonctions de transfert d'intégrateur  $H_i$  pour obtenir des fonctions de transfert de dérivateurs  $H_d(z) = H_i(z)^{-1}$  associées.
- On peut, de même, donner les récurrences  $y_d[k] = \dots$  à partir des fonctions de transfert  $H_d(z)$  permettant d'obtenir différentes approximations de la dérivée du signal d'entrée  $x$ .

On obtient ainsi des approximations linéaires discrètes exprimées en  $z$  (l'avance unitaire) de l'opérateur dérivée en continue  $p$  (ou variable de LAPLACE notée  $s$ ) :

$$D = \frac{d}{dt} \leftrightarrow p \leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{T_e} (1 - z^{-1})}_{\text{Forward Euler}} \leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{T_e} (z - 1)}_{\text{Backward Euler}} \leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}_{\text{Bilinéaire ou Tustin}} \tag{2.22}$$

## 3. La distribution de Dirac

L'impulsion de DIRAC est incontournable en traitement du signal et système; nous allons progressivement lever le voile !

### 3.1 La notion de densité

Retournons sur 3 notions de densité avec phénomène de localisation intense :

**la densité de masse** – est une notion physique que l'on peut comprendre aisément avec l'exemple d'une mousse au chocolat dont la *densité de masse* est plus ou moins aérée *selon une position réelle* sur un axe de découpe du gâteau. On considère la pépite pure de chocolat de 1 g *concentrée à un endroit* infinitésimalement bon du gâteau.

**la densité de probabilité** – on considère la *densité de probabilité* d'un nombre tiré au hasard entre 1 et 10 *selon la valeur réelle* de ce nombre. Le tirage d'un dé à 6 faces sera la *concentration infinie autour de valeurs précises* de la densité de probabilité.

**la densité d'amplitude (ou de puissance)** – dans le cas d'une transformation de FOURIER, on considère la *densité d'amplitude* des composantes d'un signal *selon une fréquence réelle*. La décomposition en série de FOURIER sera la *concentration infinie autour de fréquences harmoniques* de cette densité d'amplitude.

Dans les années 20, DIRAC a eu besoin de représenter la concentration de densité de probabilité de particules élémentaires autour de valeurs précises et discrètes pour développer la mécanique quantique.

Une densité  $f$  n'as de sens, ou est utile, uniquement en l'intègrant pour avoir une « mesure » de la masse, ou de la probabilité ou de l'amplitude sur un segment de valeurs  $[a, b]$  :

$$M_{[a,b]} = \int_a^b f(x) \, dx \quad (3.1)$$

On voit que dans le cas discret, il faut dériver une fonction cumulative « en escalier » et donc dériver des discontinuités pour obtenir une densité continue d'une variable discrète. Or la dérivée d'une discontinuité est mal définie ! Nous allons le voir dans la section suivante.

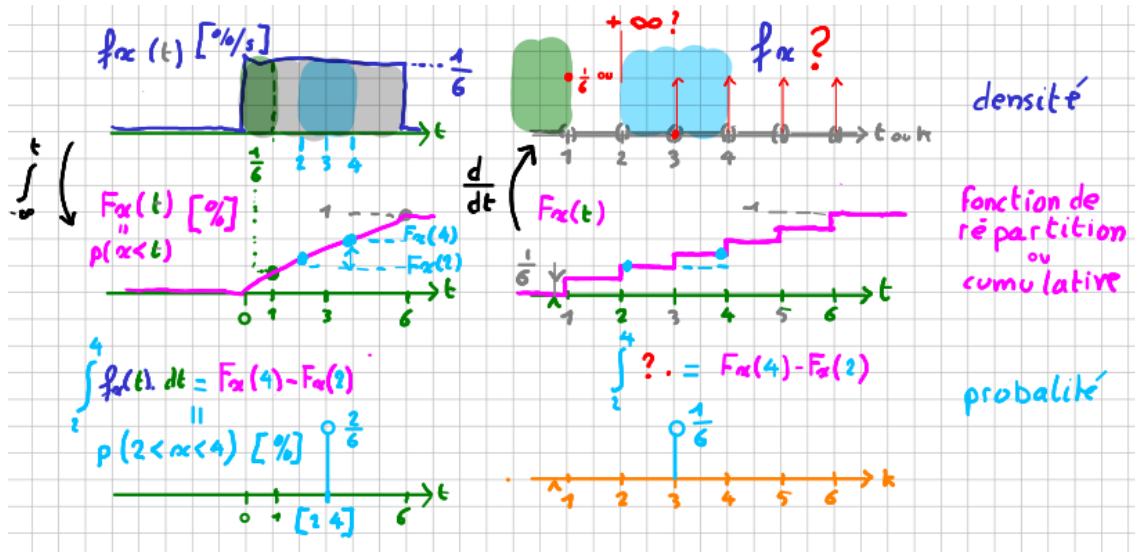


FIGURE 3.1 – À gauche une variable aléatoire continue  $[0, 6]$ . À droite une variable aléatoire discrète  $[[1, 6]]$ . En bas une mesure de probabilité de tirer une valeur autour de 3 dans  $]2, 4[$ ; au milieu la fonction cumulative  $F_x$  ou probabilité d'avoir une valeur inférieure à  $t$ , en haut une tentative de densité de probabilité.

### QUIZZ

En regardant la Fig. 3.1 répondez à ces questions :

**Q1** - la probabilité d'avoir un tirage unique à exactement 3 est de

1. 0 pour  $t=3$  en continu et  $1/6$  pour  $k=3$  en discret
2.  $1/6$  pour  $t=3$  en continu et  $1/6$  pour  $k=3$  en discret
3.  $1/6$  pour  $t=3$  en continu et  $\infty$  pour  $k=3$  en discret
4. c'est pas 3 que je veux mais 20/20 !

**Q2** - la probabilité d'avoir un tirage unique  $< 3$  est de

1.  $1/2$  pour  $<t=3$  en continu et  $1/2$  pour  $<k=3$  en discret
2.  $1/2$  pour  $<t=3$  en continu et  $1/3$  pour  $<k=3$  en discret
3. pareil que pour  $t \leq 3$  en continus et pareil que pour  $k \leq 3$  en discret
4. si on met la bonne réponse toujours au début c'est débile !

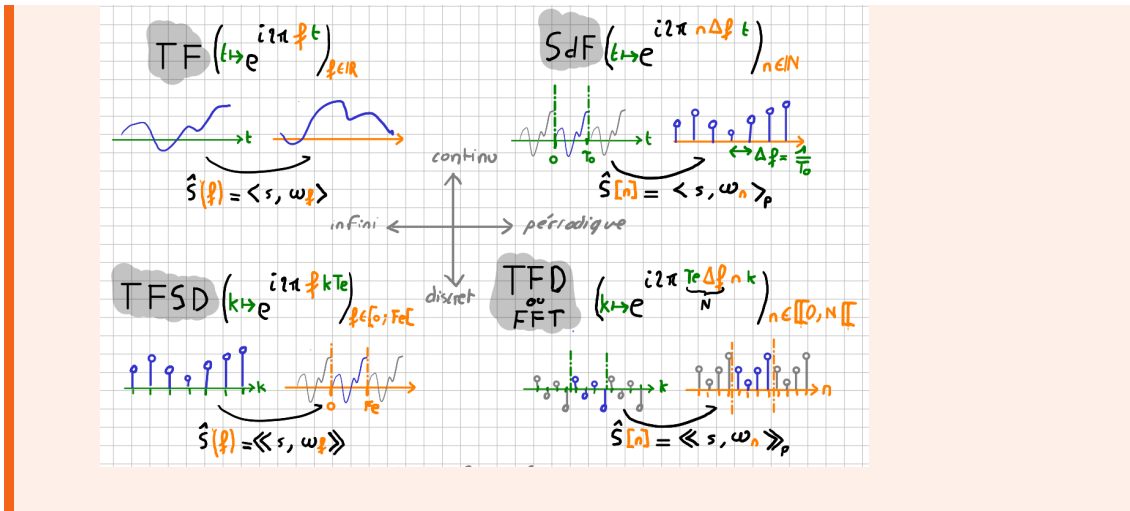
**Q3** - la densité de probabilité pour la valeur exacte 3 est de

1. 0 pour  $t=3$  en continu et  $1/6$  pour  $k=3$  en discret
2.  $1/6$  pour  $t=3$  en continu et  $1/6$  pour  $k=3$  en discret
3.  $1/6$  pour  $t=3$  en continu et  $\infty$  pour  $k=3$  en discret
4. je préfère rester discrète sur la question...

**Q4** Parmi les transformées représentées sur la figure suivante, lesquelles sont des densités et dans quelles unités (on suppose un signal primal temporel en Volts) :

1.  $\hat{S}(f)$  de la TF est une densité continue en  $V$  ;
2.  $\hat{S}(f)$  de la TF est une densité continue en  $V/Hz$  ;
3.  $\hat{S}(n)$  (impulsions unités) de la SdF est une densité discrète  $V/Hz$  ;
4.  $\hat{S}(f)$  (diracs) de la SdF est une densité en  $V/Hz$  ;
5. au moins avec un choix unique, je fais qu'une erreur par question...





### 3.2 Dérivée de fonctions discontinues

La densité de fonctions discrètes nous pousse à dériver des fonctions discontinues de première espèce (pas d'infinité à droite ni à gauche).

Prenons la fonction de HEAVISIDE ou échelon unité noté  $u(t)$  pour modéliser toute discontinuité dans un signal, le but est de définir une dérivée de cette fonction, voir Fig. 3.2 et d'obtenir à nouveau  $u(t)$  par intégration.

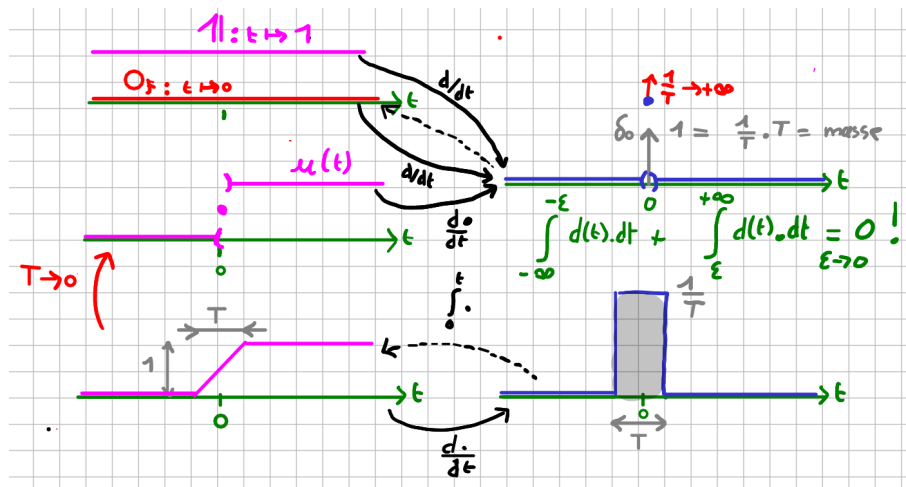


FIGURE 3.2 – Dérivées de l'échelon, de fonctions constantes et d'une fonction continue convergeant vers l'échelon pour  $T \rightarrow 0$

Or la dérivée  $u'(t)$  n'est pas définie en 0 (elle vaudrait  $+\infty$ ), il faut donc trouver un prolongement pour la définir partout :

- $u'(0) = 0$  par continuité, on obtient alors la fonction nulle. Sa primitive est la fonction nulle et donc on ne retrouve pas  $u(t)$  en intégrant la dérivée ;
- $u'(0) = a, a \in \mathbb{R}$ , la fonction est discontinue en 0, on doit intégrer en deux fois

$$u(t > 0) = \int_{-\infty}^{t > 0} u'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{-\infty}^{-\varepsilon} u'(x) dx}_{=0} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\varepsilon}^t u'(x) dx}_{=0} = 0$$

La dérivée de l'échelon est donc la fonction nulle « presque partout » ( $\|u'\|_2 = 0$ ).

On peut essayer d'approcher l'échelon avec deux fonctions rampes comme illustré sur la figure, et obtenir une dérivée définie partout (sauf en  $-\frac{T}{2}$  et  $\frac{T}{2}$ ) sous la forme de la fonction porte  $\Pi_{[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]}(t)$ . Mais la limite de cette fonction porte reste la fonction nulle presque partout !

### 3.3 Opérateur dérivée et sa réciproque

Le fait que plusieurs fonctions ont pour image la même fonction nulle, rend l'opérateur dérivée (noté  $p$  en calcul opérationnel ou  $D$ ) font que l'application dérivée qui transforme une fonction de  $L_1$  en fonction de  $L_1$  n'est pas injective.

$$p = D = \frac{d}{dt} : \begin{array}{ccc} L_1 & \longrightarrow & L_1 \\ t \mapsto u(t) & \longmapsto & t \mapsto u'(t) \end{array} \quad (3.2)$$

Elle est donc non bijective et une application réciproque unique n'existe pas (l'opérateur primitive qui s'annule en 0). Pourtant l'intuition montre que l'on a besoin d'établir un objet mathématique qui soit la dérivée de l'échelon et dont une primitive soit  $u(t)$ . Cette fonction généralisée ou fonction imaginaire est l'impulsion de DIRAC introduite et utilisée par le scientifique éponyme dans les années 1920 et établie mathématiquement par Schwartz dans les années 1950.

Comme l'indique la Fig. 3.3 on crée une fonction imaginaire étant la dérivée de discontinuité et dont l'intégrale réciproque donne une discontinuité.

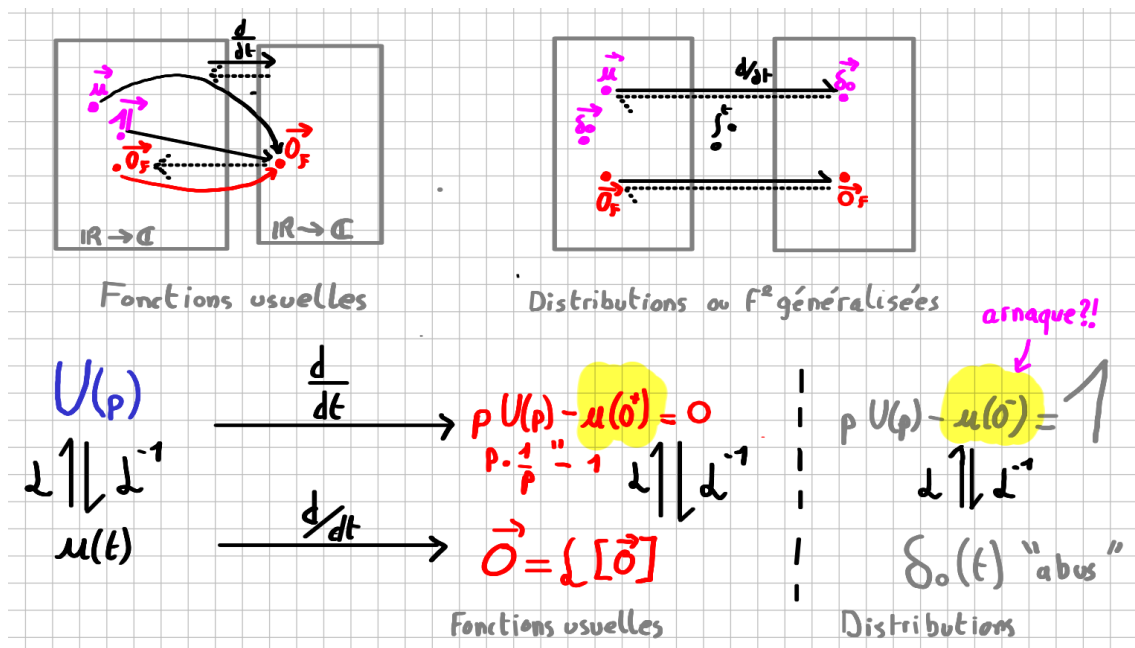


FIGURE 3.3 – L'espace des fonctions usuelles où l'opérateur dérivée n'est pas injectif et l'espace des distributions où l'opérateur est bijectif.

Cela permet de définir un opérateur inversible et d'introduire le calcul opérationnel où l'opérateur  $D$  possède une réciproque  $D^{-1}$  tel que  $D \circ D^{-1} = \text{Id}$ . La notation  $D^{-1}$  n'est pas anodine, car on assimile une réciproque d'opérateur à un inverse algébrique (du nombre  $D$ ). C'est l'approche par *calcul opérationnel* vu dans la §2.9.1 pour les systèmes discrets.

#### 3.3.1 Calcul opérationnel en continu

On obtient donc dans l'espace des distributions, noté  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , un opérateur  $D$  qui admet un réciproque  $I = D^{-1}$  capable de commuter, s'associer se distribuer et s'inverser avec l'addition :

une algèbre d'anneau commutatif comme celles de  $+$  et  $\times$  sur les réels. L'approche opérationnelle assimile cet opérateur  $D$  à un nombre complexe  $p$  que l'on manipule algébriquement : ce nombre peut être assimilé à la variable de LAPLACE notée  $s$  lorsque le signal de référence choisi est l'impulsion de DIRAC.

Tout système linéaire invariant continu est représenté par une équation différentielle

$$a_n y^{[n]} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m e^{[m]} + \dots + b_1 e' + b_0 e$$

que l'on peut noter sous forme opérationnelle :

$$a_n \underbrace{D \circ \dots \circ D}_{n \text{ fois}}[y] + \dots + a_1 D[y] + a_0 [y] = b_m \underbrace{D \circ \dots \circ D}_{m \text{ fois}}[e] + \dots + b_1 D[e] + b_0 [e]$$

Pour pouvoir manipuler les signaux comme des opérateurs et pouvoir écrire  $D \circ y = y \circ D$  permettant d'avoir une algèbre d'anneau commutatif. On assimile un signal  $y$  au système  $Y$  permettant de le générer à partir de sa réponse impulsionnelle (réponse à une impulsion de DIRAC  $\delta_0$ ) :

$$y \leftrightarrow Y \text{ tel que } Y[\delta_0] = y$$

Nous avons donc les opérateurs élémentaires gain  $a_n$ , dérivée  $D$  et l'opérateur  $Y$  associé au signal  $y$  qui se composent et commutent :  $a_n \circ D \circ Y = Y \circ D \circ a_n = \dots$ . Comme avec ces opérateurs élémentaires les opérations  $\circ$  et  $+$  ont une structure d'anneau commutatif, on adopte la notation algébrique classique pour ces opérateurs :

$$a_n D^n Y + \dots + a_1 D Y + a_0 Y = b_m D^m E + \dots + b_1 D E + b_0 E$$

Comme l'opérateur  $D$  possède une réciproque notée  $D^{-1}$  puisque  $D \circ D^{-1} = Id$  et que ces opérateurs commutent, on peut associer  $D$  à la variable scalaire  $p$ , l'opérateur gain  $a_n$  au nombre  $a_n$  (réel ou complexe) et obtenir une équation algébrique :

$$(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) Y = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) E \quad (3.3)$$

Comme le système identité est  $Id = DD^{-1}$  nous obtenons algébriquement que le système identité est le système de gain 1 et donc associé au nombre 1 qui représente donc l'impulsion de DIRAC de poids 1.

Si l'on borne les signaux  $y$  et  $e$  à des signaux générés par des systèmes linéaire invariants  $Y$  et  $E$  à partir de l'entrée  $\delta_0$ , alors nous obtenons une représentation du signal  $y$  par une equation algébrique (3.3) calculée pour une entrée  $E(p) = 1$  (impulsion de DIRAC). Le système  $Y$  est donc représenté par une fraction rationnelle  $Y(p)$ . Il en est de même pour le signal  $e$  qui est représenté par le système  $E(p)$

C'est ainsi que HEAVISIDE a remarqué que la composition des dérivées de fonctions et leurs associations linéaires dans les équations différentielle se comportait comme une algèbre classique. L'idée est venue de manipuler  $D$  comme un nombre ce qui l'a conduit à l'utilisation du calcul opérationnel comme celui effectué avec la transformée de LAPLACE où  $p$  joue le rôle de l'opérateur dérivé mais est un nombre complexe.

Et donc passer le pas et de calculer la solution en faisant une fraction rationnelle d'opérateurs dérivés et une décomposition en éléments simples d'opérateurs dérivés comme pour des nombres avec la fameuse *fonction de transfert* du système :

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{(b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0)}{(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0)} = \frac{\beta_n}{p + \alpha_n} + \dots + \frac{\beta_0}{p + \alpha_0}$$

Le tout sans avoir défini la transformée de LAPLACE qui est venue plus tard avec la formule de Carson.

### 3.4 Propriété sous l'intégrale de l'impulsion de DIRAC et de l'impulsion unité

Nous avons donc une fonction de densité  $\delta_0$  qui une fois intégrée peut enfin donner une fonction de répartition discontinue en 0. On peut appliquer l'opérateur de retard sur cet objet et définir  $\delta_a$  la densité d'une fonction  $u(t - a)$  discontinue en  $a$ . On peut définir par abus de notation :

$$\delta_a(t) = \delta_0(t - a)$$

Cela permet aussi de représenter l'opérateur d'échantillonnage idéal d'un signal continu à un instant  $a$  donné en multipliant le signal  $s(t)$  par la densité de mesure en  $a$  ce qui est représenté par la Fig. 3.4

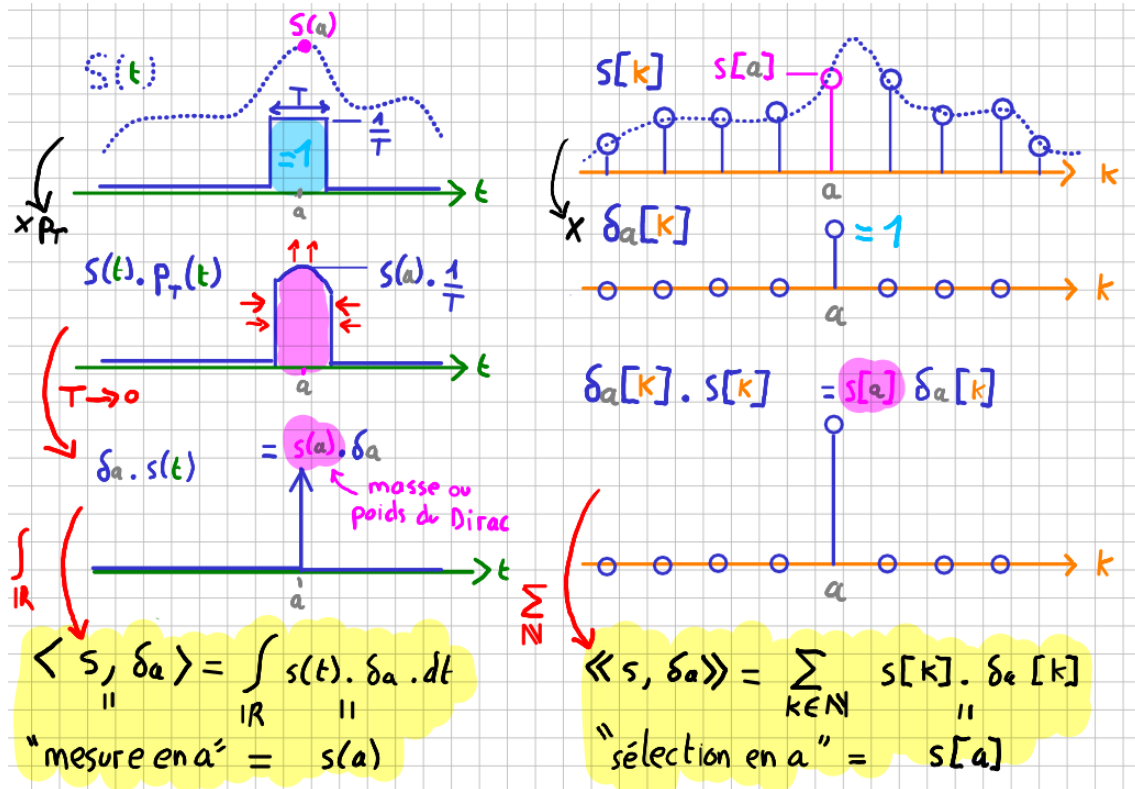


FIGURE 3.4 – À droite l'impulsion unitaire discrète qui effectue une mesure "sous la somme" ou à travers le produit scalaire. À gauche l'impulsion de DIRAC qui effectue la mesure idéale d'une fonction continue.

Nous avons donc les propriétés :

$$\langle s, \delta_a \rangle = s(a) \text{ en continu et en discret } \langle\langle s, \delta_a \rangle\rangle = s[a]$$

### 3.5 Propriété de convolution avec le DIRAC et l'impulsion unité

On peut définir l'opérateur de convolution, noté  $*$ , à l'aide du produit scalaire puisque :

$$u * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) v(t - x) dx = \langle u, \overline{x \mapsto v(t - x)} \rangle \quad (3.4)$$

De même pour les signaux discrets à support infini, on définit la convolution :

$$u * v[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u[l] v[k - l] = \langle\langle u, \overline{l \mapsto v(k - l)} \rangle\rangle \quad (3.5)$$

Et la convolution cyclique pour les signaux discrets périodiques de  $N$  points :

$$u * v[k] = \sum_0^{N-1} u[l] v[k-l] = \langle\langle u, \overline{l \mapsto v(k-l)} \rangle\rangle_P \quad (3.6)$$