

Table des matières

1	Les bases de FOURIER	3
1.1	Signaux et espaces vectoriels	3
1.1.1	Transformations par changement de base	5
1.1.2	Projection par échantillonnage	7
1.2	Les bases temporelles et espaces	8
1.2.1	Espaces discrets de dimension infinie	9
1.2.2	Espaces discrets à support fini ou périodique	10
1.2.3	Signal discret périodique pair : $\mathbb{R}_{DCT-II}^{[0, N_0]}$	13
1.3	Les espaces et produits scalaires associés	14
1.4	Les bases fréquentielles : transformations	15
1.4.1	Base de la TF	16
1.4.2	Base des SdF	17
1.4.3	Base de la TFSD	18
1.4.4	Base de la TFD et FFT	19
1.5	Dualité des transformées	21
1.5.1	Filtrage et fenêtrage : opérations duales	24
1.5.2	Interpolation et gavage de zéro : opérations duales	24
1.5.3	Sur-échantillonnage et multiplication de période : opérations duales	24
1.5.4	Décimation et division de période : opérations duales	24
2	Systèmes discrets	27
2.1	Systèmes linéaires	27
2.2	Systèmes invariants	29
2.3	Réponse d'un système LTI	29
2.3.1	Réponse impulsionnelle	29

2.4	Stabilité d'un système LTI	31
2.5	Calcul opérationnel	34
2.5.1	Dualité entre signal et système	34
2.5.2	Systèmes élémentaires : fonction de transfert en Z	34
2.5.3	Système non-bouclé – moyenne glissante – régressif – FIR	34
2.5.4	Système bouclé – récurrence – autorégressif – IIR	34
2.6	Transformée en Z	34
2.6.1	Fonction de transfert et récurrence	34
2.6.2	Signaux/systèmes usuels	34
2.6.3	Décomposition élémentaire et stabilité	34
2.6.4	Domaine de convergence et causalité	34
2.7	Réponse fréquentielle	34
2.7.1	Lien avec les transformées de Fourier	34
2.7.2	Dualité entre système et filtre	34
3	La distribution de Dirac	35
3.1	La notion de densité	35
3.2	Dérivée de fonctions discontinues	37
3.3	Opérateur dérivée et sa réciproque	38
3.3.1	Calcul opérationnel en continu	38
3.4	Propriété sous l'intégrale de l'impulsion de DIRAC et de l'impulsion unité	40
3.5	Propriété de convolution avec le DIRAC et impulsion unité	40
3.6	Calcul opérationnel : Transformée en Z	41
3.6.1	Principe du calcul opérationnel	41

1. Les bases de FOURIER

Ce chapitre aborde les signaux et leurs transformées avec le point de vue des espaces vectoriels. Les notions apprises pour les signaux continus sont ainsi revues et étendues aux signaux discrets.

1.1 Signaux et espaces vectoriels

La Fig. 1.1 illustre le cas d'un espace vectoriel de dimension 3 et d'une relation possible avec les espaces des fonctions continues et discrètes.

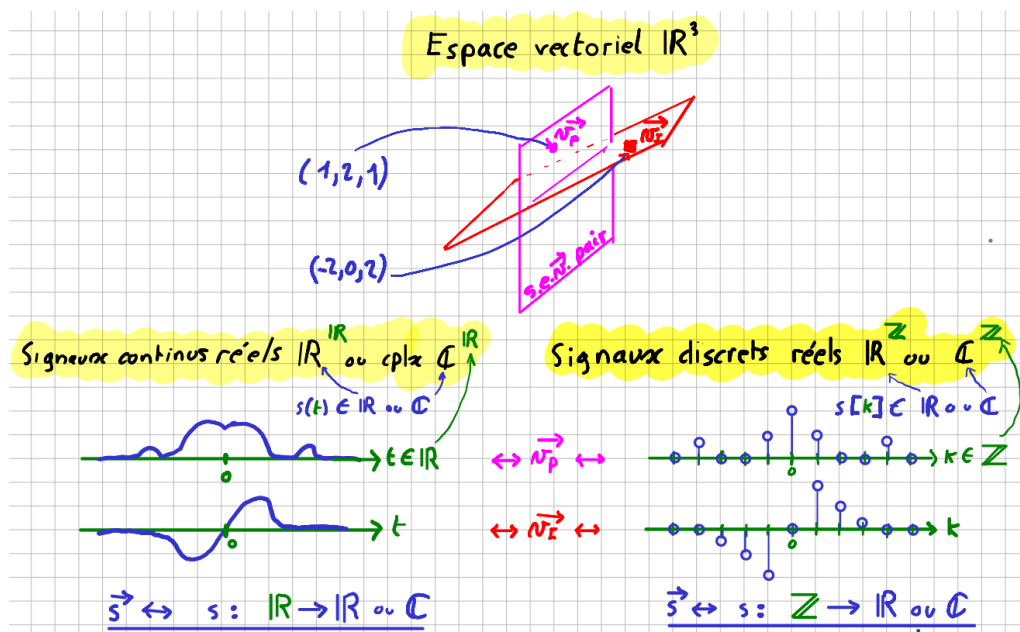


FIGURE 1.1 – Liens entre l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 et les espaces de fonctions. La notions de sous espace vectoriel est illustrée par l'exemple des sous espaces pair (violet) et impair (rouge).

R Notation et rigueur

On appelle et notera indifféremment un signal s ; la fonction s (ou dans le cas discret la suite numérique $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sera simplement notée s); et le vecteur \vec{s} de l'espace des signaux associé.

On différencie, en notant $s[k]$, l'évaluation de la fonction discrète $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ à l'instant k de celle d'un signal continu $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ à un instant t classiquement notée $s(t)$.

Le segment discret est noté $\llbracket n, m \rrbracket = \{k \in \mathbb{Z} \mid n \leq k < m\}$ différemment d'un segment continu $[a, b[= \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t < b\}$

La notation des espaces $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ choisie est assez courante et s'explique par l'extension de la notation des produits carthésiens \times car :

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{3 \text{ fois}} = \{(z_0, z_1, z_2) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

En indiquant que le nombre de produits est associé aux éléments k d'un ensemble discret, et prenant cette fois-ci des valeurs complexes, on note :

$$\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^{\{0,1,2\}} = \underbrace{\mathbb{C}}_{k=0} \times \underbrace{\mathbb{C}}_{k=1} \times \underbrace{\mathbb{C}}_{k=2} \quad \text{avec } (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^{\llbracket 0,3 \rrbracket} = \{(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3\}$$

En prenant un ensemble de dimension infini dénombrable comme \mathbb{Z} par exemple :

$$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \dots \times \underbrace{\mathbb{R}}_{k=-1} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{k=0} \times \underbrace{\mathbb{R}}_{k=1} \times \dots \quad \text{avec } s = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

Un élément est donc un n-uplet de dimension infini dénombrable qui est le graphe d'une application de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ et donc celui d'une suite numérique $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ que l'on appelle signal discret s . On note donc $s[1]$ l'évaluation de s pour $k = 1$ qui est la valeur s_1 représenté dans ce n-uplet. On assimilera donc ces deux notations $s_k = s[k]$, l'une indiquant le terme de rang k de la suite s et l'autre l'évaluation de l'application s avec l'argument k .

La représentation d'un tel graphe se fait sous forme de graphe en « batonnets » comme en bas à droite de la Fig. 1.1

La puissance du continu est obtenu en prenant l'ensemble infini indénombrable \mathbb{R} ce qui donne :

$$\mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \dots \times \underbrace{\mathbb{C}}_{t=0} \times \dots \times \underbrace{\mathbb{C}}_{t=\pi} \times \dots \quad \text{avec } s = (\dots, z_0, \dots, z_\pi, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Un élément de cet ensemble est donc un n-uplet de dimension infinie indénombrable (remarquez qu'il y a une infinité indénombrable de valeurs entre z_0 et z_π !). Ce n-uplet constitue le graphe d'une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et donc celui du signal continu s . Contrairement aux suites numériques du discret, il est rare de voir noté s_t une évaluation de cette fonction à l'instant t et la notation $s(t)$ sera toujours utilisée.

Ainsi que ce soit en continu avec le cas le plus général des fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, ou en discret celui des suites complexes de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, on manipulera les signaux comme des vecteurs et utiliserons les notions de :

produit scalaire $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle$ — sera un scalaire complexe dont le module indiquera si deux fonctions f et g se ressemblent. Calculer le produit scalaire entre f et g avec différents retards τ appliqués à g permet de définir la *fonction de corrélation*;

norme de vecteur (au carré) $\|\vec{s}\|^2 = \langle \vec{s}, \vec{s} \rangle$ — sera associé à l'énergie totale du signal, ou puissance moyenne dans le cas de signaux à support fini comme l'espace des fonctions périodiques etc.

bases vectorielles — permet de représenter des signaux par des signaux de base. Deux bases seront importantes : une base temporelle faite de signaux localisés autour d'un instant mais diffus en fréquence; et une base fréquentielle faites de signaux localisés en fréquence et diffus dans le temps.

projection sur un sous-espace — Revient à trouver un signal d'un sous espace vectoriel qui soit le plus proche d'un signal sur un sous-espace en enlevant des vecteurs d'une base correspond à un sous-échantillonnage du signal et ajouter des vecteurs à une base (avec des composantes nulles)

changement de base — correspond aux transformations de FOURIER (base temporelle vers fréquentielle) et aux transformées inverses. Dans le cas des signaux discrets bornés, la base étant finie on peut représenter la transformée TFD (algorithme FFT) par une matrice de passage. Le calcul de la transformée se fait par produit matriciel et l'inverse par le produit avec la matrice inverse.

1.1.1 Transformations par changement de base

La Fig. 1.2 met en évidence l'analogie du changement de base et d'une transformée.

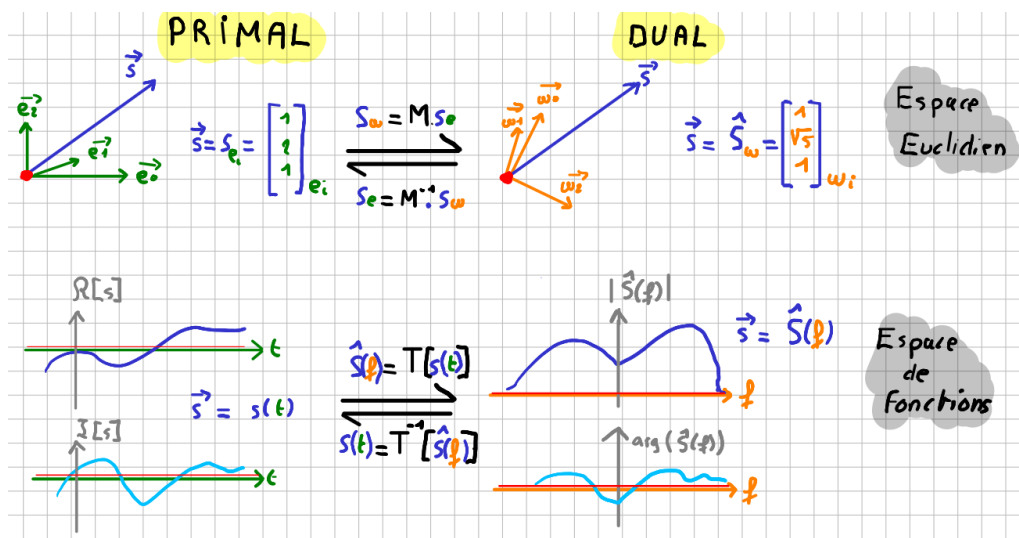


FIGURE 1.2 – Changement de base d'un vecteur dans un espace Euclidien de \mathbb{R}^3 et transformation d'une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dans un espace de Hilbert.

Si l'on note E un espace vectoriel des signaux qui pourrait être :

- $L_2 = \{s \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \mid \|s\|_2 \in \mathbb{R}\}$ – celui des signaux continus à énergie finie pour les transformées de FOURIER (TF) ;
- L_2^p les signaux continus et périodiques à puissance moyenne finie pour les séries de FOURIER (SdF) ;
- les signaux discrets de carré sommable pour les transformées de FOURIER des signaux discrets (TFSD) ;
- les signaux discrets périodiques pour les transformées de FOURIER discrètes (TFD) avec son algorithme de calcul optimisé *Fast Fourier Transform* (FFT).

On peut obtenir des fonctions/suites de coordonnées dans deux bases incontournables :

Espace temporel (souvent le primal) — (E, B_c) — Un signal $\vec{s} \in E$ peut être décomposé dans une base temporelle canonique $B_c = (e_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}$ de dimension infinie indénombrable où chaque vecteur e_τ de la base est un signal continu. Souvent considéré en premier, cet espace est appelé *l'espace primal*.

Les coordonnées sont alors exprimées sous la forme d'une fonction $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui, pour chaque instant réel $\tau \in \mathbb{R}$ associé à un vecteur \vec{e}_τ , indique l'amplitude $s(\tau)$ de sa composante. Si l'on a une base orthonormée, alors cette composante s'obtient en projetant \vec{s} sur chaque

vecteur \vec{e}_τ de la base avec le produit scalaire :

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \tau & \longmapsto & \langle \vec{s}, \vec{e}_\tau \rangle = s(\tau) \end{array}$$

Dans le cas du temps discret on a une base infinie dénombrable $B_c = (e_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de signaux discrets et les coordonnées sont :

$$s: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ j & \longmapsto & \langle \vec{s}, \vec{e}_j \rangle = s[j] \end{array}$$

Espace fréquentiel (souvent le dual) — (E, B_w) — Ce même signal $\vec{s} \in E$ peut être décomposé dans une base fréquentielle $B_w = (w_f)_{f \in \mathbb{R}}$ où chaque vecteur \vec{w}_f de la base est un signal localisé en fréquence.

Les coordonnées sont alors exprimées sous la forme d'une fonction $\hat{S}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui, pour chaque fréquence réelle f associée à un vecteur \vec{w}_f , indique l'amplitude $\hat{S}(f)$ de cette composante.

On retrouve la formule de transformée en utilisant le produit scalaire ainsi :

$$\hat{S}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \langle \vec{s}, \vec{w}_f \rangle = \hat{S}(f) \end{array}$$

Dans le cas des *fréquences discrètes*, la base est infinie dénombrable $B_w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et les coordonnées sont :

$$\hat{S}: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \langle \vec{s}, \vec{w}_n \rangle = \hat{S}[n] \end{array}$$

Pour une physicienne, une fonction du temps n'est pas la même chose qu'une fonction de la fréquence. Pour une mathématicienne ce sont toutes les deux des fonctions de la variable réelle !

Ainsi le signal \vec{s} est associé à une fonction $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dans la base temporelle et à une fonction $\hat{S}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dans la base fréquentielle.

On peut s'abstraire et considérer $\hat{S}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dans la base temporelle : ce qui donnera un signal différent de \vec{s} . Et aussi considérer $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dans la base fréquentielle ce qui donnera encore un autre signal différent.

R Notation et rigueur

On peut alors être tentée d'écrire $s(t)$ et $\hat{S}(t)$ pour indiquer que ces fonctions sont des coordonnées dans une base temporelle. Mais c'est une erreur de typage car $s(t) \in \mathbb{C}$ dans le cas général et on veut parler de fonctions de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. La fonction se note s , son évaluation en un point $s(t)$ et si l'on veut évoquer la fonction en insistant qu'elle est dans une base temporelle on peut noter $t \mapsto s(t)$.

Cette notation est lourde, on utilisera la notation *assez rare et spécifique* suivante qui remplace la variable t qui pourrait aussi bien être x ou f (on parle de variable muette) par le symbole \bullet . Ainsi on note :

$$s = t \mapsto s(t) = f \mapsto s(f) = s(\bullet)$$

Une transformée de FOURIER est donc l'opérateur identité dans l'espace vectoriel des signaux E qui consiste juste à changer de système de coordonnées.

$$\mathcal{F} := I_d: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{s} & \longmapsto & \vec{s} \end{array}$$

En revanche pour ce qui est des fonctions (coordonnées) associées, une transformée est une application linéaire qui transforme une fonction en une fonction :

$$\mathcal{F}: \begin{array}{ccc} (E, B_c) & \longrightarrow & (E, B_w) \\ s: t \mapsto \langle \vec{s}, \vec{e}_t \rangle = s(t) & \longmapsto & \hat{S}: f \mapsto \langle \vec{s}, \vec{w}_f \rangle = \hat{S}(f) \end{array}$$

1.1.2 Projection par échantillonnage

La base fréquentielle de FOURIER permet au moins de décrire l'espace des fonctions de carré sommable (noté L_2) dont la dimension est infinie indénombrable et possède la puissance du continu. La décomposition d'un signal dans cette base constitue la TF.

Definition 1.1.1 L'échantillonnage (on dira *decimation* dans le cas d'espaces de puissance discrète) est un type de projection d'un espace de dimension infinie dans un espace de dimension inférieure. Il consiste à prélever un sous-ensemble de vecteurs d'une base de manière régulière : avec un espacement constant nommé *période d'échantillonnage* et parfois *résolution*.

- R** On peut échantillonner aussi bien :
- des bases temporelles continues et on parlera d'échantillonnage de période $T_e \in \mathbb{R}$ pour obtenir un signal primal discret ;
 - des bases temporelles discrètes où on nommera *decimation* l'opération avec un paramètre $M \in \mathbb{N}$ nommé *facteur de decimation* (on garde un point tout les M points) pour obtenir un dual discret ;
 - des bases fréquentielles continues et on parlera d'échantillonnage en fréquence avec une période notée F_0 (qui évoque les SdF) et parfois Δ_f pour évoquer la *résolution fréquentielle* ;
 - des bases fréquentielles discrètes et on parlera de *decimation en fréquence*.

On peut discrétiser la base de FOURIER $(t \mapsto e^{i2\pi f t})_{f \in \mathbb{R}}$ qui est continue en temps et en fréquences selon le temps, la fréquence ou les deux :

temps discret où la variable $t \in \mathbb{R}$ sera remplacée par une variable discrète $k \in \mathbb{N}$ avec la relation $t = kT_e$ où T_e est la valeur qui sépare deux échantillons en temps est nommé *période d'échantillonnage* et parfois *résolution temporelle* notée Δ_t à ce moment.

fréquences discrètes où la variable $f \in \mathbb{R}$ sera remplacée par une variable discrète $n \in \mathbb{N}$ avec la relation $f = n\Delta_f$ où Δ_f est la valeur qui sépare deux échantillons en fréquence est nommé *résolution fréquentielle*. On peut noter F_0 cette même *période d'échantillonnage en fréquence* pour évoquer le cas des SdF.

QUIZZ — On note la fonction $w(t, f) = e^{i2\pi f t}$

Q1 - Typage : la fonction w est un vecteur de l'espace :

1. L_2 : l'espace des fonctions à énergie finie
2. $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$
3. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$
4. $\mathbb{R}^{2\mathbb{C}}$ mais ça fait bizarre

Q2 - Discret temporel : je dispose d'un enregistrement audio 256 kb/s en 8bit :

1. je suis à temps discret car en 8bit la résolution temporelle est $T_e = 1/2^8$;
2. temps discret et ma période d'échantillonnage est plus rapide ou égale à $T_e = \frac{256}{8} \text{ kHz}$;
3. une base fréquentielle peut être : $(k \mapsto e^{i2\pi f k T_e})_{f \in \mathbb{R}}$
4. un vecteur de la base fréquentielle peut être : $w_n = k \mapsto e^{i2\pi n F_0 k T_e}$

Q2 - Discret fréquentiel : un vecteur d'une base fréquentielle discrète pourrait s'écrire

1. $w_n[k] = \sin(2\pi n F_0 k T_e)$, $k \in \mathbb{Z}$
2. $w_f = f \mapsto \sin(2\pi f k T_e) = \sin(2\pi \bullet k T_e)$
3. $w_f = k \mapsto \sin(2\pi f k T_e) = \sin(2\pi f k T_e)$
4. $w_n = t \mapsto \sin\left(2\pi \frac{n}{T_0} t\right)$

Selon la dimension continue (infinie indénombrable) ou discrète (infinie dénombrable ou

finie) des espaces primal et dual, on utilisera différents produits scalaires pour effectuer différentes transformations entre primal et dual.

L'appellation primal/dual est utilisée car elle exprime le fait qu'il existe une opération permettant de passer de primal au dual et que cette *même opération* appliquée cette fois au dual permet de revenir au primal : comme appliquer deux fois un conjugué à un nombre complexe, ou deux fois la transposée à une matrice.

La section §1.5 montre que la transformée de FOURIER et sa version discrète sont toutes deux des opérateurs bi-duaux car :

$$\dots \xrightarrow{\mathcal{F}} s \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{S} \xrightarrow{\mathcal{F}} s(-\bullet) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{S}(-\bullet) \xrightarrow{\mathcal{F}} s \xrightarrow{\mathcal{F}} \dots$$

$$\text{et donc } \dots \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \mathcal{F}} s \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \mathcal{F}} s(-\bullet) \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \mathcal{F}} s \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \mathcal{F}} \dots$$

L'opérateur \mathcal{F}^2 transforme donc un signal s en un signal inversé, appelé *antipodal*, $s(-\bullet)$ qui est le dual de s . De même le dual de \hat{S} est son antipodal $\hat{S}(-\bullet)$.

On dit que s est le dual de \hat{S} un peu par abus.

R Pourquoi des signaux complexes alors qu'ils sont toujours réels ?

Cela permet justement d'appliquer plusieurs fois un même changement de base, comme la transformée de FOURIER à un signal. Ainsi si l'on considère uniquement des signaux de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & \hat{F} = T\{f\} \end{array} \quad \not\subset \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ g & \longmapsto & \hat{G} \end{array}$$

Car la transformée d'un signal réel est dans le cas général un signal à valeur complexe ($a(f)$ et $b(f)$). En considérant le cas général $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ on peut composer les transformations :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{R}} & = & \mathbb{C}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ \cdots & f & \longmapsto & \hat{F} = T\{f\} & = & g = \hat{F} & \longmapsto & \hat{G} = s(-\bullet) & \cdots \end{array}$$

De plus il est pratique de considérer des bases imaginaires $B_w = (t \mapsto e^{i2\pi ft})_{f \in \mathbb{R}}$, quitte à admettre des fréquences négatives, et avoir une seule fonction de coordonnées $f \mapsto c(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Alors qu'en restant en réel avec des fréquences positives il faut traiter une union de deux bases $B_w = (t \mapsto \cos(2\pi ft))_{f \in \mathbb{R}^+} \cup (t \mapsto \sin(2\pi ft))_{f \in \mathbb{R}^{++}}$ et deux fonctions de coordonnées $f \mapsto a(f) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ et $f \mapsto b(f) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^{++}}$

1.2 Les bases temporelles et espaces

Nous allons définir les différents espaces des signaux (fonctions) et y associer une base vectorielle « canonique » et parfois des variantes. Comme ces vecteurs de bases seront choisis de manière à être très localisés dans le temps, la majorité de l'énergie est localisée autour d'un instant, les bases seront dites temporelles.

Nous cherchons donc une famille de fonctions $t \mapsto p_{\tau}(t)$ (p comme impulsion) localisées autour d'un instant τ en continu ; et des suites $k \mapsto p_j[k]$ localisées autour de l'échantillon de rang j pour le temps discret.

Ainsi un vecteur \vec{s} d'un espace vectoriel de signaux discrets E sera décomposé dans la base temporelle par :

$$\vec{s} = \sum_j s[j] \cdot \overrightarrow{k \mapsto p[k-j]} = \sum_j s[j] \cdot \overrightarrow{p[\bullet-j]}$$

où le coefficient $s[j]$ de la composante à l'instant j est obtenu par projection :

$$s[j] = \langle \vec{s}, \overrightarrow{p[\bullet-j]} \rangle$$

Dans le cas continu nous avons :

$$\vec{s} = \int s(\tau) \cdot \overrightarrow{t \mapsto p(t-\tau)} d\tau$$

où le coefficient $s(\tau)$ de la composante à l'instant τ est obtenu par projection :

$$s[\tau] = \langle \vec{s}, \overrightarrow{t \mapsto p(t-\tau)} \rangle$$

Le plus simple est de considérer une suite finie de nombres : incontournable lorsque l'on traite le signal avec des processeurs numériques. La mémoire étant finie, on ne peut qu'utiliser des mesures faites périodiquement dans le temps (temps discret) nommées *échantillons* et de plus sur une durée finie (nombre d'échantillons fini).

1.2.1 Espaces discrets de dimension infinie

L'espace des signaux discrets réels (resp. complexes) à support infini est l'ensemble des applications de \mathbb{Z} dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$ (resp. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \{s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}\}$).

R Rappel sur les notations

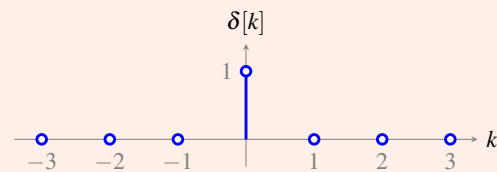
Un élément de cet espace est donc une fonction d'une variable discrète que l'on notera souvent k lorsqu'il s'agit d'un indice du temps avec la relation $t \leftrightarrow kT_e$, ou bien n lorsque l'indice est relié aux fréquences par $f \leftrightarrow nF_0$. Une fonction de la variable continue évaluée à un instant t étant notée $f(t)$, on utilisera des crochets et notera $f[k]$ une fonction de la variable discrète évaluée en k .

Pour différencier la notation d'une fonction de celle de son évaluation en un point car $f \neq f(t)$, on notera de manière allégée $f(\bullet)$ la fonction continue $t \mapsto f(t)$ où \bullet remplace la variable muette t . De même on différencie le scalaire $f[k]$ de la fonction $k \mapsto f[k]$ en notant simplement une fonction $f[\bullet]$.

On veut trouver une base permettant de décomposer un signal/vecteur \vec{f} quelconque avec des vecteurs/signaux $\vec{\omega}_i$ d'une base qui sera dite temporelle si le signal est localisé autour d'un instant. La fonction discrète la plus localisée dans le temps que l'on puisse utiliser pour construire cette base est l'*impulsion unitée* que l'on définit ci-dessous.

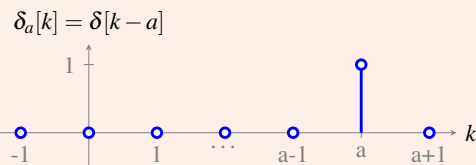
Définition 1.2.1 L'*impulsion unitée*, notée δ_0 ou simplement δ , est le signal discret tel que :

$$\delta = \delta_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ k \longmapsto \delta_0[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



L'*impulsion unitée centrée en a* est notée δ_a et définie par :

$$\delta_a = \delta_0[\bullet - a] : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ k \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } k = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



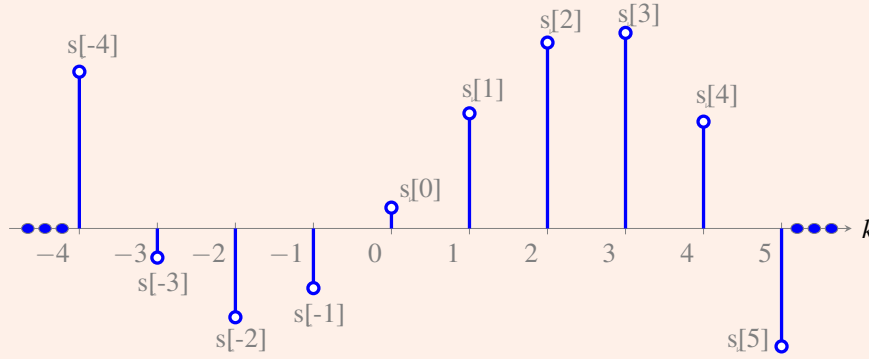
R Bien qu'utilisant le même symbole δ , il ne faut pas confondre l'impulsion unitée discrète avec l'impulsion de DIRAC. L'impulsion unitée est un signal discret tout à fait classique d'amplitude égale à 1 ; alors que l'impulsion de DIRAC est une fonction généralisée ou distribution, voir Chap. 3, d'amplitude infinie et de poids unité.

Ainsi on peut définir l'espace vectoriel des fonctions discrètes en donnant une base canonique.

Définition 1.2.2 — L'espace des signaux discrets $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (à support infini)

Est l'espace vectoriel de dimension infinie dénombrable des suites réelles défini par la base vectorielle $B_{\mathbb{Z}} = (\delta_j)_{j \in \mathbb{Z}}$. Un vecteur/signal \vec{s} de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a donc des coordonnées avec une infinité de composantes :

$$\vec{s} = (\dots, s[-1], s[0], s[1], \dots)_{B_{\mathbb{Z}}} = \dots + s[-1] \cdot \delta_{-1} + s[0] \cdot \delta_0 + s[1] \cdot \delta_1 + \dots = \sum_{j \in \mathbb{Z}} s[j] \cdot \delta_j$$



Cet espace est utile du point de vue théorique car il permet de modéliser l'échantillonnage d'un signal continu. En revanche, en pratique, il est impossible de stocker une quantité infinie d'échantillons dans la mémoire d'un système. On va donc utiliser une fenêtre d'observation pour limiter cette quantité d'information.

1.2.2 Espaces discrets à support fini ou périodique

Ainsi un échantillonnage de N_0 points réels (resp. complexes) est un vecteur de \mathbb{R}^{N_0} (resp. \mathbb{C}^{N_0}). On peut établir des bijections entre ce vecteur et différents *sous-espaces* de l'ensemble des signaux discrets à support infini $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

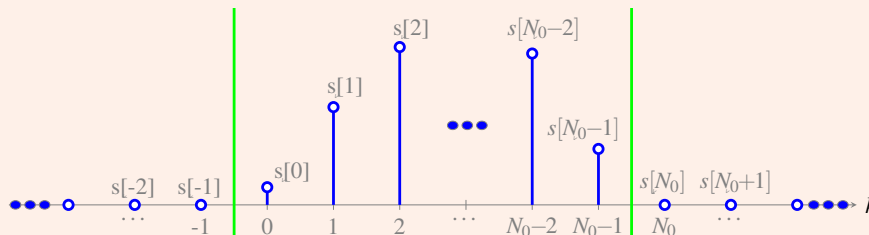
Signal discret borné : $\mathbb{R}^{\llbracket 0, N_0 \llbracket}$ ou $\mathbb{C}^{\llbracket 0, N_0 \llbracket}$

L'ensemble des signaux discrets bornés à valeurs réelles (resp. complexes) $\{s : \llbracket 0, N_0 \llbracket \rightarrow \mathbb{R}\}$ (resp. $\{s : \llbracket 0, N_0 \llbracket \rightarrow \mathbb{C}\}$) est défini uniquement pour $k \in \llbracket 0, N_0 \llbracket$. On plonge ces fonctions dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) avec un prolongement nul pour k en dehors de l'intervalle de définition (appelé parfois fenêtre d'observation naturelle).

Définition 1.2.3 — L'espace des signaux discret borné $\mathbb{R}^{\llbracket 0, N_0 \llbracket}$ ou $\mathbb{C}^{\llbracket 0, N_0 \llbracket}$ (à support fini)

Est un sous espace vectoriel noté $\mathbb{R}^{\llbracket 0, N_0 \llbracket}$ (resp. $\mathbb{C}^{\llbracket 0, N_0 \llbracket}$) des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. suite complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) défini par la base vectorielle $B_{N_0}^b = (\delta_j)_{j \in \llbracket 0, N_0 \llbracket}$. Ce signal est donc, sans perte de généralité, nul pour tout $k < 0$ et $N_0 \leq k$ et se décompose ainsi :

$$(\dots, 0, s[0], \dots, s[N_0 - 1], 0, \dots) \leftrightarrow s[0] \cdot \delta_0 + \dots + s[N_0 - 1] \cdot \delta_{N_0 - 1} = \sum_{0 \leq j < N_0} s[j] \cdot \delta_j$$



Remarquons que l'indice j est un indice indiquant un vecteur de la base temporelle qui est différents de la variable muette k que nous utilisons pour désigner l'argument d'une fonction discrète. Ainsi il faut bien analyser la somme précédente décomposant un signal s par :

$$s = \sum_{0 \leq j < N_0} s[j] \cdot \delta_j : \begin{matrix} \mathbb{N} & \longrightarrow \\ k & \longmapsto \end{matrix} \begin{matrix} \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ \sum_{0 \leq j < N_0} s[j] \cdot \delta_j[k] = \sum_{0 \leq j < N_0} s[j] \cdot \delta[k-j] \end{matrix} \quad (1.1)$$

■ **Exemple 1.1** On associe un enregistrement de 3 échantillons discrets de valeur 1, 2 puis 3 au vecteur $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. On fait une bijection entre ce vecteur de \mathbb{R}^3 et le signal discret $s = 1 \cdot \delta_0 + 2 \cdot \delta_1 + 3 \cdot \delta_2$ en échangeant la base canonique de \mathbb{R}^3 ayant par exemple pour vecteur $\vec{e}_0 = (1, 0, 0)$ avec le signal/vecteur de la base canonique des signaux discrets borné $B_3^b = (\delta_j)_{0 \leq j < 3}$ correspondant : $\vec{w}_0 = \delta_0$.

Nous avons bien un sous-espace vectoriel de dimension 3 de l'espace des suites réelles (resp. complexes) avec

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_3^b} = 1 \cdot \vec{w}_0 + 2 \vec{w}_1 + 3 \vec{w}_2 = 1 \cdot \delta_0 + 2 \cdot \delta_1 + 3 \cdot \delta_2$$

On obtient le signal :

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot \delta_0 & = & (\dots, 0, 1, 0, 0, 0, \dots) \\ + \quad 2 \cdot \delta_1 & = & (\dots, 0, 0, 2, 0, 0, \dots) \\ + \quad 3 \cdot \delta_2 & = & (\dots, 0, 0, 0, 3, 0, \dots) \\ \hline = s & = & (\dots, 0, 1, 2, 3, 0, \dots) \end{array}$$

■

R Si l'on veut décomposer un signal discret borné dans une base fréquentielle, avec des signaux étalés dans le temps mais localisés en fréquences, nous verrons que toutes les fréquences f du segment continu $[0, F_e[$ sont nécessaires et que les composantes fréquentielles sont périodiques de période F_e : nous obtiendrons **la transformée de FOURIER des signaux discrets (TFSD)** pour représenter un **signal discret borné**

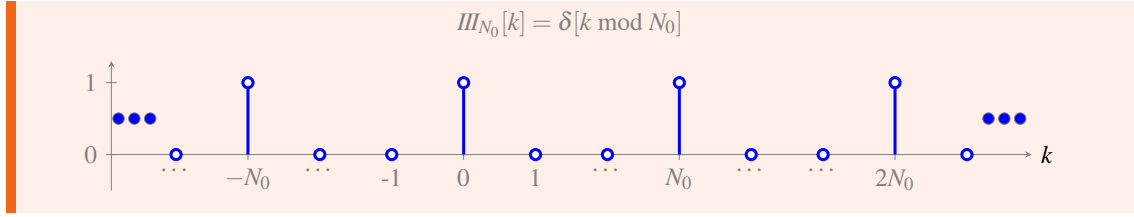
Signal discret périodique : $\mathbb{R}_P^{[0, N_0[}$ ou $\mathbb{C}_P^{[0, N_0[}$

En prolongeant le signal de manière périodique, nous obtenons une représentation fréquentielle plus légère qui sera aussi une fonction discrète périodique (au lieu d'une fonction continue périodique dans le cas des TFSD précédent).

Pour cela nous devons introduire la version périodique de l'impulsion unité.

Définition 1.2.4 Un **peigne d'impulsions de période N_0** est le signal noté III (lettre cyrillique *Sha*) définit par :

$$\text{III}_{N_0} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_{m \cdot N_0} : \begin{matrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow \\ k & \longmapsto \end{matrix} \delta_0[k \bmod N_0] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = m \cdot N_0, \quad m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$



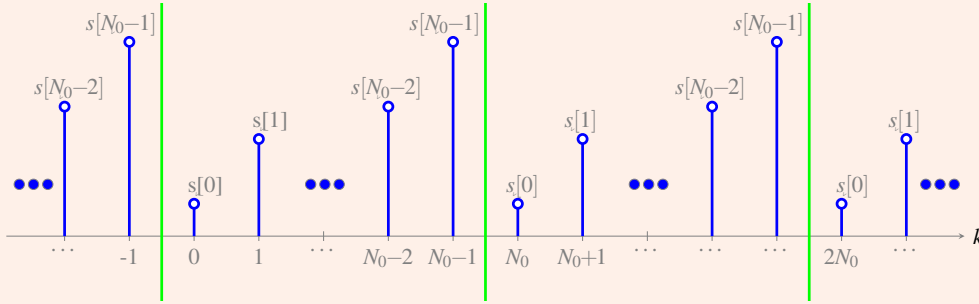
Nous pouvons utiliser les peignes d'impulsions comme base de signaux pour définir le sous-espace vectoriel des signaux discrets périodiques :

Définition 1.2.5 — L' **espace des signaux discrets N_0 -périodiques** $\mathbb{R}_P^{[0, N_0[}$ ou $\mathbb{C}_P^{[0, N_0[}$

Est un sous espace vectoriel noté $\mathbb{R}_P^{[0, N_0[}$ (resp. $\mathbb{C}_P^{[0, N_0[}$) des suites réelles (resp. suite complexes) défini par la base vectorielle

$B_{N_0}^P = (\text{III}_{N_0}[\bullet - j])_{0 \leq j < N_0}$. Ce signal est donc de période N_0 et se décompose ainsi :

$$s = s[0] \cdot \text{III}_{N_0} + \dots + s[N_0 - 1] \cdot \text{III}_{N_0}[\bullet - (N_0 - 1)] = \sum_{0 \leq j < N_0} s[j] \cdot \text{III}_{N_0}[\bullet - j]$$



Ne pas confondre l'indice j de la base temporelle et la variable muette k que nous utilisons pour désigner l'argument d'une fonction discrète. Ainsi il faut bien analyser la somme précédente décomposant un signal s par :

$$s[k] = \sum_{0 \leq j < N_0} s[j] \cdot \text{III}_{N_0}[k - j] \quad (1.2)$$

■ **Exemple 1.2** On associe maintenant $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ au signal discret périodique $s = 1 \cdot \text{III}_3 + 2 \cdot \text{III}_3[\bullet - 1] + 3 \cdot \text{III}_3[\bullet - 2]$ qui est 3-périodique.

Nous avons bien un sous-espace vectoriel de dimension 3 de l'espace des suites réelles (resp. complexes) avec

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{B_3^P} = 1 \cdot \vec{w}_0 + 2 \cdot \vec{w}_1 + 3 \cdot \vec{w}_2 = 1 \cdot \text{III}_3 + 2 \cdot \text{III}_3[\bullet - 1] + 3 \cdot \text{III}_3[\bullet - 2]$$

On obtient le signal :

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot \text{III}_3 & = & (\dots, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) \\ + 2 \cdot \text{III}_3[\bullet - 1] & = & (\dots, 0, 2, 0, 0, 2, 0, \dots) \\ + 3 \cdot \text{III}_3[\bullet - 2] & = & (\dots, 0, 0, 3, 0, 0, 3, \dots) \\ \hline = s & = & (\dots, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots) \end{array}$$

■

R Si l'on veut décomposer un signal discret N_0 -périodique dans une base fréquentielle, nous verrons que seul N_0 fréquences discrètes du segment $[0, F_e[$ sont nécessaires et que les composantes fréquentielles sont périodiques de période F_e :

Nous obtiendrons la **transformée de FOURIER discrète (TFD)** pour représenter un **signal discret périodique**. Un algorithme optimisé de calcul de la TFD est la **Fast Fourier Transform (FFT)**

1.2.3 Signal discret périodique pair : $\mathbb{R}_{DCT-II}^{[0, N_0]}$

Deux inconvénients du prolongement périodique précédant sont :

- une parité quelconque d'un signal réel fait que sa transformée est complexe,
- le signal n'est pas forcément continu au point de raccordements périodique

Il en résulte une transformée de signaux réels qui est imaginaire et l'introduction de composantes haute fréquences due à l'introduction d'une discontinuité périodique.

Prolongement pair en continu : CT – Cosine Transform

En continu, le développement en série de cosinus (CT pour Cosine Transform) est facile à définir car il y n'y a qu'un seul prolongement pair de période double d'un signal à support borné $[0, T_0[$. C'est donc une version réelle des SdF $c(n)$ où l'on prend une période double avec :

$$CT[n] = a\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2}{2T_0} \int_0^{2T_0} f_{\text{paire}}(t) \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{2T_0}\right) dt \stackrel{\text{parité}}{=} \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cdot \cos\left(2\pi n \frac{t}{2T_0}\right) dt$$

Il n'y a pas de $b(n)$! Et tout est réel, en revanche la résolution fréquentielle est double : $\frac{F_0}{2}$

Prolongements pairs en discret : DCT – Discrete Cosine Transform

En discret pour prolonger la suite bornée (a, b, c, d) par exemple, il y a deux choix à faire à chaque borne :

- a est à l'instant 0 et donc non répété : \dots, b, a, b, \dots
- a est répété et donc à l'instant $\frac{T_e}{2}$: \dots, b, a, a, b, \dots
- d est non répété et donc à $(N-1) \cdot T_e$ de l'échantillon a : \dots, c, d, c, \dots
- d est répété et donc à l'instant $(N-1) \cdot T_e + \frac{T_e}{2}$ de a : \dots, c, d, d, c, \dots

La Fig. ?? illustre un prolongement pair dit de type II où toutes les valeurs sont répétées de manière paires.

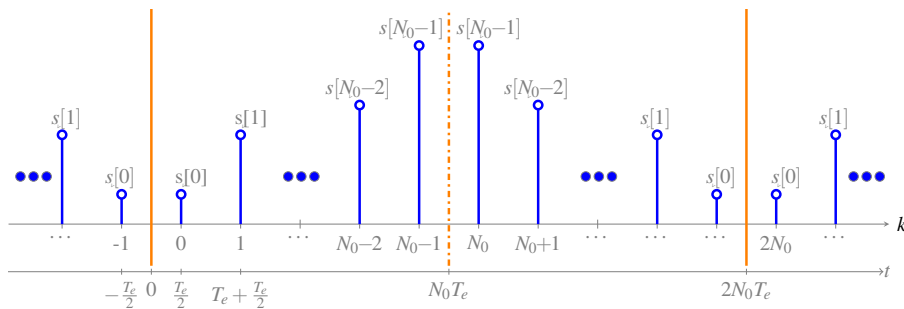


FIGURE 1.3 – Un prolongement pair possible en discret dit de type II : exemple donnant la transformée DCT-II. La parité s'obtient en décalant l'axe temporel avec la relation $t = kT_e$ qui devient $t = kT_e + \frac{T_e}{2}$

R En discret il y a 4 prolongements pairs donnant 4 **Direct Cosine Transform** DCT car il y a 4 prolongements pairs "aux deux bornes" conduisant à 4 espaces pairs périodiques, et 4 prolongements pairs en "a" et impair en "d".

Type de DCT	Prolongement (N=4)	Décalage de "a"	parité en "d"	Période
Type-I	(..., a, b, c, d, c, b, a, b, ...)	0	pair	2.(N-1)
Type-II	(..., a, b, c, d, d, c, b, a, ...)	+1/2	pair	2.N

Le prolongement de type II est très utilisé dans les algorithmes de compressions d'image et de son (mpeg, avi etc.) car la transformée DCT-II se calcule de manière efficace avec le même algorithme FFT utilisé pour les TFD et de plus le prolongement n'ajoute pas de discontinuité ce qui fait les composantes hautes fréquences deviennent négligeables. Ces dernières sont ignorées ou codées avec une faible résolution au moment de la réduction de la taille du stockage : ce type de compression est appelé *compression avec pertes* ou *lossy compression*.

1.3 Les espaces et produits scalaires associés

Nous allons considérer des espaces de fonctions tantôt à variables continues puis discrètes, et en même temps sur des supports infinis ou bornés. Dans le cas de fonctions bornées (définies sur un intervalle $[a, a + T_0[$ en continu ou $\llbracket a, a + N \rrbracket$ en discret), on peut **toujours** prolonger cette fonction en dehors du support de manière périodique, plutôt que par des zéros, car cela permet d'avoir une représentation en séries de FOURIER (SdF) (cas continu) ou en Transformée de Fourier Discrète (TFD) dans le cas discret.

Les produits scalaires pour différents espaces de fonctions sont définis et illustrés dans la Tab. 1.1 en prenant :

- en rangées du tableau les signaux de la *variable continue* (intégrale continue) ou bien de la *variable discrète* (somme discrète) ;
- en colonnes du tableau les *supports infinis* (de $-\infty$ à ∞) ou bien support *périodique/borné* (de 0 à T_0 ou N).

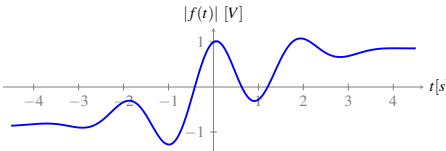
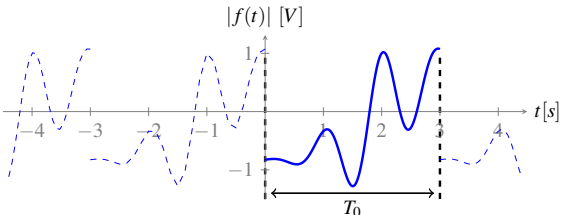
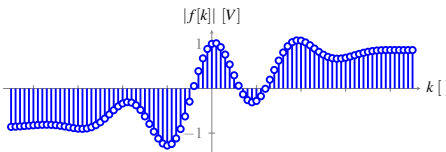
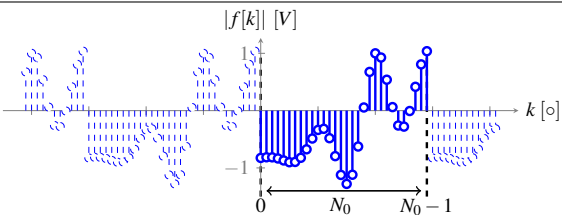
	Support infini	Support fini ou périodique
variable continue	 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt \propto [V^2]$	 $f : [0, T_0[\mapsto \mathbb{C}$ $\langle f, g \rangle_P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt \propto [V^2]$
variable discrète	 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ $\langle\langle f, g \rangle\rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} f[k] \cdot \overline{g[k]} \propto [V^2]$	 $\llbracket 0, N_0 \rrbracket \rightarrow \mathbb{C}$ $\langle\langle f, g \rangle\rangle_P = \frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N_0-1} f[k] \cdot \overline{g[k]} \propto [V^2]$

TABLE 1.1 – Les proxduits scalaires adaptés aux différents espaces de fonctions. Par clarté, on ne représente que le module de la fonction qui est dans le cas général complexe.

Exercice 1.1 Propriété de scalaire et norme dans le cas général

On aurait pu définir ces produits scalaires en ne prenant jamais le conjugué d'une fonction g (ou en considérant des fonctions à valeurs réelles de manière à ignorer ce conjugué car $\bar{g} = g$).

1. Vérifiez dans le cas réel (sans conjugué) que le produit $\langle f, g \rangle$ a les propriétés d'un produit scalaire, en déduire la norme induite $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$ et déterminer la dimension de $\|f\|^2$: est-ce de la puissance ou de l'énergie, est-ce une valeur ou une densité ?
2. Appliquez cette norme (toujours sans le conjugué) au signal imaginaire pur $f : t \mapsto i$. Quelle propriété de la norme n'est pas respectée ?
3. Refaites de même en prenant cette fois-ci les formules de Tab. 1.1 avec le conjugué de g et vérifiez que cette propriété est vérifiée dans le cas général des fonctions à variables complexes.
4. Vérifiez que $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ et que donc le produit scalaire est linéaire à gauche $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$ et à moitié linéaire à droite $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle f, \lambda g \rangle = \bar{\lambda} \langle f, g \rangle$

On comprend maintenant pourquoi, dans le cas général des fonctions à valeurs complexes, on utilise le conjugué dans l'expression des produits scalaires et pourquoi on parle de produit *sesqui-linéaire* pour ces produits scalaires : *sesqui* en latin voulant dire « un et demi » en latin. ■

Le produit scalaire est très utile car il permet d'obtenir :

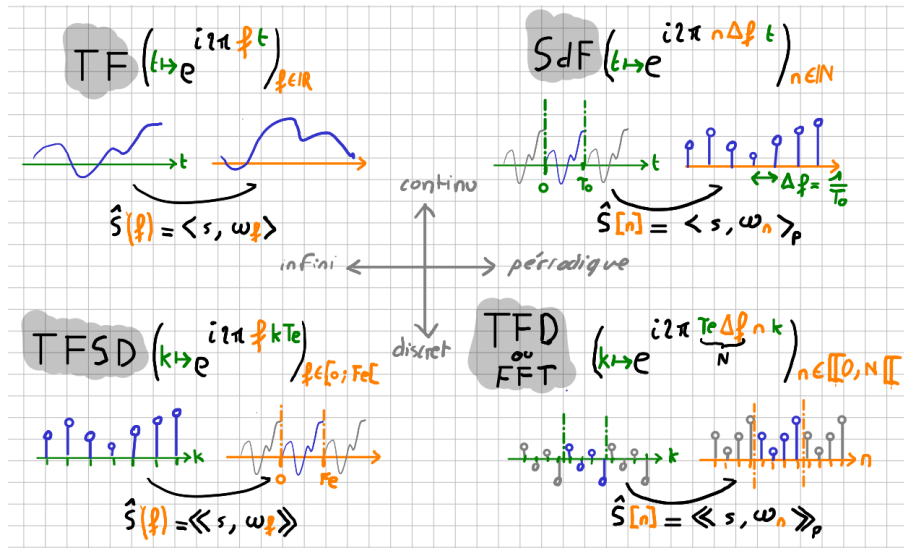
- de mesurer des longueurs de signaux avec la norme induite par le produit scalaire $\|\vec{s}\| = \langle \vec{s}, \vec{s} \rangle$, et de mesurer des distances entre signaux avec la norme de la différence $\|\vec{u} - \vec{v}\|$;
- de projeter un vecteur sur un autre ou sur un sous-espace vectoriel : cela revient à minimiser une distance $P_v(u) = \min_{x \in \text{vect}(u)} (\|u - x\|)$ par simple calcul direct ;
- trouver les meilleures, au sens de la distance avec la norme engendrée, décompositions d'un signal u sur une base de vecteurs données : calculer des transformées de signaux.

La Tab. 1.2 montre le parallèle entre l'utilisation du produit scalaire sur des vecteurs et sur des signaux, chacune permet de retrouver des formules bien connues des SdF et des TF.

1.4 Les bases fréquentielles : transformations

En prenant la base des ondes complexes adaptée à chaque espace de signaux (discrétisée ou non, sur un intervalle infini ou borné/périodique), et en utilisant les produits scalaires adaptés, on peut définir quatre types de transformations et leurs réciproques entre un primal avec une base canonique purement localisée dans le temps (et infiniment étendue en fréquence) et un dual composé d'une base d'ondes purement localisées fréquentielles (et infiniment étendue en dans le temps).

Le schéma ci-dessous résume ces transformées, leurs bases et les produits scalaires associés à chaque transformation :



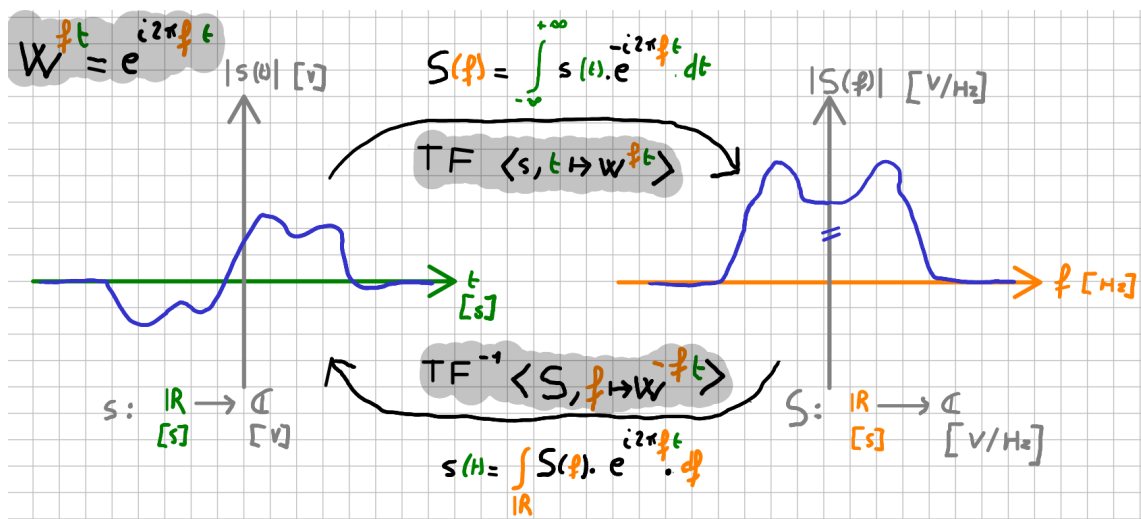
1.4.1 Base de la TF

La TF (Transformée de FOURIER), ou FT (*Fourier Transform*) en anglais, s'applique aux fonctions continues et utilise une base d'ondes complexes $B_F = \left(\underbrace{t \mapsto e^{i2\pi f t}}_{w_f} \right)_{f \in \mathbb{R}}$.

Exercice 1.2 Tentez de retrouver la formule de la transformée et son inverse et d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en se rappelant juste que c'est une application de

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{TF} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire continu noté \langle, \rangle avec la base continue $B_F = (w_f)_{f \in \mathbb{R}}$ ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens mais pas l'amalgame, car :

- le produit scalaire \langle, \rangle est défini dans le cas de fonctions de carré intégrable, ou *fonction à énergie finie*, que nous notons \mathcal{L}_2 ,
- les vecteurs de la base ne sont pas normés car de norme infinie ;
- la base n'est pas finie, ni infinie dénombrable mais infinie indénombrable.

Mais lorsque l'on se place dans le cas de fonctions de carré intégrable, ou fonction à énergie

finie, que nous notons \mathcal{L}_2 , l'espace est complet (les suites de Cauchy convergent) dont les sommes infinies se comporte bien dans \mathcal{L}_2 : c'est une espace de Banach. De plus le produit scalaire associé à la norme 2 existe et on a donc un espace de HILBERT où la norme et le produit scalaire sont des applications linéaires dans \mathcal{L}_2 . Comme il s'agit d'une espace de dimension infinie, il ne suffit pas d'avoir une base de dimension infinie pour couvrir tout l'espace, mais dans le cas de \mathcal{L}_2 avec la base B_F on montre que tout l'espace est engendré.

Bref ! Cela fonctionne tout comme un espace Euclidien sans en être un.

Exercice 1.3 Prendre la base $B_F = (w_f)_{f \in \mathbb{R}}$ et utiliser la partie espace indénombrable de la Tab. 1.2 pour retrouver les formules de PLANCHEREL et PARSEVAL. ■

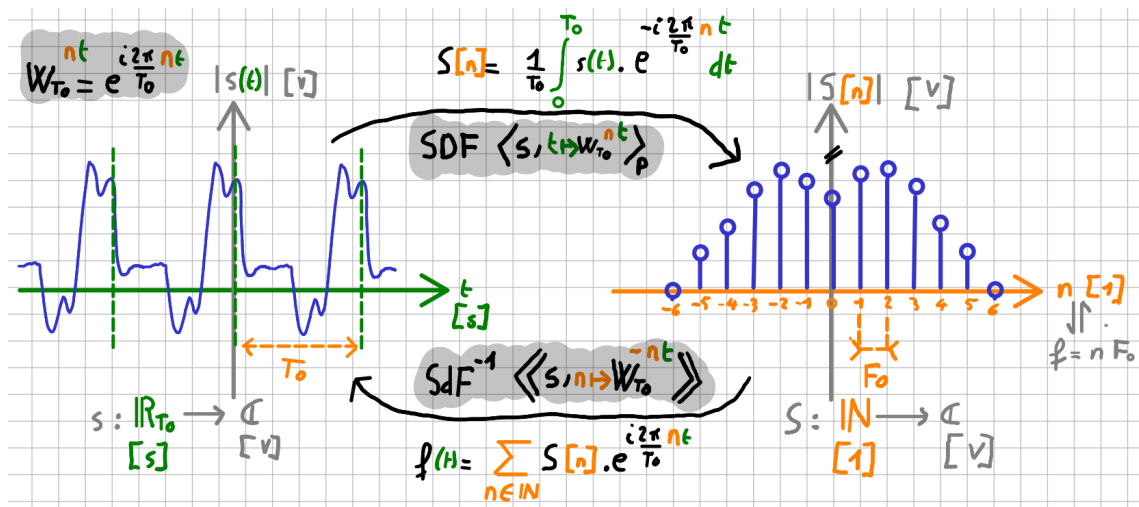
1.4.2 Base des SdF

Les SdF (Séries de FOURIER), ou FS (*Fourier Series*) s'appliquent aux fonctions continues périodiques et utilisent une base dénombrable $B_F = \left(t \mapsto W_{T_0}^{nt} = e^{i \frac{2\pi}{T_0} nt} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $W_{T_0} = e^{i \frac{2\pi}{T_0}}$.

Exercice 1.4 Tentez de retrouver la formule de la décomposition et recomposition en SdF et d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en se rappelant juste que c'est une application de

$$\mathbb{R}_{T_0} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\text{SdF}} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire continu périodique noté \langle, \rangle_p et avec la base discrète $B_F = (W_{T_0}^n)$. ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens mais pas l'amalgame, car :

- le produit scalaire \langle, \rangle_p est défini dans le cas de fonctions périodiques de carré intégrable, fonctions de puissance moyenne finie, que nous notons \mathcal{L}_{p2}
- ce n'est pas un isomorphisme car, on passe d'un espace continu périodique à un espace discret ! La transformée inverse se fait avec le produit scalaire discret \langle, \rangle
- la base n'est pas finie, mais infinie dénombrable ;

Bref ! elle fonctionne un peu comme un espace Euclidien fini sans en être un...

Exercice 1.5 Prendre la base

$$B_F = \left(\underbrace{t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} nt\right)}_{\cos_n} \right)_{n \geq 1} \cup \left(\underbrace{t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} nt\right)}_{\sin_n} \right)_{n \geq 1} \cup (t \mapsto 1)$$

et voir que l'on retrouve les formules des coefficients $a[n]$, $b[n]$ et a_0 **à un facteur 2 près !**

Et oui ! La base n'est pas normée car un rapide calcul montre que la norme des vecteurs vaut $\frac{1}{2}$ (on peut se rappeler que la valeur efficace d'un cosinus d'amplitude 1 est $\frac{\sqrt{2}}{2}$; sa puissance moyenne sur une période est donc le carré de $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

En prenant la base normée

$$B_F' = \left(\underbrace{\sqrt{2} \cos_n}_{\cos'_n} \right)_{n \geq 1} \cup \left(\underbrace{\sqrt{2} \sin_n}_{\sin'_n} \right)_{n \in \mathbb{Z}^*} \cup (t \mapsto 1)$$

on obtient une définition des SdF chère aux physiciennes :

$$s(t) = \begin{pmatrix} \underbrace{\langle s, t \mapsto 1 \rangle_P}_{a_0} 1 \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \cos'_n \rangle_P}_{a'[n]} \cos'_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \sin'_n \rangle_P}_{b'[n]} \sin'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \sqrt{2} \cos_n \rangle_P}_{\sqrt{2} a[n]} \sqrt{2} \cos_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\langle s, \sqrt{2} \sin_n \rangle_P}_{\sqrt{2} b[n]} \sqrt{2} \sin_n(t) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Avec $\|t \mapsto 1\|^2 = 1$, $\|\cos'_n\|^2 = \|\sqrt{2} \cos_n\|^2 = 1$ et $\|\sin'_n\|^2 = 1$

On peut ne pas normer les vecteurs, et c'est le plus fréquent, mais introduire un facteur 2 dans la formule de calcul des coefficients $a[n]$ et $b[n]$ qui n'apparaît pas dans les coefficients $c[n]$:

$$s(t) = \begin{pmatrix} \underbrace{2 \langle s, t \mapsto 1 \rangle_P}_{a_0} 1 \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2 \langle s, \cos_n \rangle_P}_{a[n]} \cos_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2 \langle s, \sin_n \rangle_P}_{b[n]} \sin_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_0}{2} \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2 \langle s, \cos_n \rangle_P}_{a[n]} \cos_n(t) \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{2 \langle s, \sin_n \rangle_P}_{b[n]} \sin_n(t) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Avec $\|t \mapsto 1\|^2 = 1$, $\|\cos_n\|^2 = \|\sin_n\|^2 = \frac{1}{2}$.

■

1.4.3 Base de la TFSD

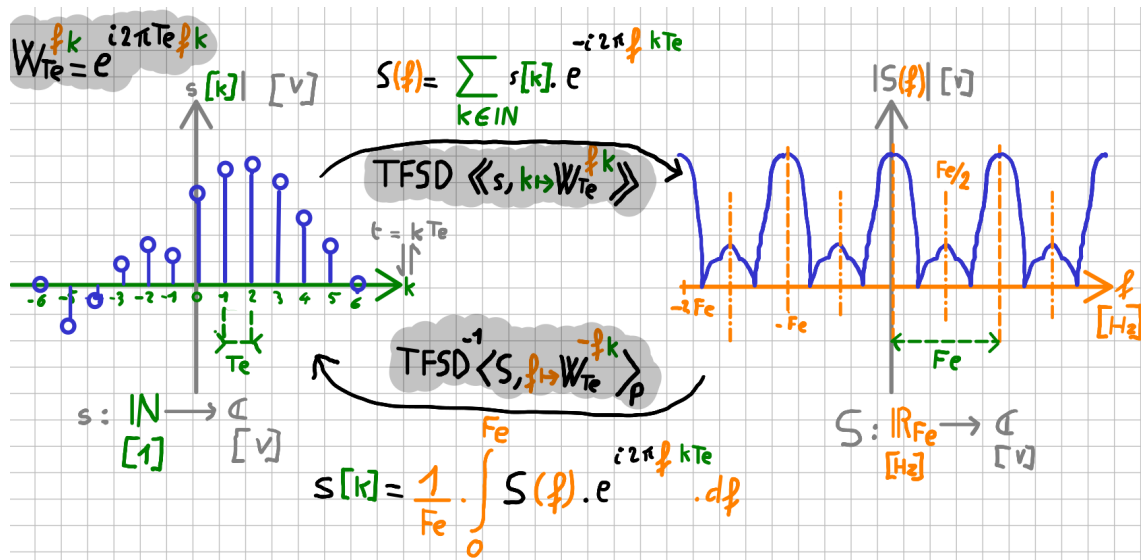
La TFSD (Transformée de FOURIER des Signaux Discrets), ou DTFT (*Discrete Time Fourier Transform* en anglais, s'applique aux fonctions à variable discrète et utilise une base d'ondes

complexes indénombrable $B_F = \left(\underbrace{k \mapsto W_{T_e}^{fk} = e^{i2\pi T_e f k}}_{w_{T_e}^f} \right)_{f \in [0, F_e[}$ avec $W_{T_e} = e^{i2\pi T_e}$.

Exercice 1.6 Tentez de trouver la formule de cette TFSD et son inverse, d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en pensant que c'est la « duale » de la SdF. Il s'agit d'une application de

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{TFSD} \mathbb{R}_{F_e} \rightarrow \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire discret noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ avec la base continue $B_F = (w_{T_e}^f)_{f \in [0, F_e[}$ ■



On peut difficilement faire l'analogie avec les espaces Euclidiens car :

- le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonctionne dans le cas de suites discrètes absolument convergentes ;
- ce n'est pas un isomorphisme car on passe d'un espace discret à un espace continu périodique !
La transformée inverse se fait avec le produit scalaire continu périodique $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ (Attention la période dans l'espace des fréquences est F_e) ;
- la base n'est pas finie, ni dénombrable mais infinie indénombrable.

Exercice 1.7 On admet pour le moment que la TFSD d'un signal $s[k]$ quelconque est une fonction $S(f)$ de période F_e . On peut donc voir $S(f)$ comme une fonction de période F_e de la variable réelle f et y appliquer une décomposition en séries de FOURIER !

Faites-le et comparez avec la TFSD inverse. Vous venez de basculer dans un dual ! D'ailleurs on peut voir $s[k]$ comme les coefficients de FOURIER d'une fonction de fréquence fondamentale T_e et appliquer une recombinaison de la série et trouver $S(f)$.

Donc TFSD=SdF⁻¹ et inversement SdF=TFSD⁻¹ ■

1.4.4 Base de la TFD et FFT

La TFD (Transformée de FOURIER Discrète), ou DFT (*Direct Fourier Transform*) en anglais, s'applique aux fonctions discrètes à support fini et utilisent une base d'ondes complexes discrète

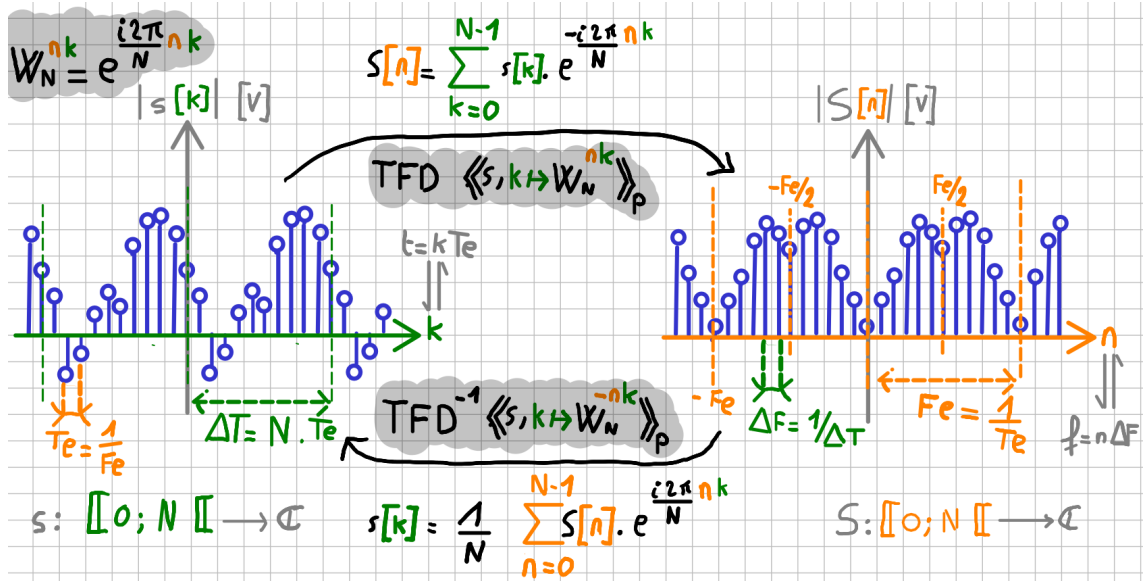
finie $B_F = \left(\underbrace{k \mapsto W_N^{nk} = e^{i\frac{2\pi}{N} nk}}_{\vec{w}_N^k} \right)_{n \in [0, N_0[}$ avec $W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$.

La FFT (Fast Fourier Transform en anglais uniquement) est un algorithme efficace de calcul de la TFD : c'est donc la même transformation avec les mêmes valeurs !

Exercice 1.8 Tentez de trouver la formule de cette TFD et son inverse, d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder. Il s'agit d'une application de

$$[[0, N_0]] \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{TFD} [[0, N_0]] \rightarrow \mathbb{C}$$

basée sur le p.s. discret périodique noté $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_P$ avec la base continue $B_F = \left(\overrightarrow{w_N^k} \right)_{k \in [[0, N_0]]}$ ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens finis et **on peut faire l'amalgame!** car c'en est un mais dans \mathbb{C} donc :

- le produit scalaire n'est pas symétrique mais « symétrique et demi » c.-à-d. *sesquilinéaire* car $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

R Base orthogonale non normée

Au produit scalaire $\langle f, g \rangle_P = \text{Le terme } W_N = e^{-i \frac{2\pi}{N}}$ est en fait une racine Nième de l'unité. Le calcul de la norme $\|w_n\|$ du vecteur de la base $w_n = k \mapsto W_N^{-nk}$ devient donc :

$$\langle w_n, w_n \rangle_P = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi}{N} nk} \cdot e^{-i \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

La formulation normée et symétrique de la TFD (1.5) fait donc intervenir un facteur $\frac{1}{\sqrt{N}}$ pour la TFD et son inverse :

$$s[k] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\langle s, w'_n \rangle_P}_{S[n]} w'_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle s, \frac{w_n}{\sqrt{N}} \rangle_P \frac{w_n}{\sqrt{N}} \quad \text{avec } \|w'_n\|^2 = \left\| \frac{w_n}{\sqrt{N}} \right\|^2 = 1 \quad (1.5)$$

Pour des raisons de simplicité et de contrainte de calcul numérique, la formulation non normée (1.6) est largement utilisée. Cela fait donc apparaître le terme $\frac{1}{N}$ dans la TFD inverse.

$$s[k] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\langle s, w_n \rangle_P}_{S[n]} \frac{w_n}{N} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle s, w_n \rangle_P \frac{w_n}{N} \quad \text{avec } \|w_n\|^2 = N \quad (1.6)$$

La transformée s'écrit aisément sous forme matricielle soit en considérant la transformée comme une application linéaire effectuant le changement de coordonnées entre les vecteur de la base canonique et la base fréquentielle, soit en faisant le changement de repère sous forme vectorielle :

$$\begin{aligned}
 \text{TFD} [\vec{s}] = \hat{S} = s_{B_F} &= \begin{pmatrix} \langle s, w_0 \rangle_P \\ \vdots \\ \langle s, w_{N-1} \rangle_P \end{pmatrix}_{B_F} \\
 &= \begin{pmatrix} T_{s, \overline{w_0}} \\ \vdots \\ T_{s, \overline{w_{N-1}}} \end{pmatrix}_{B_F} = \begin{pmatrix} T_{\overline{w_0} \cdot s} \\ \vdots \\ T_{\overline{w_{N-1}} \cdot s} \end{pmatrix}_{B_F} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{w_0[0]} & \dots & \overline{w_0[N-1]} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{w_{N-1}[0]} & \dots & \overline{w_{N-1}[N-1]} \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{F}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} s[0] \\ \vdots \\ s[N-1] \end{pmatrix}}_{s_{B_C}}_{B_C} \quad (1.7) \\
 S_{B_F} &= M_{\mathcal{F}} \cdot s_{B_C}
 \end{aligned}$$

On peut donc calculer la TFD d'un signal en multipliant le vecteur du signal temporel par une matrice $M_{\mathcal{F}}$ pour obtenir le vecteur des composantes fréquentielle : la TFD du signal.

Donc la matrice $M_{\mathcal{F}}$ représente un changement de base d'une base orthonormée canonique B_C vers la base orthogonale fréquentielle B_F , c'est donc la matrice de l'application identité Id du signal d'une base vers l'autre, ou plus simplement la matrice de passage $M_{\mathcal{F}} = P_{B_F \leftarrow B_C} = \text{mat}(\text{Id}, B_F, B_C)$

1.5 Dualité des transformées

On remarque que la TF et la TFD sont des endomorphismes (de E dans E) isomorphiques (il existe une réciproque), on parle d'automorphisme :

- la TF transforme une fonction complexe du primal en fonction complexe du dual et la transformée inverse du dual vers le primal existe ;
- la TFD transforme une suite périodique complexe du primal en suite périodique complexe du Dual et la transformée inverse du primal vers le dual existe.

Contrairement aux SdF et TFSD qui sont des isomorphismes (de E dans F et elles sont réciproques entre-elles) :

- la SdF transforme une fonction complexe périodique du primal en suite complexe du dual, sa réciproque est la TFD du dual ;
- la TFSD transforme une suite complexe du primal en fonction complexe périodique du Dual.

Sans rentrer dans la véritable définition d'un dual et de la dualité, nous pouvons garder cette notion de transformation d'un espace primal en son espace dual, et que si l'on retransforme le dual de la même manière alors on obtient à nouveau le primal. Le dual est comme une application qui est sa propre réciproque mais cela à l'échelle de la transformation d'ensemble qui est sa propre réciproque.

L'idée d'appliquer la TFSD à la SdF $n \mapsto \hat{S}[n]$ de la fonction primale $t \mapsto s(t)$, soit de faire le dual du dual, nous laisse espérer retomber sur la fonction primale s . Et cela marche car ces espaces sont duaux.

Exercice 1.9 Prenons le signal constant périodique $s : t \mapsto 1$, toutes ses projections $\langle s, t \mapsto e^{i2\pi t n F_0} \rangle_P$ sont nulles pour $n \neq 0$ sauf pour le vecteur $w_0 : t \mapsto 1$. Donc sa SdF est la suite complexes nulle partout sauf pour $n=0$ soit l'impulsion unité en 0 : $n \mapsto \delta_0[n]$.

Si l'on applique la TFSD à la SdF \hat{S} on obtient la fonction périodique constante et égale 1 soit la fonction de départ du primal s !

Essayez de faire cela pour un fonction périodique $s(t)$ quelconque : soit montrer que $TFSD[SdF[s]] = s$ et donc $TFSD \circ SdF = Id$ où Id est l'application identité des fonctions périodiques. Ou son dual : soit pour une suite complexe $s[k]$ montrer que $SdF \circ TFSD = Id$ où Id est l'application identité des suite complexes.

La SdF permet de créer l'espace dual des fonctions périodiques, en utilisant le produit scalaire avec les signaux de la base de FOURIER, qui est alors un espace des suites complexes. La TFSD permet de créer le dual des suites complexes, en utilisant le produit scalaire avec la base de FOURIER, qui est un espace des fonctions périodiques.

L'idée d'appliquer la TF à la transformée \hat{S} d'une fonction s primale, soit de faire le dual du dual, nous laisse espérer retomber sur la même fonction du primal s : cela est vrai au signe près !

Exercice 1.10 Prenons un signal pair de transformée connue (comme la fonction porte et son sinus cardinal) et calculez la transformée de la transformée (aussi connue à tout les coup). Vous vérifierez que **pour les fonction paires réelles** $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = Id$ des fonctions réelles paires.

On pourrait faire de même avec des fonctions imaginaires impaires et montrer que le dual du dual est le primal.

Dans le cas général ce n'est pas vrai, nous allons voir que le signal est retourné dans le temps.

Si on calcule la transformée de $Sy[s] : t \mapsto s(-t)$, où Sy est l'opérateur qui retourne une fonction dans le temps (défini ci-après dans def. 1.5.1), on obtient par changement de variable $x = -t$ la transformée inverse :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[Sy[s]](f) &= \mathcal{F}[t \mapsto s(-t)](f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(-t) e^{-i2\pi f t} dt \\ &\stackrel{x=-t}{=} \int_{\infty}^{-\infty} s(x) e^{i2\pi f x} dx = \mathcal{F}^{-1}[s](f) \\ \mathcal{F} \circ Sy &= \mathcal{F}^{-1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Definition 1.5.1 Opérateur symétrie ou « retournement »

L'opérateur symétrie noté Sy transforme une fonction discrète de L_e (resp. fonction continue de L_c) en fonction discrète de L_e (resp. fonction continue de L_c) retournée par changement du signe de sa variable, soit :

$$\begin{aligned} Sy : L_e &\longrightarrow L_e \\ k \mapsto s[k] &\longmapsto k \mapsto s[-k] \\ Sy : L_c &\longrightarrow L_c \\ t \mapsto s(t) &\longmapsto t \mapsto s(-t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

En appliquant successivement cette relation au signal s ; à son symétrique $Sy \circ s$; à la transformée \hat{S} et à son symétrique $Sy \circ \hat{S}$, on trouve le graphique Fig. 1.4.

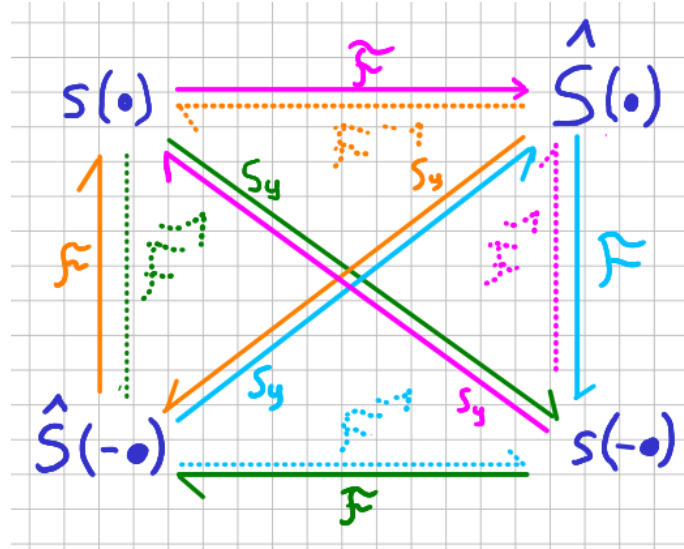


FIGURE 1.4 – Dualité de la transformation symétrie temporelle Sy car le symétrique du symétrique est lui même et bi-dualité de la transformée de FOURIER car transformer deux fois un signal c'est le retourner donc $\mathcal{F}^2 = \text{Id}$ est duale et \mathcal{F} est dite biduale.

Exercice 1.11 Si on applique (1.8) au primal (flèches vertes), puis au dual (flèches oranges) et à leurs symétriques on obtient les 4 relations :

- $\mathcal{F} \circ Sy[s] = \mathcal{F}^{-1}[s] = ?$
- $\mathcal{F} \circ Sy[\hat{S}] = \mathcal{F}^{-1}[\hat{S}] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[s]] = ?$
- $\mathcal{F} \circ Sy[t \mapsto s(-t)] = \mathcal{F}^{-1}[t \mapsto s(-t)] = ?$
- $\mathcal{F} \circ Sy[f \mapsto \hat{S}(-f)] = \mathcal{F}^{-1}[f \mapsto \hat{S}(-f)] = ?$

Associez ces 4 relations aux quatre couleurs de flèches (vert, orange, cyan, rose) du diagramme et remplacez les « ? »

Prenez en primal le signal porte $s(t) = \Pi_T(t) = u(t + \frac{T}{2}) - u(t - \frac{T}{2})$ (signal nul partout sauf sur un intervalle de largeur T autour de 0) dont on connaît la transformée sous forme de sinus cardinal $\hat{S}(f) = T \text{sinc}(\pi f T)$ (utiliser la transformée de LAPLACE, le théorème du retard et la passage à la transformée avec $p = i2\pi f$ pour retrouver cette formule ou par calcul direct). Appliquez ces formules pour trouver la transformée d'un sinus cardinal (fonction paire !) ■

On obtient ainsi des relations intéressantes du point de vue des opérateurs \mathcal{F} et Sy , notamment sur le fait qu'ils commutent bien :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^2 \circ \mathcal{F}^2 &= Sy \circ Sy = \text{Id} = Sy^2 = \mathcal{F}^4 \\ \mathcal{F}^{-1} &= \underbrace{\mathcal{F} \circ Sy}_{\text{vert}} = \underbrace{Sy \circ \mathcal{F}}_{\hat{S}(-\bullet) \text{ ou orange}} \\ \mathcal{F} &= \underbrace{\mathcal{F}^{-1} \circ Sy}_{\text{rose}} = \underbrace{Sy \circ \mathcal{F}^{-1}}_{\hat{S}(\bullet) \text{ ou orange}} \end{aligned}$$

R De même pour la TFD

On obtient le même type de diagramme avec la TFD mais avec un retournement temporel discret périodique $Sy : k \mapsto s[-k] = s[N - k]$ ce qui permet de conserver la relation $\text{TFD} \circ Sy = \text{TFD}^{-1}$ mais avec une base normalisée ! Il faut donc faire attention et préférer la TFD normalisée en la divisant par \sqrt{N} .

Il suffit de partir de la TFD de $s[-k]$ et retrouver la formule de la TFD inverse. On a de plus pour les signaux discrets une représentation matricielle. Ce qui donne pour le retournement

temporel d'un signal à 4 points :

$$\text{Sy}[s_4] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_{\text{Sy}}} \cdot s_4 \quad (1.10)$$

avec $M_{\text{Sy}}^{-1} = M_{\text{Sy}}$ car $\text{Sy} = \text{Sy}^{-1}$

Et pour la TFD normalisée à 4 points :

$$\text{TFD}[s_4] = \hat{S}_4 = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{F}}} \cdot s_4 \quad (1.11)$$

avec $M_{\mathcal{F}}^{-1} = {}^T M_{\mathcal{F}}$ la matrice transposée. Car lors d'un changement entre base orthonormées, la matrice de passage est symétrique et orthogonale : la transposée est aussi l'inverse.

L'équation (1.8) devient alors $\text{TFD} \circ \text{Sy} = \text{TFD}^{-1}$ ce qui donne en matriciel $M_{\mathcal{F}} M_{\text{Sy}} = M_{\mathcal{F}}^{-1} = {}^T M_{\mathcal{F}}$

1.5.1 Filtrage et fenêtrage : opérations duales

1.5.2 Interpolation et gavage de zéro : opérations duales

1.5.3 Sur-échantillonnage et multiplication de période : opérations duales

1.5.4 Décimation et division de période : opérations duales

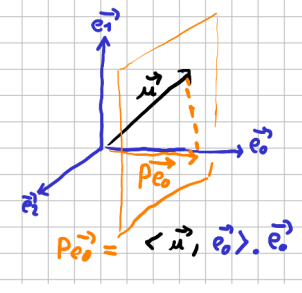
	Euclidien fini	Espace de fonctions
Base Ortho–normée	<p>une base finie de vecteurs</p> $B = (\vec{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}_{N_0}}$ <p>normés $\ \vec{e}_n\ = 1$ et orthogonaux $\langle \vec{e}_n, \vec{e}_m \rangle = 0$</p>	<p>base dénombrable de fonctions $(\vec{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou indénombrable $(\vec{w}_f)_{f \in \mathbb{R}}$ repérées par leur fréquences f ou un indice n associé ; fonctions d'énergie unitaire $\ \vec{w}_n\ = 1$ ou $\ \vec{w}_f\ = 1$, et orthogonales $\langle \vec{w}_n, \vec{w}_m \rangle_P = 0$ ou $\langle \vec{w}_f, \vec{w}_{f'} \rangle = 0$</p>
Analyse	<p>décomposer un vecteur dans cette base en coefficients $V_n = \langle \vec{v}, \vec{e}_n \rangle$ et en donner les coordonnées</p> $\underbrace{V _B}_{\Rightarrow \vec{v}} = \begin{pmatrix} V_0 = \langle \vec{v}, \vec{e}_0 \rangle \\ \vdots \\ V_{N-1} = \langle \vec{v}, \vec{e}_{N-1} \rangle \end{pmatrix}_B$	<p>décomposer une fonction \vec{u} en fréquentiel avec la transformée $U(f)$ ou avec les coefficients $U(n)$ de la série :</p> $U(f) = \langle \vec{u}, \vec{w}_f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \overline{w_f(t)} dt$ $U(n) = \langle \vec{u}, \vec{w}_n \rangle_P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \overline{w_n(t)} dt$
Synthèse	<p>recomposer un vecteur dans cette base $\vec{v} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{N_0}} \underbrace{U_0}_{\langle \vec{v}, \vec{e}_0 \rangle} \cdot \vec{e}_0$</p> 	<p>recomposer une fonction par transformation inverse de $U(f)$ ou recombinaison de série $U(n)$:</p> $\vec{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{U(f)}_{\langle \vec{u}, \vec{w}_f \rangle} \cdot \vec{w}_f(t) dt$ $\vec{u}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{U(n)}_{\langle \vec{u}, \vec{w}_n \rangle_P} \cdot \vec{w}_n(t)$
Projeter avec Plancherel	<p>calculer le produit scalaire de vecteurs par leurs composantes :</p> $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle U_B, V_B \rangle = {}^T U _B \cdot V _B$ $\left(\underbrace{U_0 \quad \dots \quad U_{N-1}}_{{}^T U _B} \right) \cdot \begin{pmatrix} V_0 \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{pmatrix}$	<p>on peut calculer un produit scalaire (utile aux corrélations et convolutions) à partir de sa transformée ou composantes de la série :</p> $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \overline{v(t)} dt = \langle U, V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) \overline{V(f)} df$ $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \overline{v(t)} dt = \langle\langle U, V \rangle\rangle_P = \sum_{k=0}^{N_0-1} U(k) \overline{V(k)}$
Normer avec Parseval	<p>Calculer la norme en sommant les carrés des coordonnées :</p> $\ \vec{u}\ ^2 = \ U_B\ ^2 = \sum U_n^2$	<p>calculer la puissance moyenne par la transformée $u(f)$ ou en sommant celle des composantes fréquentielles $U(n)$:</p> $\ \vec{u}\ ^2 = \ U\ ^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) ^2 df$ $\ \vec{u}\ ^2 = \ U\ _P^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) ^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{N}} U(k) ^2$

TABLE 1.2 – Structure Euclidienne à structure de Hilbert

2. Systèmes discrets

L'analogie avec les systèmes continus est forte, nous étudions de-même le cas des systèmes discrets linéaires invariants dans le temps avec une vision par opérateurs.

2.1 Systèmes linéaires

Definition 2.1.1 Système SISO (Single Input Single Output)

Un système discret SISO (resp. continu SISO) relie à un signal d'entrée x un signal de sortie unique y . Les signaux x et y sont des fonctions de la variables réelle discrète k (resp. t) appartenant à un espace de fonction le plus général possible noté ici L_E .

La relation entrée-sortie est donc modélisée par une application mathématique de L_E dans L_E notée L (resp. L_c en continu) et définie ainsi :

$$L : \begin{array}{ccc} L_E & \longrightarrow & L_E \\ x : k \mapsto x[k] & \longmapsto & y : k \mapsto y[k] \end{array} \quad (2.1)$$

$$L_c : \begin{array}{ccc} L_E & \longrightarrow & L_E \\ x : t \mapsto x(t) & \longmapsto & y : t \mapsto y(t) \end{array} \quad (2.2)$$

Une classe de système fondamentale est la classe des systèmes linéaires car elle offre de nombreux outils et propriétés mathématiques.

Definition 2.1.2 Système linéaire

Une système est dit linéaire si, et seulement si, l'application L associée est linéaire, soit pour tout $(x_1, x_2, \lambda) \in L_E^2 \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad L[x_1 + \lambda x_2](t) &= L[x_1](t) + \lambda L[x_2](t) \\ \iff L[x_1 + \lambda x_2] &= L[x_1] + \lambda L[x_2] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Une des conséquences de la linéarité est la possibilité d'appliquer le principe de superposition cher à l'électronicienne : « la réponse du système à une combinaison linéaire d'entrées est la combinaison des réponses de chaque entrée. »

Définition 2.1.3 Systèmes continus élémentaires

Les trois systèmes linéaires élémentaires que nous considérons dans l'étude des systèmes linéaires continus sont :

le gain $a.x : t \mapsto ax(t)$ où a est une constante scalaire réelle ou complexe

le dérivateur $D[x] = D \circ x : t \mapsto \frac{dx}{dt}(t)$

l'intégrateur $I[x] = I \circ x : t \mapsto \int_0^t x(v) dv$

On peut aisément vérifier que ces systèmes respectent la condition de linéarité 2.3.

R De manière implicite, on choisit un espace de fonction L_c qui est stable par toute combinaison de compositions de ces opérateurs (même une infinité de composition de D par exemple) soit un espace complet de fonctions.

On aimerait que les opérateurs dérivateur D et intégrale I commutent et soient réciproque sur $L_c : D \circ I = I \circ D = \text{Id}$. De manière à obtenir une composition de ces opérateurs qui ait la même propriété qu'un produit algébrique inversible.

Pour que cela soit vrai même avec les fonctions discontinues, il faut introduire les distributions de DIRAC voir Chap. 3.2.

Définition 2.1.4 Systèmes élémentaires discrets

Dans le cas des systèmes discret, les systèmes élémentaires sont :

le gain $a.x : k \mapsto ax[k]$ où a est une constante scalaire réelle ou complexe

le retard unité $T[x] = T \circ x : k \mapsto x[k-1]$.

l'avance unité $A[x] = A \circ x : k \mapsto x[k+1]$

On peut aisément vérifier que ces systèmes respectent la condition de linéarité 2.3.

R La commutation et réciprocity des opérateurs retard T et avance A est évidente et ne pose pas de problème théorique, contrairement au cas continu : $T \circ A = A \circ T = \text{Id}$.

La composition \circ de ces opérateurs avec l'opérateur somme de systèmes $+$ a donc une structure d'anneau commutatif : \circ et $+$ des systèmes se comporte comme \times et $+$ des nombres réels.

L'espace des signaux L_e (ou des suites complexes) est stable et complet par l'application des opérateurs élémentaires.

L'opérateur dérivée n'as pas de sens en discret car la limite $s'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h)-s(x)}{h}$ n'aurait pas de sens pour h entier. On peut s'approcher de cet opérateur avec des combinaisons plus ou moins complexes et précises des opérateurs avance et retard élémentaires.

■ **Exemple 2.1** L'effet du système *différentiateur* sur le signal d'entrée est d'écrit par l'opérateur :

$$L : x \mapsto y = \frac{x - T[x]}{T_e}$$

Vérifions d'abord que cet opérateur est linéaire :

$$\begin{aligned} L[x_1 + \lambda x_2][k] &= L[x_1 + \lambda x_2][k] \\ &= \frac{x_1[k] + \lambda x_2[k] - T[x_1 + \lambda x_2][k]}{T_e} \\ &= \frac{x_1[k] + \lambda x_2[k] - (x_1[k-1] + \lambda x_2[k-1])}{T_e} = A \\ L[x_1][k] + \lambda L[x_2][k] &= \frac{x_1[k] - x_1[k-1]}{T_e} + \lambda \frac{x_2[k] - x_2[k-1]}{T_e} = A \end{aligned}$$

Le système est donc linéaire. ■

2.2 Systèmes invariants

Il est fréquent, et surtout théoriquement utile, qu'un système réagisse de la même manière indépendamment de l'instant où est appliqué le signal d'entrée. Ce qui conduit à la définition suivante :

Définition 2.2.1 *Système invariant dans le temps* Un système discret (resp. continu) est dit invariant dans le temps si et seulement si son application associée L (resp. L_c) vérifie :

$$\forall x \in L_E, \forall (k, k_0) \in \mathbb{N}^2, \quad L[k \mapsto x(k - k_0)] = L[x](k - k_0) \quad (2.4)$$

$$\forall x \in L_E, \forall (t, t_0) \in \mathbb{R}^2, \quad L_c[t \mapsto x(t - t_0)] = L[x](t - t_0) \quad (2.5)$$

En terme d'opérateur ; un système L est invariant dans le temps si, et seulement si, son opérateur commute avec tout opérateur retard de k_0 noté $T_{k_0} = T_{k_0}[x] = k \mapsto x[k - k_0]$:

$$L \circ T_{k_0} = T_{k_0} \circ L \iff L[T_{k_0}[x]] = T_{k_0}[L[x]] \quad (2.6)$$

$$L_c \circ T_\tau = T_\tau \circ L_c \iff L_c[T_\tau[x]] = T_\tau[L_c[x]] \quad (2.7)$$

Autrement dit « la réponse du système à un signal retardé est le retard de la réponse du système. » ; ou encore « la réponse du système ne dépend pas de l'origine des temps choisie. »

R Il est facile de vérifier que les systèmes discrets élémentaires que sont le gain ; le retard unitaire et l'avance unitaire (gain, dérivateur et intégrateur pour le continu) sont invariants. Il en est de même pour tout système constitué de combinaisons linéaires et de composition de systèmes élémentaires.

Il suffit alors de montrer que le système se décompose avec des *coefficients constants* avec des systèmes élémentaires en le mettant sous forme d'*équation aux différences* ou *réurrence* à coefficients constants (*equations différentielle* en continu) ou en un schéma bloc à coefficients constant.

2.3 Réponse d'un système LTI

Rappelons qu'un système peut aussi bien représenter un correcteur dans une boucle d'asservissement, qu'un filtre utilisé en boucle ouverte, ou bien un modèle de système à commander ou observer : calculer la réponse d'un système à un signal c'est aussi « faire du filtrage. »

Nous allons d'abord montrer que l'opération de filtrage consiste en temporel à effectuer une convolution du signal d'entrée x avec la réponse impulsionnelle h du système H ainsi défini.

En un second temps nous utiliserons la réponse impulsionnelle pour caractériser la propriété de stabilité du système.

Nous terminerons en montrant que l'opération duale du filtrage temporel est un *fenêtrage fréquentiel* ou multiplication par la transformée de la réponse impulsionnelle $Z(h) = \hat{H}$.

2.3.1 Réponse impulsionnelle

Dans le cas discret, l'obtention de la réponse d'un système est facile à obtenir en utilisant les propriétés LTI du système H et en décomposant le signal d'entrée x dans la base temporelle canonique.

Contrairement au cas continu, un signal d'entrée quelconque x se décompose facilement en impulsions unité (voir la base temporelle de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans §1.2.1). La Fig. 2.1 reprend la décomposition en impulsions d'un signal d'entrée $s = k \mapsto \sum_{j \in \mathbb{Z}} s[j] \cdot d_j[k]$ et applique un système H de réponse impulsionnelle h à chaque impulsion pour obtenir la réponse y du système.

On retrouve ainsi la formule de convolution temporelle de $y = s * h$. Le résultat est démontré dans l'équation (2.8) en utilisant les propriétés de linéarité et invariance du système.

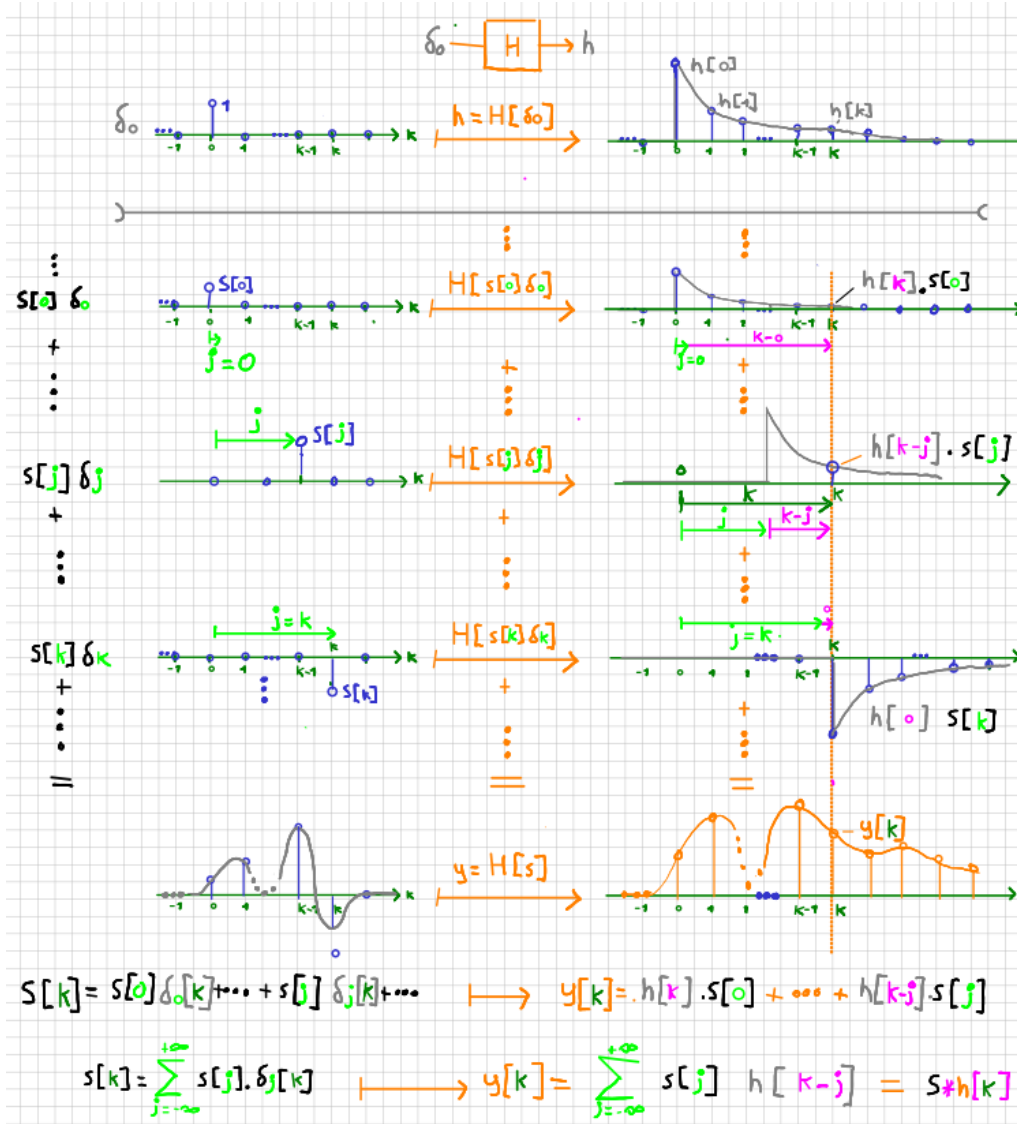


FIGURE 2.1 – La réponse d'un système linéaire invariant y est la somme des réponses impulsionnelles des impulsions qui composent le signal d'entrée s .

$$\begin{aligned}
 \underbrace{x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \delta_j}_{\text{signal}} &\implies y = H[x] = H \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \delta_j \right] \\
 &\stackrel{\text{linéarité de } H}{\implies} y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} H \left[\underbrace{x[j]}_{\text{constante!}} \delta_j \right] \stackrel{\text{linéarité de } H}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \underbrace{H[\delta_j]}_{H \circ T^j[\delta_0]} \\
 &\implies y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \cdot H \circ T^j[\delta_0] \stackrel{\text{invariance de } H}{=} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \cdot \underbrace{T^j \circ H[\delta_0]}_h \\
 &\implies y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \cdot \underbrace{T^j[h]}_{k \mapsto h[k-j]} = x * h \\
 &\implies \forall k \in \mathbb{Z}, \quad y[k] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] h[k-j] = x * h[k] \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

où l'opérateur $*$ est la convolution discrète définie ci-après.

Définition 2.3.1 Convolution discrète

La convolution de signaux discrets u et v notée $u*v$ est le signal discret défini par :

$$\begin{aligned} u*v & : k \mapsto u*v[k] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u[j] \cdot v[k-j] & = \sum_{j \leftrightarrow j+k}^{\infty} u[j+k] \cdot v[-j] \\ u*v & = \langle u, \underbrace{T^k \cdot \text{Sy}[v]}_{j \mapsto v[k-j]} \rangle & = \langle T^{-k}[u], \text{Sy}[v] \rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

où T^k est le retard de k échantillons et $T^{-k} = A^k$ son opérateur réciproque (inverse algébrique) : l'avance de k échantillons.



Attention à l'ordre des opérations : la symétrie et le retard ne commutent pas !

Même si nous avons vu dans §1.5 que les opérateurs Sy et \mathcal{F} commutent : $\mathcal{F} \circ \text{Sy} = \text{Sy} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}$, il n'en est pas de même pour les opérateurs Sy et T !

Prendre un signal s de la variable discrète j , l'avancer de k échantillons avec $A^k = T^{-k}$ puis le retourner avec Sy donne

$$\underbrace{\text{Sy} \circ T^{-k}}_{\text{Symétrie de avance } A^k} [s] = \text{Sy} \left[\underbrace{T^{-k}[s]}_{j \mapsto s[j+k]} \right] : j \mapsto s \left[\underbrace{(-j) + k}_{\text{symétrie}} \right] = s[k-j]$$

Alors que prendre un signal, le retourner avec Sy puis l'avancer avec T^{-k} donne

$$\underbrace{T^{-k} \circ \text{Sy}}_{\text{Avance } A^k \text{ de symétrie}} [s] = T^{-k} \left[\underbrace{\text{Sy}[s]}_{j \mapsto s[-j]} \right] : j \mapsto s \left[\underbrace{-(j+k)}_{\text{avance}} \right] = s[-j-k]$$

On remarque donc que $T^{-k} \circ \text{Sy} \neq \text{Sy} \circ T^{-k}$. En revanche prendre un signal, le retourner avec Sy puis le *retarder* avec T^k donne

$$\underbrace{T^k \circ \text{Sy}}_{\text{Retard de symétrie}} [s] = T^k \left[\underbrace{\text{Sy}[s]}_{j \mapsto s[-j]} \right] : j \mapsto s[-(j-k)] = s[k-j]$$

Donc la commutation donne $\text{Sy} \circ T^{-k} = T^k \circ \text{Sy}$, autrement dit soit :

« La symétrie de l'avance d'un signal est le retard de son symétrique ».

L'analogie avec la convolution de signaux continus u et v notée $u*v$ fonctionne aussi en utilisant le produit scalaire continu $\langle u, T^k \cdot \text{Sy}[v] \rangle$ au lieu du produit scalaire discret.

Définition 2.3.2 Convolution continue

$$\begin{aligned} u*v & : t \mapsto u*v(t) = \int_{x=-\infty}^{\infty} u(x) \cdot v(t-x) dx & = \int_{t=-\infty}^{\infty} u(x+t) \cdot v(-x) dx \\ u*v & = \langle u, T^k \text{Sy}[v] \rangle & = \langle T^{-k}[u], \text{Sy}[v] \rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.4 Stabilité d'un système LTI

La réponse impulsionnelle (notée RIP) caractérise entièrement un système LTI, puisque l'opération de convolution permet d'obtenir la sortie d'un système pour n'importe quelle entrée.

Nous allons caractériser deux types de stabilité des systèmes LTI à partir de leur RIP :

Stabilité BIBO (*Borned Input Borned Output*, il n'y pas de sigle Français d'usage courant) associée à la propriété de donner des réponses bornées pour toutes entrées bornées ;

Stabilité simple chère aux automaticiens qui exprime le fait qu'un système relâché (dont l'entrée reste nulle à partir d'un instant) retourne vers son état d'équilibre qui, dans le cas de systèmes linéaires, correspond à l'état nul et à une sortie nulle.

En pratique, la stabilité BIBO garantit qu'un système numérique puisse toujours calculer une valeur finie et donc codable à partir d'un signal réel forcément borné.



Notations

On rappelle qu'un signal s est borné ssi :

$$\exists A \in \mathbb{R} \mid \forall k \in \mathbb{Z}, \quad |s[k]| \leq A$$

On note de manière concise $|x| \leq A$, cette proposition.

Un signal non borné est, par négation de la proposition, tel que :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z} \mid |s[k]| > A$$

Cela revient à dire que la suite $(s[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ diverge vers l'infini (ne pas confondre avec simplement divergente qui est la négation de convergente ; par exemple $k \mapsto \sin[k]$ est divergente mais pas divergente vers l'infini).

On notera de manière concise $s \rightarrow \infty$ le fait que s soit non-borné.

Définition 2.4.1 Un système H est **stable en entrée bornée / sortie bornée** ou **stable BIBO** ssi pour toute entrée x bornée la réponse $y = H[x]$ du système est bornée :

$$\forall x, \quad |x| \leq A \implies |y| \leq B$$

Théorème 2.4.1 Un système H est stable BIBO si, et seulement si, sa réponse impulsionnelle $k \mapsto h[k]$ est de module sommable, i. e., la série $\{h[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est absolument convergente :

$$H \text{ stable BIBO} \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| \in \mathbb{R}$$

La démonstration est intéressante et simple :

Démonstration 1 — Stabilité BIBO

Nous démontrons l'équivalence pour tout système H de réponse impulsionnelle h :

$$\sum |h| \in \mathbb{R} \iff \text{stable BIBO} \stackrel{\Delta}{\iff} (\forall x, |x| < A \implies |y| < B)$$

par double implication.

$\implies :$

Supposons que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h[k]| = C \in \mathbb{R}^+$ et que $|x| \leq A$; et montrons que $|y| \leq B$.

Si l'on écrit la réponse y du système à ce x borné en utilisant la convolution (3.4) et que l'on majore les termes par leurs valeurs absolues :

$$\begin{aligned}
y &= x * h : k \mapsto \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[j] \cdot x[k-j] \\
\forall k \in \mathbb{Z}, \quad y[k] &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h[j] \cdot x[k-j]| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h[j]| \cdot |x[k-j]| \\
\implies y[k] &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h[j]| \cdot A \quad \text{car } x \text{ est bornée par } A \\
\implies y[k] &\leq A \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h[j]| = A \cdot C \in \mathbb{R}^+ \quad \text{car } h \text{ est absolument sommable} \\
\implies \exists B = A \cdot C \in \mathbb{R}^+ \mid \forall k \in \mathbb{Z}, |y[k]| \leq B &\implies |y| \leq B
\end{aligned}$$

$\Leftarrow :$

La réciproque est plus astucieuse et s'exprime par :

$$\forall h, \quad \underbrace{(\forall x, |x| \leq A \implies |x * h| \leq B)}_P \implies \underbrace{\sum |h| \in \mathbb{R}}_Q$$

Par disjonction de cas, soit :

Q : la réciproque est alors triviale car rappelons que $(P \implies Q) \iff \bar{P} \text{ ou } Q$: et dans ce cas Q est vraie par supposition.

Non Q : Dans ce cas $\sum |h| \text{ DV}$ et il faut montrer \bar{P} . Pour cela montrons que pour $\sum |h| \text{ DV}$ on a :

$$\exists x \mid |x| \leq A \text{ et } |x * h| \rightarrow \infty$$

Pour cela nous construisons un signal x tel que, de manière arbitraire, $y[0] = x * h[0] = \sum |h|$ et donc diverge (par hypothèse sur h).

En prenant la formule de convolution pour $k = 0$, nous cherchons x tel que :

$$x * h[0] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x[j] \cdot h[0-j] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h[j]| = +\infty$$

On montre donc que ce signal existe en prenant $x[j] = \text{sign}(h[-j]) = \frac{h[-j]}{|h[-j]|}$. La fonction signe peut être prise ici telle $\text{sign}(0) = 0$. Ce qui permet de conclure la réciproque avec :

$$\exists x = \text{sign}(h[-\bullet]) \mid x * h = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \underbrace{\text{sign}(h[-j])}_{x[j]} \cdot h[0-j] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h[-j]| = +\infty$$

L'implication et sa réciproque sont donc vraies : CDFQ.



2.5 Calcul opérationnel

2.5.1 Dualité entre signal et système

2.5.2 Systèmes élémentaires : fonction de transfert en Z

2.5.3 Système non-bouclé – moyenne glissante – régressif – FIR

2.5.4 Système bouclé – récurrence – autorégressif – IIR

2.6 Transformée en Z

2.6.1 Fonction de transfert et récurrence

2.6.2 Signaux/systèmes usuels

2.6.3 Décomposition élémentaire et stabilité

2.6.4 Domaine de convergence et causalité

2.7 Réponse fréquentielle

2.7.1 Lien avec les transformées de Fourier

2.7.2 Dualité entre système et filtre

3. La distribution de Dirac

L'impulsion de DIRAC est incontournable en traitement du signal et système; nous allons progressivement lever le voile !

3.1 La notion de densité

Retournons sur 3 notions de densité avec phénomène de localisation intense :

la densité de masse – est une notion physique que l'on peut comprendre aisément avec l'exemple d'une mousse au chocolat dont la *densité de masse* est plus ou moins aérée *selon une position réelle* sur un axe de découpe du gâteau. On considère la pépite pure de chocolat de 1g *concentrée à un endroit* infinitésimalement bon du gâteau.

la densité de probabilité – on considère la *densité de probabilité* d'un nombre tiré au hasard entre 1 et 10 *selon la valeur réelle* de ce nombre. Le tirage d'un dé à 6 faces sera la *concentration infinie autour de valeurs précises* de la densité de probabilité.

la densité d'amplitude (ou de puissance) – dans le cas d'une transformation de FOURIER, on considère la *densité d'amplitude* des composantes d'un signal *selon une fréquence réelle*. La décomposition en série de FOURIER sera la *concentration infinie autour de fréquences harmoniques* de cette densité d'amplitude.

Dans les années 20, DIRAC a eu besoin de représenter la concentration de densité de probabilité de particules élémentaires autour de valeurs précises et discrètes pour développer la mécanique quantique.

Une densité f n'a de sens, ou est utile, uniquement en l'intégrant pour avoir une « mesure » de la masse, ou de la probabilité ou de l'amplitude sur un segment de valeurs $[a, b]$:

$$M_{[a,b]} = \int_a^b f(x) \, dx \quad (3.1)$$

On voit que dans le cas discret, il faut dériver une fonction cumulative « en escalier » et donc dériver des discontinuités pour obtenir une densité continue d'une variable discrète. Or la dérivée d'une discontinuité est mal définie ! Nous allons le voir dans la section suivante.

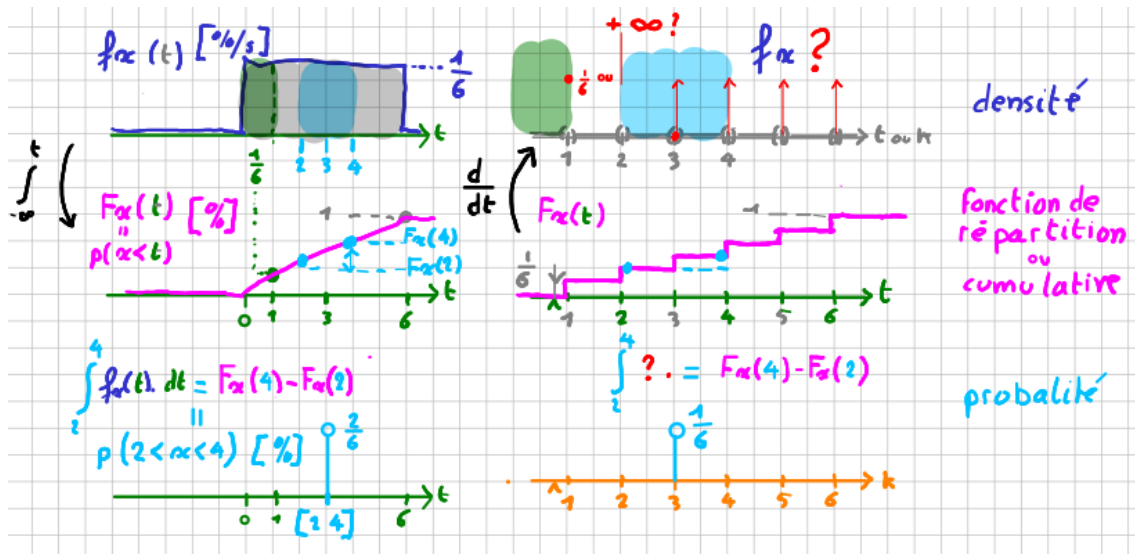


FIGURE 3.1 – A gauche une variable aléatoire continue $[0, 6]$. A droite une variable aléatoire discrète $[[1, 6]]$. En bas une mesure de probabilité de tirer une valeur autour de 3 dans $]2, 4[$; au milieu la fonction cumulative F_X ou probabilité d'avoir une valeur inférieure à t , en haut une tentative de densité de probabilité.

QUIZZ

En regardant la Fig. 3.1 répondez à ces questions :

Q1 - la probabilité d'avoir un tirage unique à exactement 3 est de

1. 0 pour $t=3$ en continu et $1/6$ pour $k=3$ en discret
2. $1/6$ pour $t=3$ en continu et $1/6$ pour $k=3$ en discret
3. $1/6$ pour $t=3$ en continu et ∞ pour $k=3$ en discret
4. c'est pas 3 que je veux mais 20/20 !

Q2 - la probabilité d'avoir un tirage unique < 3 est de

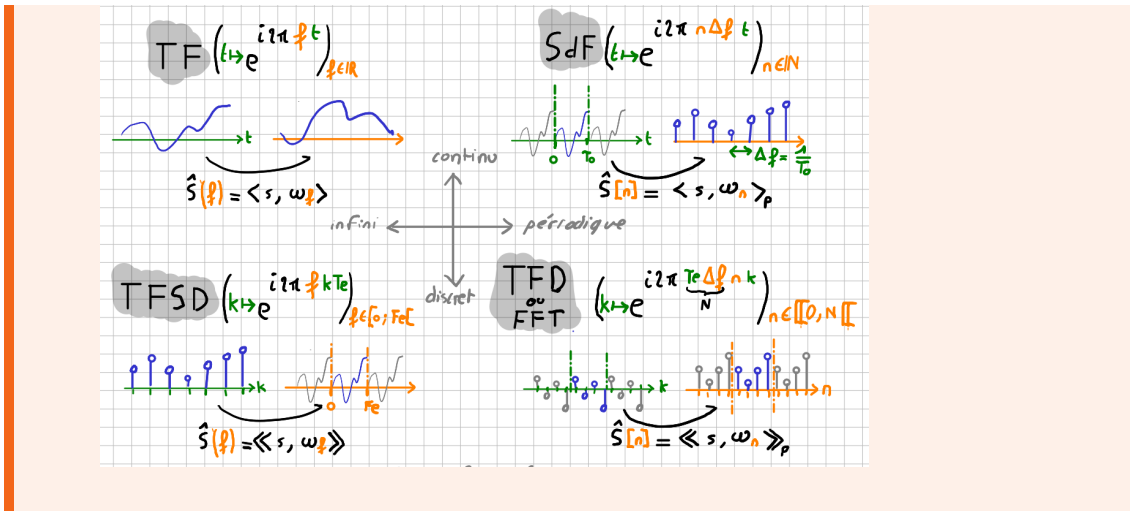
1. $1/2$ pour $t=3$ en continu et $1/2$ pour $k=3$ en discret
2. $1/2$ pour $t=3$ en continu et $1/3$ pour $k=3$ en discret
3. pareil que pour $t \leq 3$ en continus et pareil que pour $k \leq 3$ en discret
4. si on met la bonne réponse toujours au début c'est débile !

Q3 - la densité de probabilité pour la valeur exacte 3 est de

1. 0 pour $t=3$ en continu et $1/6$ pour $k=3$ en discret
2. $1/6$ pour $t=3$ en continu et $1/6$ pour $k=3$ en discret
3. $1/6$ pour $t=3$ en continu et ∞ pour $k=3$ en discret
4. je préfère rester discrète sur la question...

Q4 Parmi les transformées représentées sur la figure suivante, lesquelles sont des densités et dans quelles unités (on suppose un signal primal temporel en Volts) :

1. $\hat{S}(f)$ de la TF est une densité continue en V ;
2. $\hat{S}(f)$ de la TF est une densité continue en V/Hz ;
3. $\hat{S}(n)$ (impulsions unités) de la SdF est une densité discrète V/Hz ;
4. $\hat{S}(f)$ (diracs) de la SdF est une densité en V/Hz ;
5. au moins avec un choix unique, je fais qu'une erreur par question...



3.2 Dérivée de fonctions discontinues

La densité de fonction discrètes nous pousse à dériver des fonctions discontinues de première espèce (pas d'infinité à droite ni à gauche).

Prenons la fonction de HEAVISIDE ou échelon unité noté $u(t)$ pour modéliser toute discontinuité dans un signal, le but est de définir une dérivée de cette fonction, voir Fig. 3.2 et d'obtenir à nouveau $u(t)$ par intégration.

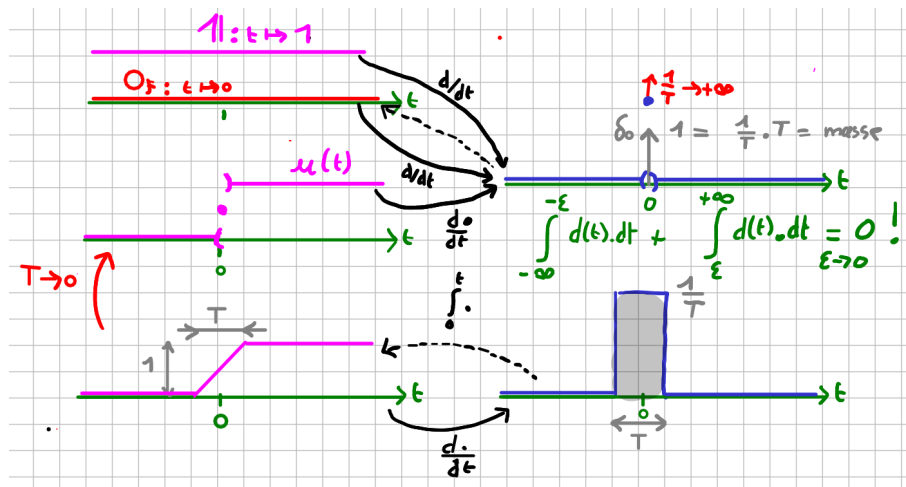


FIGURE 3.2 – Dérivées de l'échelon, de fonctions constantes et d'une fonction continue convergeant vers l'échelon pour $T \rightarrow 0$

Or la dérivée $u'(t)$ n'est pas définie en 0 (elle vaudrait $+\infty$), il faut donc trouver un prolongement pour la définir partout :

- $u'(0) = 0$ par continuité, on obtient alors la fonction nulle. Sa primitive est la fonction nulle et donc on ne retrouve pas $u(t)$ en intégrant la dérivée ;
- $u'(0) = a, a \in \mathbb{R}$, la fonction est discontinue en 0, on doit intégrer en deux fois

$$u(t > 0) = \int_{-\infty}^{t > 0} u'(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\epsilon} \underbrace{u'(x)}_{=0} dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^t \underbrace{u'(x)}_{=0} dx = 0$$

La dérivée de l'échelon est donc la fonction nulle « presque partout » ($\|u'\|_2 = 0$).

On peut essayer d'approcher l'échelon avec deux fonctions rampes comme illustré sur la figure, et obtenir une dérivée définie partout (sauf en $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$) sous la forme de la fonction porte $\Pi_{[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]}(t)$. Mais la limite de cette fonction porte reste la fonction nulle presque partout !

3.3 Opérateur dérivée et sa réciproque

Le fait que plusieurs fonctions ont pour image la même fonction nulle, rend l'opérateur dérivée (noté p en calcul opérationnel ou D) font que l'application dérivée qui transforme une fonction de L_1 en fonction de L_1 n'est pas injective.

$$p = D = \frac{d}{dt} : \begin{array}{ccc} L_1 & \longrightarrow & L_1 \\ t \mapsto u(t) & \longmapsto & t \mapsto u'(t) \end{array} \quad (3.2)$$

Elle est donc non bijective et une application réciproque unique n'existe pas (l'opérateur primitive qui s'annule en 0). Pourtant l'intuition montre que l'on a besoin d'établir un objet mathématique qui soit la dérivée de l'échelon et dont une primitive soit $u(t)$. Cette fonction généralisée ou fonction imaginaire est l'impulsion de DIRAC introduite et utilisée par le scientifique éponyme dans les années 1920 et établie mathématiquement par Schwartz dans les années 1950.

Comme l'indique la Fig. 3.3 on crée une fonction imaginaire étant la dérivée de discontinuité et dont l'intégrale réciproque donne une discontinuité.

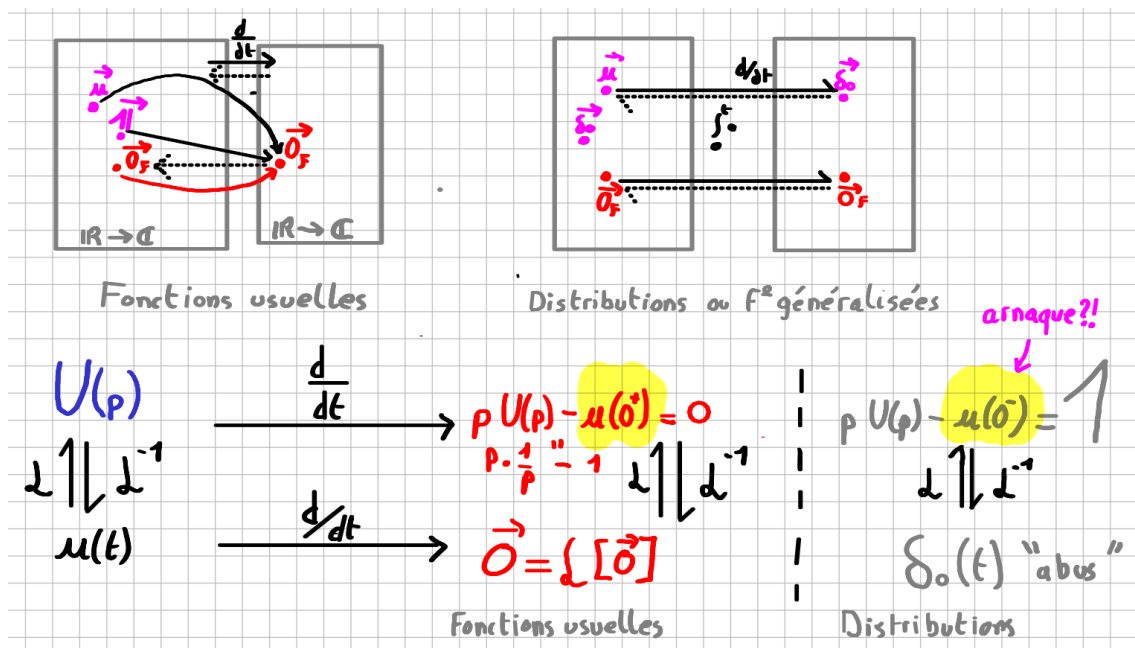


FIGURE 3.3 – L'espace des fonctions usuelles où l'opérateur dérivée n'est pas injectif, et l'espace des distributions où l'opérateur est bijectif.

Cela permet de définir un opérateur inversible et d'introduire le calcul opérationnel où l'opérateur D possède une réciproque D^{-1} tel que $D \circ D^{-1} = \text{Id}$. La notation D^{-1} n'est pas anodine car on assimile une réciproque d'opérateur à un inverse algébrique (du nombre D). C'est l'approche par *calcul opérationnel* vu dans la §3.6.1 pour les systèmes discrets.

3.3.1 Calcul opérationnel en continu

On obtient donc dans l'espace des distribution, noté $\mathcal{D}'(\Omega)$, un opérateur D qui admet un réciproque $I = D^{-1}$ capable de commuter, s'associer se distribuer et s'inverser avec l'addition :

une algèbre d'anneau commutatif comme celles de $+$ et \times sur les réels. L'approche opérationnelle assimile c'est opérateur D à un nombre complexe p que l'on manipule algébriquement : ce nombre peut être assimilé à la variable de LAPLACE notée s lorsque le signal de référence choisi est l'impulsion de DIRAC.

Tout système linéaire invariant continu est représenté par une équation différentielle

$$a_n y^{[n]} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m e^{[m]} + \dots + b_1 e' + b_0 e$$

que l'on peut noter sous forme opérationnelle :

$$a_n \underbrace{D \circ \dots \circ D}_{n \text{ fois}}[y] + \dots + a_1 D[y] + a_0 [y] = b_m \underbrace{D \circ \dots \circ D}_{m \text{ fois}}[e] + \dots + b_1 D[e] + b_0 [e]$$

Pour pouvoir manipuler les signaux comme des opérateurs et pouvoir écrire $D \circ y = y \circ D$ permettant d'avoir une algèbre d'anneau commutatif. On assimile un signal y au système Y permettant de le générer à partir de sa réponse impulsionnelle (réponse à une impulsion de DIRAC δ_0) :

$$y \leftrightarrow Y \text{ tel que } Y[\delta_0] = y$$

Nous avons donc les opérateurs élémentaires gain a_n , dérivée D et l'opérateur Y associé au signal y qui se composent et commutent : $a_n \circ D \circ Y = Y \circ D \circ a_n = \dots$. Comme avec ces opérateurs élémentaires les opération \circ et $+$ ont une structure d'anneau commutatif, on adopte la notation algébrique classique pour ces opérateurs :

$$a_n D^n Y + \dots + a_1 D Y + a_0 Y = b_m D^m E + \dots + b_1 D E + b_0 E$$

Comme l'opérateur D possède une réciproque notée D^{-1} puisque $D \circ D^{-1} = Id$ et que ces opérateurs commutent, on peut associer D à la variable scalaire p , l'opérateur gain a_n au nombre a_n (réel ou complexe) et obtenir une équation algébrique :

$$(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) Y = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) E \quad (3.3)$$

Comme le système identité est $Id = DD^{-1}$ nous obtenons algébriquement que le système identité est le système de gain 1 et donc associé au nombre 1 qui représente donc l'impulsion de DIRAC de poids 1.

Si l'on borne les signaux y et e à des signaux générés par des systèmes linéaire invariants Y et E à partir de l'entrée δ_0 , alors nous obtenons une représentation du signal y par une equation algébrique (3.3) calculée pour une entrée $E(p) = 1$ (impulsion de DIRAC). Le système Y est donc représenté par une fraction rationnelle $Y(p)$. Il en est de même pour le signal e qui est représenté par le système $E(p)$

C'est ainsi que HEAVISIDE à remarqué que la composition des dérivées de fonctions et leurs associations linéaires dans les équations différentielle se comportait comme une algèbre classique. L'idée est venue de manipuler D comme un nombre ce qui l'a conduit à l'utilisation du calcul opérationnel comme celui effectué avec la transformée de LAPLACE où p joue le rôle de l'opérateur dérivé mais est une nombre complexe.

Et donc passer le pas et de calculer la solution en faisant une fraction rationnelle d'opérateur dérivés et une décomposition en éléments simples d'opérateurs dérivés comme pour des nombres avec la fameuse *fonction de transfert* du système :

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{(b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0)}{(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0)} = \frac{\beta_n}{p + \alpha_n} + \dots + \frac{\beta_0}{p + \alpha_0}$$

Le tout sans avoir défini la transformée de LAPLACE qui est venue plus tard avec la formule de Carson.

3.4 Propriété sous l'intégrale de l'impulsion de DIRAC et de l'impulsion unité

Nous avons donc une fonction de densité δ_0 qui une fois intégrée peut enfin donner une fonction de répartition discontinue en 0. On peut appliquer l'opérateur de retard sur cet objet et définir δ_a la densité d'une fonction $u(t - a)$ discontinue en a . On peut définir par abus de notation :

$$\delta_a(t) = \delta_0(t - a)$$

Cela permet aussi de représenter l'opérateur d'échantillonnage idéal d'un signal continu à un instant a donné en multipliant le signal $s(t)$ par la densité de mesure en a ce qui est représenté par la Fig. 3.4

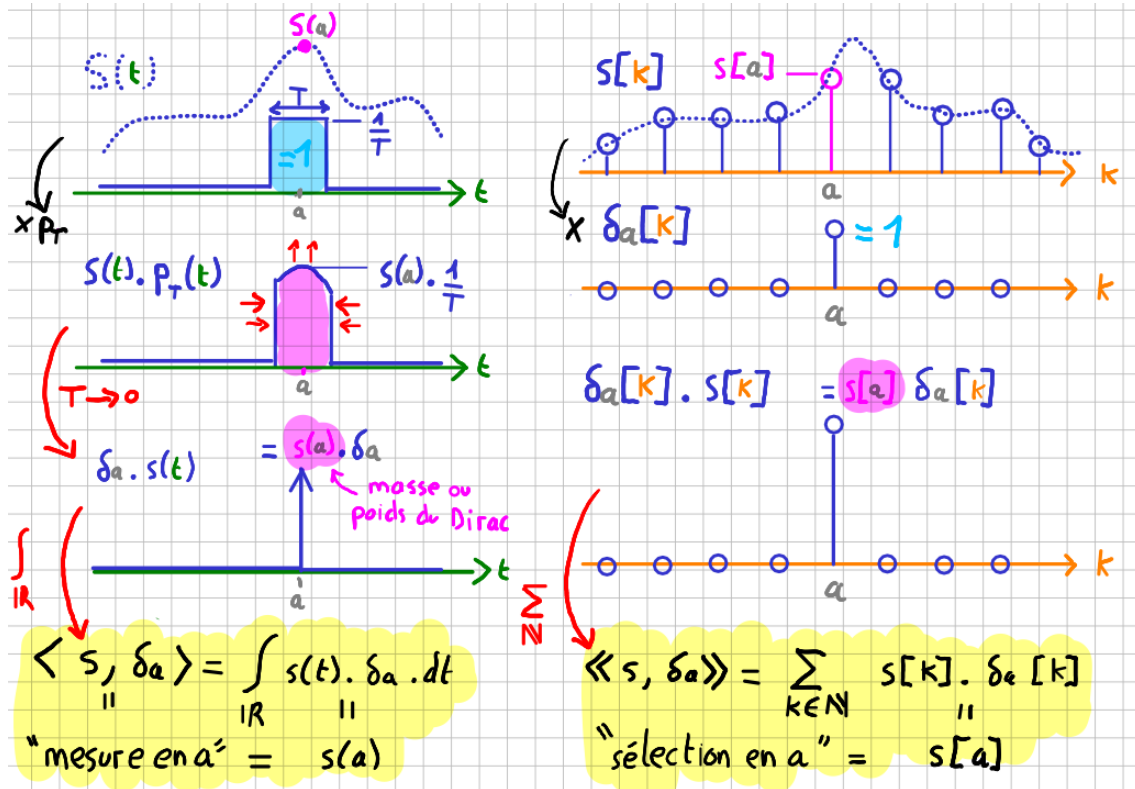


FIGURE 3.4 – A droite l'impulsion unitaire discrète qui effectue une mesure "sous la somme" ou à travers le produit scalaire. A gauche l'impulsion de DIRAC qui effectue la mesure idéale d'une fonction continue.

Nous avons donc les propriétés :

$$\langle s, \delta_a \rangle = s(a) \text{ en continu et en discret } \langle\langle s, \delta_a \rangle\rangle = s[a]$$

3.5 Propriété de convolution avec le DIRAC et impulsion unité

On peut définir l'opérateur de convolution, noté $*$, à l'aide du produit scalaire puisque :

$$u * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) v(t - x) dx = \langle u, \overline{x \mapsto v(t - x)} \rangle \quad (3.4)$$

De même pour les signaux discret à support infini, on définit la convolution :

$$u * v[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u[l] v[k - l] = \langle\langle u, \overline{l \mapsto v(k - l)} \rangle\rangle \quad (3.5)$$

Et la convolution cyclique pour les signaux discrets périodiques de N points :

$$u * v[k] = \sum_0^{N-1} u[l] v[k-l] = \langle\langle u, l \mapsto v(k-l) \rangle\rangle_P \quad (3.6)$$

3.6 Calcul opérationnel : Transformée en Z

La transformée en \mathbb{Z} joue le même rôle pour les systèmes discrets que la transformée de LAPLACE pour les systèmes continus. Elles permettent de définir une *fonction de transfert* du système et de manipuler les systèmes algébriquement sous formes de fonctions de la variable complexe (comme des fractions rationnelles polynomiales pour les systèmes linéaires invariants).

Plutôt que de présenter sans justifier ces formules de transformées, nous allons introduire la vision par calcul opérationnel qui consiste justement à manipuler les opérateurs comme des nombres algébriques. Cette méthode a été développée et fortement utilisée par HEAVISIDE pour résoudre notamment l'équation des télégraphistes. Les justifications théoriques de cette approche et la relation entre l'opérateur p de HEAVISIDE et la variable s de la transformée de LAPLACE n'est apparue que plus tard.

Mathematics is an experimental science, and definitions do not come first, but later on.

Olivier HEAVISIDE (1850–1925)

3.6.1 Principe du calcul opérationnel

Tout système discret linéaire invariant possédant une seule entrée x et une seule sortie y se représente par une équation aux différences du type suivant :

$$a_n y[k-n] + \dots + a_1 y[k-1] + a_0 y[k] = b_m x[k-m] + \dots + b_0 x[k] \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.7)$$

Les opérateurs discrets de base, retard unitaire, avance unitaire, gain commutent entre-eux (pour les systèmes invariants) et se combinent linéairement (pour les systèmes linéaires). On peut donc représenter la relation entrée/sortie par une combinaison linéaire de ces opérateurs de base :

$$\left(a_n \circ \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ fois}} \right) [y] + \dots + \underbrace{(a_1 \circ T) [y]}_{k \mapsto a_1 y[k-1]} + \underbrace{(a_0 \circ \text{Id}) [y]}_{a_0 y} \quad (3.8)$$

$$= \left(b_m \circ \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{m \text{ fois}} \right) [x] + \dots + (b_0 \circ \text{Id}) [x] \quad (3.9)$$

R Remarquons bien que dans (3.7) les termes sont des scalaires réels ou complexe ; alors que dans l'écriture opérationnelle (3.8) les termes sont des fonctions (ou signaux ou plutôt des suites réelles ou complexes). Au lieu de prendre une égalité valable pour tout entier k ; nous passons à une équation de systèmes (ou opérateurs) prenant en argument des signaux.

Comme l'opérateur gain est invariant et qu'il commute avec l'opérateur retard on peut noter la composition \circ comme un simple produit car elle possède les mêmes propriétés de commutativité, associativité etc. La récurrence devient ainsi :

$$\underbrace{(a_n \cdot T^n)}_{\text{opérateur de fonction}} \underbrace{[y]}_{\text{signal}} + \dots + (a_1 \cdot T) [y] + \underbrace{a_0 [y]}_{k \mapsto a_0 y[k]} = (b_m \cdot T^m) [x] + \dots + b_0 [x] \quad (3.10)$$

■ **Exemple 3.1** Reprenons l'exemple du *différentiateur* 2.1 d'écrit par l'opérateur :

$$L : x \mapsto y = \frac{x - T[x]}{T_e}$$

Nous obtenons avec la notation algébrique la relation entrée/sortie :

$$T_e \cdot y = x - T[x]$$

Qui correspond à l'équation aux différences :

$$y[k] = \underbrace{\frac{1}{T_e}}_{b_0} x[k] - \underbrace{\frac{1}{T_e}}_{b_1} x[k-1]$$

■

R On ne peut pas noter des produits du type $a_n \cdot T^n \cdot y$, car cela signifierait la composition $a_n \circ T^n \circ y$. Alors que les systèmes gain et retard se composent et commutent (car se sont des opérateurs qui transforment des signaux discrets de L_E en signaux discrets de L_E), la fonction y est un signal discret de L_E qui transforme un entier \mathbb{Z} en un scalaire complexe \mathbb{C} et ne peut se composer avec un opérateur : la composition (à droite ou à gauche) serait mal définie car :

$$L_E \xleftarrow{a_n} L_E = L_E \xleftarrow{T^n} L_E \neq \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{Z}$$

Rappelons que les opérateurs a_n et T sont des « fonctions de fonctions discrètes donnant des fonctions discrètes ».

La composition $a_n \circ y$ est donc mal définie et sa notation $a_n \cdot y$ est fautive quand a_n désigne l'opérateur (ou système) gain. En revanche la notation $a_n \cdot y$ où a_n est un scalaire est ambiguë mais correcte car elle peut désigner le produit d'un scalaire par une fonction. A part le système gain qui est noté comme un scalaire, les autres opérateurs comme T^k ne se composent pas avec une fonction et les notation $T^k \cdot y$ et $T^k \circ y$ restent fautive sans ambiguïté !

Pour mener une approche par calcul opérationnel, il faut transformer la fonction y en un opérateur qui puisse commuter avec les autres. Or, comme le montre la remarque précédente, une fonction discrète prend un entier en argument pour donner un complexe, alors qu'un opérateur (ou système) prend une fonction pour la transformer en fonction.

Pour contourner ce problème, on remplace le signal y par un système noté Y dont la réponse à une excitation unitaire est le signal y lui-même. Dans le cas de systèmes discrets, on choisit comme signal unitaire l'impulsion unité δ_0 .

Définition 3.6.1 L'impulsion unité, notée δ_0 ou simplement δ , est le signal discret tel que :

$$\delta_0[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'impulsion unités centrée en a est notée δ_a et définie par :

$$\delta_a[k] = \delta_0[k-a] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Bien qu'utilisant le même symbole δ , il ne faut pas confondre l'impulsion unité discrète avec l'impulsion de DIRAC. L'impulsion unité est un signal discret tout à fait classique d'amplitude

égale à 1 alors que l'impulsion de DIRAC est une fonction généralisée ou distribution, voir Chap. 3, d'amplitude infinie et de poids unité.

Ainsi au lieu de considérer un signal y , on considère le système discret Y dont la réponse impulsionnelle est :

$$y = Y[\delta_0] \quad (3.11)$$

On exprime ainsi l'équation aux différences sous la forme pure d'opérateurs, ou systèmes, qui commutent entre-eux et se distribuent avec l'addition tout comme une multiplication classique :

$$a_n.T^n.Y + \dots + a_1.T.Y + a_0.Y = b_m.T^m.X + \dots + b_0.X \quad (3.12)$$

R Dans le cas des systèmes continus, on exprime les équations différentielles sous forme opérationnelle en remplaçant l'opérateur discret de retard T par l'opérateur de dérivation D . Un signal y est de même remplacé par un système Y dont la réponse impulsionnelle (à une impulsion de DIRAC cette fois-ci) est le signal y .

Initialement, HEAVISIDE avait introduit l'échelon unité, ou échelon éponyme, comme signal d'excitation de référence à la place de l'impulsion de DIRAC qui n'était pas encore définie à l'époque. Voir le §3.3 pour une définition de l'opérateur réciproque de la dérivée nécessitant l'impulsion de DIRAC.

Nous obtenons avec cette notation une écriture de l'équation aux différences qui ressemble à une équation algébrique polynomiale classique. Dans le calcul opérationnel, l'opérateur d'avance A (resp. T) est assimilé à un nombre que l'on notera z (resp. z^{-1}), les signaux x et y sont remplacés par leurs systèmes générateurs X et Y à partir de leur réponse impulsionnelle. Les systèmes générateurs X et Y pouvant être eux-même exprimés en fonction de l'opérateur z , ils sont représentés comme des fonctions de z soit $X(z)$ et $Y(z)$. Nous verrons dans la suite que les fonctions $X(z)$ et $Y(z)$ sont les transformées en Z des signaux (ou systèmes) x et y .

Nous obtenons finalement l'équation algébrique associée à la récurrence (3.7) :

$$a_n z^{-n} Y(z) + \dots + a_1 z^{-1} Y(z) + a_0 Y(z) = b_m z^{-m} X(z) + \dots + b_0 X(z) \quad (3.13)$$

Les opérateurs réciproques T et A sont associés aux nombres z et z^{-1} car la division et la multiplication sont réciproques : comme la composition d'une avance et d'un retard $A \circ T = \text{Id}$ donne le système identité, le produit algébrique $z z^{-1} = z \frac{1}{z} = 1$ donne l'unité. L'unité algébrique 1 est donc associée au « système identité » (qui ne change pas le signal) dont la réponse impulsionnelle est l'impulsion unité δ_0 .

La résolution de l'équation aux différences peut alors se faire en traitant l'équation algébrique sous forme de fraction rationnelle puis de décomposition en éléments simples :

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_m z^{-m} + \dots + b_0}{a_n z^{-n} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0} = \underbrace{\frac{\beta_0}{z - \alpha_0}}_{\text{premier ordre}} + \dots + \underbrace{\frac{\mu_0 + \nu_0 z}{z^2 + b_0 z + c_0}}_{\text{second ordre}} + \dots \quad (3.14)$$

On décompose alors un système linéaire invariant comme une combinaison linéaire de systèmes de premier ordre et de second ordre. La résolution se fait alors par lecture de table de transformée en Z comme pour les transformées de LAPLACE dans le cas des systèmes continus.

■ **Exemple 3.2** Dans l'exemple du *différentiateur* 2.1 d'écrit par $T_e.y = x - T[x]$, nous pouvons remplacer x et y par les systèmes générateurs $X(z)$ et $Y(z)$ et finalement remplacer la composition avec T par une multiplication par z^{-1} . On obtient la fonction de transfert du système différentiateur :

$$H_d(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Il est alors facile de trouver l'opérateur *intégrateur* H_i réciproque du différentiateur H_d en se basant sur la propriété $H_i \circ H_d = H_d \circ H_i = \text{Id}$ qui donne en équation algébrique :

$$H_i(z) H_d(z) = 1 \implies H_i(z) = \frac{1}{H_d(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T_e}{1 - z^{-1}}$$

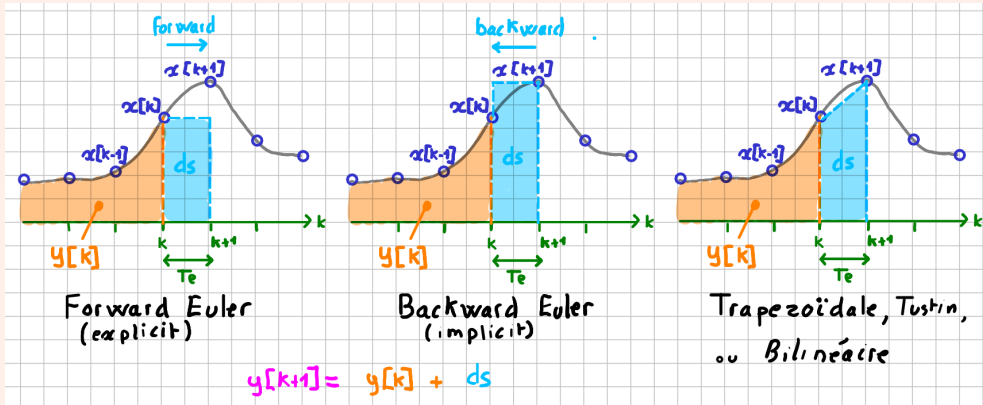
On obtient ainsi l'équation de récurrence de l'intégrateur dit *Backward Euler* :

$$\begin{aligned} Y(z) (1 - z^{-1}) &= T_e X(z) \iff Y(z) = z^{-1} Y(z) + T_e X(z) \\ y[k] &= y[k-1] + T_e x[k], & \forall k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou bien } y[k+1] &= y[k] + T_e x[k+1], & \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (3.15)$$

■

Exercice 3.1 Trois intégrateurs différents et trois différentiateurs associés

L'exemple 3.2 précédent de l'intégrateur *Backward Euler* est illustré ci-dessous avec deux autres méthodes. On identifie alors dans (3.15) que l'incrément de surface ds ajouté à l'intégrale de x à l'instant $k+1$ est la surface du rectangle bleu : $y[k+1] = y[k] + \underbrace{T_e x[k+1]}_{ds}$



- Écrivez alors les récurrences correspondantes aux intégrateurs *Forward Euler* et *trapézoïdale* en adaptant la valeur de l'incrément de surface ds en fonction de T_e , $x[k]$ et/ou $x[k+1]$.
- De manière inverse à l'exemple précédent, retrouvez les fonctions de transfert $H_i(z)$ de ces trois intégrateurs (remplacer $x[k]$ par $X(z)$, $x[k+1]$ par $zX(z)$ car z est associé à l'avance unitaire).

On remarque que l'écriture de la récurrence en $y[k+1] = y[k] + \dots$ donne naturellement une fonction de transfert exprimée en z , alors que l'écriture en $y[k] = y[k-1] + \dots$ donne une écriture en z^{-1} parfaitement équivalente : par exemple pour le *Backward Euler* on obtient les fonctions de transfert $H_i(z) = \frac{T_e}{1 - z^{-1}} = \frac{T_e z}{z - 1}$

- On peut alors inverser algébriquement ces fonctions de transfert d'intégrateur H_i pour obtenir des fonctions de transfert de dérivateurs $H_d(z) = H_i(z)^{-1}$ associées.
- On peut, de même, donner les récurrences $y_d[k] = \dots$ à partir des fonctions de transfert $H_d(z)$ permettant d'obtenir différentes approximations de la dérivée du signal d'entrée x . On obtient ainsi des approximations linéaires discrètes exprimées en z (l'avance unitaire) de

l'opérateur dérivée en continue p (ou variable de LAPLACE notée s) :

$$D = \frac{d}{dt} \leftrightarrow p \leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{T_e} (1 - z^{-1})}_{\text{Forward Euler}} \leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{T_e} (z - 1)}_{\text{Backward Euler}} \leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}_{\text{Bilinéaire ou Tustin}} \quad (3.16)$$