1. Les bases de Fourier

Ce chapitre présente les transformées, séries de FOURIER et introduit la transformée deFOURIER Discrète en se basant sur une vision d'espace vectoriel Euclidien.

1.1 Espaces vectoriels normés pour les fonctions

Les produits scalaires pour différents espaces de fonctions sont définis et illustrés dans la Tab. 1.1

R **Pour quoi du complexe pour du réel ?**
On considère le cas général des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ car cela permet :
- de représenter des signaux de type phaseur (vecteurs en rotation)
- de représenter facilement des signaux réels dont la bande de fréquence est finie (signaux dits *bande étroite*)
- de pouvoir appliquer la trasnformée de FOURIER à une transformée de FOURIER (qui est complexe même pour des signaux réels) et de voir l'opération de transformée comme un isomorphisme et de jouer avec la notion de dual.

Exercice 1.1 Propriété de scalaire et norme dans le cas général
On aurait pu définir ces produits scalaires en ne prenant jamais le conjugué d'une fonction g (ou en considérant des fonction à valeurs réelles de manière à ignorer ce conjugué car $\overline{g} = g$).

1. Vérifiez dans le cas réel (sans conjugué) que le produit $\langle f, g \rangle$ à les propriété d'un produit scalaire, en déduire la norme induite $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$ et déterminer la dimention de $\|f\|^2$: est-ce de la puissance ou de l'énergie, est-ce une valeur ou une densité ?
2. Appliquez cette norme (toujours sans le conjugué) au signal imaginaire pur $f : t \mapsto i$. Quelle propriétée de la norme n'est pas respectée ?
3. Refaites de même en prenant cette fois-ci les formules de Tab. 1.1 avec le conjugué de g et vérifiez que cette propriété est vérifiée dans le cas général des fonctions à variables complexes.
4. Vérifiez que $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ et que donc le produit scalaire est linéaire à gauche $\forall \lambda \in$

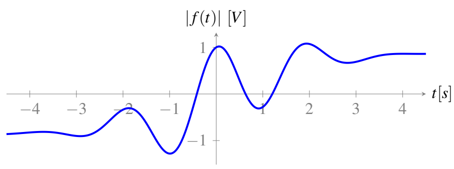
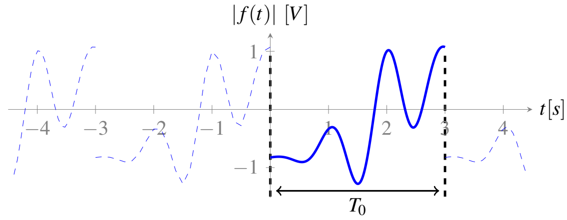
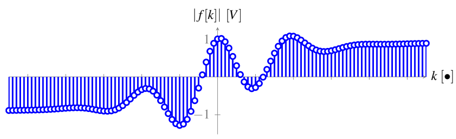
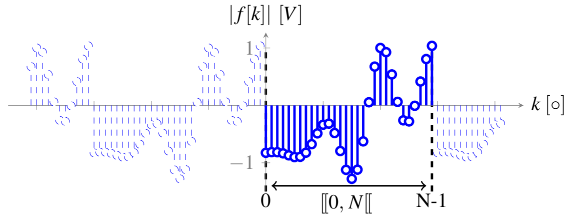
	Support infini	Support fini ou périodique
variable continue	 $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{C}$ $\langle f,g\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}} f(t).\overline{g(t)}\ \mathrm{d}t \quad \bowtie\left[\frac{V^2}{\mathrm{Hz}}\right]$	 $f:\mathbb{R}_{T_0}\mapsto\mathbb{C}$ ou $f:\ [0,T_0[\mapsto\mathbb{C}$ $\langle f,g\rangle_P=\frac{1}{T_0}\int\limits_0^{T_0} f(t).\overline{g(t)}\ \mathrm{d}t \quad \bowtie\left[V^2\right]$
variable discrète	 $\mathbb{N}\mapsto\mathbb{C}$ $\langle\!\langle f,g\rangle\!\rangle=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} f[k].\overline{g[k]} \quad \bowtie\left[V^2\right]$	 $\mathbb{Z}_{N_0}\mapsto\mathbb{C}$ ou $[\![0,N[\![\ \mapsto\mathbb{C}$ $\langle\!\langle f,g\rangle\!\rangle_P=\sum\limits_{k=0}^{N-1} f[k].\overline{g[k]} \quad \bowtie\left[V^2\right]$

TABLE 1.1 – Les produits scalaires adaptés aux différents espaces de fonctions. Par clarté, on ne représente que le module de la fonction qui est dans la cas général complexe.

$\mathbb{C}$, $\langle\lambda f,g\rangle=\lambda\langle f,g\rangle$ et *à moitié linéaire* à droite $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $\langle f,\lambda g\rangle=\overline{\lambda}\langle f,g\rangle$
On comprend maintenant pourquoi, dans le cas général des fonctions à valeurs complexes, on utilise le conjugué dans l'expression des produit scalaires et pourquoi on parle de produit *sesqui–linéaire* pour ces produits scalaires : *sesqui* en latin voulant dire « un et demi » en latin. ■

1.1.1 Analyse et synthèse de fonctions dans une base

Par anlogie avec les espaces vectoriels Euclidiens, on va pouvoir manipuler les fonctions comme indiqué dans la Tab. 1.2.

1.1.2 Base de la TF

La TF (Transformée de FOURIER), ou FT (*Fourier Transform*) en anglais, s'applique aux fonction continues et utilise une base d'ondes complexes $\mathrm{B_F}=\Bigg(\underbrace{t\mapsto e^{i2\pi f t}}_{w_f}\Bigg)_{f\in\mathbb{R}}$.

Exercice 1.2 Tentez de retrouver la formule de la transformée et son inverse et d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en se rappelant juste que c'est une application de

$$\mathbb{R}\to\mathbb{C}\ \xrightarrow{TF}\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire continu noté $\langle,\rangle$ avec la base continue $\mathrm{B_F}=(w_f)_{f\in\mathbb{R}}$ ■

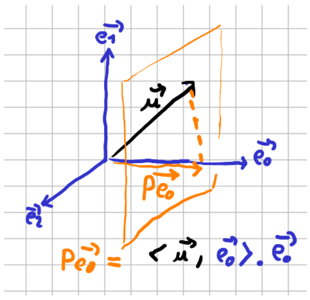
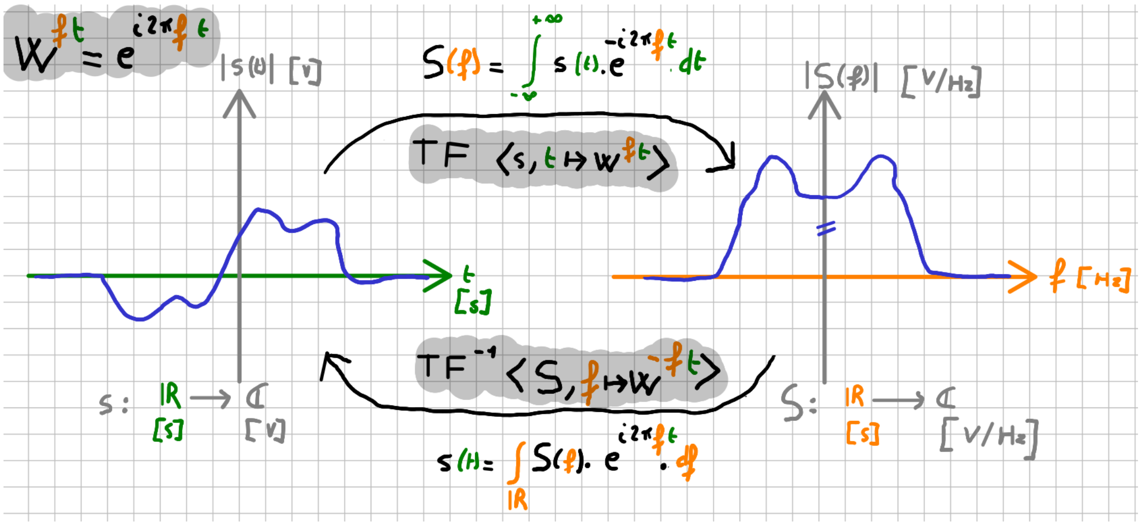
	Euclidien fini	Espace de fonctions
Base Ortho–normée	une base finie de vecteurs $\mathrm{B} = (\overrightarrow{e_n})_{n\in\mathbb{Z}_{N_0}}$ normés $\Vert\overrightarrow{e_n}\Vert = 1$ et orthogonaux $\langle\overrightarrow{e_n},\overrightarrow{e_m}\rangle = 0$	base dénombrable de fonctions $(\overrightarrow{w_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ou indénombrable $(\overrightarrow{w_f})_{f\in\mathbb{R}}$ repérées par leur fréquences f ou un indice n associé ; fonctions d'énergie unitaire $\Vert\overrightarrow{w_n}\Vert = 1$ ou $\Vert\overrightarrow{w_f}\Vert = 1$, et orthogonales $\langle\overrightarrow{w_n},\overrightarrow{w_m}\rangle_P = 0$ ou $\langle\overrightarrow{w_f},\overrightarrow{w_{f'}}\rangle = 0$
Analyse	décomposer un vecteursdans cette base en coefficients $V_n = \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{e_n}\rangle$ et en donner les coordonnées $\underbrace{V\vert_{\mathrm{B}}}_{\rightleftharpoons\overrightarrow{v}} = \begin{bmatrix} V_0 = \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{e_0}\rangle \\ \vdots \\ V_{N-1} = \langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{e_{N-1}}\rangle \end{bmatrix}_{\mathrm{B}}$	décomposer une fonction $\overrightarrow{u}$ en fréquentiel avec la transformée $U(f)$ ou avec les coéfficients $U(n)$ de la série : $U(f) = \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w_f}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{w_f(t)}\,dt$ $U(n) = \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w_n}\rangle_P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)\overline{w_n(t)}\,dt$
Synthèse	recomposer un vecteur dans cette base $\overrightarrow{v} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_{N_0}} \underbrace{U_0}_{\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{e_0}\rangle} . \overrightarrow{e_0}$  	recomposer une fonction par transformation inverse de $U(f)$ ou recompostion de série $U(n)$: $\overrightarrow{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{U(f)}_{\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w_f}\rangle} .\overrightarrow{w_f}(t)\,\mathrm{d}t$ $\overrightarrow{u}(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{U(n)}_{\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{w_n}\rangle_P} .\overrightarrow{w_n}(t)$
Projeter avec Plancherel	calculer le produit scalaire de vecteurs par leurs composantes : $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle = \langle U_{\mathrm{B}},V_{\mathrm{B}}\rangle = {}^{T}U\vert_{\mathrm{B}} . V\vert_{\mathrm{B}}$ $\underbrace{\begin{bmatrix} U_0 & \dots & U_{N-1} \end{bmatrix}}_{{}^{T}U\vert_{\mathrm{B}}} . \begin{bmatrix} V_0 \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{bmatrix}$	on peut calculer un produit scalaire (utile aux correlations et convolutions) à partir de sa transformée ou composantes de la série : $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{v(t)}\,dt = \langle U,V\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} U(f)\overline{V(f)}\,df$ $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle_P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} u(t)\overline{v(t)}\,dt = \langle\langle U,V\rangle\rangle_P = \sum_{k=0}^{N_0-1} U(k)\overline{V(k)}$
Normer avec Parseval	Calculer la norme en sommant les carrés des coordonnées : $\Vert\overrightarrow{u}\Vert^2 = \Vert U_{\mathrm{B}}\Vert^2 = \sum {U_n}^2$	calculer la puissance moyenne par la transformée $u(f)$ ou en sommant celle des composantes fréquentielles $U(n)$: $\Vert\overrightarrow{u}\Vert^2 = \Vert U\Vert^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \vert u(t)\vert^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \vert U(f)\vert^2\mathrm{df}$ $\Vert\overrightarrow{u}\Vert^2 = \Vert U\Vert_P^2 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \vert u(t)\vert^2\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{N}} \vert U(k)\vert^2$

TABLE 1.2 – Structure Euclidiene à structure de Hilbert



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens mais pas l'amalgame, car :

- le produit scalaire $\langle , \rangle$ est défini dans le cas de fonctions de carré intégrable, ou *fonction à énergie finie*, que nous notons $\mathscr{L}_2$,
- les vecteurs de la base ne sont pas normés car de norme infinie ;
- la base n'est pas finie, ni infinie dénombrable mais infinie indénombrable.

Mais lorsque l'on se place dans le cas de fonctions de carré intégrable, ou fonction à énergie finie, que nous notons $\mathscr{L}_2$, l'espace est complet (les suites de Cauchy convergent) dont les sommes infinies se comporte bien dans $\mathscr{L}_2$: c'est une espace de Banach. De plus le produit scalaire associé à la norme 2 existe et on a donc un espace de HILBERT où la norme et le produit scalaire sont des application linéaire dans $\mathscr{L}_2$. Comme il s'agit d'une espace de dimention infinie, il ne suffit pas d'avoir une base de dimention infinie pour couvrir tout l'espace, mais dans le cas de $\mathscr{L}_2$ avec la base $\mathrm{B_F}$ on montre que tout l'espace est engendré.

Bref ! ça fonctionne tout comme un espace Euclidien sans en être un.

Exercice 1.3 Prendre la base $\mathrm{B_F} = (w_f)_{f\in\mathbb{R}}$ et utiliser la partie espace indénombrable de la Tab. 1.2 pour retrouver les formules de PLANCHEREL et PARSEVAL. ■

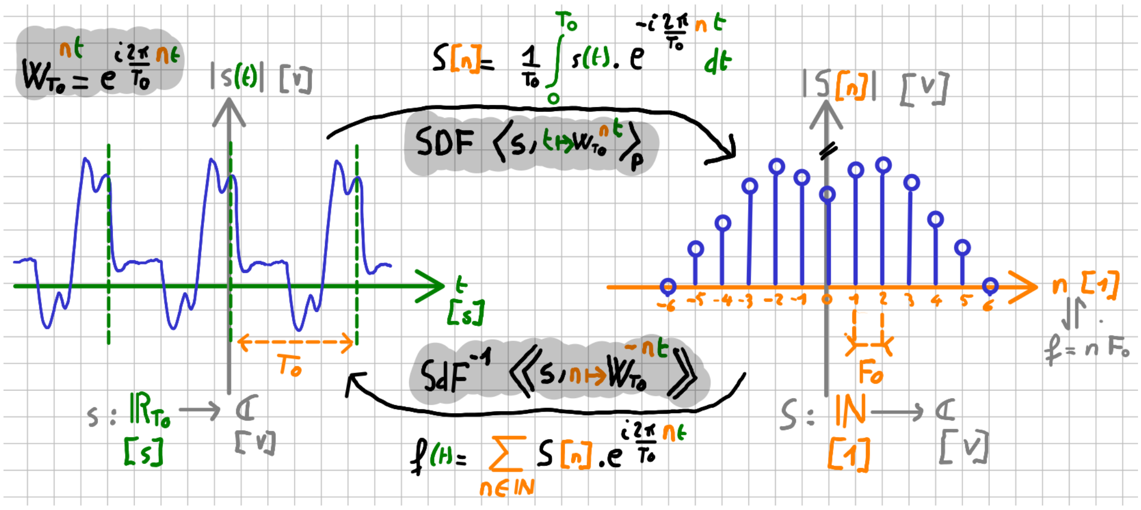
1.1.3 Base des SdF

Les SdF (Séries de FOURIER), ou FS (*Fourier Series*) s'appliquent aux fonctions continues périodiques et utilisent une base dénombrable $\mathrm{B_F} = \left(\underbrace{t \mapsto W_{T_0}^{nt} = e^{i\frac{2\pi}{T_0}nt}}_{w_{T_0}^n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $W_{T_0} = e^{i\frac{2\pi}{T_0}}$.

Exercice 1.4 Tentez de retrouver la formule de la décomposition et recomposition en SdF et d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en se rappelant juste que c'est une application de

$$\mathbb{R}_{T_0} \to \mathbb{C} \xrightarrow{SdF} \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire continu périodique noté $\langle , \rangle_P$ et avec la base discrète $\mathrm{B_F} = \left(W_{T_0}^n\right)$. ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens mais pas l'amalgame, car :

— le produit scalaire $\langle,\rangle_P$ est défini dans le cas de fonctions périodiques de carré intégrable, *fonctions de puissance moyenne finie*, que nous notons $\mathscr{L}_{p2}$

— ce n'est pas un isomorphisme car on passe d'un espace continu périodique à un espace discret ! La transformée inverse se fait avec le produit scalaire discret $\langle\!\langle,\rangle\!\rangle$

— la base n'est pas finie, mais infinie dénombrable ;

Bref ! cela fonctionne un peu comme un espace Euclidien fini sans en être un...

Exercice 1.5 Prendre la base $\mathrm{B_F} = \left(t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}nt\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \cup \left(t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}nt\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}^*}$, et voir que l'on retrouve les formules **à un facteur 2 près !**

Et oui ! La base n'est pas normée car un rapide calcul montre que la norme des vecteurs vaut 2.

En prenant $\mathrm{B_F} = \left(t \mapsto \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}nt\right)}{\sqrt{2}}\right)_{n\in\mathbb{Z}^*} \cup \left(t \mapsto \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}nt\right)}{\sqrt{2}}\right)_{n\in\mathbb{Z}^*} \cup (t \mapsto 1)$ on obtient une définition des SdF chère aux physiciens. On peut ne pas normer les vecteurs mais prendre des pincettes et modifier les formules... ■

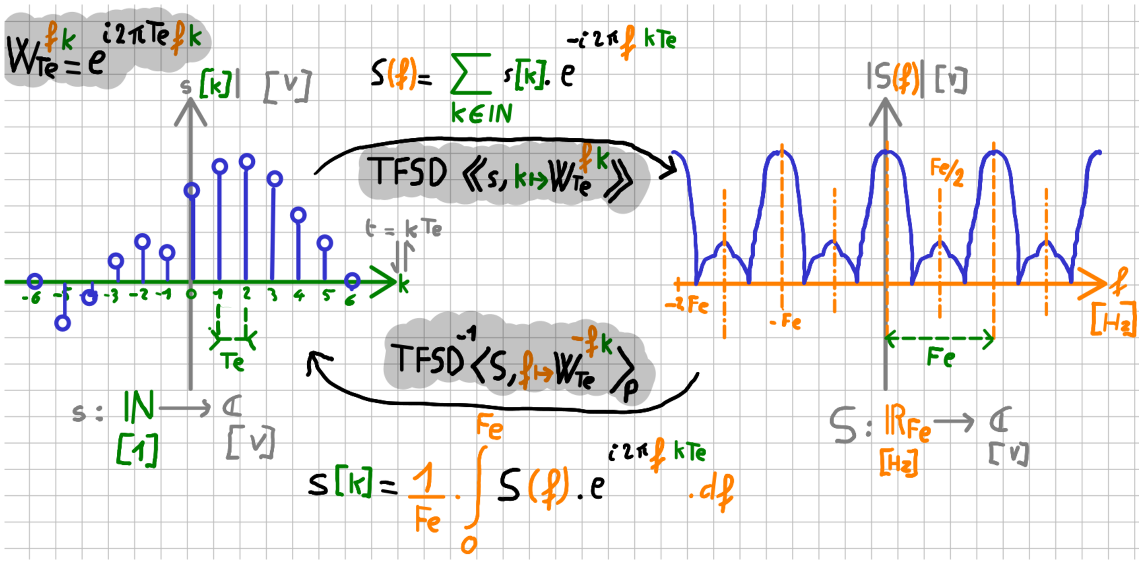
1.1.4 Base de la TFSD

La TFSD (Transformée de FOURIER des Signaux Discrets), ou DTFT (*Discrete Time Fourrier Transform* en anglais, s'applique aux fonctions à variable discrète et utilise une base d'ondes complexes indénombrable $\mathrm{B_F} = \left(\underbrace{k \mapsto W_{T_e}^{fk} = e^{i2\pi T_e fk}}_{w_{T_e}^f}\right)_{f\in[0,\,F_e[}$ avec $W_{T_e} = e^{i2\pi T_e}$.

Exercice 1.6 Tentez de trouver la formule de cette TFSD et son inverse, d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder, en pensant que c'est la « duale » de la SdF. Il s'agit d'une application de

$$\mathbb{N} \to \mathbb{C} \xrightarrow{TFSD} \mathbb{R}_{F_e} \to \mathbb{C}$$

basée sur le produit scalaire discret noté $\langle\!\langle,\rangle\!\rangle$ avec la base continue $\mathrm{B_F} = \left(w_{T_e}^f\right)_{f\in[0,\,F_e[}$ ■



On peut difficilement faire l'analogie avec les espaces Euclidiens car :

— le produit scalaire $\langle\langle , \rangle\rangle$ fonctionne dans le cas de suites discretes absolument convergentes ;
— ce n'est pas un isomorphisme car on passe d'un espace discret à un espace continu périodique ! La transformée inverse se fait avec le produit scalaire continu périodique $\langle , \rangle_P$ (Attention la période dans l'espace des fréquences est F_e) ;
— la base n'est pas finie, ni dénombrable mais infinie indénombrable.

Exercice 1.7 On admet pour le moment que la TFSD d'un signal $s[k]$ quelconque est une fonction $S(f)$ de période F_e. On peut donc voir $S(f)$ comme une fonction de période F_e de la variable réelle f et y appliquer une décomposition en séries de FOURIER !

Faites-le et comparez avec la TFSD inverse. Vous venez de basculer dans un dual ! D'ailleurs on peut voir $s[k]$ comme les coefficients de FOURIER d'une fonction de fréquence fondamentale T_E et appliquer une recomposition de la série et trouver $S(f)$.

Donc TFSD=SdF^{-1} et inversement SdF=TFSD^{-1} ■

1.1.5 Base de la TFD et FFT

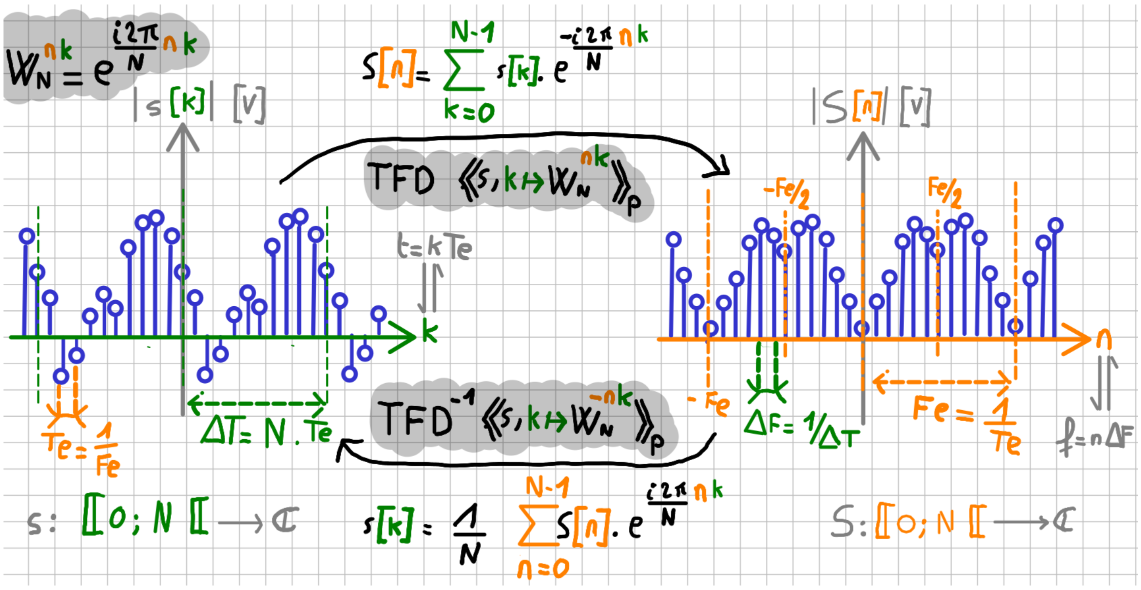
La TFD (Transformée de FOURIER Discrète), ou DFT (*Direct Fourier Transform*) en anglais, s'applique aux fonctions discrètes à support fini et utilisent une base d'ondes complexes discrète finie $\mathrm{B_F} = \left(\underbrace{k \mapsto W_N^{nk} = e^{i\frac{2\pi}{N}nk}}_{\overrightarrow{W_N^n}} \right)_{n\in[\![0,N_0[\![}$ avec $W_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$.

La *FFT* (*Fast Fourier Transform* en anglais uniquement) est un algorithme efficace de calcul de la TFD : c'est donc la même transformation avec les mêmes valeurs !

Exercice 1.8 Tentez de trouver la formule de cette TFD et son inverse, d'esquisser le schéma ci-dessous sans le regarder. Il s'agit d'une application de

$$[\![0,N_0[\![\to \mathbb{C} \xrightarrow{TFD} [\![0,N_0[\![\to \mathbb{C}$$

basée sur le p.s. discret périodique noté $\langle\langle , \rangle\rangle_P$ avec la base continue $\mathrm{B_F} = \left(\overrightarrow{W_N^n}\right)_{n\in[\![0,N_0[\![}$ ■



On peut faire l'analogie avec les espaces Euclidiens finis et **on peut faire l'amalgame!** car c'en est un mais dans $\mathbb{C}$ donc :

— le produit scalaire n'est pas symétrique mais « symétrique et demi » c.-à-d.*sesquilinéaire* car $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$.

R **Base pas normée**

Le terme $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ est en fait une racine Nième de l'unité. Le calcul de la norme du vecteur n de la base $\|w_n = k \mapsto W_N^{-nk}\|^2$ devient donc

$$\langle\!\langle w_n, w_n \rangle\!\rangle_P = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}nk} . e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

Une formulation normée et symétrique de la TFD ferait donc intervenir un facteur $\frac{1}{\sqrt{N}}$ pour la TFD et son inverse. Pour des raisons de simplicité et de contrainte de calcul numérique, la formulation non normée de la figure est largement utilisé. La TFD n'est pas divisée par $\sqrt{N}$ et donc apparait le terme $\frac{1}{N}$ dans la TFD inverse.

Exercice 1.9 Tout comme la TF, la TFD est un isomorphisme bidual. Pour un signal s quelconque, calculez la transformée de la transformée et montrez que $\underbrace{\mathscr{F} \circ \mathscr{F}}_{\mathscr{F}^2}[s] = \mathscr{F}\left[\mathscr{F}\left[t \mapsto s(t)\right]\right] = t \mapsto s(-t)$. Donc si on recalcule deux fois la transformée on obtient le signal d'origine et on montre que $\mathscr{F}^2$ est sa propre réciproque. Déduisez une technique pour calculer la transformée inverse $\mathscr{F}^{-1}$ en utilisant la transformée $\mathscr{F}$.

Faites de même pour la TFD ■

2. La distribution de Dirac

L'impulsion de DIRAC est incontournable en traitement du signal et système ; nous allons progressivement lever le voile !

2.1 La notion de densité

Retournons sur 3 notions de densité avec phénomène de localisation intense :

la densité de masse – est une notion physique que l'on peut comprendre aisément avec l'exemple d'une mousse au chocolat dont la *densité de masse* est plus ou moins aérée *selon une position réelle* sur un axe de découpe du gateau. On considère la pépite pure de chocolat de 1g *concentrée à un endroit* infinitésimallement bon du gateau.

la densité de probabilité – on considère la *densité de probabilité* d'un nombre tiré au hasard entre 1 et 10 *selon la valeur réelle* de ce nombre. Le tirage d'un dé à 6 faces sera la *concentration infinie autour de valeurs précises* de la densité de probabilité.

la densité d'amplitude (ou de puissance) – dans le cas d'une transformation de FOURIER, on considère la *densité d'amplitude* des composantes d'un signal *selon une fréquence réelle*. La décomposition en série de FOURIER sera la *concentration infinie autour de fréquences* harmoniques de cette densité d'amplitude.

Dans les année 20, DIRAC a eu besoin de représenter la concentration de densité de probabilité de particules élémentaires autour de valeurs précises et discrètes pour développer la mécanique quantique.

Une densité f n'as de sens, ou est utile, uniquement en l'intègrant pour avoir une « mesure » de la masse, ou de la probabilité ou de l'amplitude sur un segment de valeurs $[a,b]$:

$$M_{[a,b]} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.1}$$