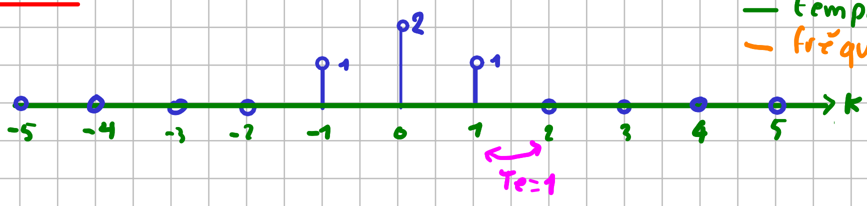
Exo 2 :

I :1)



signal à support fini mais considéré non périodique

2) Formulaire $\delta_0 \xrightarrow{TFSD} \hat{\delta_0} : f \mapsto 1$ (exo 1)

$$\frac{\delta_{-a} + \delta_a}{2} \xrightarrow{TFSD} f \mapsto \cos(2\pi \underbrace{a\,n}_{\text{sans dimention}})$$

→ voir plus bas

car $a \sim [s]$ et $n \sim [Hz]$

$$2\,\delta_0 + 2\,\frac{\delta_{-a}+\delta_a}{2} \xrightarrow[\text{linéarité}]{TFSD} k \mapsto 2 + 2\cos(2\pi a n)$$

avec $a=1$ on a $E(f) = 2 + 2\cos(2\pi f)$

⚠ En fréquences normalisée ! on suppose que $Te = 1$ et donc $Fe = 1$

Donc pour Te quelconque on "normalise" f à 1 avec $f \longleftrightarrow \frac{f}{Fe}$

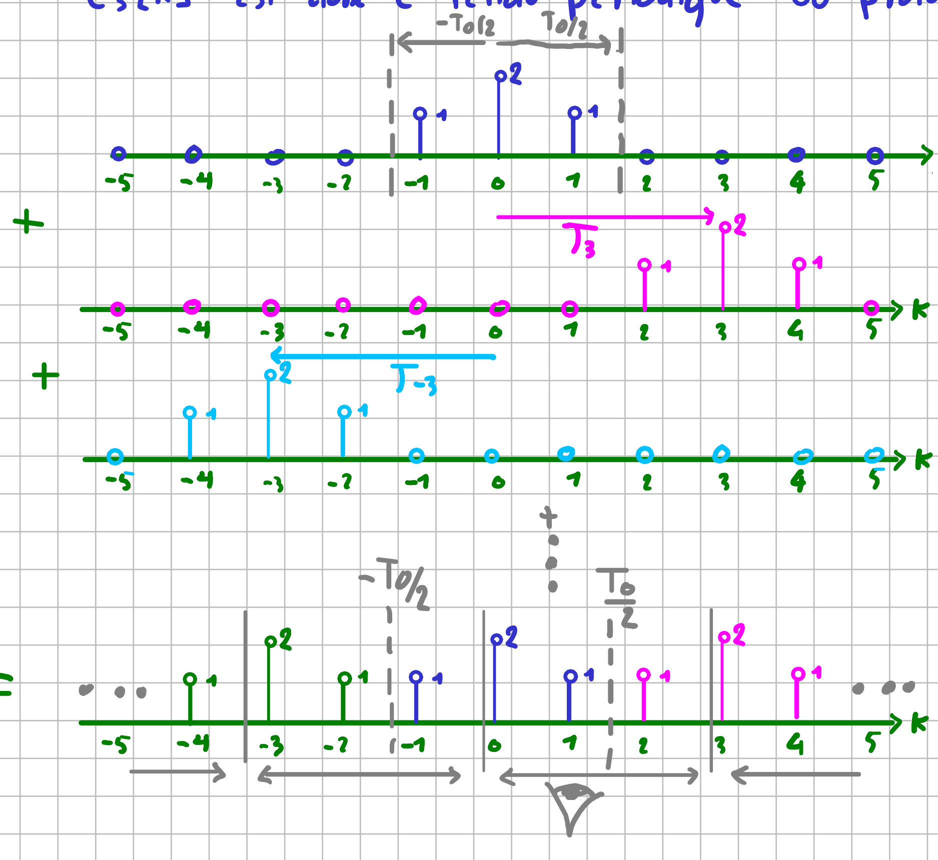
Donc $E(f) = 2 + 2\cos\left(2\pi \frac{f}{Fe}\right)$

Voir la vidéo " td2_exo2_1_dualité" pour avoir la tête bien faite plutôt que bien pleine et retrouver le formulaire ...

II\ 3) TFD 3 points

TFD N=3 ⇒ temporel discret 3 périodique et fréquentiel discret 3 périodique

$e_3[k]$ est donc "e" rendu périodique ou prolongé par périodicité :



Echantillonner 3 points en fréquence rend le temporel 3 périodique

Aucun contenu temporel au delà de $\pm \frac{To}{2}$

⇓

Pas de superposition de type ● + ● + ●

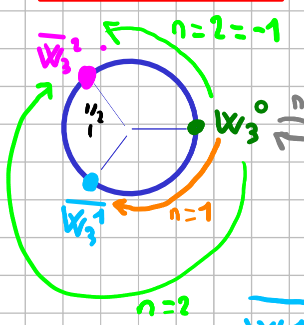
⇒ Pas de repliement temporel

C'est le dual de l'échantillonnage temporel et repliement de spectre pour les spectres au delà de $\pm \frac{Fe}{2}$

Shanon

Donc $e_3 = (2, 1, 1)_{B_c}$ dans la base canonique $(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$

TFD 3 points :



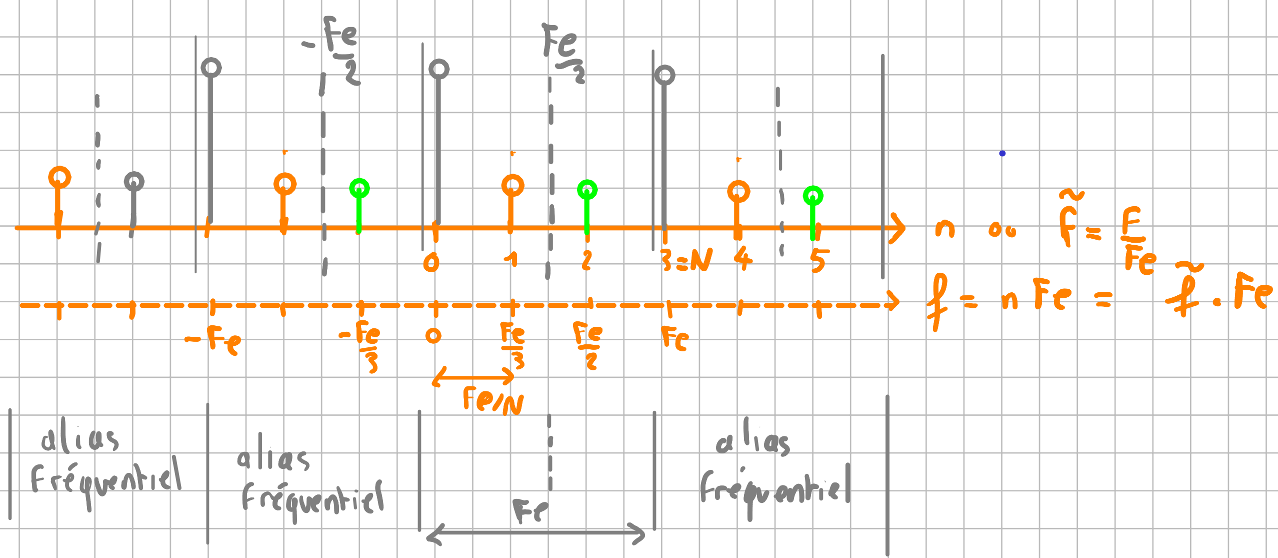
En calcul matriciel :

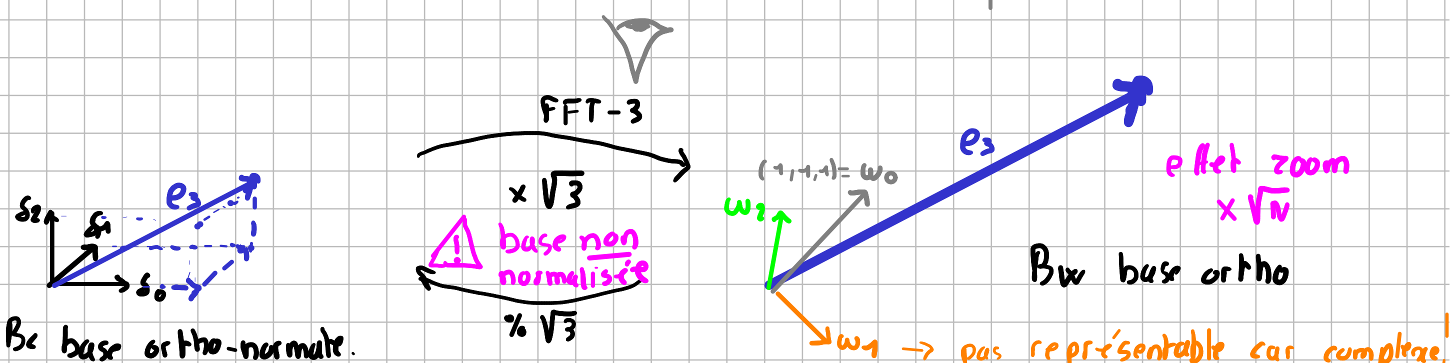
$$\begin{array}{l} n=0 \rightarrow \\ n=1 \\ n=2 \end{array}\begin{bmatrix} {}^T\overline{w_0} \\ {}^T\overline{w_1} \\ {}^T\overline{w_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{i2\pi}{3}} & e^{\frac{i2\pi}{3}} \\ 1 & e^{\frac{i2\pi}{3}} & e^{-\frac{i2\pi}{3}} \end{bmatrix}}_{P_{w\leftarrow B}} \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}_{Bc} = \begin{pmatrix} \langle e_3, w_0\rangle = 4 \\ \langle e_3, w_1\rangle = 1 = 2.1-1 \\ \langle e_3, w_2\rangle = 1 \end{pmatrix}_{Bw}$$

$\overline{W_3^1} = W_3^2$

et $\overline{W_3^1} + \overline{W_3^2} = -\frac{1}{2} + -\frac{1}{2} = -1$

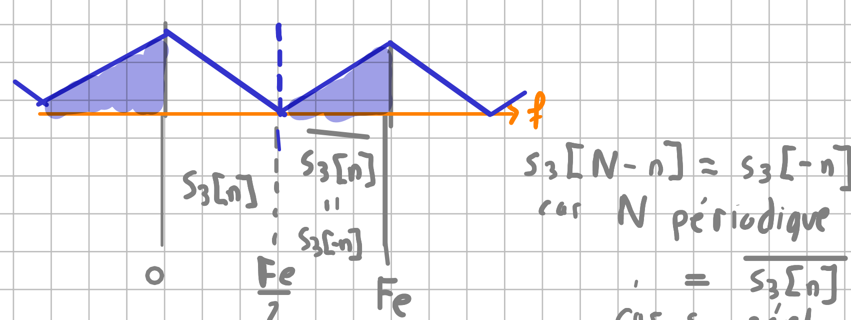
$B_w = (w_0, w_1, w_2)$





Vérif Hilbert :

$S_3[-n] = \overline{S_3[n]}$



$S_3[N-n] = S_3[-n]$ car N périodique

$= \overline{S_3[n]}$ car s_3 réel

Vérif Norme :

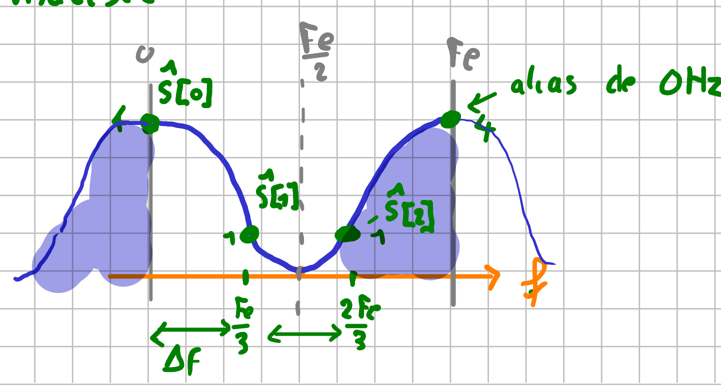
$$\|e_{3_{Bc}}\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\|^2 = 2^2+1^2+1^2 = 6 \xrightarrow[\times N=3]{} \|e_{3_{Bw}}\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}\right\|^2 = 4^2+1+1 = 18$$

$$\|e_3\|_{Bc} = \sqrt{6} \xrightarrow[\times\sqrt{N}=\sqrt{3}]{} \|e_{3_{Bw}}\| = \sqrt{18} = \sqrt{3}.\sqrt{6}$$

car base FFT non normalisée

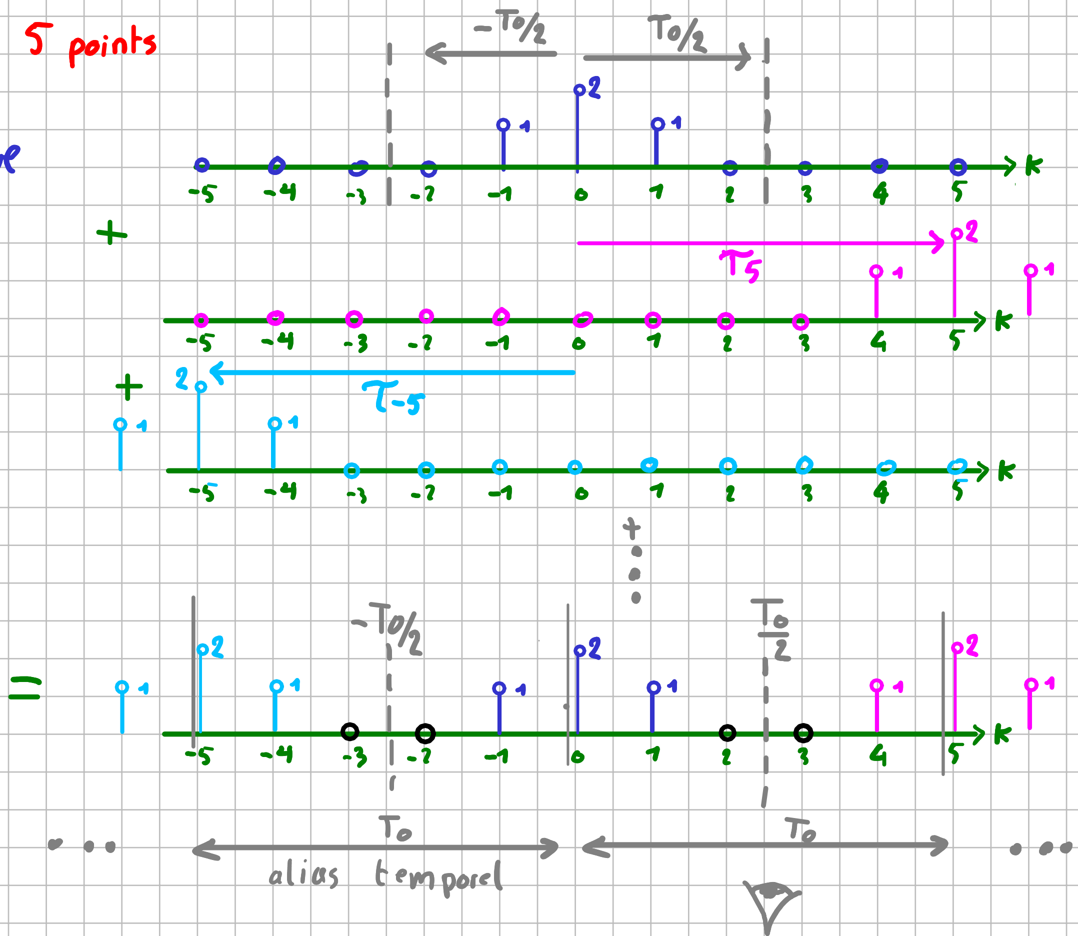
Vérif échantillonnage TFSD :

$\Delta F = \frac{Fe}{N} = \frac{Fe}{3}$



4) TFD 5 points

5 périodique

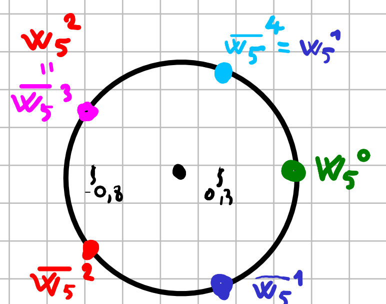


Toujours pas de signal au delà de $\pm\frac{T_0}{2} = \pm\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ pas de repliement temporel avec période 5 : Shanon ok

Donc $s_5 = (2, 1, 0, 0, 1)$ dans $B_c = (\vec{\delta_0}, \vec{\delta_1}, \vec{\delta_2}, \vec{\delta_3}, \vec{\delta_4})$

↳ gavage de zéros = zero padding

FFT-5 matriciel



$$W_5 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$$

$$P_{B_w \leftarrow B_c} = \begin{array}{c|c} & k=0 \quad k=1 \quad k=2 \quad k=3 \quad k=4 \\ \hline \begin{matrix} n=0 \\ n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \overline{W_5} & \overline{W_5^2} & W_5^2 & W_5 \\ 1 & \overline{W_5^2} & W_5 & \overline{W_5} & W_5^2 \\ 1 & W_5^2 & \overline{W_5} & W_5 & \overline{W_5^2} \\ 1 & W_5 & W_5^2 & \overline{W_5^2} & \overline{W_5} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_c} \begin{array}{c} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{array} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \\ 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \\ 2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \end{pmatrix}_{B_w} \begin{array}{c} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array}$$

conjugué $\frac{F_e}{2}$

$T_0/2$ conjugué

$$2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = W_5^1 + \overline{W_5}^1 \approx 2 \times 0{,}3$$

$$2 \cdot \cos\left(4\frac{\pi}{5}\right) = W_5^2 + \overline{W_5^2} \approx 2 \times -0{,}8$$

Vérif Hilbert : Voir le conjugué ✓ $\hat{s}_5[-n] = \hat{s}_5[N-n] = \overline{\hat{s}_5[n]}$

période N — signal réel

Vérif norme : $\|s_5\|_2^2 = \|s_3\|_2^2 = 2^2 + 1 + 1 = 6$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ↳ zero padding ne change pas l'énergie $\qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\hat{s}_5\|^2 = 4^2 + 2\left(2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 + 2\left(2 + 2\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^2$$

$$= 16 + 8\underbrace{\left[\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 + \left(1 + \cos\frac{4\pi}{5}\right)^2\right]}_{7/4}$$

$$= 16 + 8 \cdot \frac{7}{4} = 16 + 14 = 30 \checkmark$$

$$\sqrt{6}^2 \xrightarrow[\times 5 = N]{\times \sqrt{5}^2} (\sqrt{5}\sqrt{6})^2$$