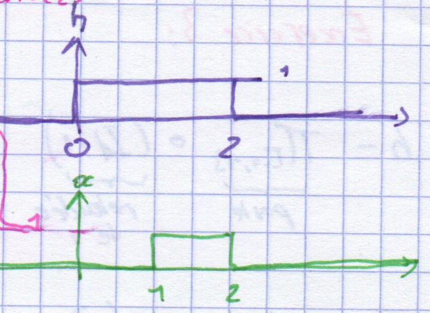
Exercice 3 : 1) et 2) en calcul direct

1)

$h = \Pi_{[-1,1]} \circ (Id - 1) = \Pi_{[0,2]}$

porte — retardée de 1

Erreur ici $1 \neq 2$ mais facilement corrigée à (C) la suite



$x = \Pi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \circ \left(Id - \frac{3}{2}\right) = \Pi_{[1,2]}$

porte — retardée de 1,5

2) $h * x = x * h$, il semble plus facile de "retourner" puis "retarder" h que x

Donc calcul de $x * h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot h(\tau - t) \cdot dt$ vérif retourné

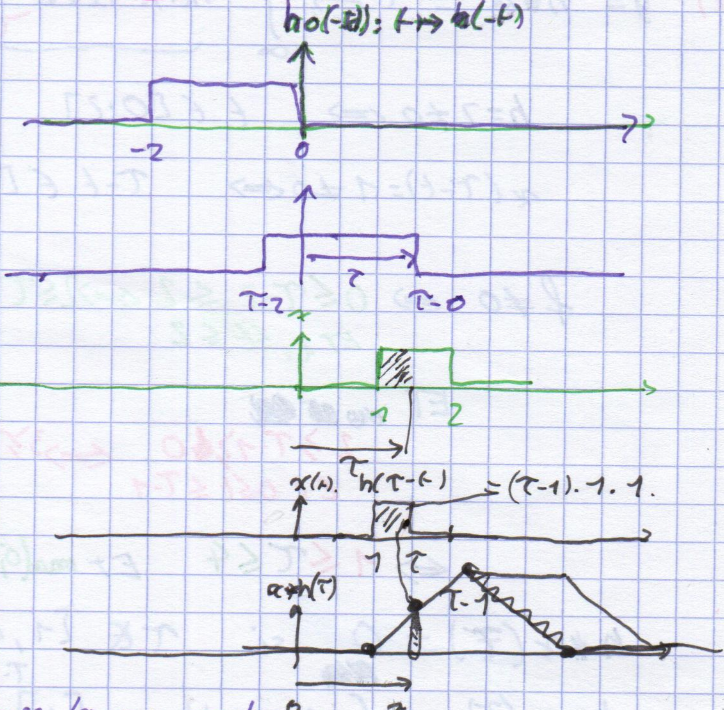
$x \circ (-Id)(t) = x(-t)$ "retourner" $\circ(-Id)$ $\circ(S_0)$

"retarder" $\circ(Id - \tau)$

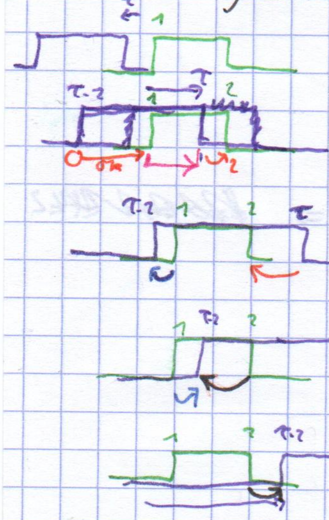
"projeter sur x" avec $\langle x, t \mapsto h(\tau - t) \rangle$

$\langle x, h \circ (Id - \tau) \circ (-Id) \rangle$

$x * h(\tau) = \langle x, h \circ (\tau - Id) \rangle$



Par disjonction de cas : "On sépare les cas graphiquement"



$\tau \leq 1 \Rightarrow x * h = 0$

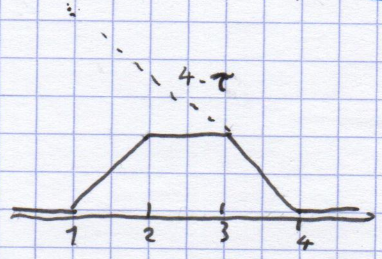
$1 < \tau$ et $\tau < 2 \Rightarrow x * h(\tau) = \int_1^\tau 1 \cdot dt = \tau - 1$ pour $1 < \tau \leq 2$

$\tau - 2 < 1$ et $\tau \geq 2 \Rightarrow x * h(\tau) = \int_1^2 1 \cdot dt = 1$ pour $2 < \tau \leq 3$

$\tau - 2 \geq 1$ et $\tau - 2 \leq 2 \Rightarrow x * h(\tau) = \int_{\tau-2}^2 1 \cdot dt = 4 - \tau$ pour $3 < \tau \leq 4$

$\tau - 2 \geq 2 \Rightarrow x * h(\tau) = 0$

Donc $x * h = h * x : \tau \to \begin{cases} \tau - 1 & \text{si } \tau \in]1,2] \\ 1 & \text{si } \tau \in]2,3] \\ 4 - \tau & \text{si } \tau \in]3,4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



Ou bien $u * u = r$

$* \text{ est linéaire !}$

$x * h = (t \mapsto \underbrace{u(t-1)}_{u_1} - \underbrace{u(t-2)}_{u_2}) * (t \mapsto u(t) - \underbrace{u(t-2)}_{u_2}) = (u_1 - u_2) * (u - u_2) = u_1 * u - u_1 * u_2 - u_2 * u + u_2 * u_2$

$x * (h \circ (Id - \delta)) = (x * h) \circ (Id - \delta)$ car linéaire

$u * u_1 = (u * u) \circ (Id - 1)$

$u_1 * u_2 = (u * u) \circ (Id - 1) \circ (Id - 2) = u * u \circ (Id - 3)$

Exercice 3 — 2) correction et calcul "par propriété"

Correction

Ⓒ On a prit $x = \Pi_{[1,2]}$ au lieu de $x' = 2\,\Pi_{[1,2]}$

par grave car $*$ est bilinéaire sur l'espace vectoriel des fonc$^{\circ}$ à droite et à gauche.

donc "+" des fonctions et $\times \lambda \in \mathbb{R}$ "×" scalaire de fonctions.

Donc $x' * h = (2.x) * h = 2.(x * h)$

Il suffit de multiplier le résultat par 2...

$h * x' = h * (2x) = (h * x).2$ (à droite aussi).

Calcul par propriétés et "tables"

Comme pour laplace et fourrier $*$ linéaire et "se compose avec un retard" Ⓡ

Donc on décompose les signaux en signaux de base.

$$x * h = (u \circ (Id-1) - u(Id-2)) * (u - u_0(Id-2))$$

$$(t \mapsto \underbrace{u(t-1)}_{} \underbrace{- u(t-2)}_{\text{on note } u_2(t)}) * (t \mapsto u(t) - \underbrace{u(t-2)}_{\text{on note } u_2(t)})$$

$*$ bilinéaire donc :

$$x * h = (u_1 - u_2) * (u - u_2) \underset{\text{lin. à droite}}{=} (u_1 - u_2) * u - (u_1 - u_2) * u_2$$

$$\underset{\text{lin. à gauche.}}{=} u_1 * u - u_2 * u - u_1 * u_2 + u_2 * u_2$$

Ⓡ $*$ distribution du retard $\circ(Id - a)$ à droite et à gauche. (voir Démo en bas)

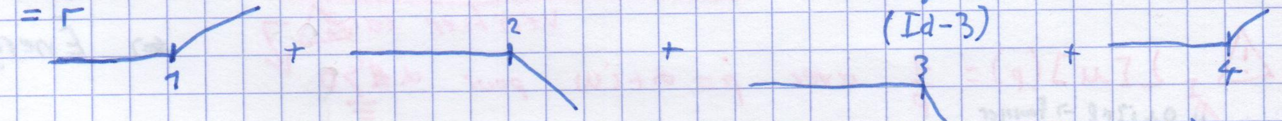
$\forall (x,y)$ $(x \circ (Id-a)) * h = (x * y) \circ (Id - a)$ ET $x * (y \circ (Id-a)) = (x * y) \circ (Id-a)$

d'où $u_a * u = (u \circ (Id-a)) * u = (u * u) \circ (Id-a)$

"produit d'un retard de a" = "retard de u du produit"

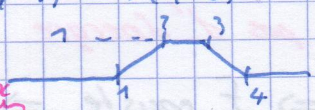
$u_a * u = u * u_a$

$$x * h = \underbrace{(u * u)}_{= r} \circ (Id-1) - (u * u) \circ (Id-2) - (u * u) \circ \underbrace{(Id-1) \circ (Id-1)}_{(Id-3)} + r \circ (Id-4)$$



$u * u = r = Id . u : t \mapsto t.u(t)$ vu en exo 1. (ou dans la table)

On retrouve $x * h(t) = r(t-1) - r(t-2) - r(t-3) + r(t-4)$



Démo

Ⓡ $x * y_a(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot y_a(\tau - t).dt = \int_{\mathbb{R}} x(t) \cdot y(\overbrace{\tau - t - a}^{\tau'}).dt = x * y(\tau')$

$y_a : x \mapsto y_a(x-a)$

$= x * y(\tau - a)$

Comme $x * y_a = y_a * x$

On a distribution du retard à gauche | ou calcul avec change^t variable $t' = t - a$

Exercice 3 : En fréquentiel Laplace et Fourrier

Laplace : Même décomposition des signaux en signaux de base...

avec u : $x = \Pi[1,2] = u_0(Id-1) - u_0(Id-2) = u_1 - u_2$

$\mathcal{L}$

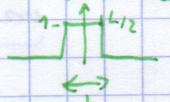
$\underbrace{\mathcal{L}[x](p)}_{X} = X(p) \Rightarrow \mathcal{L}[u_1] - \mathcal{L}[u_2] = \mathcal{L}[x]$ linéaire

$\Rightarrow \mathcal{L}[u](p).\, e^{-p} - \mathcal{L}[u].\, e^{-2p} = \mathcal{L}[x](p)$ Th. retard

donc $X(p) = \frac{1}{p}\left(e^{-p} - e^{-2p}\right) = \frac{e^{-p\frac{3}{2}}}{p}\left(e^{p/2} - e^{-p/2}\right)$

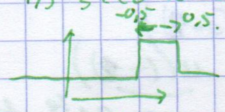
avec Π

Ou bien $\mathcal{L}\left[\Pi_{[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]}\right] = L.\sinh\left(\frac{pL}{2}\right)$ $= e^{-p\frac{3}{2}} \frac{\sinh(p/2)}{2.\,p/2}$



$X(p) = \underbrace{e^{-p^{3/2}}}_{\text{retard de 1,5 sec}} . \underbrace{\operatorname{sinch}(p/2)}_{\text{Laplace de } \Pi[-1/2\,;\,\frac{1}{2}],\ L=1}$

retardé de 1,5 secondes avec $L=1$



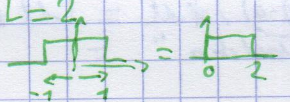
$L\,\operatorname{sinhc}\left(\frac{pL}{2}\right)\ \mathcal{L}\left[\Pi_{\underbrace{[-\frac{L}{2};\frac{L}{2}]}_{L}}\right]$

De même $H(p) = \underbrace{\frac{1}{p}}_{\mathcal{L}[u]}\left(\underbrace{1}_{\text{retard } 0} - \underbrace{e^{-2p}}_{\text{retard } 2s}\right)$ avec $h(t) = u(t) - u(t-2)$

Avec u

$= \frac{e^{-p}}{p} 2 \underbrace{\left(\frac{e^{p} - e^{-p}}{2}\right)}_{\sinh(p)} = e^{-p}\, 2.\frac{\sin(p)}{p} = e^{-p} \underbrace{\overset{L}{2} \sinh\left(p.\frac{L}{\underset{2}{2}}\right)}_{\mathcal{L}[\Pi_{[-1,1]}],\ L=2}$

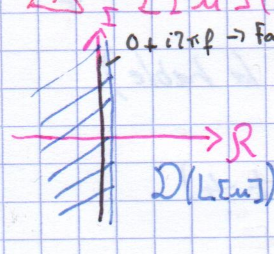
Avec Π : $H(p) = e^{-p}.\, L\sinh c\left(\frac{pL}{2}\right) = e^{-p}\, 2\, \frac{\sin(p)}{p}$

retard 1s de 

Fourrier $X(f)$ et $H(f)$ existent car $x, h \in L_2 \Leftrightarrow \int_0^t |x(\tau)|^2 . d\tau$ CV

vérifier car ⚠ $\Leftrightarrow$ Énergie finie

⚠ $\mathcal{L}[u](p) = \frac{1}{p}$ avec $p = \alpha + i\omega$ pour $\alpha > 0$

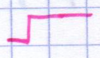


$0 + i2\pi f \to$ Fourrier

$\mathcal{D}(\mathcal{L}[u])$

donc on ne peut pas dire $\mathcal{F}[u](f) = \mathcal{L}[u](p = i2\pi f)$

car $\alpha = 0 \Rightarrow$ NON $\alpha > 0$ et $p \notin \mathcal{D}[\mathcal{L}[u]]$

 n'est pas d'énergie finie !

En revanche x et $h \in L_2 \Rightarrow \mathcal{F}$ existe $\Rightarrow$ $\alpha = 0 + i\omega \in \mathcal{D}[\mathcal{L}[x]]$ et donc

ça marche ! $\mathcal{F}[x](f) = \mathcal{L}[x](p = i2\pi f) = e^{-i\frac{3}{2}2\pi f} . \operatorname{sinch}\left(\frac{i2\pi f}{2}\right) = \frac{1}{j2\pi f}\left(e^{-j2\pi f} - e^{-i4\pi f}\right)$

$\operatorname{sinch}(i\alpha) = \operatorname{sinc}(\alpha)$
$\sinh(i\alpha) = i\sin(\alpha)$
$\cosh(i\alpha) = \cos(\alpha)$ $\rightarrow$ Euler

$\mathcal{F}[h](f) = \mathcal{L}[h](p = i2\pi f) = e^{-i2\pi f} . \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi f}{2}\right) = \frac{1}{j2\pi f}\left(1 - e^{-4i\pi f}\right)$

4) Convolution par fréquentiel (Filtrage)

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\mathcal{L}} & X \\ * & & * \\ h & \xrightarrow{\mathcal{L}} & H \\ \hline x*h & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & X.H \end{array}$$

calcul direct

temporel — Calcul en fréquentiel

$$x * h = \mathcal{L}^{-1}[X.H]$$

$$X.H(p) = \left(\frac{1}{p}\left(e^{-p} - e^{-2p}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{p}\left(1 - e^{-2p}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{p^2}}_{\mathcal{L}[r]} \left(\underbrace{e^{-p} - e^{-2p} - e^{-3p} + e^{-4p}}_{\text{retards}}\right)$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $x*h(t) = r(t-1) - r(t-2) - r(t-3) + r(t-4)$

Comme $\mathcal{F}[x]$ et $\mathcal{F}[h]$ existent car x et h sont de $\| \|_2$ finie

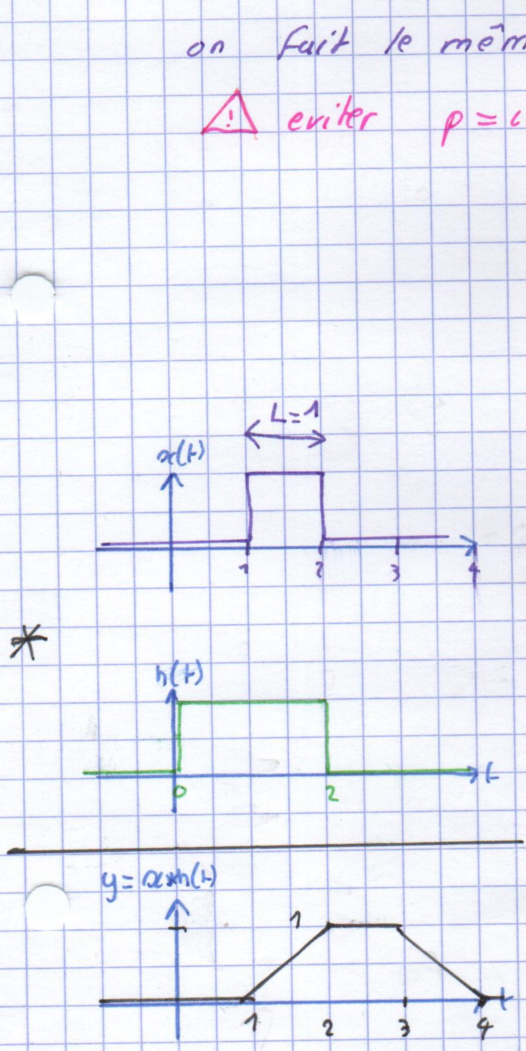
on fait le même calcul avec $p = i2\pi f$

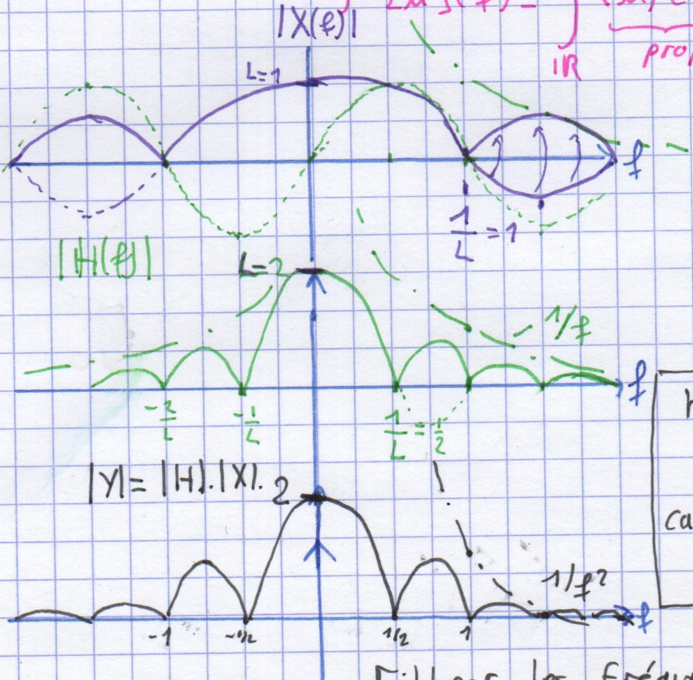
⚠ éviter $p = i\omega$ avec Fourrier ! car piège $\mathcal{F}^{-1}[u](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} U(\omega) e^{\dots}$

alors que $\mathcal{F}^{-1}[u](f) = \int_{\mathbb{R}} U(f).e^{+i2\pi\dots} d\dots$

Soit $\mathcal{F}[u](f) = \langle u, f \mapsto e^{i2\pi ft} \rangle_{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{F}^{-1}[u](f) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\langle u, e^{i2\pi ft} \rangle}_{\text{projection}} \cdot \underbrace{e^{i2\pi ft}}_{\substack{\text{vecteur} \\ \text{de la} \\ \text{base } \mathcal{H}}} . dt$$





h = réponse impulsionnelle du filtre.
car si $x = \delta_0$
$y = h * \delta_0 = h$

Convoluer dans le temps $\longleftrightarrow$ Filtrer les fréquences.