Problemas de Series de Fourier

MMF II: Grupo I

`http://euler.us.es/~renato/clases.html`

1. Generalidades

Definición 1.1 *Se dice que un espacio vectorial* $\mathbb{E}$ *es un espacio euclídeo si dados dos elementos cualesquiera* $x, y \in \mathbb{E}$ *existe un número denominado producto escalar y que denotaremos por* $\langle x, y\rangle$ *tal que*

1. *Para todos* $x, y \in \mathbb{E}$, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
2. *Para todos* $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
3. *Para todos* $x, y \in \mathbb{E}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
4. *Para todo* $x \in \mathbb{E}$, $x \neq 0$, $\langle x, x\rangle > 0$ *y si* $\langle x, x\rangle = 0$, *entonces* $x = 0$.

Definición 1.2 *Un espacio vectorial* $\mathbb{X}$ *se denomina espacio normado si para todo* $x \in \mathbb{E}$ *existe un número real denominado norma y que denotaremos por* $\|x\|$ *que cumple con las condiciones*

1. *Para todo* $x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. *Para todo* $x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
3. *Para todos* $x, y \in \mathbb{X}$ *se tiene la desigualdad triangular*
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{1}$$

Definición 1.3 *Dado un vector* $x \in \mathbb{X}$ *definiremos la serie de Fourier respecto al sistema* $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a la serie*

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \tag{2}$$

donde los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$c_n = \frac{\langle x, \phi_n\rangle}{\|\phi_n\|^2}, \quad \forall n \geq 1. \tag{3}$$

Definición 1.4 *Dada* $f \in \mathbb{X}$ *se dice y una sucesión* s_n, *se dice que* s_n *converge en norma a* f *si*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|^2 = 0. \tag{4}$$

Teorema 1.5 *Sea* $\mathbb{X}_n$ *el subespacio lineal de* $\mathbb{X}$ *generado por los vectores* $\{\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *i.e.,* $\mathbb{X}_n$ *es la envolvente lineal* $\mathrm{Span}\,(\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_n)$. *Entonces*

$$\min_{q\in\mathbb{X}_n} ||x - q||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|\phi_k\|^2$$

donde c_k *son los coeficientes definidos en (3) y se alcanza cuando* q *es la suma parcial de la serie de Fourier (2)*

$$q = s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k.$$

1.1. Problemas

Problema 1.1 *Demuestra que en el espacio de las funciones continuas definidas en* $[a, b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

define un producto escalar.

Problema 1.2 *Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz* $|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$ *y que la igualdad sólo tiene lugar si* $f(x) = \alpha g(x)$.

Comprueba, utilizando lo anterior, que efectivamente en $\mathbb{E}$, $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ *define una norma.*

Problema 1.3 *Demuestra la desigualdad de Bessel* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\phi_k\|^2 \leq \|x\|^2$, *donde* c_k *son los coeficientes de Fourier de* f.

Usando lo anterior prueba que la serie de Fourier converge en norma si y sólo si $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \|\phi_k\|^2 = \|x\|^2$. *La igualdad anterior se denomina identidad o igualdad de Parseval.*

Problema 1.4 *Prueba que si todo* $x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{X}$, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, \phi_k \rangle}{\|\phi_k\|^2} \phi_k$, *entonces se tiene para todo* $x \in \mathbb{E} \subset \mathbb{X}$ *la igualdad de Parseval.*

Prueba que si es cierta la igualdad de Parseval y $\langle x, \phi_k \rangle = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *entonces* $x = 0$.

2. Cálculo de series de Fourier

2.1. La serie trigonométrica de Fourier

Definición 2.1 *Dada una función de cuadrado integrable y periódica* $f(x)$ *en* $[-\pi, \pi)$ *definiremos la serie trigonométrica de Fourier por*

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \tag{5}$$

donde los coeficientes vienen dados por las expresiones

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \tag{6}$$

para $n \geq 0$. *A la suma*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

la denominaremos suma parcial de la serie.

Definición 2.2 *Diremos que una función $f(x)$ cumple las condiciones de Dirichlet en el intervalo $(-\pi, \pi)$ si:*

1. *La función f está uniformemente acotada en $(-\pi, \pi)$; o sea, si existe una constante positiva M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in (-\pi, \pi)$*

2. *La función f sólo tiene un número finito de puntos de discontinuidad y todos ellos de naturaleza evitable, es decir:*

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(x_0 - \epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} f(x_0 + \epsilon), \quad \epsilon > 0, \ \forall x_0 \in (-\pi, \pi)$$

3. *La función $f(x)$ tiene un número finito de extremos estrictos.*

Teorema 2.3 *Si una función cumple con las condiciones de Dirichlet en el intervalo $(-\pi, \pi)$ entonces en cualquier punto de ese intervalo en que $f(x)$ sea continua ésta se puede desarrollar en la serie de Fourier (5), donde los coeficientes vienen dado por (6). Además, la serie converge en cada punto x a la semisuma de los límites laterales, o sea para todo $x \in (-\pi, \pi)$ y para $\epsilon > 0$ tenemos:*

$$\lim_{N \to \infty} s_n(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x-\epsilon) + f(x+\epsilon)}{2},$$

y en los extremos la serie tiende a $\lim_{\epsilon \to 0} \dfrac{f(-\pi+\epsilon) + f(\pi-\epsilon)}{2}$.

2.2. Problemas

Problema 2.1 *Encuentra la serie de Fourier de las siguientes funciones extendiendolas de forma periódica a todo el eje real:*

1. $f(x) = \begin{cases} A & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$
2. $f(x) = |x|$ en $[-\pi, \pi]$
3. $f(x) = ax$ en $[-\pi, \pi]$
4. $f(x) = ax^2$ en $[-\pi, \pi]$
5. $f(x) = ax^2$ en $[0, 2\pi]$
6. $f(x) = e^{\alpha x}$ en $[-\pi, \pi]$
7. $f(x) = |\sin x|$ en $[-\pi, \pi]$
8. $f(x) = \cosh x$ en $[-\pi, \pi]$
9. $f(x) = \sinh x$ en $[-\pi, \pi]$

Como aplicación de lo anterior muestra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{16}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Problema 2.2 *Demuestra que si el periodo de la función es T entonces la serie de Fourier se escribe mediante la fórmula*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi kx}{T} + b_k \cos\frac{2\pi kx}{T},$$

donde

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\frac{2\pi kx}{T}dx, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\frac{2\pi kx}{T}dx.$$

Como aplicación calcula las series de Fourier de las funciones

1. $f(x) = \begin{cases} A & \text{si } 0 < x < T/2 \\ 0 & \text{si } T/2 < x < T \end{cases}$

2. $f(x) = ax$ en $[0, T]$

Problema 2.3 *Supongamos que los coeficientes de Fourier de una función $f(x)$ vienen dados por las sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$. ¿Cuáles son los coeficientes de la función trasladada $f(x+h)$, $h \in \mathbb{R}$?*

Como aplicación calcula los coeficientes de Fourier $f(x) = |\cos x|$ usando el resultado del problema anterior.

Una colección más exaustiva de problemas se puede encontrar en los libros:

1. I. I. LIASHKÓ, A. K. BOIARCHUK, Iá. G. GAI y G. P. GOLOVACH, Matemática Superiores. Problemas Resuetos (Anti-Demidovich) Vol III. (Series y Cálculo diferencial para funciones de varias variables) (URSS, 1999).

2. B. DEMIDOVICH, *5000 problemas de Análisis Matemático* (Paraninfo, 1980).

3. L. D. KUDRIÁTSEV, A. D. KUTÁSOV, V. I. CHEJLOV y M. I. SHABUNIN, Problemas de Análisis Matemático: Integrales y Series (Mir-Rubiños, 1992).

3. Convergencia uniforme de la serie de Fourier

Definición 3.1 *Diremos que la serie de Fourier converge puntualmente a* f *en* x_0 *si la sucesión de sus sumas parciales* $S_n f(x)$ *converge puntualmente a* $f(x)$ *en* $x_0 \in [-\pi, \pi]$*, es decir, si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$

$$|f(x_0) - S_n f(x_0)| < \epsilon.$$

Si $S_n f(x)$ *converge puntualmente para todo* $x \in (a, b)$ *entonces diremos que la serie de Fourier coverge puntualmente en* (a, b) *y lo denotaremos por* $f_n \longrightarrow f$*.*

Lo anterior se puede escribir como sigue: $f_n \longrightarrow f$ si para todo $\epsilon > 0$ y cada $x \in (a, b)$ existe un $N \in \mathbb{N}$ (en general dependiente de x y ϵ) tal que para todo $n > N$

$$|f(x) - S_n f(x)| < \epsilon.$$

Definición 3.2 *Diremos que la serie de Fourier converge uniformemente a* f *en* $(a, b) \subset [-\pi, \pi]$*, y lo denotaremos por* $f_n \rightrightarrows f$*, si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *(independiente de* x*) tal que para todo* $n > N$ *y todo* $x \in (a, b)$

$$|f(x) - S_n f(x)| < \epsilon.$$

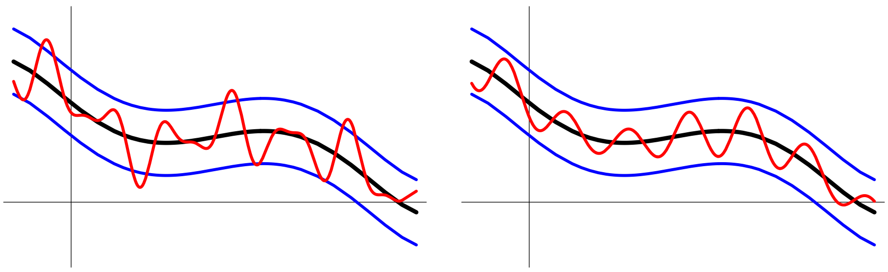

Figura 1: Convergencia no uniforme (izquierda) y uniforme (derecha)

Teorema 3.3 *Sea* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *una función* 2π*-periódica continua y con derivada continua en* $[-\pi, \pi]$*. Entonces*

1. *La serie de Fourier de* f' *se obtiene derivando término a término la serie (5) de* f*.*

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < +\infty.$

3. *La serie de Fourier (5) converge uniformemente a* f *en* $[-\pi, \pi]$*.*

4. *La serie de Fourier se puede integrar término a término.*

4. Aplicaciones a las EDPs

4.1. Ecuación de ondas

Usando separación de variables resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \qquad \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

En los siguientes casos:

1. Cuando el perfil inicial de una cuerda viene dado por la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{Ax}{a} & 0 \leq x \leq a \\ \dfrac{A(\pi - x)}{\pi - a} & a \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

y que inicialmente está en reposo, es decir, $g(x) = 0$.

2. Cuando el perfil inicial de una cuerda viene dado por la función

$$f(x) = \alpha x(\pi - x)$$

y que inicialmente está en reposo, es decir, $g(x) = 0$.

3. Cuando el perfil inicial y la velocidad inicial de la cuerda viene dado por las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \dfrac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ \pi - x & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = 0.$$

4. Cuando el perfil inicial y la velocidad inicial de la cuerda viene dado por las funciones $f(x) = 0$,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{v_0 x}{a} & 0 \leq x \leq a \\ \dfrac{v_0(\pi - x)}{\pi - a} & a \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

4.2. Ecuación del calor

Usando separación de variables resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

En los siguientes casos:

1. Cuando $f(x) = T_0$,
2. Cuando $f(x) = \alpha x(\pi - x)$,
3. Cuando $f(x) = \beta(x - \frac{\pi}{2})$.

4.3. Ecuación del telégrafo

Usando separación de variables resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t) = a^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0. \end{cases}$$

En los siguientes casos:

1. Cuando $f(x) = \alpha x(\pi - x)$,
2. Cuando $f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \alpha(\pi - x), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$

4.4. Problema de Dirichlet en $\mathbb{R}^2$

4.4.1. En el cuadrado

Usando separación de variables resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) = 0, \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u(x,\pi) = g(x), \end{cases}$$

en los siguientes casos

1. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = 0$
2. $f(x) = x(\pi - x)$, $g(x) = 0$
3. $f(x) = x(\pi - x)$, $g(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \alpha(\pi - x), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$

4.4.2. En el círculo

Usando separación de variables resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}u(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}u(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}u(r,\theta) = 0, \\ u(1,\theta) = f(\theta) \end{cases}$$

siendo $u(r,\theta)$ una función continua y acotada en el cículo definido por $r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, y 2π-periódica en θ para los siguientes casos

1. $f(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta < \pi \\ -1 & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$,

2. $f(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta < \pi \\ 0 & -\pi < \theta < 0 \end{cases}$,

3. $f(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}$.