Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale 14.06.2022

Informatică anul II, grupa 2, evaluare parţială

1. **(15p)** Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-ax} \cdot \cos x$$

în funcţie de parametrul a.

2. (a) **(10 p)** Dacă

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{1 + y^2(x)} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

să se calculeze $y(-1)$, $y'(-1)$ şi $y''(-1)$.

(b) **(15 p)** Fie $r > 0$ şi $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se studieze existenţa soluţiei problemei Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = |y(x)| - f(x) \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

prin enunţarea rezultatului teoretic aplicat şi verificarea ipotezelor din enunţul rezultatului.

3. (a) **(20 p)** Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = v + e^{-2x} \\ v' = y + e^{-x}. \end{cases}$$

(b) **(15 p)** Fie $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \ln 3) \\ e^{-2x}, & x \in [\ln 3, +\infty). \end{cases}$ Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = f \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

determinând soluţia o funcţie continuă.

4. **(15p)** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul I,

$$(1 + x_1) \cdot u'_{x_1} + (2 + x_2) \cdot u'_{x_2} + ... + (n + x_n) \cdot u'_{x_n} = u, \quad u = u(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Notă: se acordă 10 puncte din oficiu.

Examinator,
Lector univ. dr. Marcel Bogdan

Examen Partial

1. $y'' + 2y' + 2y = e^{-ax} \cdot \cos x$

ec. caracteristică: $r^2 + 2r + 2 = 0$ $\Delta = 4 - 8 = -4 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

$\Rightarrow Y_0 = \{ e^{-x} \cos x, e^{-x} \sin x \} \Rightarrow y_0 = C_1 \cdot e^{-x} \cos x + C_2 \cdot e^{-x} \sin x$

y de forma: $y_p(x) = A \cdot e^{-ax} \cos x + B e^{-ax} \sin x$

~~când $a \neq 1$~~

$y_p' = -a A \cos x \, e^{-x} - A e^{-ax} \sin x - Ba \, e^{-ax} \sin x + B \, e^{-ax} \cos x$

$= e^{-ax} ((B - aA) \cdot \cos x - (A + Ba) \sin x)$

$y_p'' = e^{-ax} ((a^2 A - Ba - A - aB) \cos x + (aA + Ba^2 + Aa - B) \sin x)$

$\Rightarrow y_p'' + 2y_p' + 2y_p = e^{-ax} \cos x$ din calcule și egalare de coeficienți, obținem sistemul:

$$\begin{cases} a^2 A - Ba - A - Ba + 2B - 2aA + 2A = 1 \\ aA + Ba^2 + aA - B - 2A - 2Ba + 2B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(a-1)^2 - 2B(a-1) = 1 \\ B(a-1)^2 + 2A(a-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow 2A(a-1) = -B(a-1)^2$$

$\Rightarrow A = \frac{-B(a-1)^2}{2(a-1)}$

pt $a \neq 1 \Rightarrow$ $A = -\frac{B(a-1)}{2}$ înlocuim în prima

$\Rightarrow -\frac{B(a-1)^3}{2} - 2B(a-1) = 1 \quad | \cdot (-1) \Rightarrow$

$(a-1)(B(a^2 - 2a + 5)) = -2 \Rightarrow B = \frac{-2}{(a^2 - 2a + 5)(a-1)}$

$A = \frac{1}{a^2 - 2a + 5}$

$\Rightarrow$ pt $a \neq 1 \Leftrightarrow y(x) = C_1 \cdot e^{-x} \cos x + C_2 \cdot e^{-x} \sin x + \frac{1}{a^2 - 2a + 5} \cdot e^{-x} \cos x - \frac{2}{(a^2 - 2a + 5)(a-1)} \cdot e^{-x} \sin x$

pt $a = 1$ y_p e de forma $y_p(x) = A \cdot x \cdot e^{-ax} \cos x + B \cdot x \cdot e^{-x} \sin x$

$y_p'(x) = e^{-x} (\sin(x) \cdot (B - Ax - Bx) + \cos x (A + Bx - A(x)))$

$y_p''(x) = -2e^{-x} (\sin(x) \, (A + B - Ax) + \cos x (A + Bx - B))$

$\left(-2A - \cancel{2B} + \cancel{2Ax} + \cancel{2B} - \cancel{2Ax} - \cancel{2Bx} + \cancel{2Bx} \right) \sin x + \left(-\cancel{2A} - \cancel{2Bx} + 2B + \cancel{2A} + \cancel{2Bx} - \cancel{2Ax} + \cancel{2Ax} \right) \cos x = \cos x$

$2A = 0$

$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y(x) = \begin{cases} C_1 \cdot e^{-x} \cos x + C_2 \cdot e^{-x} \sin x + \frac{1}{a^2 - 2a + 5} \cdot e^{-x} \cos x - \frac{2}{(a-1)(a^2 - 2a + 5)} e^{-x} \sin x, & a \neq 1 \\ C_1 \cdot e^{-x} \cos x + C_2 \cdot e^{-x} \sin x + \frac{1}{2} e^{-x} \cos x, & a = 1 \end{cases}$$

2. a) $\begin{cases} y'(x) = \sqrt{1+y^2(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = 1 \;\Big|\int dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int dx$

$\Rightarrow \ln(y + \sqrt{1+y^2}) = \ln e^x + \ln C \Rightarrow y + \sqrt{1+y^2} = e^x \cdot C$

dar $y(0) = 0 \Rightarrow 0 + \sqrt{1+0} = C \Rightarrow C = 1$

$\Rightarrow y + \sqrt{1+y^2} = e^x \Rightarrow \sqrt{1+y^2} = e^x - y \;\Big|^2 \Rightarrow 1 + \cancel{y^2} = e^{2x} - 2e^x y + \cancel{y^2}$

$\Rightarrow 2e^x y = -1 + e^{2x} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$y(-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - e\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^2}{e}\right)$

$y'(-1) = \sqrt{1+y(-1)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1-e^2}{e}\right)^2}$

$y' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\; y'' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Rightarrow y'' = y \Rightarrow y''(-1) = y(-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^2}{e}\right)$

b) $r > 0$, $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ continuă $\begin{cases} y'(x) = |y(x)| - f(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

La asta demonstrăm că operatorul ~~Lambda~~ Volterra e Lipschitz și că e contracție, apoi că soluția e din șirul iteratelor Picard (asta nu cred că trebuie) în raport cu norma Bielecki

$y' = |y(x)| - f(x) \;\Big|\int_0^x$

$\Rightarrow \int_0^x y'(s)ds = \int_0^x (|y(s)| - f(s))\,ds \Rightarrow y(s)\Big|_0^x = \int_0^x (|y(s)| - f(s))\,ds \Rightarrow$

$y(x) - y(0) = \int_0^x (|y(s)| - f(s))\,ds \Rightarrow A\,y(x) = \int_0^x |y(s)| - f(s)\,ds + 1$

evaluăm $|(A(y) - A(z))(x)| = \int_0^x |y(s)| - |z(s)|\,ds$ ($f(s)$ și 1 se reduc)

$\Rightarrow |A(y) - A(z)(x)| = \left|\int_0^x |y(s)| - |z(s)|\,ds\right| \leq \int_0^x |(y-z)(s)|\,ds \leq \int_0^x \|y-z\|_C\,ds$

$= \|y-z\|_C \cdot \int_0^x ds = \|y-z\|_C \cdot x \leq r \cdot \|y-z\|_C \Rightarrow r > 0 \Rightarrow A$ e lipschitz

revenim la evaluarea $|(A(y) - A(z))(x)| \leq \int_0^x |(y-z)(s)|\,ds = \int_0^x |(y-z)(s)| \cdot e^{-\tau s} \cdot e^{\tau s}\,ds$

$\leq \int_0^x \|y-z\|_B \cdot e^{\tau s}\,ds = \|y-z\|_B \cdot \int_0^x e^{\tau s}\,ds = \|y-z\|_B \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{\tau s}\Big|_0^x$

$= \|y-z\|_B \cdot \frac{1}{\tau} \cdot (e^{\tau x} - 1) \leq \|y-z\|_B \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{\tau x}$

$\Rightarrow |(A(y) - A(z))(x)| \leq \frac{1}{\tau} \cdot \|y-z\|_B \cdot e^{\tau x} \Rightarrow |(A(y) - A(z))(x)| \cdot e^{-\tau x} \leq \frac{1}{\tau} \cdot \|y-z\|_B \Rightarrow$

$\|A(y) - A(z)\|_B \leq \frac{1}{\tau} \cdot \|y-z\|_B$ dar $\tau > 1$ A e contracție, deci $\tau = 2 \Rightarrow$

am f continuă și A contracție în raport cu norma Bielecki $\Rightarrow$ soluția problemei Cauchy există

3. a) $\begin{cases} y' = z \\ z' = v + e^{-2x} \\ v' = y + e^{-x} \end{cases} \Rightarrow y'' = v + e^{-2x} \Rightarrow v = y'' - e^{-2x}$

$\Rightarrow y''' = y + e^{-x} \Rightarrow y''' - y = e^{-x}$

$r^3 - 1 = 0 \Rightarrow (r-1)(r^2+r+1) = 0 \quad r_1 = 1; \ \Delta = 1 - 4 = -3 \Rightarrow r_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow y_0(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$y''' - y = e^{-x} + e^{-2x}$

y_{p_1} de forma $A \cdot e^{-x}$

$\Rightarrow -Ae^{-x} - Ae^{-x} = e^{-x} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

y_{p_2} de forma $B \cdot e^{-2x} \Rightarrow -8Be^{-2x} - Be^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow B = -\frac{1}{9}$

$\Rightarrow y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{9}e^{-2x}$

$z = y'$ (nu mai fac)

$v = y'' - e^{-2x}$ (nu mai fac)

b) $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \ln 3) \\ e^{-2x}, & x \in [\ln 3, \infty) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y'' - 2y' + y = f \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Se poate face foarte rapid cu Laplace, dar eu nu sunt priceput (profu' voia cu Laplace aici)

~~ec. carac. $y'' - 2y' + 2y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 2 = 0 \quad \Delta = 4 - 8 = -4 \Rightarrow r_{1,2} = -1 \pm i$~~

~~$y_0(x) = C_1 \cdot e^{-x} \cos x + C_2 \cdot e^{-x} \sin x$~~

~~$y_1(x) = y_0(x) = C_1 \cdot e^{-x} \cos x + C_2 \cdot e^{-x} \sin x$~~

~~$y_1(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$~~

~~$y_1'(0) =$~~

$y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1$ rad. dublă $\Rightarrow$

$y_0(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot x e^x$

$y_1(x) = y_0(x) \Rightarrow y_1(0) = C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$y_1'(x) = C_2 e^x + C_2 x e^x \Rightarrow y_1'(0) = C_2 = 1 \Rightarrow y_1(x) = x \cdot e^x$

$\lim_{x \to \ln 3} y_1(x) = 3 \ln 3 \qquad \lim_{x \to \ln 3} y_1'(x) = 3 + 3\ln 3$

$\Rightarrow \begin{cases} y_2'' - 2y_2' + y_2 = e^{-2x} \\ y_2(\ln 3) = 3 \ln 3 \\ y_2'(\ln 3) = 3\ln 3 + 3 \end{cases}$ $\quad y_2(x) = y_0(x) + y_p(x)$

$y_p(x) = A \cdot e^{-2x}$

$\Rightarrow +4Ae^{-2x} + 4Ae^{-2x} + A \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow A = \frac{1}{9}$

$y_2(x) = C_1 e^x + C_2 \cdot x e^x + \frac{1}{9} e^{-2x}$

$y_2'(x) = C_1 e^x + x e^x C_2 + C_2 \cdot e^x - \frac{2}{18} e^{-2x}$

$y_2(\ln 3) = 3C_1 + 3\ln 3 \, C_2 + \frac{1}{81} = 3\ln 3 \quad | (-1)$

$y_2'(\ln 3) = 3C_1 + 3\ln 3 \, C_2 + 3C_2 - \frac{2}{81} = 3\ln 3 + 3$

$3C_2 - \frac{1}{27} = 3$

$3C_2 = \frac{81+1}{27} \Rightarrow C_2 = \frac{82}{81}$

3

$$3C_1 + 3\ln 3 \cdot \frac{82}{81} + \frac{1}{81} = 3\ln 3 \quad 81)$$

$$3C_1 = \frac{(243 - 246)\ln 3 - 1}{81} \Rightarrow C_1 = -\frac{3\ln 3 + 1}{243}$$

$$\Rightarrow y(x) = \begin{cases} x \cdot e^{x}, & x \in [0, \ln 3) \\ -\frac{3\ln 3 + 1}{243} e^{+x} + \frac{82}{81} e^{x} \cdot x + \frac{1}{9} e^{-2x}, & x \in [\ln 3, \infty) \end{cases}$$

5. $(1+x_1) \cdot u'_{x_1} + (2+x_2) \cdot u'_{x_2} + \ldots (n+x_n) \cdot u'_{x_n} = u$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{1+x_1} = \frac{dx_2}{2+x_2} = \frac{dx_3}{3+x_3} = \ldots \frac{dx_n}{n+x_n} = \frac{du}{u}$$

$$\frac{dx_1}{1+x_1} = \frac{dx_2}{2+x_2} \Rightarrow \ln(1+x_1) = \ln(2+x_2) + \ln C_1 \Rightarrow \ln(1+x_1) = \ln C_1 \cdot (2+x_2)$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1+x_1}{2+x_2}$$

$$\frac{dx_1}{1+x_1} = \frac{dx_3}{3+x_3} \Rightarrow C_2 = \frac{1+x_1}{3+x_3}$$

$$\ldots$$

$$\frac{dx_1}{1+x_1} = \frac{dx_n}{n+x_n} \Rightarrow C_{n-1} = \frac{1+x_1}{n+x_n}$$

$$\frac{dx_1}{1+x_1} = \frac{du}{u} \Rightarrow C_n = \frac{1+x_1}{u}$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{1+x_1}{2+x_2}, \frac{1+x_1}{3+x_3}, \ldots \frac{1+x_1}{n+x_n}, \frac{1+x_1}{u}\right) = 0$$

$\sqrt{C_1 - x^2} = \frac{du}{u} \Rightarrow \arcsin \frac{x}{\sqrt{C_1}} = \ln u + \ln C_2$

$\Rightarrow C_2 = \frac{e^{\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{u}$

$\Phi\left(y^2+x^2, \frac{e^{\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{u}\right) = 0$

Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale 17.06.2022

Informatică anul II, examen sumativ

1. **(30p)** Să se determine soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul I

$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{du}{u}$

$$y \cdot u'_x - x \cdot u'_y = u.$$

$y = \sqrt{C_1 - x^2}$

$-x\,dx = y\,dy \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{2} = \frac{y^2}{2} \Rightarrow C_1 = x^2+y^2$

2. **(20 p)** Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că soluţia problemei $\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0 \\ u(0,x) = a \cdot \sin x \\ u'_t(0,x) = \sin 3x \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$ este

$a = 1$

$u(t,x) = \sum_{k=0} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx$

$u(0,x) = \sum_{k=0} a_k \cdot \sin kx = a \sin x \Rightarrow a_1 = a$

$$u(t,x) = a \cdot \cos t \cdot \sin x + \frac{1}{3} \sin 3t \cdot \sin 3x.$$

$u'_t(0,x) = \sum_{k=0} (k b_k \cos 0) \cdot \sin kx = \sin 3x \Rightarrow 3b_3 = 1 \Rightarrow b_3 = \frac{1}{3}$

3. **(40 p)** Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_m < +\infty$, $0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_n < +\infty$ numere naturale şi $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Fie $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ şi $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$g(\theta) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \cos k_i\theta + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \sin l_i\theta.$$

Să se rezolve problema Dirichlet asociată ecuaţiei lui Laplace $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(1,\theta) = g(\theta). \end{cases}$

Notă: se acordă 10 puncte din oficiu.
Examinator,
Lector univ. dr. Marcel Bogdan

identificăm coeficienţii

3. $\sum_{i=1}^{m} \underset{\overset{\parallel}{a_i}}{c_{k_i}} \cos(k_i\theta) \cdot \rho^{k_i} + \sum_{i=1}^{n} \underset{\overset{\parallel}{b_i}}{d_{l_i}} \sin(l_i\theta) \cdot \rho^{l_i}$

sol: $u(t,x) = a \sin x \cos t + \frac{1}{3} \sin 3t \sin 3x$

Examen semestru

(1.) $y \cdot u'_x - x \cdot u'_y = u$

$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow \int -x\,dx = \int y\,dy \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{c_1}{2} = \frac{y^2}{2}$

$\Rightarrow c_1 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{c_1 - x^2}$

$\frac{dx}{\sqrt{c_1 - x^2}} = \frac{du}{u} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x^2}} = \int \frac{du}{u} \Rightarrow \arcsin \frac{x}{\sqrt{c_1}} = \ln u + \ln c_2$

$\Rightarrow c_2 = \frac{e^{\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{u}$

$\Rightarrow \Phi\left(y^2 + x^2, \frac{e^{\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{u}\right) = 0$

(2) $\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0 \\ u(0,x) = a \sin x \\ u'_t(0,x) = \sin 3x \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$ avem formula generală:

$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{l}\right) \cdot \sin \frac{k x \pi}{l}$

din ecuație avem $a = 1$, $l = \pi \Rightarrow$

Sol generală: $u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cdot \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx$

$u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cdot \cos 0) \cdot \sin kx = a \sin x$ Identificăm coef $\Rightarrow$

pt $k = 1 \Rightarrow a_1 \sin x = a \sin x \Rightarrow a_1 = a$, $a_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$u'_t(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k \cdot b_k \cos 0) \sin kx = \sin 3x \Rightarrow$ pt $k = 3 \Rightarrow 3b_3 = 1 \Rightarrow b_3 = \frac{1}{3}$

$b_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$

$\Rightarrow u(t,x) = a \sin x \cos t + \frac{1}{3} \sin 3t \sin 3x$ ✓

(3). $g(\theta) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \cos k_i \theta + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \sin l_i \theta$, $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(1,\theta) = g(\theta) \end{cases}$

sol generală: $\sum_{k=0}^{\infty} (c_k \cdot \cos(k\theta) + d_k \sin(k\theta)) \cdot \rho^k = u(\rho, \theta)$

$\Rightarrow u(1,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k \cdot \cos(k\theta) + d_k \sin k\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \cos(k\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot \sin k\theta$

$= \sum_{i=1}^{m} a_i \cos k_i \theta + \sum_{i=1}^{n} b_i \sin l_i \theta$

pt $k = k_i \Rightarrow c_{k_i} = a_i$, $c_k = 0, \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{i\}$, $i \in [1, m]$

pt $k = l_i \Rightarrow d_{l_i} = b_i$, $d_k = 0, \forall k_i \in \mathbb{R} \setminus \{i\}$, $i \in [1, n]$

$\Rightarrow u(t,x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cos k_i \cdot \rho^{k_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \sin l_i \theta \cdot \rho^{l_i}$