ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ασκήσεις Μη Γραμμικής Δυναμικής

2021

1. Στο μάθημα της Παρασκευής (12/3) δείξαμε τις εξελίξεις της λογιστικής από διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Παρατηρήσαμε ότι οι καμπύλες εξέλιξης δεν είναι συμμετρικές ως προς το σταθερό (ευσταθές) σημείο $x(t) = x_e = 1$. Τι θα αλλάζατε στο νόμο της ταχύτητας $v = x(1-x)$ ώστε οι καμπύλες για $x(0) > 1$ να είναι κατοπτρικά συμμετρικές ως προς αυτές για $0 < x(0) < 1$.

2. Δώστε μια εκτίμηση του χρόνου που χρειάζεται το σύστημα που περιγράφεται από τη λογιστική για να φτάσει πολύ κοντά (σε απόσταση $0 < \epsilon << 1$) στο $x = 1$.

   Για την Τρίτη 23/03/2021

3. Με την μέθοδο Cauchy, αναπτύσσοντας κατά Taylor, προσδιορίστε τη λύση της $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$. Για πόσο χρόνο υπάρχει λύση σε αυτό το πρόβλημα;

4. Με την μέθοδο Picard προσδιορίστε τη λύση της $\dot{x} = x + 2$, $x(0) = 0$.

5. Προσπαθήστε με την μέθοδο Picard να προσδιορίσετε τη λύση της λογιστικής $\dot{x} = x(1-x)$, $x(0) = 1/2$.

6. Η εξίσωση Gompertz για την εξέλιξη των πληθυσμών με $x \geq 0$ είναι:

$$\dot{x} = \begin{cases} -x\log(x) & , \quad x > 0\,, \\ 0 & , \quad x = 0\,, \end{cases}$$

   (α) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας της.
   (β) Προσδιορίστε αν η $f(x) = -x\log(x)$ είναι Lipschitz στα σημεία ισορροπίας.
   (β) Προσδιορίστε τη λύση για την αρχική τιμή $x(0) = x_0$ με $x_0 > 0$ και προσδιορίστε την ασυμπτωτική τιμή του x.
   (γ) Είναι η λύση μοναδική για $x(0) = 0$; Εάν ναι εξηγήστε τον λόγο.
   (δ) Με τη μέθοδο του Euler υπολογίστε αριθμητικά την εξέλιξη των πληθυσμών που συναπάγεται η Gompertz και συγκρίνατέ την με αυτήν της λογιστικής $\dot{x} = x(1-x)$ όταν $x(0) = 0.1$. Σχεδιάστε τις αναλυτικές λύσεις στο ίδιο διάγραμμα για να διαπιστώσετε την ακρίβεια της αριθμητικής λύσης σας.

7. Συμπληρώστε το διάγραμμα διακλάδωσης που κάναμε στο μάθημα για την εξίσωση $\dot{x} = x(1-x) - h$ προσδιορίζοντας τον ασταθή κλάδο του διαγράμματος με ολοκλήρωση πίσω στο χρόνο.

Για την Τρίτη 30/03/2021

8. Εξετάστε την ύπαρξη λύσεων του δυναμικού συστήματος:

$$\dot{x} = \begin{cases} -1 \quad , \quad x > 0\,, \\ \ \ 1 \quad , \quad x \leq 0\,, \end{cases}$$

με αρχική τιμή $x(0) = 0$.

Απ. Αυτό το δυναμικό σύστημα με αυτή την αρχική συνθήκη δεν έχει λύση. Εάν αρχικά ήταν $x(0) = \alpha \neq 0$ τότε θα υπήρχε η λύση $x(t) = \alpha - \alpha t/|\alpha|$ για το πεπερασμένο διάστημα $0 \leq t < |\alpha|$.

9. (α) Κατασκευάστε πρώτα για το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = x(1-x) - h(1 + \varepsilon \sin(t)) \ \ .$$

την απεικόνιση Poincaré μίας περίοδου $P(x)$ καθώς και την απεικόνιση Poincaré δύο περιόδων $P(P(x))$ για τις τιμές $h = 1/8$ και $\varepsilon = 1$.
(β) Προσδιορίστε τα σταθερά σημεία των δύο αυτών απεικονίσεων και την ευστάθειά των.
(γ) Μεταβάλλοντας την παράμετρο h σχεδιάστε τα σταθερά σημεία των δύο αυτών απεικονίσεων συναρτήσει του h. Για ποία τιμή του h υπάρχει διακλάδωση; (πάντα με $\varepsilon = 1$).
(δ) Το σημείο διακλάδωσης εξαρτάται από το ε;

Για την Τρίτη 6/04/2021

10. Κατασκευάστε το διάγραμμα διακλάδωσης των σταθερών σημείων της απεικόνισης Poincaré μίας περιόδου του δυναμικού συστήματος

$$\dot{x} = -x \log x - h(1 + \sin(t)) \ \ , \ \ x > 0 \ \ ,$$

και συγκρίνατέ το με το αντίστοιχο διάγραμμα διακλάδωσης των σημείων ισορροπίας του αντίστοιχου χρονοανεξάρτητου συστήματος:

$$\dot{x} = -x \log x - h \ \ , \ \ x > 0 \ \ .$$

11. α) Θεωρήστε το μη αυτόνομο μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x,t)$ επί της ευθείας, με $v(x,t)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ως προς τα ορίσματά της και την $v(x,t)$ περιοδική συνάρτηση ως προς t με περίοδο 2π. Αν υπάρχουν ξ και η με $\xi > \eta$ ώστε $\forall t$ να είναι $v(\xi,t) < 0$ και $v(\eta,t) > 0$, αποδείξτε ότι το δυναμικό σύστημα εκτελεί περιοδική κίνηση για κάποια αρχική κατάσταση x_0, $\eta < x_0 < \xi$.
(β) Υπάρχουν περιοδικές τροχιές στο δυναμικό σύστημα $\dot{x} = x^2 - 1 - \cos(t)$; Αν υπάρχουν προσδιορίστε πόσες και εντοπίστε τες αριθμητικά (σχεδιάστε τη χρονική τους εξέλιξη).

Για την Τρίτη 13/04/2021

12. (Άσκηση 3.7.4, Strogatz (σελ. 90)): Η εξέλιξη του πληθυσμού των ψαριών με αλίευση γίνεται σύμφωνα με την περισσότερο ρεαλιστική δυναμική ως προς τον ρυθμό της αλίευσης:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) - H\frac{N}{A+N} \quad , \quad N \geq 0,$$

με A, H, r, K θετικές σταθερές.
(α) Τι φυσική σημασία έχει η σταθερά A;
(β) Με κατάλληλη αδιαστατικοποίηση γράψτε το δυναμικό σύστημα στη μορφή:

$$\frac{dx}{d\tau} = x\,(1-x) - h\frac{x}{a+x} \quad , \quad x \geq 0,$$

έχοντας ορίσει κατάλληλα τις μεταβλητές x, τ, a, h.
(γ) Δείξτε ότι μπορεί να υπάρχουν 1, 2 ή ακόμα και 3 σημεία ισορροπίας ανάλογα με τις τιμές των a, h. Χαρακτηρήστε την ευστάθεια των εκάστοτε σημείων ισορροπίας.
(δ) Εξετάστε τη δυναμική στην περιοχή του $x = 0$ και δείξτε ότι παρουσιάζεται διακλάδωση όταν είναι $h = a$. Τι είδος διακλάδωσης είναι;
(ε) Δείξτε ότι και άλλη διακλάδωση εμφανίζεται στο $h = (1+a)^2/2$ όταν $a < a_c$ για μια κρίσιμη τιμή a_c που πρέπει να προσδιορίσετε. Χαρακτηρήστε το είδος της διακλάδωσης.
(στ) Σχεδιάστε τα σημεία ισορροπίας στο τρισδιάστατο χώρο $(a, h, x_e(a, h))$. Μπορεί να εμφανιστούν υστερητικά φαινόμενα;

13. (Άσκηση 8.7.3, Strogatz (σελ. 296)) Θεωρήστε τον ταλαντωτή με υπεραπόσβεση που ικανοποιεί την Αριστοτέλεια δυναμική:

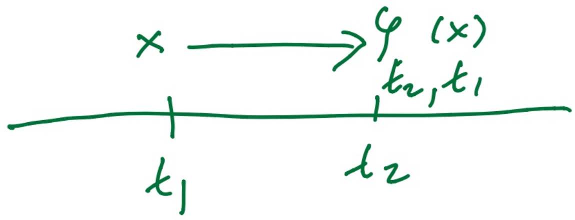
$$\dot{x} + x = F(t)\ ,$$

με $F(t)$ περιοδική συνάρτηση περιόδου T με τιμές στον κλάδο μιας περιόδου:

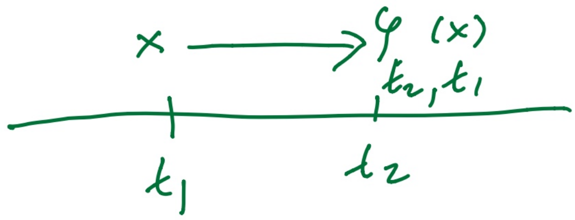
$$F(t) = \begin{cases} +A \quad , \quad 0 < t < T/2\ , \\ -A \quad , \quad T/2 < t < T\ . \end{cases}$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε αν υπάρχουν περιοδικές τροχιές σε αυτό το δυναμικό σύστημα.
(α) Δείξτε ότι αν $x(0) = x_0$ τότε $x(T) = x_0 e^{-T} - A(1-e^{-T/2})^2$ και ότι υπάρχει μία μοναδική τροχιά που χαρακτηρίζεται από το $x_0 = -A\tanh(T/4)$.
(β) Σχεδιάστε την απεικόνιση Poincaré, τα σταθερά σημεία της και εξετάστε τη σταθερότητά τους. Ερμηνεύστε τη συμπεριφορά της περιοδικής τροχιάς στα όρια $T \to 0$ και $T \to \infty$.

14. (Επαναδιατύπωση και ολοκλήρωση της συζήτησης του μαθήματος) Ορίζω $\varphi_{t_2,t_1}(x)$ την κατάσταση στην οποίαν εξελίσσεται η κατάσταση x από τον χρόνο t_1 στον χρόνο t_2 με το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x,t)$ (βλ. Σχ. 2). Η συνάρτηση $\varphi_{t_2,t_1}(x)$ λέγεται διαδότης (propagator) του συστήματος. Η $\varphi_{s,s}$ είναι προφανώς η ταυτοτική συνάρτηση, είναι δηλαδή $\varphi_{s,s}(x) = x$, και συμβολίζεται $\varphi_{s,s} \equiv I$.

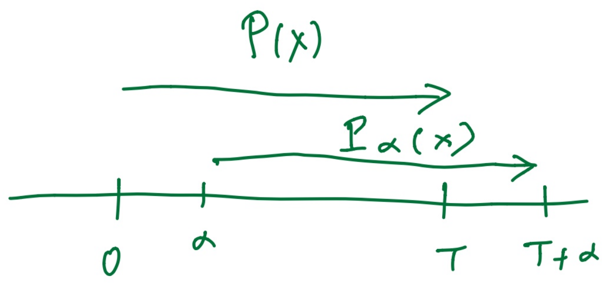


Σχήμα 1: Η $\varphi_{t_2,t_1}(x)$ είναι η εξέλιξη της κατάστασης x από τον χρόνο t_1 στον χρόνο t_2 με το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x,t)$ (οι χρόνοι t_1 και t_2 μπορεί να έχουν οποιαδήποτε διάταξη).



Σχήμα 2: Η $\varphi_{t_2,t_1}(x)$ είναι η εξέλιξη της κατάστασης x από τον χρόνο t_1 στον χρόνο t_2 με το δυναμικό σύστημα $\dot{x} = v(x,t)$ (οι χρόνοι t_1 και t_2 μπορεί να έχουν οποιαδήποτε διάταξη).

(α) Εξηγήστε πότε η $\varphi_{t_2,t_1}(x)$ μπορεί να ορισθεί ως συνάρτηση του x (μονολεκτικά).
(β) Υπό αυτές τις συνθήκες εξηγήστε γιατί ισχύει η ισότητα $\varphi_{t_3,t_2} \circ \varphi_{t_2,t_1} = \varphi_{t_3,t_1}$. Συνεπώς η φ_{t_2,t_1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της φ_{t_1,t_2}, είναι δηλαδή $\varphi_{t_1,t_2} \circ \varphi_{t_2,t_1} = \varphi_{t_2,t_1} \circ \varphi_{t_1,t_2} = I$. (Το $\circ$ συμβολίζει σύνθεση συναρτήσεων.)



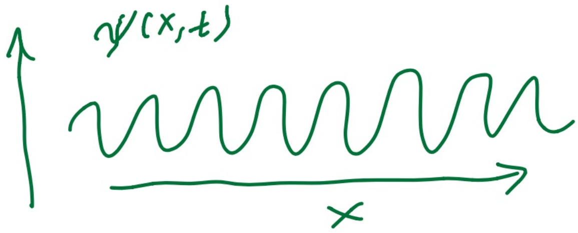
Σχήμα 3: Οι απεικονίσεις Poincaré $P(x)$ και $P_\alpha(x)$.

(γ) Έστω τώρα ότι η $v(x,t)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο T, $v(x,t) = v(x,t+T)$. Ορίζουμε τις απεικόνισεις Poincaré $P(x) = \varphi_{0,T}(x)$ και $P_\alpha(x) = \varphi_{\alpha,T+\alpha}(x)$ (βλ. Σχ. 3). Εκφράστε την $P_\alpha(x)$ συναρτήσει της $P(x)$ και προσδιορίστε τη σχέση των σταθερών σημείων της $P_\alpha(x)$ και της $P(x)$. Δείξτε τώρα ότι η ευστάθεια των σταθερών σημείων δεν εξαρτάται από το α.

15. Στην Άσκηση 11β βρήκαμε μία περιοδική τροχιά με $x \approx -1.361$ στον χρόνο $t = 0$ και $t = 2\pi$ (η οποία ήταν ευσταθής και όλες οι τροχιές πλησίον της έλκονταν σε αυτήν). Κάποια συμφοιτήτριά

σας υποστηρίζει ότι υπάρχει και άλλη περιοδική τροχιά. Έχει δίκιο; Αν πράγματι υπάρχει η τροχιά αυτή είναι ελκτική ή απωστική; Μπορείτε να σκεφθείτε πως θα καταφέρετε να κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της χρονικής εξέλιξής της κατά μία περίοδο;

Για την Τρίτη 20/04/2021



Σχήμα 4

16. Θεωρήστε μονοδιάστατο πεδίο $\psi(x,t)$ που εμφανίζει κορυφώσεις, όπως στο Σχήμα 4, οι οποίες έχουν δεδομένη κατεύθυνση κίνησης, έστω τη θετική. Θεωρούμε ότι ο κυματισμός του πεδίου είναι πολύ πυκνός ώστε να μπορούμε να ορίσουμε ως συνεχείς μεταβλητές τον αριθμό των κορυφών του πεδίου ανά cm, $k(x,t)$, και τον αριθμό των κορυφών ανά second, $\omega(x,t)$, που περνούν προς τη θετική κατεύθυνση από το σημείο x. Θεωρούμε επίσης ότι οι κορυφές παραμένουν κορυφές, ούτε διασπώνται, ούτε δημιουργούνται, ούτε εξαφανίζονται, έτσι ώστε ο αριθμός των κορυφών του πεδίου να διατηρείται.
α) Γράψτε την εξίσωση συνέχειας που συνεπάγεται η διατήρηση του αριθμού των κορυφών.
β) Το k είναι ο τοπικός κυματαριθμός, και το ω η τοπική συχνότητα του κυματισμού. Αν γνωρίζουμε ότι για το πεδίο αυτό υπάρχει σχέση $\omega(k)$ γράψτε την εξίσωση που διέπει το k.
γ) Σύμφωνα με το γ) που θα βρίσκεται στον χρόνο t ένας δεδομένος κυματαριθμός k_0;

Απάντηση:

Στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ έχουμε

$$\int_\alpha^\beta k dx$$

κορυφές, δεδομένου ότι $k(x,t)$ είναι η πυκνότητα των κορυφών. Ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των κορυφών σε αυτό το διάστημα ισούται με τη διαφορά του ρυθμού κορυφών που εισέρχονται και εξέρχονται από αυτό το διάστημα, που είναι

$$\omega(\alpha,t) - \omega(\beta,t) = -\int_\alpha^\beta \frac{\partial \omega}{\partial x} dx \ .$$

Άρα από τις υποθέσεις η διατήρηση του αριθμού των κορυφών απαιτεί την εξής ισότητα:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\alpha^\beta k dx = \int_\alpha^\beta \frac{\partial k}{\partial t} dx = -\int_\alpha^\beta \frac{\partial \omega}{\partial x} dx \ .$$

Εξ'αυτού συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)dx=0\ ,$$

για κάθε $\alpha<\beta$. Συνεπώς πρέπει η ολοκληρωτέα ποσότητα να μηδενίζεται (χρειάζεται μόνο συνέχεια εδώ των παραγώγων) καί έτσι αποδεικνύεται ότι το k και ω ικανοποιούν τη γνωστή σχέση συνέχειας:

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial \omega}{\partial x}=0\ . \tag{1}$$

Αν δε η $\omega(k)$ είναι συνάρτηση του k τότε το k εξελίσσεται χωροχρονικά σύμφωνα με την

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\omega'(k)\frac{\partial k}{\partial x}=0\ \ , \tag{2}$$

όπου $\omega'(k)=d\omega/dk$. Η εξίσωση αυτή εκφράζει διάδοση σταθερής τιμής k επί των χαρακτηριστικών

$$x=\omega'(k)t+x_0\ \ ,$$

όπου x_0το σημείο στο χώρο που στον χρόνο $t=0$ η πυκνότητα κορυφών (ο κυματάριθμος) είναι k. Συνεπώς σταθερές τιμές του k διαδίδονται με την ταχύτητα ομάδας $\omega'(k)$.

Από τη (1) προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{(x_0,t_0)}^{(x,t)} k dx-\omega dt$$

είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ενώνει το σημείο του χωρόχρονου (x_0,t_0) με το (x,t) και ορίζει μία συνάρτηση $\varphi(x,t)$ η οποία έχει ως παραγώγους τον κυματάριθμο και τη συχνότητα:

$$k=\frac{\partial \varphi}{\partial x}\ \ ,\ \ \omega=-\frac{\partial \varphi}{\partial t}\ \ .$$

Το $\varphi(x,t)$ είναι η τοπική φάση των κυμάτων. Πχ. αν $\varphi(x,t)=kx-\omega t$ έχουμε την κλασσική φάση ένος μονοχρωματικού κύματος. Επειδή τώρα

$$d\varphi=\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial t}dt$$

η σταθερή φάση $d\varphi=0$ διαδίδεται με ταχύτητα

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\varphi}=-\frac{\partial \varphi/\partial t}{\partial \varphi/\partial x}=\frac{\omega}{k}\ ,$$

που είναι η γνώριμη φασική ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η φάση ενός κύματος (πχ. μία κορυφή).

17. (Strogatz, 3.7.6) Παρουσιάζεται εδώ η θεωρία εξέλιξης των επιδημιών των Kermack & Mc Kendrick (1927). Σε αυτή τη θεωρία βασίζονται οι αναλύσεις για την εξέλιξη της επιδημίας του COVID (το άρθρο των Kermack & Mc Kendrick βρίσκεται στο e-class του μαθήματος καθώς και το άρθρο των Anderson & May). Θεωρούμε ότι ο πληθυσμός χωρίζεται στις εξής τάξεις: $x(t)$ ο αριθμός των υγειών, $y(t)$ ο αριθμός των νοσούντων και $z(t)$ ο αριθμός των θανόντων. Θεωρούμε ότι ο συνολικός πληθυσμός, $x+y+z$, είναι σταθερός. Αγνοούμε τις γεννήσεις, τους θανάτους από άλλες αιτίες, τη μετανάστευση κ.λ.π. Οι Kermack & Mc Kendrick προτείνουν την εξής δυναμική:

$$\dot{x} = -\alpha x y \quad , \quad \dot{y} = \alpha x y - \beta y \quad , \quad \dot{z} = \beta y$$

με α και β θετικές σταθερές. Η δυναμική αυτή βασίζεται στο σκεπτικό ότι ο ρυθμός που οι υγιείς νοσούν εξαρτάται από την πιθανότητα να νοσήσουν που προκαλείται όταν οι υγιείς έρχονται σε επαφή με τους νοσούντες και αυτή είναι ανάλογη του γινομένου των δύο πληθυσμών με ίδια σταθερά αναλογίας, και οι θάνατοι συμβαίνουν με σταθερό ρυθμό ανεξαρτήτως του νοσούντος.
α) Δείξτε ότι πράγματι: $x(t)+y(t)+z(t)=N$, όπου N ο αρχικός πληθυσμός.
β) Χρησιμοποιήστε την x και z εξίσωση για να δείξτε ότι $x(t) = e^{-\alpha z/\beta} x_0$ όπου $x_0 = x(0)$.
γ) Δείξτε ότι ο πληθυσμός z εξελίσσεται σύμφωνα με την:

$$\dot{z} = \beta(N - z - e^{-\alpha z/\beta} x_0)$$

δ) Δείξτε ότι η εξίσωση αυτή με κατάλληλο ορισμό μεταβλητών μπορεί να λάβει την εξής αδιάστατη μορφή :

$$\frac{d\psi}{d\tau} = a - b\psi - e^{-\psi} \quad .$$

ε) Δείξτε ότι $a \geq 1$ και $b > 0$.
στ) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας ψ_e και την ευστάθειά τους.
ζ) Δείξτε ότι το μέγιστο της $\dot{\psi}$ συμβαίνει στον χρόνο που η $\dot{z}$ και η $y(t)$ έχουν μέγιστο.
η) Δείξτε ότι αν $b < 1$ η $\dot{\psi}$ είναι αύξουσα στο $t = 0$ και γίνεται μέγιστη σε κάποιο χρόνο $t_p > 0$ που ονομάζεται χρόνος κορύφωσης. Δηλαδή η κατάσταση χειροτερεύει πριν βελτιωθεί. Όταν συμβαίνει αυτό λέμε ότι έχουμε επιδημία. Δείξτε ότι εν τέλει $\dot{\psi} \to 0$.
ι) Αν όμως $b > 1$ δείξτε ότι ο χρόνος κορύφωσης είναι $t_p = 0$ και συνεπώς η κατάσταση δεν εξελίσσεται σε επιδημία.
ια) Το $b = 1$ είναι η κρίσιμη τιμή για την εμφάνιση επιδημίας. Δώστε φυσική ερμηνεία της παραμέτρου.

Για την Τρίτη 11/05/2021

18. Σε ένα κυματοπακέτο που διαδίδεται σε μία διάσταση ο αριθμός των κορυφών της κυματομορφής ανά μονάδα μήκους $k(x,t)$ (αυτός είναι ο τοπικός κυματάριθμος στο σημείο) και ο αριθμός των κορυφών που διέρχεται ένα σημείο ανά μονάδα χρόνου $\omega(x,t)$ (αυτή είναι η τοπική συχνότητα στο σημείο) ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad . \tag{3}$$

α) Ποίο νόμο εκφράζει η παραπάνω εξίσωση.

Εάν $\omega(k) = k^2/2$ (όπως για το ελεύθερο σωμάτιο στην κβαντική μηχανική)

β) σχεδιάστε στο ίδιο διάγραμμα (x, t) τον τόπο των χωροχρονικών σημείων που θα έχουν κυματάριθμο $k = 1$ όταν στον χρόνο $t = 0$ το $k = 1$ ήταν στο $x = 0$, και τον τόπο των σημείων με κυματάριθμο $k = 1/2$ αν αρχικά τα $k = 1/2$ ήταν στο $x = 1$ και $x = -1$.

γ) Όταν κατά την χρονική εξέλιξη το πεδίο $k(x, t)$ γίνει πλειότιμο η εξέλιξη αυτή πρέπει αναγκαστικά να απορριφθεί; Αν όχι τι θα μπορούσε να περιγράψει (μονολεκτική απάντηση);

(ε) Αναφέρατε τι φαινόμενα δεν συμπεριλαμβάνει η εξίσωση (3) (μιά γραμμή).

19. α) Κατασκευάστε ένα πρόγραμμα που σχεδιάζει τις χαρακτηριστικές της εξίσωσης Hopf, $\psi_t + \psi\psi_x = 0$, όταν στον χρόνο $t = 0$ είναι

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2} \; . \tag{4}$$

Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές που αρχίζουν στο διάστημα $-2 \leq x \leq 4$. Υπολογίστε τον χρόνο της πρώτης θραύσης, t_B, και προσδιορίστε την περιβάλλουσα καμπύλη στον χωρόχρονο που γίνεται θραύση και σχεδιάστε την στο διάγραμμα των χαρακτηριστικών. Δείξτε τώρα ότι η λύση $\psi(x, t)$ της Hopf με τις παραπάνω αρχικές συνθήκες ικανοποιεί για όλους τους χρόνους (αψηφώντας την ύπαρξη πλειοτίμων λύσεων) την εξής σχέση:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{1 + (x - t\psi(x, t))^2} \; . \tag{5}$$

Κατασκευάστε ένα πρόγραμμα που σχεδιάζει τη γραφική παράσταση της $\psi(x, t)$ ως προς x τους χρόνους $t = [0, 1/2, 1, 2, 3]t_B$, αψηφώντας και πάλι ότι η $\psi(x, t)$ καθίσταται πλειότιμη ως προς x για χρόνους $t > t_B$.
β) Θεωρήστε τώρα την Hopf με γραμμική απόσβεση ($\alpha < 0$) ή ενίσχυση ($\alpha > 0$)

$$\psi_t + \psi\psi_x = \alpha\psi \; .$$

Δικαιολογήστε ότι ο όρος $\alpha\psi$ είναι απόσβεση ή ενίσχυση γράφοντας την εξίσωση χρονικής εξέλιξης της ολικής "ενέργειας" του πεδίου $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx$ (υποθέτοντας ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει). Σχεδιάστε και πάλι τις χαρακτηριστικές για τις τιμές $\alpha = -1, -0.5, 0.5$ και αρχικές τιμές (4) και προσδιορίστε και πάλι τη λύση γενικεύοντας την (5) για $\alpha \neq 0$. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $\psi(x, t)$ ως προς x για τα παραπάνω α και για τους χρόνους του ερωτήματος 19(α) αψηφώντας και πάλι ότι η $\psi(x, t)$ μπορεί να γίνει πλειότιμη ως προς x.

Απάντηση:

Επί των χαρακτηριστικών

$$x = \psi(\xi, 0)t + \xi$$

η τιμή της συνάρτησης είναι σταθερή, δηλαδή:

$$\psi(\xi(x,t), 0) = \psi(x,t) ,$$

και άρα επί της χαρακτηριστικής είναι επίσης

$$x = \psi(x,t)t + \xi(x,t)$$

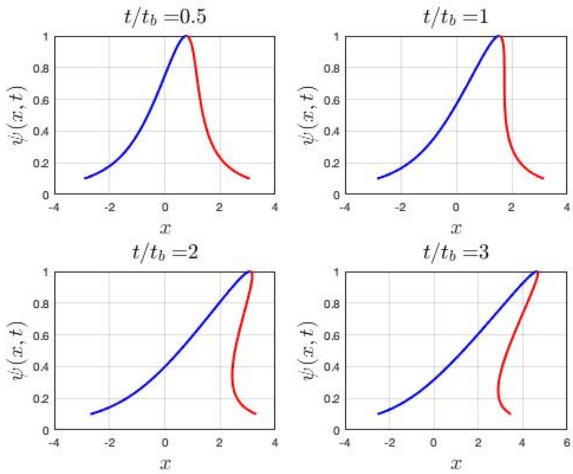
και συνεπώς η συνάρτηση ψ στο σημείο (x,t) ικανοποιεί την έμμεση σχέση

$$\psi(x,t) = \frac{1}{1+\xi(x,t)^2} = \frac{1}{1+(x-\psi(x,t)t)^2} .$$

Από αυτήν βρίσκουμε το x που τον χρόνο t το πεδίο λαμβάνει την τιμή ψ

$$x = t\psi \pm \sqrt{\frac{1}{\psi} - 1} ,$$

και αμέσως μπορούμε να σχεδιάσουμε την εξέλιξη του πεδίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.



Σχήμα 5

Ο χρόνος πρώτης θραύσης είναι $t_b = 8\sqrt{3}/9$. Αν δε το σημείο $x = f(\xi)t + \xi$ είναι σημείο θραύσης δύο γειτονικών σημείων τότε το $\xi + d\xi$ θα ικανοποιεί την $x = f(\xi + d\xi)t + \xi + d\xi$ με αποτέλεσμα στο όριο κάθε χρόνος θραύσης να ικανοποιεί την

$$tf'(\xi) = -1 \ ,$$

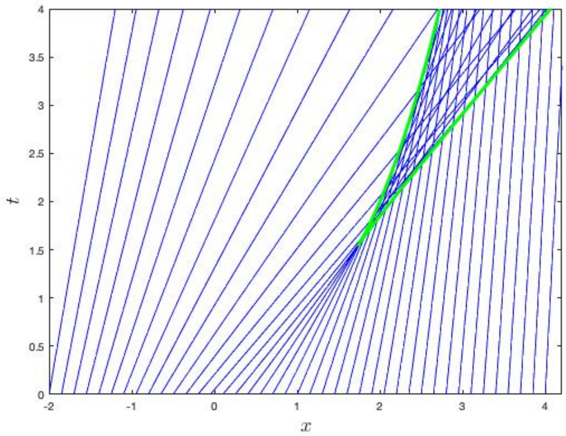
οπότε και ο πρώτος χρόνος θραύσης είναι

$$t_b = \min\left(-\frac{1}{f'(\xi)}\right) = \min\left(\frac{(1+\xi^2)^2}{2\xi}\right),$$

που συμβαίνει στο $\xi_b = 1/\sqrt{3}$. Τα σημεία θραύσης εμφανίζονται μόνο όταν $f'(\xi) < 0$, δηλαδή εδώ για $\xi > 0$. Η δε περιβάλλουσα όλων των σημείων θραύσης είναι η καμπύλη που προκύπτει από απαλοιφή του ξ από τις

$$x = \frac{t}{1+\xi^2} + \xi \ , \ \ t = \frac{(1+\xi^2)^2}{2\xi} \ .$$

Η περιβάλλουσα (που έχει αιχμή στο $(x_b, t_b) = (\sqrt{3}, 8\sqrt{3}/9)$) σχεδιάζεται στο σχήμα 6



Σχήμα 6

Ας λάβουμε τώρα την περίπτωση που έχουμε γραμμική ανάλωση $(a < 0)$ ή ενίσχυση $(a > 0)$. Για να καταλάβουμε αν είναι ανάλωση ή ενίσχυση υπόλογίζουμε τη χρονική εξέλιξη της ποσότητας $E = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx$ (θεωρώντας ότι μηδενίζεται η λύση στο άπειρο) θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dE}{dt} = aE$$

Συνεπώς αν $a < 0$ έχουμε μονότονη μείωση της ενεργειας.

Τώρα αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με τη γραμμική ανάλωση ή ενίσχυση με e^{-at} τότε αυτή ισοδύναμα γράφεται ως

$$\frac{\partial(\psi e^{-at})}{\partial t} + (\psi e^{-at})e^{at}\frac{\partial(\psi e^{-at})}{\partial x} = 0 \, .$$

Τότε η $\varphi = \psi e^{-at}$ ικανοποιεί την

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi e^{at}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \, ,$$

και επί των χαρακτηριστικών της

$$\frac{dx}{dt} = \phi e^{at}$$

η φ είναι σταθερή

$$\varphi(x,t) = \varphi(\xi,0) = \frac{1}{1+\xi^2} \, .$$

Δηλαδή οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι

$$x = \frac{1}{1+\xi^2}\frac{e^{at}-1}{a} + \xi \, .$$

ή ισοδύναμα

$$x = \varphi(x,t)\frac{e^{at}-1}{a} + \xi \, ,$$

οπότε μπορώ να γράψω την έμμεση σχέση

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{1+\xi(x,t)^2} = \frac{1}{1+\left(x-\varphi(x,t)\frac{e^{at}-1}{a}\right)^2} \, .$$

Συνεπώς το πεδίο ψ ικανοποιεί την έμμεση σχέση:

$$\psi(x,t) = \frac{e^{at}}{1+\left(x-\psi(x,t)\frac{1-e^{-at}}{a}\right)^2} \, .$$

ΘΑ ΣΥΝΕΧΙΣΩ....

Για την Τρίτη 18/05/2021

20. Αγνοήστε αυτήν την άσκηση Στην 19α (χωρίς ανάλωση). Γράψτε την εξίσωση της περιβάλλουσας κοντά στο σημείο της αιχμής (Τι θα πρότεινα: Η αιχμη είναι στο $\xi_b = 1/\sqrt{3}$ που δίνει $t_b = 8\sqrt{3}/9$. Αναπτύξτε σε σειρά Taylor $t(\xi)$ ως προς το ξ_b και προσδιορίστε την εξίσωση.). Επίσης σχεδιάστε τη χωροχρονική καμπύλη που ακολουθεί το κρουστικό κύμα που σχηματίζεται μετά τη θραύση και ερευνήστε τις γεωμετρικές ιδιότητες της καμπύλης αυτής σε σχέση με την περιβάλλουσα, και προσδιορίστε αν ήταν βάσιμη η υποψία του συμφοιτητή σας ως προς τη θέση της.

21. (Ένας άλλος τρόπος να προσδιορίσετε τον χρόνο θραύσης). Θεωρήστε την $\psi_t + \psi\psi_x = 0$ με $\psi(x,0) = F(x)$. Δείξτε ότι επί των χαρακτηριστικών η $\varphi = \psi_x$ ικανοποιεί την

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi^2 \, .$$

Προσδιορίστε τώρα τη χρονική εξέλιξη του φ επί των χαρακτηριστικών. Βλέπετε με τον τρόπο αυτό ότι επί των χαρακτηριστικών η κλίση πάντοτε μειώνεται μονότονα. Για τις μεν χαρακτηριστικές για τις οποίες $F'(\xi) > 0$ η κλίση του πεδίου μονότονα μειώνεται στο μηδέν, ενώ για τις χαρακτηριστικές για τις οποίες $F'(\xi) < 0$ η κλίση γίνεται $-\infty$ σε πεπερασμένο χρόνο και οι λύσεις ορίζονται για πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Για την Τρίτη 25/05/2021

22. Χρησιμοποιήστε την τυποποιημένη μέθοδο RK4 για να ολοκληρώσετε ένα αυτόνομο σύστημα $\dot{x} = f(x)$, το οποίο να μπορείτε να ολοκληρώσετε και αναλυτικά. Ξεκινήστε από κάποιο $x(0)$ και καθορίστε κάποιο τελικό χρόνο ολοκλήρωσης, π.χ. $T = 5$. Στη συνέχεια δοκιμάστε με $2, 4, 8, 16, \ldots$ κλπ βήματα να υπολογίσετε το $x(T)$ ακολουθώντας το αριθμητικό σχήμα ολοκλήρωσης της RK4. Καταγράψτε το σφάλμα εύρεσης του $x(T)$ (συγκρίνοντάς το $x(T)$ με το $X_{\text{αναλ}}(T)$) ως συνάρτηση του μεγέθους του βήματος και δείξτε σε λογαριθμικό διάγραμμα ότι το σφάλμα μεταβάλλεται ως N^{-4}, όπου N το πλήθος των βημάτων. Στη συνέχεια επαναλάβετε με μια εναλλακτική μέθοδο RK4 που δεν ακολουθεί το τυποποιημένο σχήμα (βλ. τελευταίες 2 σελίδες των διαφανειών).

23. Για το δισδιάστατο δυναμικό σύστημα:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

με

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(α) Υπολογίστε τον διαδότη $e^{\mathbf{A}t}$ κάνοντας χρήση του θεωρήματος Cayley-Hamilton.
(β) Υπολογίστε την εξέλιξη των αρχικών καταστάσεων $[1,0]^T$ και $[0,1]^T$ λύνοντας τις διαφορικές εξισώσεις και επιβεβαιώστε ότι από την εξέλιξη αυτών των καταστάσεων προσδιορίζεται ο διαδότης της (α).
(γ) Πέστε ότι έχετε στο εργαστήριο στη διάθεσή σας ένα δισδιάστατο γραμμικό δυναμικό σύστημα του οποίου όμως δεν ξέρετε τη μαθηματική περιγραφή του (δεν ξέρετε δηλαδή τον 2×2 πίνακα $\mathbf{A}$). Θέλετε να προσδιορίσετε τον $\mathbf{A}$ από παρατηρήσεις της χρονικής εξέλιξης αρχικών συνθηκών κατά μία μονάδα του χρόνου. Τι πειράματα θα κάνετε και πως από τα αποτελέσματα θα προσδιορίσετε τον $\mathbf{A}$;

24. Δείξτε ότι χωρία που εξελίσσονται με το δυναμικό σύστημα στο επίπεδο $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ με $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση δεν μπορούν να αλλάξουν τον προσανατολισμό τους.