



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ασκήσεις Μη Γραμμικής Δυναμικής 2021

1. Στο μάθημα της Παρασκευής (12/3) δείξαμε τις εξελίξεις της λογιστικής από διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Παρατηρήσαμε ότι οι καμπύλες εξέλιξης δεν είναι συμμετρικές ως προς το σταθερό (ευσταθές) σημείο $x(t) = x_e = 1$. Τι θα αλλάζατε στο νόμο της ταχύτητας $v = x(1 - x)$ ώστε οι καμπύλες για $x(0) > 1$ να είναι κατοπτρικά συμμετρικές ως προς αυτές για $0 < x(0) < 1$.
2. Δώστε μια εκτίμηση του χρόνου που χρειάζεται το σύστημα που περιγράφεται από τη λογιστική για να φτάσει πολύ κοντά (σε απόσταση $0 < \epsilon \ll 1$) στο $x = 1$.

Για την Τρίτη 23/03/2021

3. Με την μέθοδο Cauchy, αναπτύσσοντας κατά Taylor, προσδιορίστε τη λύση της $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$. Για πόσο χρόνο υπάρχει λύση σε αυτό το πρόβλημα;
4. Με την μέθοδο Picard προσδιορίστε τη λύση της $\dot{x} = x + 2$, $x(0) = 0$.
5. Προσπαθήστε με την μέθοδο Picard να προσδιορίσετε τη λύση της λογιστικής $\dot{x} = x(1 - x)$, $x(0) = 1/2$.
6. Η εξίσωση Gompertz για την εξέλιξη των πληθυσμών με $x \geq 0$ είναι:

$$\dot{x} = \begin{cases} -x \log(x) & , \quad x > 0 , \\ 0 & , \quad x = 0 , \end{cases}$$

- (α) Προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας της.
 - (β) Προσδιορίστε αν η $f(x) = -x \log(x)$ είναι Lipschitz στα σημεία ισορροπίας.
 - (β) Προσδιορίστε τη λύση για την αρχική τιμή $x(0) = x_0$ με $x_0 > 0$ και προσδιορίστε την ασυμπτωτική τιμή του x .
 - (γ) Είναι η λύση μοναδική για $x(0) = 0$; Εάν ναι εξηγήστε τον λόγο.
 - (δ) Με τη μέθοδο του Euler υπολογίστε αριθμητικά την εξέλιξη των πληθυσμών που συναπάγεται η Gompertz και συγκρίνατέ την με αυτήν της λογιστικής $\dot{x} = x(1 - x)$ όταν $x(0) = 0.1$. Σχεδιάστε τις αναλυτικές λύσεις στο ίδιο διάγραμμα για να διαπιστώσετε την ακρίβεια της αριθμητικής λύσης σας.
7. Συμπληρώστε το διάγραμμα διακλάδωσης που κάναμε στο μάθημα για την εξίσωση $\dot{x} = x(1 - x) - h$ προσδιορίζοντας τον ασταθή κλάδο του διαγράμματος με ολοκλήρωση πίσω στο χρόνο.

Για την Τρίτη 30/03/2021

8. Εξετάστε την ύπαρξη λύσεων του δυναμικού συστήματος:

$$\dot{x} = \begin{cases} -1 & , \quad x > 0 , \\ 1 & , \quad x \leq 0 , \end{cases}$$

με αρχική τιμή $x(0) = 0$.

9. (α) Κατασκευάστε πρώτα για το δυναμικό σύστημα

$$\dot{x} = x(1 - x) - h(1 + \varepsilon \sin(t)) \quad .$$

την απεικόνιση Poincaré μίας περιόδου $P(x)$ καθώς και την απεικόνιση Poincaré δύο περιόδων $P(P(x))$ για τις τιμές $h = 1/8$ και $\varepsilon = 1$.

(β) Προσδιορίστε τα σταθερά σημεία των δύο αυτών απεικονίσεων και την ευστάθειά των.

(γ) Μεταβάλλοντας την παράμετρο h σχεδιάστε τα σταθερά σημεία των δύο αυτών απεικονίσεων συναρτήσει του h . Για ποία τιμή του h υπάρχει διακλάδωση; (πάντα με $\varepsilon = 1$).

(δ) Το σημείο διακλάδωσης εξαρτάται από το ε ;