

Πρόβλημα 1 [2.5 μονάδες]

Να υπολογιστεί το $x = \sqrt[3]{2}$ χρησιμοποιώντας τρεις επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson και αρχική εκτίμηση το $x_0 = 2.0$. Θεωρώντας ως γνωστό ότι $\sqrt[3]{2} = 1.259921$ (στρογγυλοποίηση 6 δεκαδικών ψηφίων), να υπολογιστεί το ποσοστιαίο (%) σχετικό σφάλμα της τελικής εκτίμησης (x_3), όπως αυτή έχει διαμορφωθεί κατόπιν των τριών επαναλήψεων. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων για όλους τους επιμέρους αριθμητικούς υπολογισμούς.

Πρόβλημα 2 [2.5 μονάδες]

Να υπολογιστεί με την μέθοδο της απλοϊκής (crude) Monte-Carlo ολοκλήρωσης, το ολοκλήρωμα

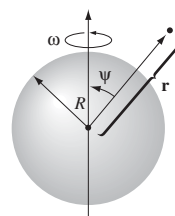
$$I = \int_1^{11} x^2 dx$$

καθώς και η αβεβαιότητά του, χρησιμοποιώντας τρία δείγματα $u = \{0.5, 0.9, 0.4\}$ γεννήτριας τυχαίων αριθμών ομοιόμορφης πυκνότητας πιθανότητας στο διάστημα $[0, 1]$. Να χρησιμοποιηθεί ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων για όλους τους επιμέρους αριθμητικούς υπολογισμούς.

Πρόβλημα 3 [2.5 μονάδες]

Ένας σφαιρικός φλοιός ακτίνας R , που φέρει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ , περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μέτρο του μαγνητικού δυναμικού σε ένα σημείο με διάνυσμα θέσης \mathbf{r} δίνεται από τη σχέση

$$A = |\mathbf{A}| = \frac{1}{2} \mu_0 R^3 \sigma \omega \sin \psi \int_{-1}^{+1} \frac{udu}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru}}$$



όπου μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού, ψ η γωνία μεταξύ του διανύσματος \mathbf{r} και του άξονα περιστροφής της σφαίρας, και $u = \sin \theta$ το ημίτονο της πολικής γωνίας θ ανάμεσα στο διάνυσμα \mathbf{r} και σε οποιοδήποτε σημείο της σφαίρας.

Γράψτε τον αλγόριθμο αριθμητικού υπολογισμού του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^{+1} \frac{udu}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru}} = \begin{cases} \frac{2r}{3R^2} & \text{αν } r < R \\ \frac{2R}{3r^2} & \text{αν } r \geq R \end{cases}$$

με τη μέθοδο του Simpson σε 20 βήματα και εκτιμήστε το μέγιστο τοπικό σφάλμα της ολοκλήρωσης.

Πρόβλημα 4 [2.5 μονάδες]

Η ομαλή ροή ασυμπίεστου ρευστού με συντελεστή εσωτερικής τριβής (ιξώδες) η , μέσα σε κυλινδρικό σωλήνα ακτίνας R και μήκους l , κάτω από διαφορά πίεσης Δp ανάμεσα στα δύο άκρα του σωλήνα, περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση της ταχύτητας v σε κάθε σημείο του ρευστού, συναρτήσει της ακτινικής απόστασης $r \leq R$ από τον άξονα του σωλήνα:

$$v''(r) + \frac{v'(r)}{r} + \frac{\Delta p}{\eta l} = 0$$

όπου ο τόνος σημαίνει παραγωγή ως προς r . Η εξίσωση αυτή συνοδεύεται από δύο εναλλακτικά ζεύγη συνοριακών συνθηκών:

1. Στο σημείο $r = 0$: $v = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2$, $v' = 0$.
 2. Στο σημείο $r = R$: $v = 0$, $v' = -\frac{\Delta p}{2\eta l} R$.
- Εξηγήστε ποιο ζεύγος πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την αριθμητική λύση της εξίσωσης.
 - Γράψτε τον αλγόριθμο αριθμητικής επίλυσης της εξίσωσης στο διάστημα $0 \leq r \leq R$ με 50 βήματα εφαρμόζοντας την απλή μέθοδο του Euler με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

Η αναλυτική λύση είναι $v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$.

Οδηγίες για την εξέταση

- Ψευδοκώδικας ή οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού είναι δεκτά – θα πρέπει να φαίνεται ξεκάθαρα πώς υλοποιούνται αλγοριθμικά οι ζητούμενοι αριθμητικοί υπολογισμοί σε μορφή λογικών βημάτων και μαθηματικών σχέσεων και ποιες μεταβλητές ή ποια πεδία πρέπει να δηλωθούν για την εφαρμογή του αλγορίθμου. Η χρήση εξωτερικών βιβλιοθηκών δεν είναι ούτε απαραίτητη ούτε επιθυμητή.
- Ανοιχτά βιβλία / σημειώσεις – ΝΑΙ
- Απλή αριθμητική μηχανή – **Υποχρεωτική**

Παρακαλούμε οι εξεταζόμενοι να φροντίσουν να έχουν δικές τους σημειώσεις/βιβλία και αριθμητικές μηχανές καθώς η ανταλλαγή αυτών δεν θα είναι επιτρεπτή κατά την διάρκεια της εξέτασης. Επισημαίνεται ότι το κινητό τηλέφωνο δε λογίζεται σαν απλή αριθμητική μηχανή. Η χρήση οποιασδήποτε συσκευής με πρόσβαση στο διαδίκτυο/messengers δεν θα είναι επιτρεπτή.