Random Operators — Anderson Localisation

Βασίλης Βαλατσός

Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Καθαρός Κρύσταλλος

Δομή κρυστάλλου $\mathbb{Z}^d$.
Το δυναμικό που νιώθει ένα ηλεκτρόνιο x είναι γνωστό

$$V = qf(x-i)$$

με i το άτομο (επίσης ιόν ή πυρήνας) στο σημείο $i \in \mathbb{Z}^d$.
Άρα το συνολικό δυναμικό βρίσκετα από

$$V = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} qf(x-i)$$

Ξέρουμε ότι το φάσμα είναι απόλυτα συνεχές.

Τυχαία Δυναμικά

Τα περισσότερα όμως στερεά δεν αποτελούνται από τέλειους κρυστάλλους.
Εάν έχω καθαρό κρύσταλλο χωρίς όμως διεταγμένα σημεία

$$V_\omega(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} q f(x - i - \xi_i(\omega))$$

Ενώ αν έχω άμορφο υλικό, είναι καλλίτερο να το θεωρήσω σαν

$$V_\omega(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} q f(x - \eta_i)$$

Τέλος, εάν έχω κράμα υλικών το δυναμικό έχει μορφή

$$V_\omega(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} q_\omega(i) f(x - i)$$

Anderson Model

Εφόσον είμαστε σε κρυσταλλικό πλέγμα $L^2(\mathbb{R}^d) \to \ell^2(\mathbb{R}^d)$
Στον χώρο αυτό βολεύει να ορίσουμε νόρμες

$\|n\|_\infty := \sup |n_\nu|$ όπου αναδυκνείεται η κυβική μορφή του $\mathbb{Z}^d$

$$\|n\|_1 := \sum_{\nu=1}^{d} |n_\nu| \text{ όπου δίνει την δομή γραφήματος του } \mathbb{Z}^d$$

Ορίζουμε ως H_0 την Λαπλασιανή (διακριτή)

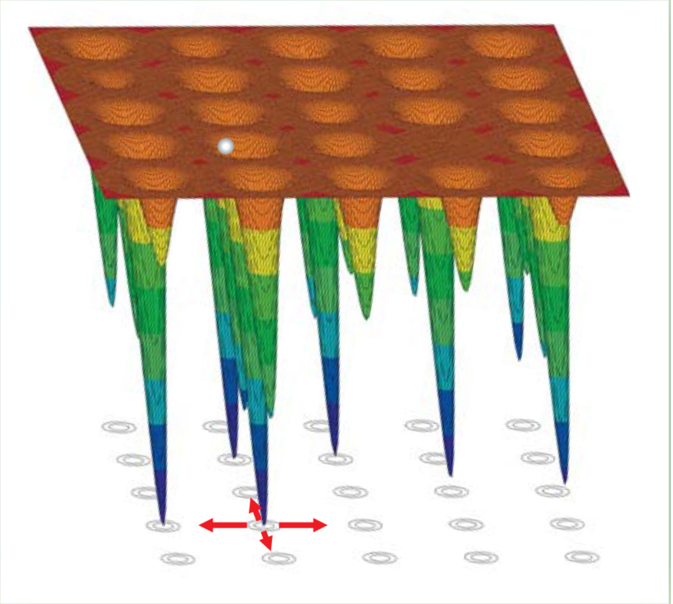
$$(H_0 u)(n) = - \sum_{\|m-n\|_1=1} (u(m) - u(n))$$

Anderson Model

Ο πιο απλός τρόπος να κάνουμε το δυναμικό $V(n)$ τυχαίο είναι να πούμε ότι το $V(n) = V_\omega(n)$ είναι από μόνο του σύνολο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.
Καταλήγουμε λοιπόν στο

$$H = H_0 + V_\omega(n)$$

το οποίο είναι και το Anderson Model.



Εργοδικοί Μετασχηματισμοί

Ορίζουμε οικογένεια μετασχηματισμών που αντιστοιχεί σε αλλαγή θέσης πάνω στον κρύσταλλο $\{T_i\}$ με την ιδιότητα να διατηρούν το μέτρο πιθανότητας εάν

$$\mathbb{P}(T^{-1}A) = \mathbb{P}(A))$$

και τα A αναλλοίωτα όταν

$$T_i^{-1}A = A, \ \forall i \in \mathbb{Z}$$

Εάν $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ τότε οι $\{T_i\}$ λέγονται εργοδικοί.

Εργοδικές Διαδικασίες

Αντίστοιχα με πριν, εργοδική διαδικασία σημαίνει

$$X_i(T_j\omega) = X_{i-j}(\omega)$$

Παράδειγμα, είναι οι ανεξάρτητες, όμοια κατανεμημένες, τυχαίες μεταβλητές, $X_i(\omega) = V_\omega(i)$.

Άρα πρέπει να υπάρχει $\{T_i\}$ που να αντιστοιχεί σε αλλαγή θέσης, και να έχει τετριμμένη πιθανότητα (0 ή 1).

Εργοδικοί Τελεστές

Ορίζουμε τελεστές μετάθεσης $\{U_i\} \in \ell^2,\ U^\dagger U = \mathbb{I}$.
Ο H_0 μετατίθεται με τους $\{U_i\}$ συνεπώς είναι εργοδικός, άρα και ο H_ω είναι εργοδικός. Συγκεκριμένα, ισχύει

$$H_{T_i\omega} = U_i H_\omega U_i^\dagger$$

Ο H_ω είναι φραγμένος, αυτοσυζηγής οπότε εάν ορίσουμε $\sigma(H_\omega)$ το φάσμα του H_ω, αποδεικνύεται ότι το φάσμα είναι μη τυχαίο και συνεχές.

Ιδιοτιμές

Όπως πάντα, έχω

$$H\psi = E\psi$$

Ονομάζω το σύνολο των γενικευμένων ιδιοτιμών $\epsilon_g(H)$ και αποδυκνείεται ότι συμφωνεί με το φάσμα.

$$\epsilon_g(H) \subseteq \sigma(H_\omega)$$

Χωρισμός Φάσματος

Το φάσμα μπορεί να χωρηστεί εύκολα, με χρήση θεωρίας μέτρου, σε τρία «υποφάσματα»

- *pure point*
- *absolutely continuous*
- *singular continuous*

Λίγη Φασματική Ανάλυση

Η χρονοεξέλιξη έχει να κάνει ακριβώς με αυτά τα φάσματα, και μάλιστα συνδέεται μέσω των ιδιοτιμών του συστήματος.

Άν E ιδιοτιμή, με φ την αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση, ορίζεται μ φασματικό μέτρο με άτομο στο E.

Λίγη Ακόμα Φασματική Ανάλυση

Το *pure point* μέτρο μ_φ είναι συγκεντρωμένο γύρω από το E, συνεπώς οι ιδιοσυναρτήσεις ανήκουν σε *pure point* υποχώρο, ονομαζόμενο H_{pp}

Άρα, το $\epsilon_g(H)$ είναι πυκνό υποσύνολο του *pure point* φάσματος, δηλαδή αριθμήσιμο, να έχει σημεία συσσώρευσης και να είναι πυκνό σε όλο το διάστημα.

Τα Φάσματα

Μελετώντας την χρονοεξέλιξη του H_{pp}, βλέπουμε ότι είναι ανεξάρτητος οποιασδήποτε χρονικής παραμέτρου, δηλαδή σε μια δέσμια κατάσταση.

Μελετώντας την χρονοεξέλιξη του H_{ac}, πρέπει πρώτα να πούμε τα εξής. Όπως πρίν είχαμε το μ_{φ}, τώρα το μ_{ψ} πρέπει να είναι συνεχές, και αυτές οι καταστάσεις είναι οι σκεδαζόμενες καταστάσεις.

Άτομο Υδρογόνου

Αγνοούμε την κίνηση του κέντρου μάζας $\rightarrow V(x) = \frac{q^2}{|x|}$
Οι ιδιοτιμές χωρίζονται σε δύο περιοχές:

- Στο συνεχές διάστημα $[0, +\infty)$
- Στο διακρητό, αριθμήσιμο αρνητικό κομμάτι

Προφανώς, το πρώτο αντιστοιχεί σε ελεύθερες καταστάσεις, ενώ το δεύτερο σε δέσμιες.

Το Φάσμα του *Anderson Model*

Από τον μετασχηματισμό Fourier, παίρνουμε το φάσμα

$$\sigma(H_0) = [0, 4d]$$

Το φάσμα του τυχαίου δυναμικού, δίνεται από

$$\sigma(V_\omega) = \text{supp}(P_0)$$

Άρα συνολικά

$$\sigma(H_\omega) = \text{supp}(P_0) + [0, 4d]$$

$1 - d$ *Localisation*

Για μια διάσταση έχω *pure point* φάσμα. Αυτό σημαίνει ότι:

- Πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων
- Οι ιδιοτιμές σχηματίζουν πυκνό σύνολο
- Οι ιδιοσυναρτήσεις μηδενίζονται στο άπειρο

Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται *Anderson Localisation*.

$d \geq 3$ *Localisation*

Για μικρές αταξίες, το φαινόμενο του *localisation* συμβαίνει μόνο στα *band edges* του φάσματος, συνεπώς γύρω από το *band edge* έχω *pure point* φάσμα.

Εντώς των *bands*, το φάσμα, για μικρή αταξία είναι *absolutely continuous*.

Έχω μη τετραγωνικά ολοκληρώσημες ιδιοσυναρτήσεις, και αυτό ονομάζεται *Delocalisation*.

Mobility Edge

Όσο αυξάνεται η αταξία, το *pure point* απλώνεται, ενώ το *absolutely continuous* μαζεύεται.

Το σημείο αλλαγής φάσης, ονομάζεται *mobility edge* και εκεί έχουμε την αλλαγή

$$\text{μονωτής} \longleftarrow\!\!\!\longrightarrow \text{αγωγός}$$

$2 - d$ *Localisation?*

Στις δύο διαστάσεις, δεν υπάρχει ακριβής απάντηση.

Δημοκρατικά, έχω πλήρες *localisation*, αλλά μια πιο ασθενή μορφή.

Ίσως να σπάσει με μαγνητικό πεδίο.