Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche

Corsi di Laurea in Informatica e in Matematica

Insegnamento di Algebra Lineare

Appunti

Anno accademico 2021/2022
******************************

# Unità didattica n.1: Matrici

********************************

Aggiornamento del 20 novembre 2021, a cura di Arrigo BONISOLI

# Matrici a coefficienti in un campo numerico

**MATRICI A $m$ RIGHE E $n$ COLONNE**

Sia $A$ una tabella di numeri con $m$ righe e $n$ colonne. L'elemento che nella tabella occupa la posizione situata all'incrocio della prima riga e della prima colonna si indica con $a_{11}$, quello che occupa la posizione situata all'incrocio della prima riga e della seconda colonna si indica con $a_{12}$, e così via, quello che occupa la posizione situata all'incrocio della prima riga e della $n$–esima colonna si indica con $a_{1n}$. Allo stesso modo l'elemento che nella tabella occupa la posizione situata all'incrocio della seconda riga e della prima colonna si indica con $a_{21}$, quello che occupa la posizione situata all'incrocio della seconda riga e della seconda colonna si indica con $a_{22}$, e così via, quello che occupa la posizione situata all'incrocio della seconda riga e della $n$–esima colonna si indica con $a_{2n}$. In generale dunque l'elemento che si trova all'incrocio della $i$–esima riga e della $j$–esima colonna si indica con $a_{ij}$.

Gli elementi che compaiono in una matrice $A$ si chiamano anche i *coefficienti* della matrice $A$. Si suppone che i coefficienti di una matrice siano stati scelti in un campo numerico $\mathbb{K}$ scelto una volta per tutte in base alle specifiche esigenze del problema che ci si trova ad affrontare. Tipiche scelte per il campo numerico $\mathbb{K}$ sono il campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Una scelta per il campo numerico $\mathbb{K}$ particolarmente significativa per le applicazioni informatiche è qulla del campo *binario*, spesso indicato con $\mathbb{L}$: gli elementi di $\mathbb{L}$ sono soltanto due, 0 e 1, soggetti alle regole delle operazioni binarie (l'addizione binaria è definita ponendo $0+0=1+1=0$, $1+0=0+1=1$, mentre la moltiplicazione binaria è definita ponendo $0\cdot 0=1\cdot 0=0\cdot 1=0$, $1\cdot 1=1$). Si noti che le operazioni di addizione e moltiplicazione nel campo numerico $\mathbb{K}$ vengono genericamente indicate con gli usuali simboli di addizione "+" e moltiplicazione "$\cdot$", indipendenemente dalla natura degli elementi di $\mathbb{K}$. Naturalmente, come l'esempio del campo binario mette in evidenza in modo lampante, talune proprietà delle operazioni numeriche possono essere molto diverse a seconda della natura del campo numerico trattato: nessuno si sogna che nel campo reale la somma $1+1$ possa dare zero come risultato ...!

La tabella $A$ viene chiamata MATRICE a $m$ righe e $n$ colonne a coefficienti in $\mathbb{K}$ oppure anche matrice $m\times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$.

**Esempio**. Poniamo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matrice $A$ ha 2 righe e 3 colonne, cioè si tratta di una matrice $2\times 3$. Abbiamo in questo caso

$$a_{11}=1 \qquad a_{12}=0 \qquad a_{13}=1/2$$

$$a_{21}=0 \qquad a_{22}=-1 \qquad a_{23}=\sqrt{2}$$

Una matrice che sia costituita da una sola riga si chiama anche MATRICE RIGA (o semplicemente RIGA), una matrice che sia costituita da una sola colonna si chiama anche MATRICE COLONNA (o semplicemente COLONNA). Evidentemente da una matrice qualunque si può formare una matrice riga considerando tutti gli elementi che occupano una fissata riga: diremo semplicemente che quella matrice è una riga della matrice. La prima riga della matrice $A$ verrà indicata con $A^{(1)}$, la seconda riga verrà indicata con $A^{(2)}$, e così via, la $m$–esima riga verrà indicata con $A^{(m)}$. Discorso del tutto analogo per le colonne: la prima colonna della matrice $A$ verrà indicata con $A_{(1)}$, la seconda colonna verrà indicata con $A_{(2)}$, e così via, la $n$–esima colonna verrà indicata con $A_{(n)}$.

Con riferimento all'esempio precedente avremo:

$$1^a \text{ riga di } A: \quad A^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}; \qquad 2^a \text{ riga di } A: \quad A^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$1^a \text{ colonna di } A: \quad A_{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad 2^a \text{ colonna di } A: \quad A_{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad 3^a \text{ colonna di } A: \quad A_{(3)}=\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

**OPERAZIONI CON LE MATRICI**

**MOLTIPLICAZIONE DI UN NUMERO PER UNA MATRICE**

Sia $A$ una matrice $m\times n$ e sia $\alpha$ un numero. Indicheremo con $\alpha\, A$ la matrice ottenuta da $A$ moltiplicando tutti i coefficienti della matrice $A$ per il numero $\alpha$.

**Esempio**. Posto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \alpha = 6,$$

avremo

$$\alpha\, A = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 & 6 \cdot 0 & 6 \cdot 1/2 \\ 6 \cdot 0 & 6 \cdot (-1) & 6 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 6\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

**ADDIZIONE DI MATRICI**

Siano $A$ e $B$ due matrici $m \times n$. Chiameremo matrice *somma* di $A$ con $B$ quella matrice ottenuta sommando posto per posto i coefficienti delle due matrici. In altre parole l'elemento che nella matrice somma occupa la posizione di riga $i$ e colonna $j$ è ottenuta sommando l'elemento che nella matrice $A$ occupa la posizione di riga $i$ e colonna $j$ con l'elemento che nella matrice $B$ occupa la posizione di riga $i$ e colonna $j$. La matrice somma di $A$ e $B$ si indica con $A + B$.

**Esempio**. Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+4 & (1/2)+1 \\ 0+0 & -1-1 & \sqrt{2}-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3/2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

**COMBINAZIONI LINEARI**

Siano $A$ e $B$ due matrici $m \times n$ e siano $\alpha$ e $\beta$ due numeri. L'espressione

$$\alpha\, A + \beta\, B$$

indica la matrice ottenuta nel seguente modo:

- si moltiplica il numero $\alpha$ per la matrice $A$;
- si moltiplica il numero $\beta$ per la matrice $B$;
- si sommano le due matrici così ottenute.

La matrice così ottenuta è ancora una matrice $m \times n$ e prende il nome di *combinazione lineare delle matrici* $A$ e $B$ con *coefficienti* $\alpha$ e $\beta$.

**Esempio**. Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \alpha = 3, \qquad \beta = 1/2,$$

abbiamo

$$\alpha\, A + \beta\, B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (1/2) \cdot 0 & 3 \cdot 0 + (1/2) \cdot 4 & 3 \cdot (1/2) + (1/2) \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + (1/2) \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + (1/2) \cdot (-1) & 3 \cdot \sqrt{2} + (1/2) \cdot (-\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -7/2 & (5/2)\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Naturalmente si può estendere il concetto di combinazione lineare a tre, quattro, ..., $t$ matrici con altrettanti coefficienti.

Specificamente se $A$, $B$, $C$ sono tre matrici $m \times n$ e $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sono numeri allora $\alpha\, A + \beta\, B + \gamma\, C$ è la combinazione lineare delle matrici $A$, $B$ e $C$ con coefficienti $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$.

Analogamente, se $A$, $B$, $C$, $D$ sono quattro matrici $m \times n$ e $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sono numeri allora $\alpha\, A + \beta\, B + \gamma\, C + \delta\, D$ è la combinazione lineare delle matrici $A$, $B$, $C$ e $D$ con coefficienti $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ e $\delta$.

E così via.

**LA MATRICE NULLA**

La matrice $m \times n$ avente tutti i coefficienti uguali a zero si chiama *matrice nulla* $m \times n$. Qualche volta si indica con $O_{m\times n}$ oppure $O_{m,n}$. Per esempio la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice nulla $2 \times 3$. Ovviamente la matrice nulla $m \times n$ gioca per l'addizione di matrici $m \times n$ lo stesso ruolo giocato dal numero zero nelle addizioni tra numeri: sommando una qualunque matrice $m \times n$ alla matrice nulla $m \times n$ otteniamo sempre come risultato la matrice iniziale:

$$A + O_{m\times n} = A$$

Ovviamente se si moltiplica il NUMERO 0 (zero) per una qualunque matrice $A$ con $m$ righe e $n$ colonne si ottiene la matrice nulla $m \times n$.

**LA COMBINAZIONE LINEARE *BANALE***

Sia $h$ un intero positivo e siano $M(1)$, $M(2)$, ..., $M(h)$ delle matrici $m \times n$. Ha senso considerare la combinazione lineare

$$0\, M(1) + 0\, M(2) + \cdots + 0\, M(h)$$

Naturalmente il risultato di questa combinazione lineare è la matrice nulla $m \times n$. Si dice pertanto che questa è la *combinazione lineare banale*. In altre parole, la combinazione lineare banale è quella che ha tutti i coefficienti uguali a zero. Il risultato della combinazione lineare banale è sempre la matrice nulla delle appropriate dimensioni.

**IL CONCETTO DI DIPENDENZA LINEARE**. Si tratta di una idea piuttosto semplice da enunciare ma l'esperienza mostra che molti studenti trovano questo concetto piuttosto ostico. Partiamo da un esempio, prendendo le seguenti tre matrici $2 \times 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Certamente se consideriamo la combinazione lineare banale di $A$, $B$ e $C$ otteniamo la matrice nulla:

$$0\, A + 0\, B + 0\, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcolo diretto mostra tuttavia che anche la seguente combinazione lineare dà come risultato la matrice nulla:

$$\frac{1}{2}\, A + 0\, B + \left(-\frac{1}{3}\right) C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I coefficienti della combinazione lineare sono $1/2$, $0$ e $-1/3$. Tra di essi c'è uno zero (il secondo coefficiente), ma NON TUTTI sono uguali a zero, per esempio il primo coefficiente è diverso da zero. Pertanto possiamo certamente dire che questa combinazione lineare NON è banale, in quanto almeno uno dei suoi coefficienti è diverso da zero. E tuttavia questa combinazione lineare non banale dà come risultato la matrice nulla. Si mette in evidenza questo stato di cose dicendo che le matrici $A$, $B$ e $C$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI. Il discorso si può generalizzare a una qualunque sequenza finita di matrici, tutte delle stesse dimensioni. Diamo pertanto la seguente definizione.

**DEFINIZIONE**. Sia $h$ un intero positivo e siano $M(1)$, $M(2)$, ..., $M(h)$ delle matrici $m \times n$. Diremo che queste matrici sono LINEARMENTE DIPENDENTI se esiste una loro combinazione lineare non banale che dia come risultato la matrice nulla $m \times n$. In altre parole devono esistere $h$ numeri $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_h$, NON TUTTI UGUALI A ZERO, tali che risulti

$$\alpha_1\, M(1) + \alpha_2 + M(2) \ldots \alpha_h\, M(h) = O_{m\times n}.$$

NON TUTTI UGUALI A ZERO significa che ALMENO UNO tra i numeri $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_h$ risulta diverso da zero.

**DEFINIZIONE**. Sia $h$ un intero positivo e siano $M(1)$, $M(2)$, ..., $M(h)$ delle matrici $m \times n$. Diremo che queste matrici sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se esse non sono linearmente dipendenti. Traducendo il tutto significa che l'UNICA loro combinazione lineare che dia come risultato la matrice nulla $m \times n$ è quella BANALE, cioè quella con coefficienti tutti uguali a zero. In altre parole, questo significa che se $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_h$ sono numeri per i quali risulta

$$\alpha_1\, M(1) + \alpha_2 + M(2) \ldots \alpha_h\, M(h) = O_{m\times n}$$

allora abbiamo necessariamente $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\ldots \alpha_h = 0$

**Esempio**. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Facciamo vedere che le matrici $A$ e $B$ sono linearmente INDIPENDENTI. Siano $\alpha$ e $\beta$ numeri tali che risulti

$$\alpha\, A + \beta\, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$\alpha\, A + \beta\, B = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & 2\beta & 2\alpha + 3\beta \\ 0 & -2\alpha - 3\beta & (1/2)\beta \end{pmatrix}$$

dunque deve essere

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + \beta = 0 & 2\beta = 0 & 2\alpha + 3\beta = 0 \\ 0 = 0 & -2\alpha - 3\beta = 0 & (1/2)\beta = 0 \end{pmatrix}$$

La seconda relazione della prima riga dice innanzitutto che $2\beta$ deve essere uguale a zero, pertanto $\beta$ stesso deve essere uguale a zero. Quindi la prima relazione della prima riga dice che $2\alpha$ deve essere uguale a zero, pertanto $\alpha$ stesso deve essere uguale a zero. Concludiamo che $\alpha$ e $\beta$ devono essere entrambi uguali a zero. Pertanto la combinazione lineare è necessariamente banale, vale a dire le matrici $A$ e $B$ sono linearmente indipendenti.

## RANGO DI UNA MATRICE

Si definisce il *rango per righe* di una matrice come il massimo numero di righe linearmente indipendenti che si possono estrarre dalla matrice stessa. Allo stesso modo si definisce il *rango per colonne* di una matrice come il massimo numero di colonne linearmente indipendenti che si possono estrarre dalla matrice stessa. Avendo già sviluppato il concetto di dimensione di uno spazio vettoriale, si può dunque dire che il rango per righe di una matrice è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale *generato* dalle sue righe, mentre il rango per colonne di una matrice è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale *generato* dalle sue colonne.

Nonostante la definizione di questi due numeri possa far ritenere che in linea di principio non siano legati da alcuna relazione, si dimostra che per ogni fissata matrice $M$ il rango per righe di $M$ e il rango per colonne di $M$ coincidono.

**TEOREMA**. Il rango per righe e il rango per colonne di una qualunque matrice coincidono.
**Dimostrazione** La dimostrazione di questo risultato richiede che sia già noto il concetto di dimensione di un sottospazio vettoriale e viene pertanto riamandata a un secondo momento. □

Questa proprietà molto importante ci permette di parlare del *rango* di una matrice (il valore comune del suo rango per righe e del suo rango per colonne).

Descriviamo ora un classico metodo per il calcolo del rango di una matrice, conosciuto generalmente come metodo di Gauß–Jordán. In questo procedimento si opera sulle righe e quindi si sta utilizzando il fatto visto sopra che il rango di una matrice si può pensare come rango per righe.

**Proprietà** (la dimostrazione si vedrà in seguito). Il rango di una matrice non cambia se essa viene sottoposta a una qualunque delle seguenti operazioni, dette OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE:

– scambio di due righe;

– moltiplicazione di una riga per uno numero diverso da zero;

– addizione di un multiplo di una riga a un'altra riga.

**Definizione**. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$. Sia $A^{(i)} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ la $i$–esima riga della matrice $A$. Se tale riga non è la riga nulla, diremo che $a_{ij}$ è il *pivot* della riga $i$–esima se $j$ è il minimo indice per cui $a_{ij}$ risulta diverso da zero. In altri termini il pivot di una riga non nulla è il primo elemento non nullo che si incontra nella riga stessa pocedendo da sinistra verso destra. L'indice $j$ che ci dà la posizione del pivot $a_{ij}$ della $i$–esima riga si chiama *posizione pivotale*.

**Definizione**. Si dice che una matrice non nulla $A$ è a *a gradini* se soddisfa le seguenti proprietà:

- le righe non nulle di $A$ precedono le eventuali righe nulle;
- le posizioni dei pivot delle righe non nulle si dispongono in ordine crescente da sinistra verso destra; in altre parole, il pivot della seconda riga non nulla si trova più a destra del pivot della prima riga non nulla, il pivot della terza riga non nulla si trova più a destra del pivot della seconda riga non nulla; e così via.

**Proprietà**. Ogni matrice può essere trasformata in una matrice a gradini mediante una opportuna sequenza di operazioni elementari sulle righe. Il rango di una matrice a gradini è uguale al numero delle sue righe non nulle.

Questa proprietà permette di indicare subito l'idea del procedimento di Gauß–Jordan. Data una matrice qualunque, la si trasforma in una matrice a gradini mediante una sequenza di operazioni elementari sulle righe. Poichè, come si è detto, tali operazioni non alterano il rango della matrice, possiamo dire che il rango della matrice a gradini ottenuta è uguale al rango della matrice originaria. Il calcolo del rango della matrice a gradini si ottiene semplicemente contando le righe non nulle.

**Esercizio.** Calcolare il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

La prima riga ha il pivot in posizione 1. Pertanto procedo ad annullare gli elementi che si trovano in posizione 1 nelle righe successive. Sostituisco la seconda riga $A^{(2)}$ con $A^{(2)} - A^{(1)}$; successivamente sostituisco la terza riga $A^{(3)}$ con $A^{(3)} - 2A^{(1)}$; successivamente sostituisco la quarta riga $A^{(4)}$ con $A^{(4)} - 3A^{(1)}$. Ottengo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La seconda riga di questa nuova matrice ha il pivot in posizione 2. Pertanto procedo ad annullare gli elementi che si trovano in posizione 2 nelle righe successive. Sostituisco la terza riga $B^{(3)}$ con $B^{(3)} + 3B^{(2)}$; successivamente sostituisco la quarta riga $B^{(4)}$ con $B^{(4)} + B^{(1)}$. Ottengo la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $C$ è una matrice a gradini, pertanto il suo rango è uguale al numero delle sue righe non nulle. Le righe non nulle sono due (la prima e la seconda) pertanto il rango di $C$ è uguale a 2. Poichè la matrice $C$ è stata ottenuta da $A$ mediante una sequenza di operazioni elementari sulle righe, possiamo dire che il rango della matrice originaria $A$ è uguale al rango della matrice $C$, vale a dire che la matrice $A$ ha rango 2.

**Definizione**. Una matrice a gradini si dice *ridotta* se i pivot di tutte le righe sono uguali a 1 e inoltre se ciascun pivot è l'unico elemento non nullo della propria colonna.

**Proprietà**. Ogni matrice a gradini si può trasformare in una matrice a gradini ridotta mediante una opportuna sequenza di operazioni elementari sulle righe.

Evidentemente i pivot di una matrice a gradini si possono far diventare facilmente tutti uguali a 1 moltiplicando ciascuna riga non nulla per l'inverso del proprio pivot. Appena più complicato risulta il procedimento per annullare gli elementi al disopra di un pivot.

**Esercizio**. La matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pur essendo a gradini non è ridotta perchè il pivot della seconda riga è sì uguale a 1, ma ha un elemento non nullo sopra di sè. Per annullare tale elemento sostituisco la prima riga $C^{(1)}$ con la riga $C^{(1)} - 3C^{(2)}$. Ottengo la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la quale è una matrice a gradini ridotta.

**Esercizio.** Per $t \in \mathbb{R}$ si definisca la seguente matrice a coefficienti reali:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & t^2 \\ t^2 & 1 & t+1 & 0 \\ -2 & t & t & t \end{pmatrix}$$

(1) Per ogni valore reale di $t$ trasformare la matrice $A(t)$ in una matrice a gradini ridotta mediante operazioni elementari sulle righe.

(2) Per ogni valore reale di $t$ determinare il rango della matrice $A(t)$.

*Svolgimento.* Procediamo con operazioni elementari sulle righe. La prima riga ha il pivot in posizione 1 e il valore del pivot è già 1 quindi conviene tenere fermo questo pivot e azzerare i coefficienti sotto di lui

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & t^2 \\ t^2 & 1 & t+1 & 0 \\ -2 & t & t & t \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} R^{(2)} \to R^{(2)} - t^2 R^{(1)} \\ R^{(3)} \to R^{(3)} + 2R^{(1)} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & t^2 \\ 0 & 1 & t^3+t+1 & -t^4 \\ 0 & t & -t & 2t^2+t \end{pmatrix}$$

La seconda riga ha il pivot in posizione 1 e il valore del pivot è già 1. Quindi conviene tenere fermo questo pivot e azzerare il coefficiente sotto di lui (tra l'altro il coefficiente sopra questo pivot è già uguale a zero).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & t^2 \\ 0 & 1 & t^3+t+1 & -t^4 \\ 0 & t & -t & 2t^2+t \end{pmatrix} \qquad R^{(3)} \to R^{(3)} - tR^{(2)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & t^2 \\ 0 & 1 & t^3+t+1 & -t^4 \\ 0 & 0 & -t^4-t^2-2t & t^5+2t^2+t \end{pmatrix}$$

Per decidere chi è il pivot della terza riga dobbiamo distinguere i casi in cui l'espressione $-t^4 - t^2 - 2t$ assume un valore diverso da zero dai casi in cui tale espressione assume il valore zero.

Abbiamo $-t^4 - t^2 - 2t = (-t)(t^3 + t + 2)$, pertanto i valori di $t$ che annullano il polinomio $-t^4 - t^2 - 2t$ sono $t = 0$ e gli eventuali valori di $t$ che annullano il polinomio di terzo grado $t^3 + t + 2$.

Con un ragionamento che sarà evidente dopo avere visto le proprietà delle funzioni derivabili nel Corso di Analisi Matematica (la funzione $f(t) = t^3 + t + 2$ è espressa da un polinomio di terzo grado quindi si annulla almeno una volta sull'asse reale; d'altro canto la sua derivata $f'(t) = 3t^2 + 1$ è strettamente maggiore di zero su tutto l'asse reale, quindi la funzione $f(t)$ è strettamente crescente su tutto l'asse reale, diverge negativamente per $t$ che tende a $-\infty$, diverge positivamente per $t$ che tende a $+\infty$, quindi si annulla una volta sola) possiamo dire che l'unico valore reale di $t$ che annulla il polinomio $t^3 + t + 2$ è $t = -1$. Concludiamo quindi che i valori di $t$ che annullano il polinomio $-t^4 - t^2 - 2t$ sono $t = 0$ e $t = -1$

<u>CASO I: $t \neq 0$, $t \neq -1$</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & t^2 \\ 0 & 1 & t^3+t+1 & -t^4 \\ 0 & 0 & -t^4-t^2-2t & t^5+2t^2+t \end{pmatrix} \qquad R^{(3)} \to \left(1/(-t^4-t^2-2t)\right) R^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -t & t^2 \\ 0 & 1 & t^3+t+1 & -t^4 \\ 0 & 0 & 1 & -(t^5+2t^2+t)/(t^4+t^2+2t) \end{pmatrix}$$

La matrice è a gradini con tre pivot (ovvero tre righe non nulle), quindi già a questo punto possiamo concludere che per $t \neq 0$, $t \neq -1$ il rango della matrice $A(t)$ è uguale a 3. Per la trasformazione in una matrice a gradini ridotta procediamo con ulteriori operazioni elementari sulle righe

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -t & t^2 \\ 0 & 1 & t^3+t+1 & -t^4 \\ 0 & 0 & 1 & -(t^5+2t^2+t)/(t^4+t^2+2t) \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} R^{(1)} \to R^{(1)} + t\,R^{(3)} \\ R^{(2)} \to R^{(2)} - (t^3+t+1)\,R^{(2)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & (t^4-t^2)/(t^4+t^2+2t) \\ 0 & 1 & 0 & (t^5+t^4+2t^3+3t^2+t)/(t^4+t^2+2t) \\ 0 & 0 & 1 & -(t^5+2t^2+t)/(t^4+t^2+2t) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & t(t-1)/(t^2-t+2) \\ 0 & 1 & 0 & (t^3+2t+1)/(t^2-t+2) \\ 0 & 0 & 1 & -(t+1)/(t^2-t+2) \end{array}\right)$$

<u>CASO II: $t = 0$</u>
Riprendiamo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -t & t^2 \\ 0 & 1 & t^3+t+1 & -t^4 \\ 0 & 0 & -t^4-t^2-2t & t^5+2t^2+t \end{array}\right)$$

e poniamo $t = 0$ ottenendo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si tratta di una matrice a gradini ridotta con due pivot (ovvero due righe non nulle), quindi già a questo punto possiamo concludere che per $t = 0$ il rango della matrice $A(t)$ è uguale a 2.

<u>CASO III: $t = -1$</u>
Riprendiamo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -t & t^2 \\ 0 & 1 & t^3+t+1 & -t^4 \\ 0 & 0 & -t^4-t^2-2t & t^5+2t^2+t \end{array}\right)$$

e poniamo $t = -1$ ottenendo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si tratta di una matrice a gradini ridotta con due pivot (ovvero due righe non nulle), quindi già a questo punto possiamo concludere che per $t = -1$ il rango della matrice $A(t)$ è uguale a 2.

**MOLTIPLICAZIONE DI MATRICI**

Siano $A$ una matrice $m \times n$ e $B$ una matrice $n \times p$, entrambe a coefficienti in un fissato campo numerico $\mathbb{K}$:

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ & & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{array}\right)$$

Definiamo la seguente matrice $C$ a $m$ righe e $p$ colonne.

Per definire l'elemento $c_{st}$ che nella matrice $C$ occupa la posizione di riga $s$ e colonna $t$ abbiamo bisogno della riga $A^{(s)}$ della matrice $A$ e della colonna $B_{(t)}$ della matrice $B$:

$$A^{(s)} = \left(\begin{array}{cccc} a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{array}\right) \qquad B_{(t)} = \left(\begin{array}{c} b_{1t} \\ b_{2t} \\ \vdots \\ b_{nt} \end{array}\right)$$

Osserviamo che tanto la sequenza $a_{s1}, a_{s2}, \dots a_{sn}$ quanto la sequenza $b_{1t}, b_{2t}, \dots b_{nt}$ hanno $n$ elementi, cioè si tratta di due stringhe numeriche della stessa lunghezza. Possiamo pertanto definire

$$c_{st} = a_{s1} \cdot b_{1t} + a_{s2} \cdot b_{2t} + \dots + a_{sn} \cdot b_{nt} \text{ per } s = 1, 2, \dots, m,\ t = 1, 2, \dots, p.$$

Scriveremo $C = A \cdot B$ e diremo che $C$ è la matrice *prodotto* (*righe per colonne*) di $A$ per $B$.

Osserviamo che abbiamo in tal modo definito una vera e propria operazione di *moltiplicazione* tra matrici, nel senso che l'operazione di moltiplicazione accoglie in INPUT due matrici, il primo fattore $A$ e il secondo fattore $B$, e restituisce in OUTPUT una nuova matrice $C = A \cdot B$, da chiamarsi il prodotto di $A$ per $B$, la quale ha tante righe quante ne ha il primo fattore (cioè $m$) e tante colonne quante ne ha il secondo fattore. In altre parole il prodotto di una matrice $m \times n$ per una matrice $n \times p$ è una matrice $m \times p$.

Si noti che il prodotto di $A$ per $B$ non si può eseguire indiscriminatamente: per poterlo fare occorre che il numero di colonne del primo fattore $A$ sia UGUALE al numero di righe del secondo fattore $B$.

Si noti anche che abbiamo usato per la moltiplicazione di matrici lo stesso simbolo dato dal puntino "$\cdot$" che abbiamo utilizzato per la moltiplicazione tra numeri e per la moltiplicazione di un numero per una matrice: non vi è possibilità di confusione tra i simboli usati, anche in una stessa espressione, perchè di volta in volta il contesto fa capire di che tipo di moltiplicazione si tratta.

**Esempio**. Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$C = A \cdot B =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-\sqrt{2}) + \frac{1}{2} \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{2}{3}) \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot 1 & 0 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) + \sqrt{3} \cdot 1 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-\sqrt{2}) + \sqrt{3} \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 + \sqrt{3} \cdot (-\frac{2}{3}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1 & -\frac{4}{3} \\ \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} & \sqrt{2} & \frac{-9-2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Questo è un esempio nel quale il prodotto $A \cdot B$ esiste poichè il numero di colonne di $A$ è uguale al numero di righe di $B$, cioè 3. Invece il prodotto $B \cdot A$ non esiste (nel senso che non è definito), dato che il numero di colonne del primo fattore, che in questo caso sarebbe $B$, è uguale a 4, mentre il numero di righe del secondo fattore, che in questo caso sarebbe $A$, è uguale a 2: poichè $4 \neq 2$ la moltiplicazione di $B$ per $A$ NON può avere luogo.

Poniamo

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che esistono entrambi i prodotti $H \cdot M$ e $M \cdot H$, che calcoliamo come segue

$$H \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto $H \cdot M \neq M \cdot H$. Ciò significa che anche quando la moltiplicazione di due matrici si può eseguire in entrambi i versi, non è detto che il risultato sia il medesimo. Dunque NON vale per la moltiplicazione di matrici la regola aurea che abbiamo imparato da sempre per la moltiplicazione di numeri ("scambiando l'ordine dei fattori il prodotto non cambia")