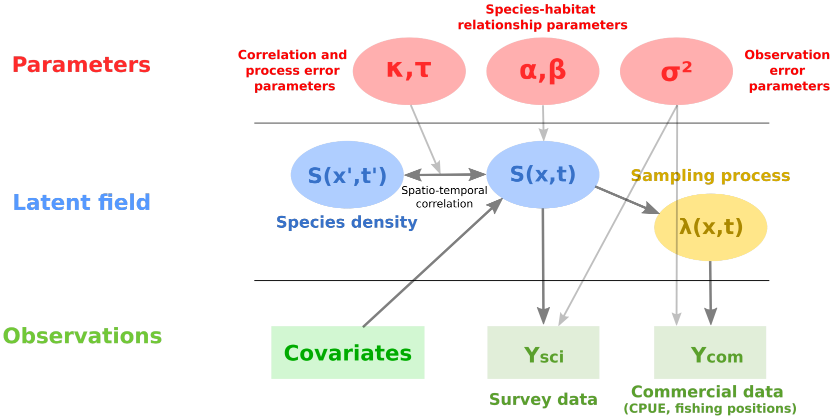
TD R-INLA - M2 halieutes

Baptiste Alglave based on Thomas Opitz and Denis Allard

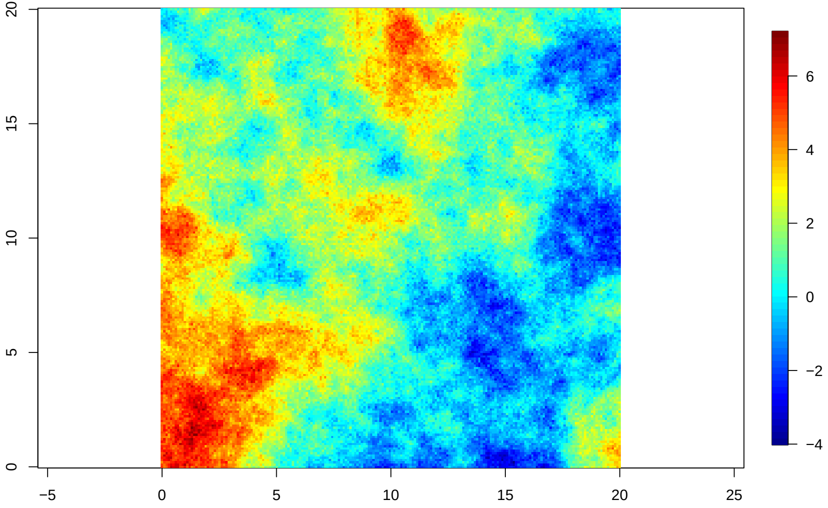
Janvier 2022

Modéle hiérarchique spatial



Un exemple de modèle hiérarchique

Champ gaussien



$$x|\theta \sim GF(\mu, \Sigma) \qquad \text{champ gaussien}$$

- $\Sigma = Q^{-1}$: la matrice de variance-covariance de l'effet aléatoire (suit une certaine fonction de variance-covariance - souvent de type Matérn). Q est la matrice de précision.

Formulation mathématique

$$\theta \sim \pi(\theta) \qquad \text{hyperparamètres}$$

$$x|\theta \sim GF(0, \Sigma) \qquad \text{champ gaussien latent}$$

$$y|x, \theta \sim \prod_i \pi(y_i|\eta_i(x), \theta) \qquad \text{processus d'observation}$$

- y: les observations
- θ: les hyperparamètres
- $\Sigma = Q^{-1}$: la matrice de variance-covariance de l'effet aléatoire (suit une certaine fonction de variance-covariance - souvent de type Matérn). Q est la matrice de précision.
- $\eta(x) = Ax$ un processus gaussien avec A la matrice d'observation

La difficulté : estimer la structure de corrélation spatiale (Σ ou Q).

Formulation mathématique

$$\theta \sim \pi(\theta) \qquad \text{hyperparamètres}$$

$$x|\theta \sim GF(0, \Sigma) \qquad \text{champ gaussien latent}$$

$$y|x, \theta \sim \prod_i \pi(y_i|\eta_i(x), \theta) \qquad \text{processus d'observation}$$

- y: les observations
- θ: les hyperparamètres
- $\Sigma = Q^{-1}$: la matrice de variance-covariance de l'effet aléatoire (suit une certaine fonction de variance-covariance - souvent de type Matérn). Q est la matrice de précision.
- $\eta(x) = Ax$ un processus gaussien avec A la matrice d'observation

La difficulté : estimer la structure de corrélation spatiale (Σ ou Q).

1er approximation : Approche SPDE

- Principe de l'approche SPDE (Lindgren, Rue and Lindström, 2011) :
  - 1 champ gaussien de covariance une fonction de Matérn ...
  - ... est solution de l'EDPS ...

$$\left(\kappa^2 - \Delta\right)^{\alpha/2} x(s) = W(s), \quad s \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha = \nu + d/2, \quad \kappa > 0, \quad \nu > 0$$

  - ... et peut être représenté comme un champ Gauss-Markov (seulement pour certaines valeurs de ν)
- Ce lien entre champ Gaussien et champ Gauss-Markov fournit une représentation creuse de l'effet spatial et simplifie les calculs.

Notations : Δ le laplacien, $W(s)$ un bruit blanc gaussien, κ le paramètre contrôlant la portée de l'effet aléatoire, ν et α les paramètres de lissage, d le nombre de dimension (2).

Pour des valeurs données de ν, les champs Gauss-Markov génèrent des solutions approchées de l'EDPS. Les matrices de précisions de ces champs Gauss-Markov peuvent être utilisées pour formuler les matrices de précisions des champs gaussiens. Par exemple :

- pour $\nu = 1$, la matrice de précision s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2a & 2 & \\ 4+a^2 & -2a & 1 \end{pmatrix}$$

- pour $\nu = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ 3a & -3 & & \\ -3\left(a^2+3\right) & 6a & -3 & \\ a\left(a^2+12\right) & -3\left(a^2+3\right) & 3a & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice est de moins en moins creuse ; l'effet aléatoire en un point dépend d'un voisinage plus étendu.

Pour des valeurs données de ν, les champs Gauss-Markov génèrent des solutions approchées de l'EDPS. Les matrices de précisions de ces champs Gauss-Markov peuvent être utilisées pour formuler les matrices de précisions des champs gaussiens. Par exemple :

- pour $\nu = 1$, la matrice de précision s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2a & 2 & \\ 4 + a^2 & -2a & 1 \end{pmatrix}$$

- pour $\nu = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ 3a & -3 & & \\ -3\left(a^2+3\right) & 6a & -3 & \\ a\left(a^2+12\right) & -3\left(a^2+3\right) & 3a & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice est de moins en moins creuse ; l'effet aléatoire en un point dépend d'un voisinage plus étendu.

Pour des valeurs données de ν, les champs Gauss-Markov génèrent des solutions approchées de l'EDPS. Les matrices de précisions de ces champs Gauss-Markov peuvent être utilisées pour formuler les matrices de précisions des champs gaussiens. Par exemple :

- pour $\nu = 1$, la matrice de précision s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2a & 2 & \\ 4+a^2 & -2a & 1 \end{pmatrix}$$

- pour $\nu = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ 3a & -3 & & \\ -3\left(a^2+3\right) & 6a & -3 & \\ a\left(a^2+12\right) & -3\left(a^2+3\right) & 3a & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice est de moins en moins creuse ; l'effet aléatoire en un point dépend d'un voisinage plus étendu.

Pour des valeurs données de ν, les champs Gauss-Markov génèrent des solutions approchées de l'EDPS. Les matrices de précisions de ces champs Gauss-Markov peuvent être utilisées pour formuler les matrices de précisions des champs gaussiens. Par exemple :

- pour $\nu = 1$, la matrice de précision s'écrit :

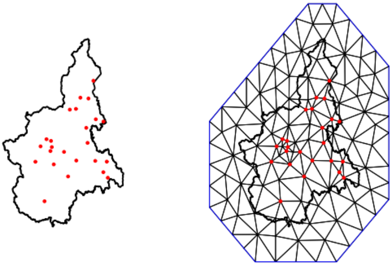
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2a & 2 & \\ 4+a^2 & -2a & 1 \end{pmatrix}$$

- pour $\nu = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ 3a & -3 & & \\ -3\left(a^2+3\right) & 6a & -3 & \\ a\left(a^2+12\right) & -3\left(a^2+3\right) & 3a & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice est de moins en moins creuse ; l'effet aléatoire en un point dépend d'un voisinage plus étendu.

Fig. 2 *Left panel*: locations of the 24 monitoring stations in Piemonte region. *Right panel*: triangulation of Piemonte region using 123 vertices



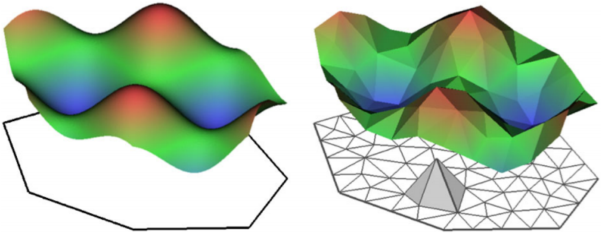


Fig. 3 *Left panel*: example of a spatial random field (*left*) given by $X(\boldsymbol{s}) = \cos(s_1) + \sin(s_2)$, where $\boldsymbol{s} = \{s_1, s_2\}$. *Right panel*: corresponding finite element representation of the spatial random field $X(\boldsymbol{s})$ according to Eq. (9)

2e approximation : INLA

La probabilité conjointe du champ latent et des hyperparamètres s'écrit :

$$\pi(x,\theta|y) \propto \pi(\theta)\pi(x|\theta)\pi(y|x,\theta) \propto \pi(\theta)\pi(x|\theta)\prod_{i\in\mathcal{I}}\pi\left(y_i|x_i,\theta\right)$$

avec θ : les paramètres, x : le champ latent, y : les observations

➜ **Long à estimer (via des méthodes type MCMC)**

La méthode INLA consiste à approximer les distributions marginales $\pi(\theta|y)$ et $\pi\left(x_i|\theta,y\right)$:

- $\tilde{\pi}\left(x_i|y\right) = \int \tilde{\pi}\left(x_i|\theta,y\right)\tilde{\pi}(\theta|y)d\theta$
- $\tilde{\pi}\left(\theta_j|y\right) = \int \tilde{\pi}(\theta|y)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{-j}$

2e approximation : INLA

La probabilité conjointe du champ latent et des hyperparamètres s'écrit :

$$\pi(x,\theta|y) \propto \pi(\theta)\pi(x|\theta)\pi(y|x,\theta) \propto \pi(\theta)\pi(x|\theta)\prod_{i\in\mathcal{I}}\pi\left(y_i|x_i,\theta\right)$$

avec θ : les paramètres, x : le champ latent, y : les observations

➜ **Long à estimer (via des méthodes type MCMC)**

La méthode INLA consiste à approximer les distributions marginales $\pi(\theta|y)$ et $\pi\left(x_i|\theta,y\right)$:

- $\tilde{\pi}\left(x_i|y\right) = \int \tilde{\pi}\left(x_i|\theta,y\right)\tilde{\pi}(\theta|y)d\theta$
- $\tilde{\pi}\left(\theta_j|y\right) = \int \tilde{\pi}(\theta|y)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{-j}$

2e approximation : INLA

La probabilité conjointe du champ latent et des hyperparamètres s'écrit :

$$\pi(x,\theta|y) \propto \pi(\theta)\pi(x|\theta)\pi(y|x,\theta) \propto \pi(\theta)\pi(x|\theta)\prod_{i\in\mathcal{I}}\pi\left(y_i|x_i,\theta\right)$$

avec θ : les paramètres, x : le champ latent, y : les observations

➜ **Long à estimer (via des méthodes type MCMC)**

La méthode INLA consiste à approximer les distributions marginales $\pi(\theta|y)$ et $\pi\left(x_i|\theta,y\right)$:

- $\tilde{\pi}\left(x_i|y\right) = \int \tilde{\pi}\left(x_i|\theta,y\right)\tilde{\pi}(\theta|y)d\theta$
- $\tilde{\pi}\left(\theta_j|y\right) = \int \tilde{\pi}(\theta|y)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{-j}$

Bilan

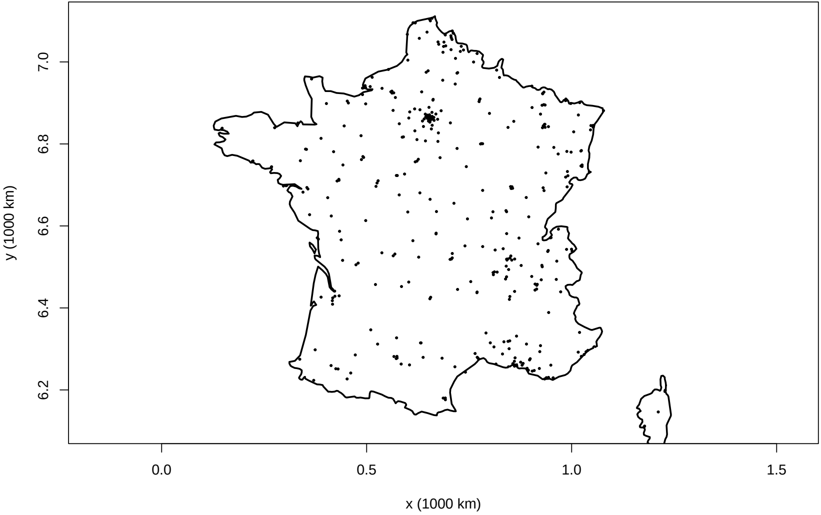
- INLA : Estimation des lois marginales des effets aléatoires et des hyperparamètres par des approximations de Laplace emboitées
- Approche SPDE (1er résultats) : Approximation d'un champ gaussien par un champ Gauss-Markov

➜ Valide pour des champs latents gaussiens

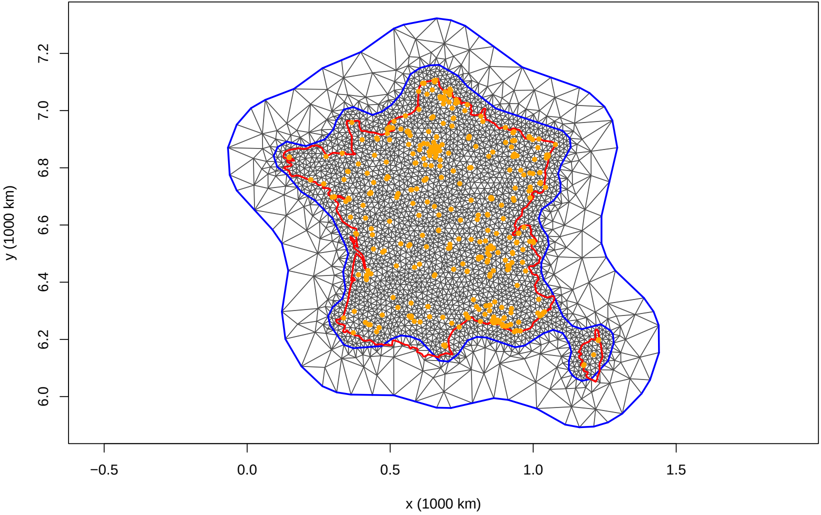
- Approche SPDE (2e résultats) : Interpolation linéaire pour relier le champ gaussien (définie sur une maille discrète) aux observations (définies sur un domaine continu)

➜ Attention à la construction de la maille

Données



Création de la mesh



Construction de l'objet SPDE

```
myspde=inla.spde2.pcmatern(mesh=mesh,
                           alpha=2,
                           prior.range=c(.01,.1),
                           prior.sigma=c(25,0.5))

# Matrice d'observation pour faire le lien
# entre les noeuds de la mesh et les points d'observation
A=inla.spde.make.A(mesh,loc=xy_OBS)

# Vecteur des indices pour les noeuds de la mesh
idx.spatial=inla.spde.make.index("spatial",
                                 n.spde=mesh$n)
```

Construction du modèle de régression

Premièrement, on construit un dataframe de covariable.

```
covar.df=data.frame(intercept=1,
                    x=xy_OBS[,1],
                    y=xy_OBS[,2])

# Creation du stack pour les données et les indices
mystack=inla.stack(data=list(pm10=OBS_daily2014$PM10),
                   A=list(A,1),
                   effects=list(idx.spatial,covar.df))

# Ecriture des formules du modèle
myformula=pm10~-1+intercept+f(spatial,model=myspde)
```

N.b.: comme on écrit l'intercept de facon explicite, on doit inclure “-1” dans l'expression du modèle.

Ajustement du modèle avec R-INLA

```
fit=inla(myformula,
         data=inla.stack.data(mystack),
         family="gaussian",
         control.predictor=list(A=inla.stack.A(mystack),
                                compute=FALSE),
         control.inla=list(int.strategy="eb",
                           strategy="gaussian"),
         verbose=FALSE)

summary(fit)
```

```
##
## Call:
##    c("inla(formula = myformula, family = \"gaussian\", data =
##    inla.stack.data(mystack), ", " verbose = FALSE, control.predictor =
##    list(A = inla.stack.A(mystack), ", " compute = TRUE, link = 1),
##    control.inla = list(int.strategy = \"eb\", ", " strategy =
##    \"gaussian\"))")
## Time used:
##     Pre = 0.832, Running = 99.7, Post = 8.58, Total = 109
## Fixed effects:
##             mean    sd 0.025quant 0.5quant 0.975quant   mode kld
## intercept 18.058 0.324     17.423   18.058     18.694 18.058   0
##
## Random effects:
##   Name     Model
##     spatial SPDE2 model
##
## Model hyperparameters:
##                                          mean    sd 0.025quant 0.5quant
## Precision for the Gaussian observations 0.009 0.000      0.009    0.009
## Range for spatial                       0.021 0.005      0.012    0.021
## Stdev for spatial                       4.326 0.392      3.655    4.289
##                                         0.975quant  mode
## Precision for the Gaussian observations      0.009 0.009
## Range for spatial                            0.031 0.021
## Stdev for spatial                            5.190 4.192
##
## Marginal log-Likelihood:  -283189.30
##  is computed
## Posterior summaries for the linear predictor and the fitted values are computed
## (Posterior marginals needs also 'control.compute=list(return.marginals.predictor=TRUE)')
```

Predictions avec R-INLA

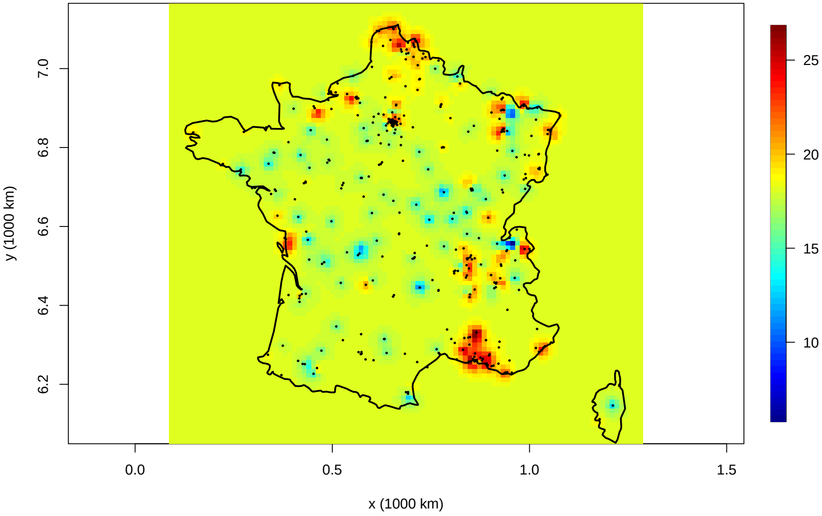
Pour calculer les predictions, la donnée d'entrée (`inla.stack`) doit être un peu modifié. On ajoute des valeurs NA au vecteur d'observations et INLA prédit les valeurs du champ latent sur ces points.

```
# Construction de la grille de projection
proj_grid=inla.mesh.projector(mesh,
                              xlim=range(bound$loc[,1]),
                              ylim=range(bound$loc[,2]),
                              dims=c(100,100))

xygrid=as.matrix(expand.grid(proj_grid$x,proj_grid$y))

# Construction la matrice de projection
A=inla.spde.make.A(mesh,
                   loc=rbind(xygrid,xy_OBS))


covar.df=data.frame(intercept=1,
                    x=c(xygrid[,1],
                        xy_OBS[,1]),
                    y=c(xygrid[,2],
                        xy_OBS[,2]))

# Creation du stack avec toutes les données et les indices: on ajoute des NA dans le vecteur d'observation
mystack=inla.stack(data=list(pm10=c(rep(NA,nrow(xygrid)),
                                    OBS_daily2014$PM10)),
                   A=list(A,1),
                   effects=list(idx.spatial,covar.df),
                   tag="mytag")
```

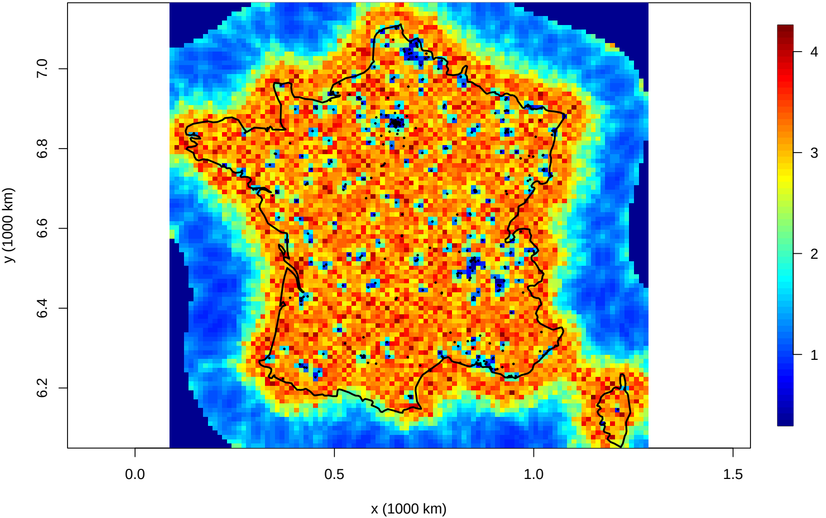
Lors de l'ajustement, on spécifie l'argument `compute=TRUE` (pour calculer les valeurs ajustées et les valeurs prédites) et `link=1`.

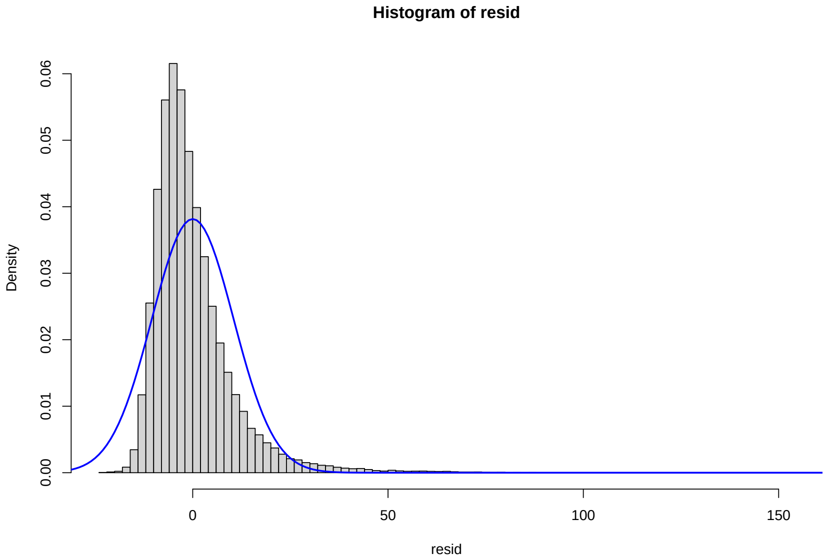
Le temps de calcul peut être beaucoup plus long puisque R-INLA calcule aussi les prédictions sur l'ensemble de la grille.

```
fit=inla(myformula,
         data=inla.stack.data(mystack),
         family="gaussian",
         control.predictor=list(A=inla.stack.A(mystack),
                                compute=TRUE,
                                link=1),
         control.inla=list(int.strategy="eb",
                           strategy="gaussian"),
         verbose=FALSE)
```


y (1000 km)
7.0
6.8
6.6
6.4
6.2
0.0
0.5
1.0
1.5
x (1000 km)
25
20
15
10

Predictions avec R-INLA

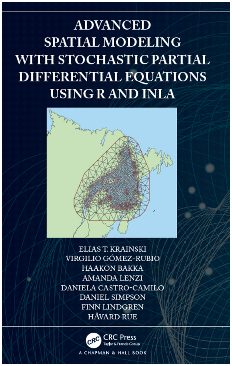


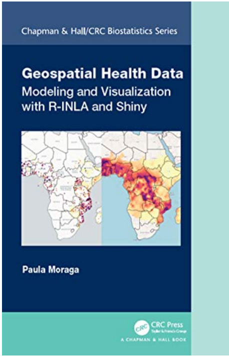

Histogram of resid
Density
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0
50
100
150
resid

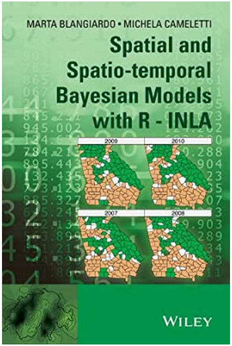
Exercice ?

- Ajout de covariables au modèle (i.e. prédicteurs linéaires comme variable explicative)
- Evaluation/comparaison de modèles
- Passage à un modèle spatio-temporel
- Construction d'un modèle intégré (plusieurs sources de données)

Quelques références utiles





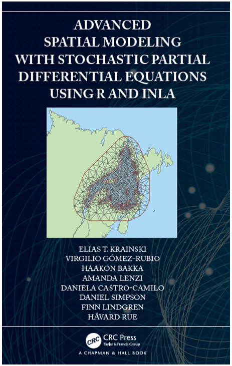


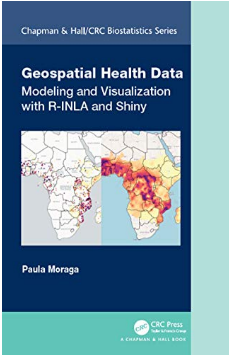
R-Inla peut paraître difficile à prendre en main (background mathématique, formatage de la donnée, construction de la matrice d'observation A et construction des cartes de prédiction)

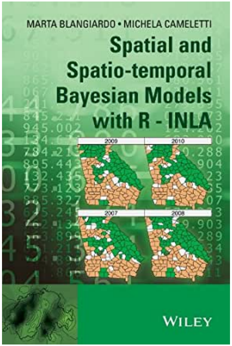
➜ Pas tant que ca...

➜ Sinon le package Inlabru a pour but de rendre plus accessible l'outil d'inférence INLA

Quelques références utiles





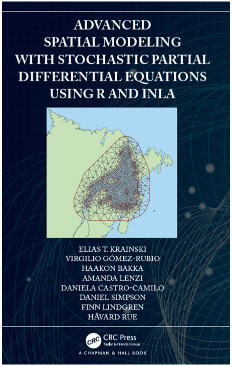


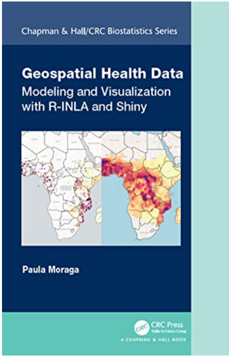
`R-Inla` peut paraître difficile à prendre en main (background mathématique, formatage de la donnée, construction de la matrice d'observation A et construction des cartes de prédiction)

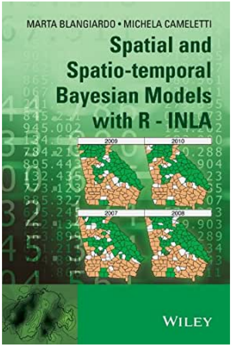
➜ Pas tant que ca...

➜ Sinon le package `Inlabru` a pour but de rendre plus accessible l'outil d'inférence INLA

Quelques références utiles





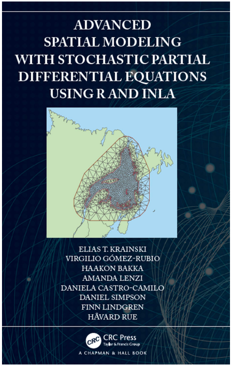


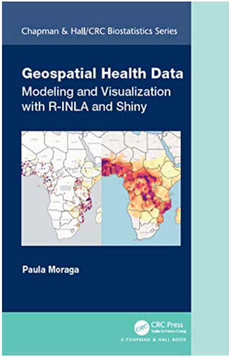
`R-Inla` peut paraître difficile à prendre en main (background mathématique, formatage de la donnée, construction de la matrice d'observation A et construction des cartes de prédiction)

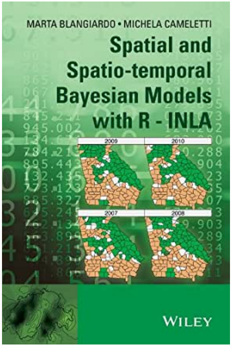
➜ Pas tant que ca...

➜ Sinon le package `Inlabru` a pour but de rendre plus accessible l'outil d'inférence INLA

Quelques références utiles







`R-Inla` peut paraître difficile à prendre en main (background mathématique, formatage de la donnée, construction de la matrice d'observation A et construction des cartes de prédiction)

➜ Pas tant que ca...

➜ Sinon le package `Inlabru` a pour but de rendre plus accessible l'outil d'inférence INLA