Chapitre 3 Variables aléatoires continues

Préparé par Besma TALBI

1. Définition : une variable aléatoire X continue est une variable aléatoire dont l'ensemble de valeur est R ou un intervalle de R.

2. Densité de probabilité et fonction de répartition

On appelle fonction de répartition d'une v.a. continue X et on la note F la fonction définie sur *IR* et à valeurs dans [0, 1], par la relation :

$F: R \to [0,1]$

$x_i \to p(X \leq x_i) = F(x_i)$.

Si la fonction F est dérivable on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

La fonction f est appelée densité de probabilité : $f(x) = F'(x)$

3. Théorème

f est une d.d.p. d'une V.A.X si :

$f(x) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

4. Remarques

P(a < X < b) = P(a ≤ X < b) = P(a < X ≤ b) = P(a ≤ X ≤ b) = F(b) – F(a)

$P(X = x) = 0$

Exemple

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & Sinon \end{cases}$$

a) Déterminer a.

b) Déterminer la fonction de répartition.

c) Déterminer $P(X \geq 3)$

Réponse

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} ae^{-x}dx = 1 \leftrightarrow a\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1 \leftrightarrow [-e^{-x}]_{0}^{+\infty} = 1 \leftrightarrow a = 1$

b) 1 cas : $Si\ x < 0, F(x) = 0$

2 cas : $Si\ x \geq 0, F(x) = \int_0^x e^{-t}\, dt = -[e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}$

$$F(x)\begin{cases} 1 - e^{-x}\ Si\ x \geq 0 \\ 0 \quad Sinon \end{cases}$$

c) $P(X \geq 3) = 1 - F(3) = e^{-3}$

5. Les caractéristiques d'une variable aléatoire continue

5.1. Espérance mathématique

On appelle espérance mathématique notée $E(X)$ le nombre réel défini par $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx$

5.2. Variance

On appelle variance le réel défini par $V(X)$=$E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$

Avec $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)dx$

6. Les lois continues usuelles

6.1. La loi uniforme

a**) Définition**

Une variable aléatoire suit une loi uniforme si sa densité de probabilité sur un intervalle fini $[a, b]$ définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}\ si\ a \leq x \leq b \\ 0 \quad Sinon \end{cases}$

b) Caractéristiques

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

c) Exemple

Une V.A. est donnée par la fonction de répartition suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad Si\ x < 1 \\ \dfrac{x-1}{2} \quad Si\ 1 \leq x \leq 3 \\ 1\ \ Si\ x > 3 \end{cases}$$

1) Trouver la densité de probabilité de la V.A.X.

2) En déduire $E(X)\ \ et\ V(X)$.

Réponse :

1)$f(x) = F^{'}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ Si\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0\ \ Sinon \end{cases}$

f est la densité de probabilité de la loi uniforme continue

2)$E(X) = \frac{a+b}{2} = 2$

$$V(X) = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

6.2 Loi exponentielle

a) Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre θ et on note si sa densité de probabilité est définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} si x \geq 0 \\ 0 \sin on \end{cases}$$

La fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta x} si x \geq 0 \\ 0 \sin on \end{cases}$$

b) Caractéristiques

$$E(x) = \frac{1}{\theta}$$

$$V(x) = \frac{1}{\theta^2}$$

c)Exemple

La durée de vie d'une ampoule est une V.A. continue dont la densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}05e^{-0{,}05x} Si\ x \geq 0 \\ 0\ \ Sinon \end{cases}$$

1) Quelle est la durée moyenne de vie d'une telle ampoule ?

2) Déterminer la fonction de répartition.

3) Déterminer $P(X \geq 2)$.

Réponse

1) Il s'agit d'une loi exponentielle d'où $E(X) = \frac{1}{0{,}05} = 20$.

2) La fonction de répartition de la loi exponentielle est de la forme :

$$F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-0{,}05x}\ \ Si\ x \geq 0 \\ 0\ \ Sinon \end{cases}$$

3)$P(X \geq 2) = 1 - F(2) = e^{-2.0{,}05}$

6.3. La loi Gamma

a) Définition

Une variable aléatoire X suit une loi Gamma de paramètres $p \succ 0$ et $\theta \succ 0$ si c'est une variable positive dont la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\theta x}$$

La fonction Γ est définie pour tout $p \succ 0$ par :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

b) Caractéristiques

$$E(x) = \frac{p}{\theta}$$

$$V(x) = \frac{p}{\theta^2}$$

c) Propriétés

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$$
$$= (p-1)!$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\Pi}$$

d**) Exemple**

Une V.A.X. est définie par la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} kx^{n-1}e^{-\alpha x} \; Si \; x \geq 0, \alpha > 0 \\ \qquad 0 \quad Sion \end{cases}$$

Pour quelle valeur de k la fonction f exprime t- elle une densité de probabilité ?

Réponse

f est une densité de probabilité si $\int_0^{+\infty} kx^{n-1}e^{-\alpha x} = 1$

On pose $u = \alpha x \leftrightarrow x = \frac{u}{\alpha}, dx = \frac{du}{\alpha}$

$$k \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{n-1} e^{-u} \frac{du}{\alpha} = 1 \leftrightarrow \frac{k}{\alpha^n} \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du = 1 \leftrightarrow k \frac{(n-1)!}{\alpha^n} = 1 \leftrightarrow k = \frac{\alpha^n}{(n-1)!}$$

6.4. La loi normale

a) Définition

Une v.a.c *X* pouvant prendre toutes les valeurs réelles *x* dans l'intervalle de - ∞ à +∞, pour ∈ $\Re$, pour $\sigma \in \Re^+$ dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

b) Caractéristiques

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = m$$

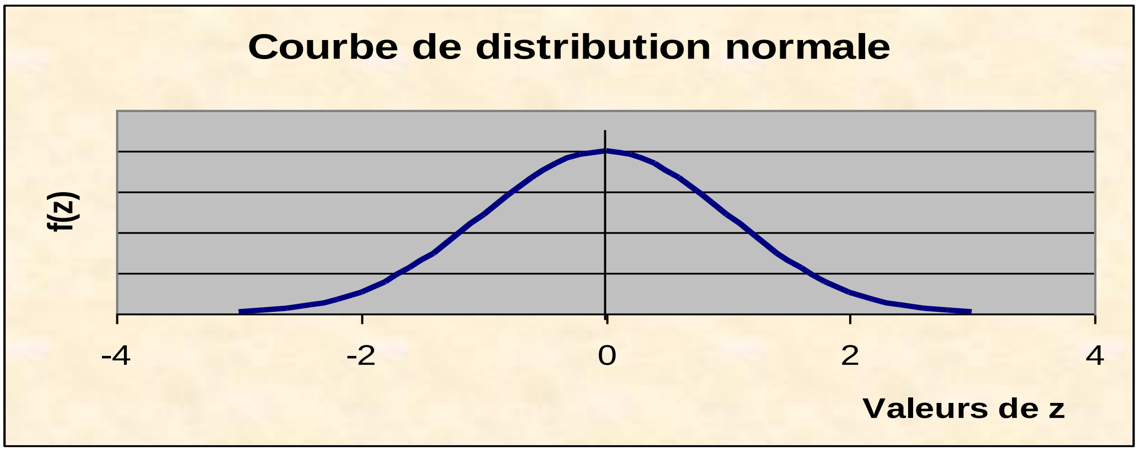
$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2,\ E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

c) La loi normale centrée réduite

Si une variable aléatoire X suit une loi normale $X \sim N(m, \sigma^2)$alors la variable aléatoire $Z = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$ une loi normale centrée réduite.

Avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1x^2}{2}}$



b) Exemples

$X \sim N(0,1)$

$P(X \leq O) = F(0{,}0 + 0{,}00) = 0{,}5$

$P(X \leq 1{,}06) = F(1{,}06) = F(1{,}0 + 0{,}06) = 0{,}8544$

$P(X \geq 2{,}9) = 1 - P(X \leq 2{,}9) = 1 - F(2{,}9 + 0{,}00) = 1 - 0{,}9913$

$$P(X \leq 4) = F(4{,}0 + 0{,}00) = 0{,}00003$$

$$P(X \leq 5) = 1$$