Rappel :

une grammaire peut définir une syntaxe et donc un langage formel (càd un ensemble de mots admissibles sur un alphabet donné)

(1)

définition

$G = (V, N, S, R)$

- V : symboles terminaux (en min)
- N : symboles non terminaux (en maj)
- S : axiome (symbole non terminal de départ)
- R : règles de production

exemple

$G = (\{a, b\}, \{S, A, B\}, S, \{S \Rightarrow A, S \Rightarrow B, B \Rightarrow bB, A \Rightarrow aA, A \Rightarrow \varepsilon, B \Rightarrow \varepsilon\})$

ε : chaîne vide

dérivation / mot généré par une grammaire

$g \Rightarrow d$ dérivation en une seule étape

$g \overset{*}{\Rightarrow} d$ " " plusieurs étapes

(càd g peut être remplacé par d)

$g \in (V|N)^+$ (g ne peut pas être ε)

$d \in (V|N)^*$

exemple :

$S \Rightarrow \underline{B} \Rightarrow b\underline{B} \Rightarrow b$ est une dérivation en 3 étapes

$S \Rightarrow \underline{A} \Rightarrow a\underline{A} \Rightarrow aa\underline{A} \Rightarrow aa$ est une dérivation en 4 étapes, aa est le mot généré

$S \overset{*}{\Rightarrow} aaA$

<u>Langage généré par une grammaire G</u>

l'ensemble de mots terminaux dérivés à partir de l'axiome

$L(G) = \{ \omega \in V^* / S \overset{*}{\Rightarrow} \omega$ S axiome de G $\}$

<u>exemple</u> :

les mots dérivés à partir de G

b

aa

$S \Rightarrow \underline{A} \Rightarrow a\underline{A} \Rightarrow aa\underline{A} \Rightarrow aaa\underline{A} \Rightarrow aaaa\ \underline{A} \Rightarrow aaaa$

$S \Rightarrow \underline{B} \Rightarrow b\underline{B} \Rightarrow bb\underline{B} \Rightarrow bb$

d'où

$L(G) = \{ \omega$ de $\{a, b\}^* / \omega$ est composé uniquement de a ou uniquement de b $\}$

$= \{ a^n$ ou $b^n, n \geqslant 0 \}$ ⇐ définition formelle de $L(G)$

<u>Exercice 1:</u>

$G_1 = (\{a, b, c\}, \{S, A\}, S, \{ S \rightarrow aS \mid aA ; A \rightarrow bAc \mid \varepsilon \})$

a,

aa

aaa

aaaa, ... a^n $n > 0$, aabc, aaaabc

3/ $G_3 = (\{a, b, c\}, \{S, A, R, T\}, S,$
$\{S \to aRbc \mid abc, R \to aRTb \mid aTb, Tb \to bT, Tc \to cc\})$

abc

aabbcc ($S \to aRbc \to aaTbbc \to aabTbc \to aabbTc \to \boxed{aabbcc}$)

$S \to aRbc \to aaRTbbc \to aaRbTbc \to aaRbbTc \to aaRbbcc \to aaaTbbbcc \to aaabTbbcc \to aaabbTbcc \to aaabbbTcc \to \boxed{aaabbbccc}$

$\Rightarrow L(G_3) = \{a^n b^n c^n, n > 0\}$

abbcc, a^n bbbccc, aaabbbbcccc

..... définition formelle de $L(G_1)$:

$L(G_1) = \{a^n b^m c^m \quad n > 0, m \geq 0\}$

2/ $G_2 = (\{a, b, c\}, \{S, A\}, S, \{S \to aSc \mid A,$
$A \to bAc \mid \varepsilon\})$

ε

bc
bbcc
bbbccc
bbbbcccc

ac
abcc
abbccc
abbbcccc
aabccc
aaabcccc

aaaccc
aacc
aaaacccc
aaabcccc

$\Downarrow$

$a^n b^m c^p$

ε
$b^m c^m$
$a^n c^n$
$a^n b^m c^{n+m}$

$n = m = 0, p = 0$
$n = 0, m \neq 0 \quad p = m$
$n \neq 0, m = 0, p = n$
$n, m \neq 0, p = n + m$

$\Rightarrow L(G_2) = \{a^n b^m c^{n+m}, n, m \geq 0\}$

Rappel (Type de Grammaire / Langage)

Type 0 pas de restrictions sur les règles de R

+ générale, les langages définis difficiles à connaître

Type 1 grammaires contextuelles

les règles de la forme $\alpha \rightarrow \beta$ avec $|\alpha| \leqslant |\beta|$

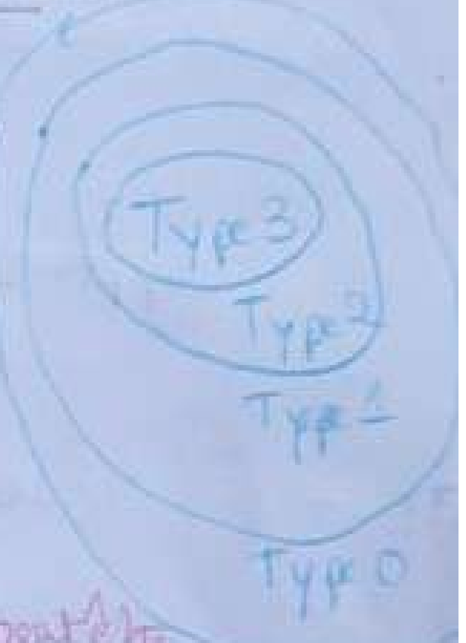
$\alpha \in (V+N)^+$

$\beta \in (V+N)^*$

Type 2 grammaires non contextuelles

$A \rightarrow \beta$ $\quad A \in N$

$\beta \in (V+N)^*$



Type 3 gramm régulières

les règles de la forme

$A \rightarrow aB$ $\quad a \in V^*$

ou $\quad B, A \in N$

$A \rightarrow a$

gramm type 3 peut être de type 2

ou

$A \rightarrow \varepsilon$

langage Régulier $\overset{\text{s'il est généré par}}{\Longleftrightarrow}$ Gramm régulière

lang non contextuel $\Leftrightarrow$ Gramm non contextuelle

lang contextuel $\Leftrightarrow$ Gramm contextuelle.

3

exemple:

$S \rightarrow aSa$, $S \rightarrow bSb$, $S \rightarrow \varepsilon$ n'est pas type 3 de type 2

Exercice 2 pour déterminer le type de G on commence par ty

* $G_1 = \left(\{a,b\}, \{S,A\}, S, \{S \to aAS \mid a, A \to SbA \mid SS \mid ba\} \right)$

n'est pas de type 3 ($S \to aAS$, $A \to SS$, $A \to SbA$)

type 2 car les règles sont de la forme

$A \to \beta$ $A \in N$

$\beta \in (V+N)^*$

* $G_2 = \left(\{a,b\}, \{S,A\}, S, P_2 \right)$

P_2:

$S \to aAS$ n'est pas de type 3

$S \to SA$ n'est pas type 2

$aA \to a$ n'est pas de type 1

Type 0

Exercice 3:

$L_1 = \{0^{2n} \; n \geq 0\}$

$L_1 = \{\varepsilon, 00, 0000, 000000, 00000000, \dots\}$

$G_1 = \left(\{0\}, \{S\}, S, \{S \to \varepsilon \mid 00S\} \right)$

$L_2 = \{0^n 1^n \text{ avec } n \geq 0\}$

$L_2 = \{\varepsilon, 01, 0011, 000111, 00001111, \dots\}$

$G_2 = \left(\{0,1\}, \{S\}, S, \{S \to \varepsilon \mid 0S1\} \right)$

la grammaire :

$G_1 = (\{a, b, c\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow Abc \mid aaS \mid Scc \ ; A \rightarrow \varepsilon\})$

exemples:

$S \rightarrow aa\underline{S} \rightarrow aa\underline{S}cc \rightarrow aa\underline{A}bccc \rightarrow aabccc$

$S \rightarrow Scc \rightarrow Abccc \rightarrow bccc$

n'est pas de type 3 (règles $S \rightarrow Abc$ et $S \rightarrow Scc$)

mais de Type 2 (parties gauches des règles symbole non terminal)

$G_2 = (\{a, b, c\}, \{S, A, C\}, S, \{S \rightarrow AbcC \ ; A \rightarrow aaA \mid \varepsilon \ ; C \rightarrow ccC \mid \varepsilon\})$

(G_1 et G_2 sont équivalentes juste G_1 est plus simplifiée ; élimination du symbole C et simplification des règles de production)

G_3 : $S \rightarrow aaS$
$S \rightarrow bcA$
$A \rightarrow ccA$
$A \rightarrow \varepsilon$

de type 3 (Grammaire régulière)

$L_3 = \{a^n b^{2n} \ n \geq 0\}$

$n = 0$ ε
$n = 1$ abb
$n = 2$ aabbbb
$n = 3$ aaabbbbbb
$n = 4$ aaaabbbbbbbb

$G_3 = (\{a, b\}, \{S\}, S, \{S \rightarrow \varepsilon \mid aSbb\})$

Exercice 4

$L = \{a^{2n} b c^{2m+1}, n, m \geq 0\}$

bcccccccc $n = 0$ $m = 3$

bc $n=0$ $m=0$
aabc $n=1$ $m=0$
bccc $n=0$ $m=1$
aabccc $n=1$ $m=1$
aaaabccccc $n=2$ $m=1$
aaaabccccc $n=2$ $m=2$
aaaaaabccccc $n=3$ $m=2$
aaaaaabccccccc $n=3$ $m=3$

on ajoute soit aa à gauche soit cc à droite

4