Bevezető

(a) Az $\frac{1}{n^2}$ sorösszeg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(b) Konvenció szerint $n!!$ (n faktoriális) a számok szorzata 1-től n-ig, azaz

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Konvenció szerint $0! = 1$.

(c) Legyen $0 \leq k \leq n$. A binomiális együttható

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

, ahol a faktoriálist (1) szerint definiáljuk.

(d)) Az előjel- azaz szignum függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1 & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

Determináns

(a) Legyen

$$[n] := 1, 2, \cdots, n$$

a természetes számok halmaza 1-től n-ig.

(b) Egy n-ed rendű *permutáció* σ egy bijekció $[n]$-ből $[n]$-be. Az n-ed rendű permutációk halmazát, az ún. szimmetrikus csoportot, S_n-el jelöljük.

(c) Egy $\sigma \in S_n$ permutációban inverziónak nevezünk egy (i, j) párt, ha $i < j$, de $\sigma_i > \sigma_j$.

(d) Egy $\sigma \in S_n$ permutáció paritásának az inverziók számát nevezzük:

$$\mathcal{I}(\sigma) := \left| \left\{ (i, j) | i, j \in [n], i < j, \sigma_i > \sigma_j \right\} \right|$$

(e) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, egy $n \times n$-es (négyzetes) valós mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az A mátrix determinánsát a következőképpen definiáljuk:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i}$$

Logikai azonosság

(a) Tekintsük az $L = \{0, 1\}$ halmazt, és rajta a következő, igazságtáblával definiált műveleteket:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

x y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \to y$
0 0	0	0	1
0 1	1	0	1
1 0	1	0	0
1 1	1	1	1

Legyenek $a, b, c, d \in L$. Belátjuk a következő azonosságot:

$$(a \wedge b \wedge c) \to d = a \to \big(b \to (c \to d)\big)$$

.

A következő azonosságokat bizonyítás nélkül használjuk:

$$x \to y = \bar{x} \vee y$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \qquad \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

A (3) bal oldala, (4) felhasználásával

$$(a \wedge b \wedge c) \to d =_{(4a)} \overline{a \wedge b \wedge c} \vee d =_{(4b)} (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \vee d$$

.

A (3) jobb oldala, $(4a)$ ismételt felhasználásával

$$\begin{aligned} a \to \big(b \to (c \to d)\big) &= \bar{a} \vee \big(b \to (c \to d)\big) \\ &= \bar{a} \vee \big(\bar{b} \vee (c \to d)\big) \\ &= \bar{a} \vee \big(\bar{b} \vee (\bar{c} \vee d)\big), \end{aligned}$$

ami a *qvee* asszociativitása miatt egyenlő (5) egyenlettel.

Binomiális tétel

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} \right) && \text{(1a)} \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{(n+1)-k} b^{k} && \text{(1b)} \\
&= \cdots \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^{k} \\
&+ \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} && \text{(1c)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^{k}. && \text{(1d)}
\end{aligned}
$$