Bode diagram

Adott egy $H(j\omega)$ átviteli karakterisztika, egy racionális törtfüggvény, melyet fel tudjuk bontani $K(\omega)$ erősítési és $\varphi(\omega)$ fáziskarakterisztikára,

$$H(j\omega) = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

A $K(\omega)$ és $\varphi(\omega)$ karakterisztikákat alaptagok eredőjeként akarjuk ábrázolni. Ehhez alaptagokat definiálunk, a racionális törtfüggvény számlálójában és nevezőjében. Legyen $H(j\omega)$ szorzatalakra hozva a következő,

$$H(j\omega) = \frac{4j\omega + 4}{(j\omega)^2 + 10.2j\omega + 2} = 4 \cdot \frac{j\omega + 1}{(j\omega + 10) \cdot (j\omega + 0.2)},$$

majd módosítsuk a törtet az alábbiak szerint,

$$H(j\omega) = 4 \cdot \frac{1(1 + j\omega/1)}{10(1 + j\omega/10) \cdot 0.2(1 + j\omega/0.2)}.$$

Az így kapott, úgynevezett *elsőfokú Bode-alaptagok* tehát $(1 + j\omega/\omega_i)$ alakúak, akár a számlálóban, akár a nevezőben vannak, és ahol ω_i az i-ik tag törésponti frekvenciája. A kiemelések hatására a tört együtthatója változik,

$$H(j\omega) = \frac{4 \cdot 1}{10 \cdot 0.2} \cdot \frac{(1 + j\omega/1)}{(1 + j\omega/10) \cdot (1 + j\omega/0.2)} = 2 \cdot \frac{(1 + j\omega/1)}{(1 + j\omega/10) \cdot (1 + j\omega/0.2)}.$$

Átalakíthatjuk mindezt az alábbi alakúra,

$$H(j\omega) = 2 \cdot (1 + j\omega/1) \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/10)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/0.2)},$$

és vizsgáljuk meg az egyes tényezőket. Az együtthatót – a frekvenciafüggetlen K_0 erősítési tényezőt – leszámítva komplex tagokat látunk,

$$H(j\omega) = K_0 \cdot K_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot K_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)} \cdot K_3(\omega)e^{j\varphi_3(\omega)}.$$

A fázisok együtt $e^{j(\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\varphi_3(\omega))}$, mivel exponenciális tagok szorzása esetén az argumentumokat adjuk össze. Ez *egyszerű*, hasonlót szeretnénk az abszolút értékekkel – tehát a $K_i(\omega)$ erősítési tagokkal. Átváltunk természetes egységből decibel egységre, számláló esetén,

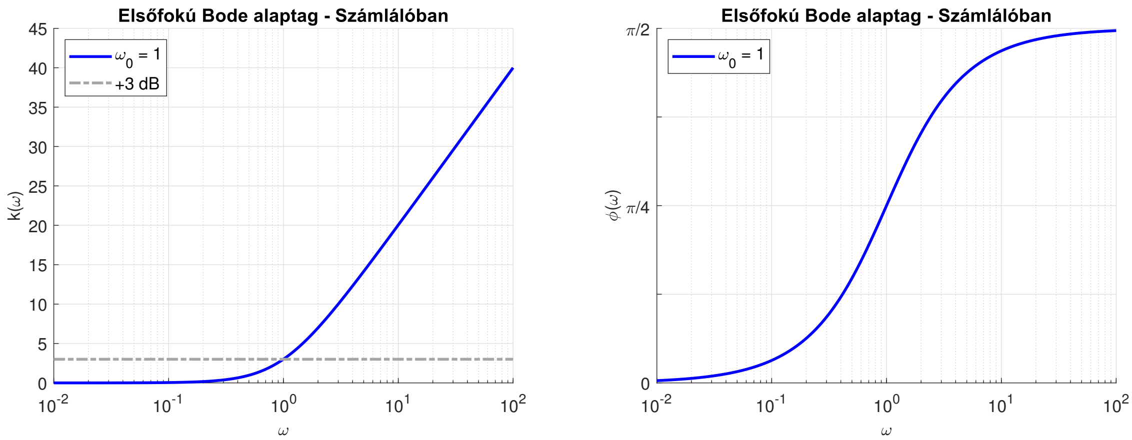
$$k_i(\omega) = 20\log(K_i(\omega)) = 20\log(1 + j\omega/\omega_i),$$

nevező esetén pedig,

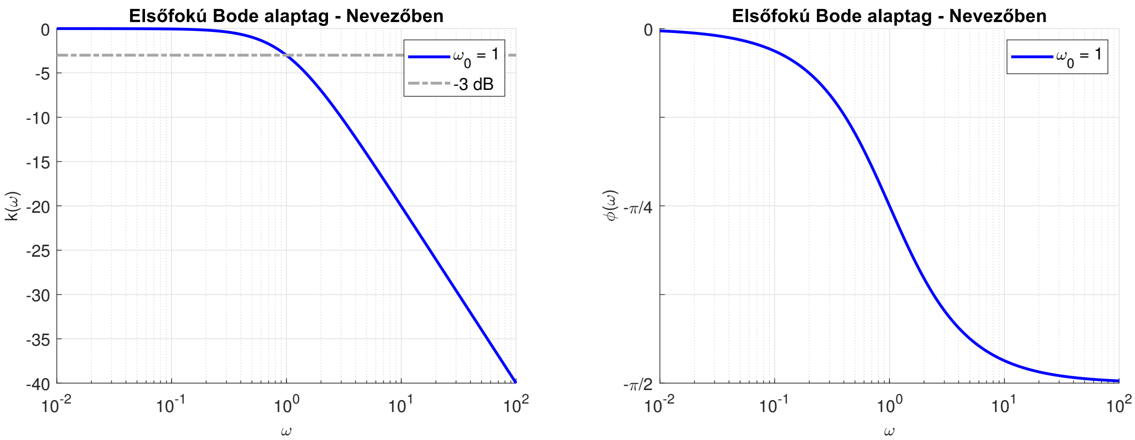
$$k_i(\omega) = 20\log(K_i(\omega)) = 20\log(1 + j\omega/\omega_i)^{-1} = -20\log(1 + j\omega/\omega_i).$$

Ezek már egyszerűen összeadható tagok,

$$k(\omega) = k_0 + k_1(\omega) + k_2(\omega) + k_3(\omega).$$

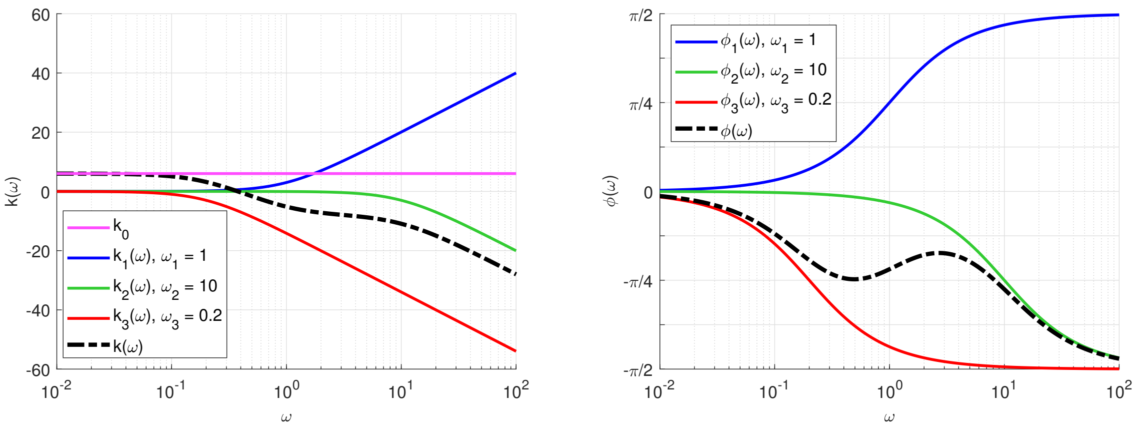


1. ábra. Elsőfokú alaptag a számlálóban, abszolút érték (bal) és fázis (jobb).



2. ábra. Elsőfokú alaptag a nevezőben, abszolút érték (bal) és fázis (jobb).

Az amplitúdókarakterisztikákat gyakran törtvonalas közelítéssel vesszük figyelembe, melynek legnagyobb eltérése a valódi $k_i(\omega)$-tól épp a törésponti frekvenciánál van, $\pm$3dB, efölött $\pm$20dB változás van dekádonként. A $\varphi_i(\omega)$ karakterisztikák a $\pm 45°$-t épp az törésponti frekvenciánál érik el.



3. ábra. Példa elsőfokú tagokból álló Bode-diagramra

Térjünk vissza a $H(j\omega)$ szorzatalakra hozására! Amennyiben a számlálóban vagy a nevezőben négyzetes kifejezést kapunk, úgynevezett másodfokú Bode alaptagra jutunk.

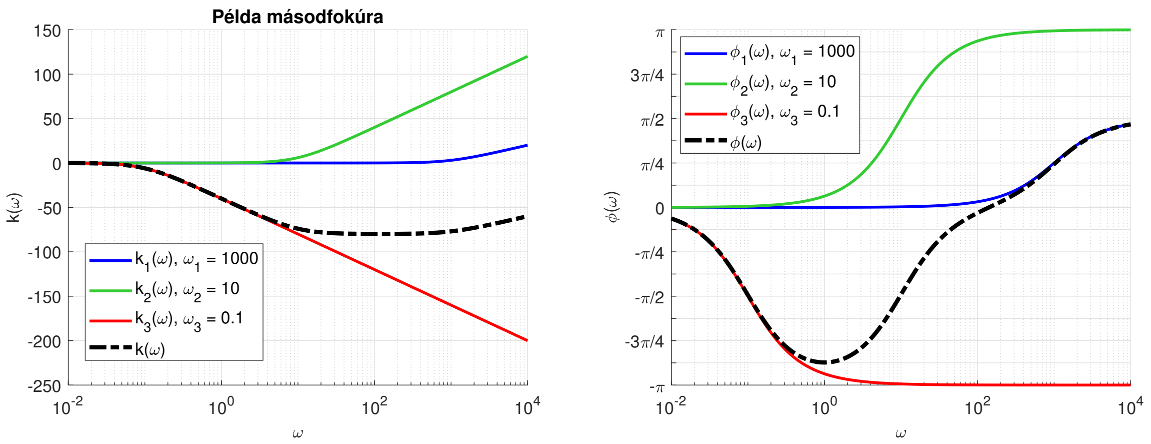
Vegyük egységnyinek az együtthatókat, és vizsgáljuk az alábbi átviteli karakterisztikát:

$$H(j\omega) = \frac{(1 + j\omega/10)^2 \cdot (1 + j\omega/1000)}{(1 + j\omega/0.1)^2}.$$

Analizáljuk tagonként: egy elsőfokú és két másodfokú alaptagunk van, utóbbiak a töréspont frekvencia fölött ±40dB-t változnak dekádonként. Gondoljunk arra: a négyzetes tag logaritmusát vesszük, a hatványkitevőből szorzás lesz,

$$k_i(\omega) = 20\log(1 + j\omega/\omega_i)^2 = 40\log(1 + j\omega/\omega_i).$$

Ez alapján törtvonalas közelítés legnagyobb eltérése itt is a törésponti frekvenciánál van, ±6dB, a fázis pedig $0 \cdots \pm 180°$ között változik.



4. ábra. Példa másodfokú tagokat is tartalmazó Bode diagramra.

Az előzőek alapján képezhetünk harmad, negyed stb. fokú alaptagokat is, melyeknél rendre ±60 dB/D, ±80 dB/D, stb. meredekségű függvényeket látunk. Maradjunk a másodfokúnál és bontsuk ki a négyzetes kifejezést,

$$k_i(\omega) = (1 + j\omega/\omega_i)^2 = 1 + 2(j\omega/\omega_i) + (j\omega/\omega_i)^2.$$

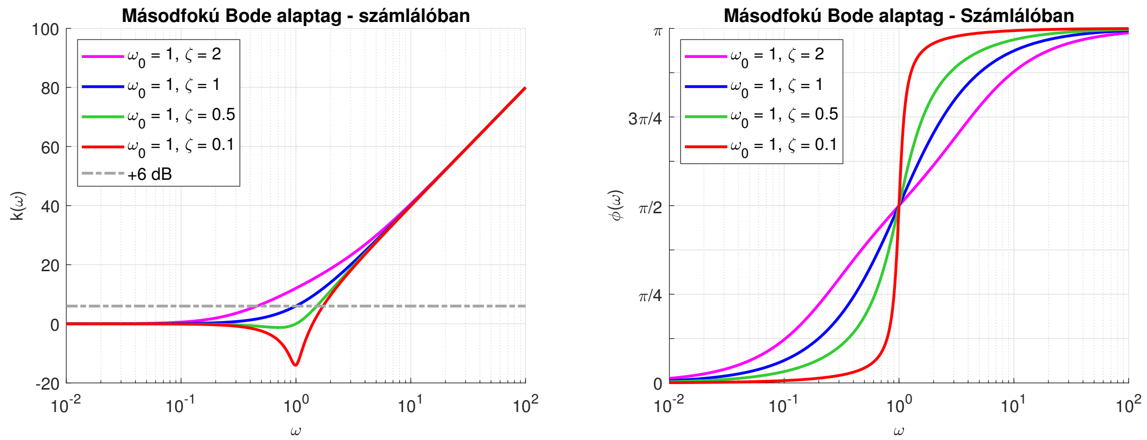
Vezessük be a ζ csillapítási faktort,

$$k_i(\omega) = 1 + 2\zeta(j\omega/\omega_i) + (j\omega/\omega_i)^2,$$

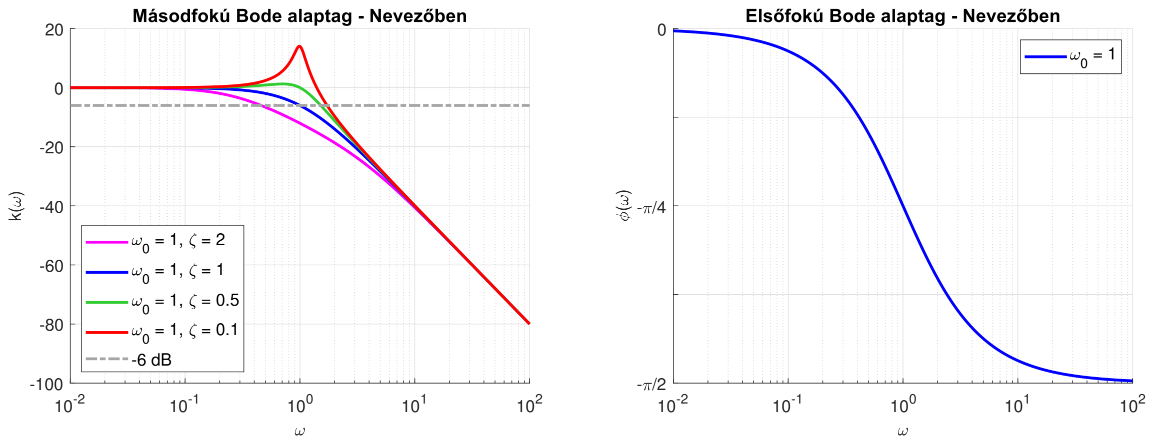
amit eddig 1-nek tekintettük. Harmadik vizsgálatunkban azt nézzük, mikor ez kisebb, tehát alul csillapított, illetve nagyobb, tehát túlcsillapított. Az alul csillapítás megfelel annak az esetnek, mikor a másodfokú alak komplex megoldásra vezet, nézzük meg ezt $\zeta = 0.5$-re,

$$1 + 2 \cdot 0.5(j\omega/\omega_i) + (j\omega/\omega_i)^2 = \left(j\omega/\omega_i - \left(\frac{-1 + j\sqrt{3}}{2}\right)\right) \cdot \left(j\omega/\omega_i - \left(\frac{-1 - j\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Csökkentve ζ értékét egy rezonancia pont kezd el kialakulni a töréspont közelében, szélsőséges esetben, mikor $\zeta = 0$, egy végtelen leszívás/kiugrás alakul ki. A törésponti frekvenciától távolodva a csillapítási tényező hatása elenyészik.



5. ábra. Másodfokú alaptag a számlálóban, abszolút érték (bal) és fázis (jobb).



6. ábra. Másodfokú alaptag a nevezőben, abszolút érték (bal) és fázis (jobb).