Linearer Ausgleich der Wurzelfunktion

Camillo Ballandt

11. Dezember 2022

Gegeben sind die Punkte

$$\bigcup_{i=1}^{n} P_i(x_i, y_i)$$

Gesucht wird nach dem Parameter $a \in \mathbb{R}$, mit dem der Graph der Funktion

$$f(x_i) = a \cdot \sqrt{x_i}$$

am nächsten an den Punkten liegt. Dieser Umstand wird mit der Methode der kleinsten Quadrate behandelt. Die Summe

$$E(f) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \tag{1}$$

soll dabei minimiert werden. Dazu wird die partielle Ableitung nach a null gesetzt

$$\begin{aligned}
0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial E(f)}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \cdot (y_i - a\sqrt{x_i}) && (2)\\
&= -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i\sqrt{x_i} - a \cdot x_i) && (3)\\
&= -2 \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\sqrt{x_i} - a \sum_{i=1}^{n} \cdot x_i \right) && (4)
\end{aligned}$$

Die Nullsetzung ist insofern zielführend, da diese einen Extrempunkt in der Ausgangsfunktion anzeigt. Ein Maximum kann dabei ausgeschlossen werden, da kein maximaler Fehler vorkommen kann, denn eine fortwährende Entfernung der Variable a vom Idealwert immer zu einem Anwachs des Fehlers führt.

Beweis Gibt es einen maximalen Fehler, so gilt

$$\exists b \in \mathbb{R} : |a\sqrt{x_i} - b\sqrt{x_i}| \quad \textit{ist maximal}$$

$$|a\sqrt{x_i} - b\sqrt{x_i}| = |\sqrt{x_i} \cdot (a - b)| = \sqrt{x_i} \cdot |a - b|$$

Mit konstantem und stets nichtnegativem Faktor $\sqrt{x_i}$ folgt

$$|a - b| \quad \textit{ist maximal}$$

was für $a, b \in \mathbb{R}$ einen Widerspruch bildet. Da a in $E(f)$ quadratisch vorkommt, kann es sich auch nicht um einen Sattelpunkt handeln.

Aus der Nullsetzung ergibt sich nun

$$-2 \sum_{i=1}^{n} y_i\sqrt{x_i} = -2a \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\sqrt{x_i} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^{-1} = a \tag{6}$$

der Idealwert für a.
Fügt man den Punkten P_i eine Gewichtung $\omega_i \in \mathbb{R}$ hinzu, so ergibt sich

$$E(f) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (y_i - f(x_i))^2 \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot y_i \sqrt{x_i} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot x_i \right)^{-1} = a \tag{8}$$