Ausgleich der Exponentialfunktion $y = a \cdot e^{bx} + c$

Camillo Ballandt

11. Dezember 2022

Gegeben sind die Wertepaare

$$W = \bigcup_{i=1}^{n} (x_i, y_i)$$

Zu denen eine Funktion $y = a \cdot e^{bx} + c$ gesucht ist, die den geringsten Fehler in der Abbildung der Punkte aufweist.

Dazu wird das gedämpfte Gauss-Newton-Verfahren verwendet, welches das Ausgleichsproblem abschnittsweise linearisiert. Es wird der Vektor

$$\vec{p} := (a, b, c) \tag{1}$$

mit den Werten für die Parameter definiert. Es wird die Abweichungsfunktion

$$\vec{d}(W, \vec{p}) := \sum_{i=0}^{n} (y_i - f(x_i, \vec{p})) \cdot \vec{e_i} \tag{2}$$

Die Fehlerfunktion

$$\vec{E}(\vec{d}) = \left|\vec{d}\right|^2 \tag{3}$$

soll im Betrag minimiert werden. Es wird ein Startvektor $\vec{p}$ geraten. Das entstehende Gleichungssystem wird linearisiert, statt $\vec{E}(\vec{p})$ wird

$$\left|\vec{d}(\vec{p_0}) + D_{\vec{d}}(\vec{p_0}) \cdot \vec{\delta}\right|^2 \tag{4}$$

minimiert.

Dabei ist

$$D_{\vec{d}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial d_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial d_n}{\partial p_n} \end{pmatrix} \tag{5}$$

die Jacobimatrix zu $\vec{d}$.

Mit $\vec{\delta} := \vec{p}_{neu} - \vec{p_0}$ ergibt sich das lineare Ausgleichsproblem

$$D_{\vec{d}} \cdot \vec{\delta} = -\vec{d} \tag{6}$$

das mit dem Gleichungssystem

$$D_{\vec{d}}^T \cdot D_{\vec{d}} \cdot \vec{\delta} = -D_{\vec{d}}^T \cdot \vec{d} \tag{7}$$

gelöst wird.

und $\vec{p}_{neu}$ ein besserer Wert für $\vec{p}$. Der Schritt wird nun bis zu einer zufriedenstellenden Näherung wiederholt.

Für den konkreten Fall ergibt sich

$$\vec{d}(W, \vec{p}) := \sum_{i=0}^{n} (y_i - a \cdot e^{bx_i} - c) \cdot \vec{e_i} \tag{8}$$

und

$$D_{\vec{d}} := \begin{pmatrix} -e^{bx_1} & -ax_1 \cdot e^{bx_1} & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -e^{bx_n} & -ax_n \cdot e^{bx_n} & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$