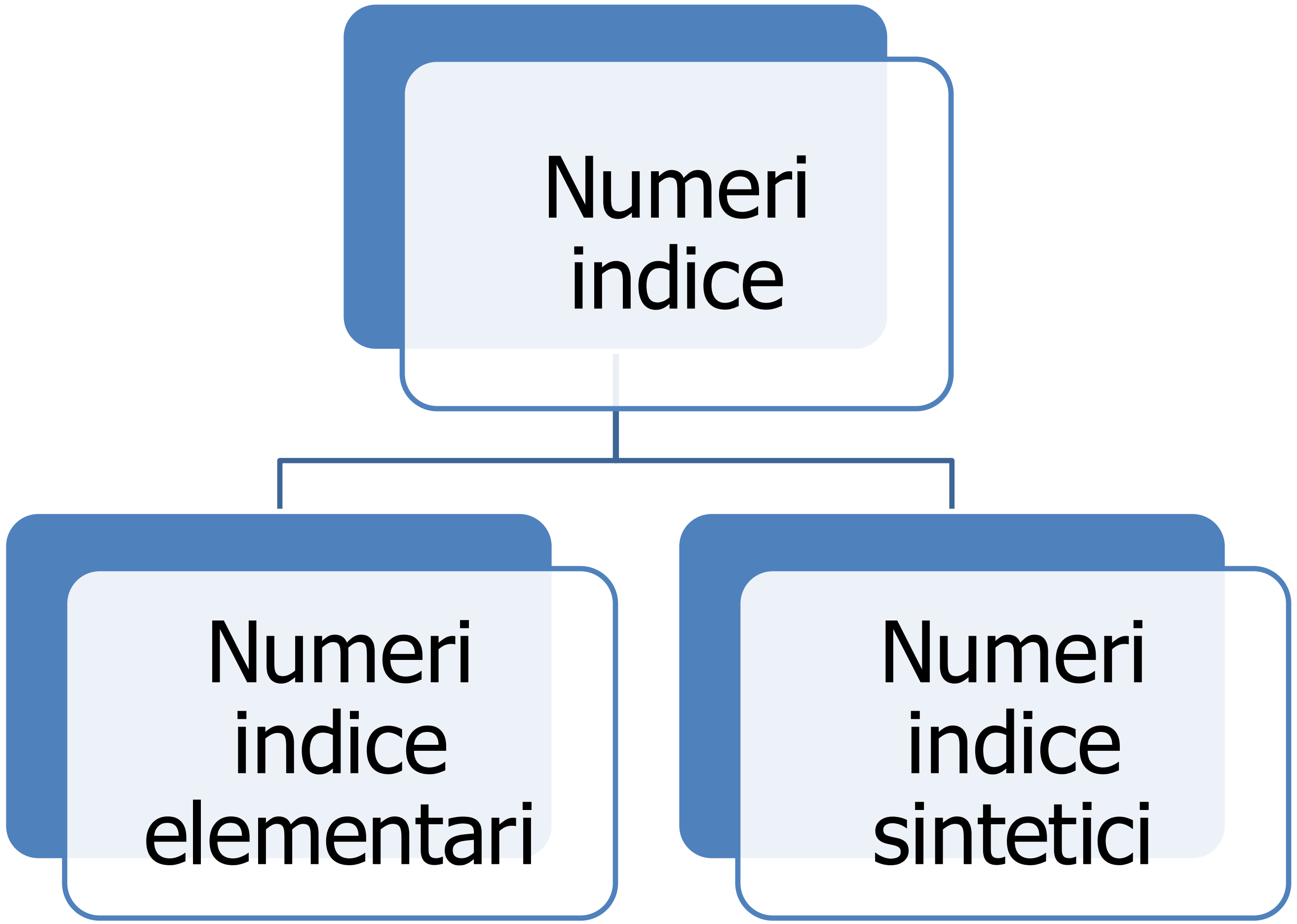
Numeri indice

Un numero indice ha il compito di misurare la variazione della misura (ad es. Nel tempo o nello spazio).

Si applica ad una variabile numerica positive

Nel vostro Corso, solo in ottica serie storiche

Numeri indice



Numeri indice elementari

- Un NI è un numero puro
- NI> 1 indica aumento
- NI=1 indica fenomeno invariato
- NI<1 indica diminuzione

$$ {}_{0}i_{t} = \frac{y_t}{y_0} $$

- il subindice a destra (t) indica il tempo corrente
- il subindice a sinistra (0) indica il tempo base

Numeri indice elementare

NI a Base

- Fissa
  - Al denominatore ho sempre il valore relative allo stesso anno
  - Utili soprattutto per confronti tra misure con diversa scala
- Mobile
  - Al denominatore ho sempre il valore relative all’anno precedente

Con base il tempo b: ${}_b i_1, {}_b i_2, \ldots, {}_b i_{t-1}, \ldots, {}_b i_t, \ldots$

$$\frac{{}_b i_t}{{}_b i_{t-1}} = \frac{y_t / y_b}{y_{t-1} / y_b} = \frac{y_t}{\cancel{y_b}} \frac{\cancel{y_b}}{y_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}}$$

ESEMPIO

tempo (t)	1	2	3	4	5
NI base fissa	1.3	1.2	1.4	0.9	1.7
NI base mobile	-	1.2/1.3	1.4/1.2	0.9/1.4	1.7/0.9

Sostanzialmente per trovare ${}_b I_c$ se ho ${}_a I_b$ e ${}_a I_c$, faccio $\frac{{}_a I_c}{{}_a I_b}$

Passaggio da base fissa a mobile

Passaggio da base mobile a fissa

Idee di base:

$$_bI_c = \frac{1}{_cI_b}$$

$$_bI_d = {}_bI_c \cdot {}_cI_d$$

Vogliamo riportare i NI a base mobile a NI a base fissa al tempo base t (tempo intermedio della serie)

- Al tempo t il NI è 1 (tempo base)
- Per tempi $> t$ si moltiplicano i NI a base mobile concatenandoli **in avanti**
- Per tempi $< t$ si moltiplicano i NI a base mobile concatenandoli **all'indietro** e si calcola il reciproco del risultato

tempo (t)	1	2	3	4	5	6	7
NI b. mobile	${}_0i_1$	${}_1i_2$	${}_2i_3$	${}_3i_4$	${}_4i_5$	${}_5i_6$	${}_6i_7$
NI b. fissa base **tempo 3**	${}_3i_1$	${}_3i_2$	**1**	${}_3i_4$	${}_3i_5$	${}_3i_6$	${}_6i_7$

NI per tempi $<$ **3**: si concatena **indietro**

Tempo 2: $_3i_2 = \frac{1}{_2i_3} = \frac{1}{\frac{y_3}{y_2}} = \frac{y_2}{y_3}$

Tempo 1: $_3i_1 = \frac{1}{_1i_2\ _2i_3} = \frac{1}{\frac{\cancel{y_2}}{y_1}\ \frac{y_3}{\cancel{y_2}}} = \frac{1}{_1i_3} = \frac{1}{\frac{y_3}{y_1}} = \frac{y_1}{y_3}$

Volendo, si può calcolare anche $_3i_0 = \frac{1}{_0i_1\ _1i_2\ _2i_3} = \frac{1}{_0i_3}$

Per i tempi $>$**3**: si concatena in **avanti**

Tempo 4: abbiamo già il NI $_3i_4$

Tempo 5: $_3i_5 = {}_3i_4\ {}_4i_5 = \frac{\cancel{y_4}}{y_3}\ \frac{y_5}{\cancel{y_4}} = \frac{y_5}{y_3}$

Tempo 6: $_3i_6 = {}_3i_5\ {}_5i_6 = \frac{\cancel{y_5}}{y_3}\ \frac{y_6}{\cancel{y_5}} = \frac{y_6}{y_3}$

Tempo 7: $_3i_7 = {}_3i_6\ {}_6i_7 = \frac{\cancel{y_6}}{y_3}\ \frac{y_7}{\cancel{y_6}} = \frac{y_7}{y_3}$

tempo (t)	1	2	3	4	5
NI base mobile (dati)	1.3	1.2	1.4	0.9	1.7
NI base mobile (simboli)	${}_0i_1$	${}_1i_2$	${}_2i_3$	${}_3i_4$	${}_4i_5$

Riportiamo i NI da b. mobile a **base fissa al tempo 4**.

Tempo 5: ${}_4i_5 = 1.7$ (ce l'abbiamo già)

Tempo 4: ${}_4i_4 = 1$ (il tempo 4 è il tempo base)

Tempo 3: ${}_4i_3 = \frac{1}{0.9} = 1.11$

Tempo 2: ${}_4i_2 = \frac{1}{1.4 \times 0.9} = 0.79$

Tempo 1: ${}_4i_1 = \frac{1}{1.2 \times 1.4 \times 0.9} = 0.66$

Volendo, si può calcolare anche il NI al tempo 0 in base 4
${}_4i_0 = \frac{1}{1.3 \times 1.2 \times 1.4 \times 0.9} = 0.51$

Fissa a Fissa?

Mobile a mobile?

Il NI elementare di valore può essere scomposto nel prodotto tra NI di prezzo e NI di quantità (proprietà di scomposizione delle cause di variazione):

$$ {}_0i_t^v = \frac{v_t}{v_0} = \frac{q_t \times p_t}{q_0 \times p_0} = \frac{q_t}{q_0} \times \frac{p_t}{p_0} = {}_0i_t^q \times {}_0i_t^p $$

- Quindi se so che l'NI di valore è stato dal 2022 al 2023 pari a 120 e quello di Prezzo è stato 125, quello di quantita sarà 96 (120/125*100)

Alcuni esercizi prima di passare agli NI sintetici

Il NI elementare del prezzo di 1 lt di benzina all'anno 2008 in base 2007 era 1.08; all'anno 2009 in base 2007 era 1.10.
Quanto è variato in % il prezzo del carburante dal tempo 2008 al 2009?

Alcuni esercizi prima di passare agli NI sintetici

Il NI elementare del prezzo di 1 lt di benzina all'anno 2008 in base 2007 era 1.08; all'anno 2009 in base 2007 era 1.10.
Quanto è variato in % il prezzo del carburante dal tempo 2008 al 2009?

I dati del problema: ${}_{2007}i^{p}_{2008} = 1.08 \qquad {}_{2007}i^{p}_{2009} = 1.10$

Cosa serve per rispondere: ${}_{2008}i^{p}_{2009}$

Soluzione

$$\frac{{}_{2007}i^{p}_{2009}}{{}_{2007}i^{p}_{2008}} = \frac{1.10}{1.08} = 1.02 \Longrightarrow \text{ aumento del } 2\%$$

Alcuni esercizi prima di passare agli NI sintetici

Abbiamo la seguente serie dei NI elementari a base mobile:

tempo (t)	1	2	3	4	5
NI base mobile	1.3	1.2	1.4	0.9	1.7

Quanto è variato in % il fenomeno dal tempo 1 *al tempo* 4*?*

Alcuni esercizi prima di passare agli NI sintetici

Abbiamo la seguente serie dei NI elementari a base mobile:

tempo (t)	1	2	3	4	5
NI base mobile	1.3	1.2	1.4	0.9	1.7

Quanto è variato in % il fenomeno dal tempo 1 *al tempo* 4*?*

I dati del problema: ${}_0i_1,\ {}_1i_2,\ {}_2i_3,\ {}_3i_4,\ {}_4i_5$

Cosa serve per rispondere. Il NI ${}_1i_4 = \frac{y_4}{y_1}$.

Soluzione

$${}_1i_4 = {}_1i_2\ {}_2i_3\ {}_3i_4 = 1.2 \times 1.4 \times 0.9 = 1.512$$

$$\Downarrow$$

Aumento del 51.2%.

Alcuni esercizi prima di passare agli NI sintetici

Il NI elementare della spesa in benzina nel 2022 *rispetto al* 2021 *è pari a* 1.09. *Nel* 2022 *il prezzo di un litro di benzina è aumentato del* 5% *rispetto al* 2021.

Quanto è variata la quantità di benzina acquistata fra il 2021 *e il* 2022*?*

Alcuni esercizi prima di passare agli NI sintetici

Il NI elementare della spesa in benzina nel 2022 *rispetto al* 2021 *è pari a* 1.09. *Nel* 2022 *il prezzo di un litro di benzina è aumentato del* 5% *rispetto al* 2021.
Quanto è variata la quantità di benzina acquistata fra il 2021 *e il* 2022*?*

I dati del problema. NI di valore: ${}_{2021}i^{V}_{2022} = 1.09$
NI di prezzo: ${}_{2021}i^{p}_{2022} = 1.05$

Cosa serve per rispondere. NI di quantità: ${}_{2021}i^{q}_{2022}$

Soluzione.

$$
{}_{2021}i^{q}_{2022} = 1.09/1.05 = 1.04
$$

$$
\Downarrow
$$

La quantità acquistata è aumentata del 4%.

Alcuni esercizi prima di passare agli NI sintetici

Al tempo t ho fatto il pieno di benzina e ho speso 60 Euro. Dal tempo 0 al tempo t il prezzo di un lt di benzina è aumentato del 2%. Quanto avrei speso se avessi fatto il pieno al tempo 0 ?

Alcuni esercizi prima di passare agli NI sintetici

Al tempo t ho fatto il pieno di benzina e ho speso 60 *Euro. Dal tempo 0 al tempo t il prezzo di un lt di benzina è aumentato del 2%. Quanto avrei speso se avessi fatto il pieno al tempo 0 ?*

I dati del problema

La spesa al tempo t: $v_t = 60\,Euro$ (valore monetario) che è il prodotto prezzo unitario per quantità: $v_t = q_t\,p_t$.

Il NI del prezzo della benzina al tempo t in base 0: ${}_0i_t^p = 1.02$

Cosa chiede il problema.

Il valore della spesa (per la stessa quantità di benzina) ai prezzi del tempo 0. Dobbiamo pensare che tale spesa è il prodotto $(q_t p_0)$: il valore al tempo 0 della stessa quantità di benzina del tempo t.

Soluzione

$$\frac{v_t}{{}_0i_t^p} = \frac{\cancel{p_t}\,q_t}{\frac{\cancel{p_t}}{p_0}} = q_t\,p_0 = \frac{60}{1.02} = 58.8\,\text{Euro}$$

Alcuni esercizi prima di passare agli NI sintetici

Al tempo 0 *ho fatto il pieno di benzina e ho speso* 52 *Euro. Dal tempo* 0 *al tempo t il prezzo di un lt di benzina è aumentato del 2.5%. Quanto mi costa al tempo t la stessa quantità di benzina che ho comprato al tempo* 0*?*

Alcuni esercizi prima di passare agli NI sintetici

Al tempo 0 *ho fatto il pieno di benzina e ho speso* 52 *Euro. Dal tempo* 0 *al tempo* t *il prezzo di un lt di benzina è aumentato del 2.5%. Quanto mi costa al tempo* t *la stessa quantità di benzina che ho comprato al tempo* 0*?*

I dati del problema

La spesa al tempo 0: $v_0 = 52\,Euro$ (valore monetario) che è il prodotto prezzo unitario per quantità: $v_0 = q_0\, p_0$.

Il NI del prezzo della benzina al tempo t in base 0: ${}_0i_t^p = 1.025$

Cosa chiede il problema.

Il prodotto $q_0\, p_t$.

Soluzione

$$q_0\, p_t = v_0\; {}_0i_t^p = q_0\, \cancel{p_0} \frac{p_t}{\cancel{p_0}} = 52 \times 1.025 = 53.3\,\text{Euro}$$

Numeri indice sintetici

Confronta dati riferiti a due tempi diversi, di un fenomeno complesso composto da tanti fenomeni elementari producendo una sintesi della loro variazione.

$$\sum_k q_{kt}\ p_{kt}$$

q_{kt}: quantità del bene/servizio k al tempo t

p_{kt}: prezzo unitario al tempo t

NI sintetico dei prezzi: variazione dei prezzi tra due tempi.

NI sintetico delle quantità: variazione delle quantità tra due tempi.

NI sintetico dei prezzi

Prezzi unitari (in Euro)

Prodotto k	p_{k0}	p_{kt}	${}_0 i^p_{kt}$
Pane (Kg.)	1.85	1.90	1.027
Carne (hg.)	4.30	4.68	1.088
Caffè espresso al bar	0.70	0.80	1.143

Un **NI sintetico dei prezzi** misura quanto sono variati nel complesso i prezzi dei prodotti dal tempo 0 al tempo t.
Non posso fare una media aritmetica semplice dei NI elementari perché:
1) anche se sono numeri puri derivano da unità di misura differenti;
2) i prodotti (e quindi i NI elementari) non hanno la stessa importanza (la variazione del prezzo di un'oncia d'oro vale quanto la variazione del prezzo dell'energia elettrica?)
Occorre fare una media aritmetica ponderata dei NI elementari

NI sintetico dei prezzi

$${}_0I_t^p = \frac{\sum_k {}_0i_{kt}^p w_k}{\sum_k w_k}$$

Il peso appropriato è la spesa destinate a quel prodotto, ma va deciso se a tempo 0 o a tempo t

Secondo **Laspeyres**, il peso w_k da applicare al NI elementare del prezzo unitario k-esimo è **la spesa al tempo 0 destinata al prodotto** k e cioè: $w_k = p_{k0}q_{k0}$

NI sintetico di Laspeyres dei prezzi

$${}_0I_t^{p,L} = \frac{\sum_k {}_0i_{kt}^p p_{k0}q_{k0}}{\sum_k p_{k0}q_{k0}} = \frac{\sum_k \frac{p_{kt}}{p_{k0}} p_{k0}q_{k0}}{\sum_k p_{k0}q_{k0}}$$

NI sintetico dei prezzi

$$_0I_t^p = \frac{\sum_k {}_0i_{kt}^p \, w_k}{\sum_k w_k}$$

Il peso appropriato è la spesa destinate a quel prodotto, ma va deciso se a tempo 0 o a tempo t

Paasche sostiene che, per tenere conto della reazione del consumatore alla variazione dei prezzi, nei pesi occorre considerare le quantità acquistate al tempo t (q_{kt}). Al tempo t il consumatore ha reagito alla variazione dei prezzi riducendo le quantità acquistate se il prezzo unitario è aumentato, aumentando le quantità acquistate, se il prezzo è diminuito.

Paasche propose i pesi: $w_k = p_{k0}q_{kt}$

NI sintetico di Paasche dei prezzi

$$_0I_t^{p,P} = \frac{\sum_k {}_0i_{kt}^p p_{k0}q_{kt}}{\sum_k p_{k0}q_{kt}} = \frac{\sum_k \frac{p_{kt}}{p_{k0}} p_{k0}q_{kt}}{\sum_k p_{k0}q_{kt}}$$

NI sintetico dei prezzi

Prodotto k	p_{k0}	p_{kt}	${}_0i^p_{kt}$	q_{k0}	q_{kt}
Pane (Kg.)	1.85	1.9	1.027	26	25
Carne (hg.)	4.3	4.68	1.088	25	18
Caffè espresso al bar	0.7	0.8	1.143	52	45

Laspeyres: aumento in media del 8.3%.

$$\frac{1.027 \times (1.85 \times 26) + 1.088 \times (4.3 \times 25) + 1.143 \times (0.7 \times 52)}{(1.85 \times 26) + (4.3 \times 25) + (0.7 \times 52)} = 1.083$$

Paasche: aumento in media del 8.1%.

$$\frac{1.027 \times (1.85 \times 25) + 1.088 \times (4.3 \times 18) + 1.143 \times (0.7 \times 45)}{(1.85 \times 25) + (4.3 \times 18) + (0.7 \times 45)} = 1.081$$

NI sintetico delle quantità

Quantità della produzione agricola

Prodotto	Tempo 0 q_0	Tempo t q_t	NI elementari delle q.tà
Vino	1000 hl	1080 hl	1.08
Olio	450 Kg	630 Kg	1.40
Grano	850 ql	680 ql	0.80

$$\text{NI sintetico delle quantità} = \frac{\sum_k {}_0 i^q_{kt} w_k}{\sum_k w_k} = \frac{\sum_k \frac{q_{kt}}{q_{k0}} w_k}{\sum_k w_k}$$

NI sintetico delle quantità

Con la formula di Laspeyres si usano gli stessi pesi del corrispondente NI sintetico dei prezzi:

$$w_t = p_{k0}q_{k0}$$

$$_0I_t^{q,L} = \frac{\sum_k {_0i_{kt}^q}\, p_{k0}q_{k0}}{\sum_k p_{k0}q_{k0}} = \frac{\sum_k \frac{q_{kt}}{q_{k0}}\, p_{k0}q_{k0}}{\sum_k p_{k0}q_{k0}}$$

Per il NI delle quantità di Paasche si usano i seguenti pesi (attenzione: sono diversi da quelli visti per il NI di Paasche dei prezzi!): $w_k = q_{k0}p_{kt}$

$$_0I_t^{q,P} = \frac{\sum_k \frac{q_{kt}}{q_{k0}} q_{k0}p_{kt}}{\sum_k q_{k0}p_{kt}}$$

NI sintetico delle quantità

NB: In Laspeyres, il peso è la spesa a tempo 0

Prodotto	Tempo 0	Tempo t	NI elementari	Prezzi unitari Euro	
	q_0	q_t	delle q.tà	p_0	p_t
Vino	1000 hl	1080 hl	1.08	1.85	1.90
Olio	450 Kg	630 Kg	1.40	4.30	4.68
Grano	850 ql	680 ql	0.80	0.70	0.85

Laspeyres: aumento in media del 18.3%

$$\frac{1.08 \times (1000 \times 1.85) + 1.40 \times (450 \times 4.30) + 0.80 \times (850 \times 0.70)}{(1000 \times 1.85) + (450 \times 4.30) + (850 \times 0.70)} = 1.183$$

Paasche: aumento in media del 18%

$$\frac{1.08 \times (1000 \times 1.90) + 1.40 \times (450 \times 4.68) + 0.80 \times (850 \times 0.85)}{(1000 \times 1.90) + (450 \times 4.68) + (850 \times 0.85)} = 1.180$$

Inflazione

Istat: Tasso congiunturale e tendenziale di inflazione

${}_0I_{m,t}$ NIC in base 0, riferito al mese *m* dell'anno *t*

${}_0I_{m,t\text{-}1}$ NIC in base 0 riferito al mese *m* dell'anno *t*-1

${}_0I_{m\text{-}1,t}$ NIC in base 0 riferito al mese *m*-1 dell'anno *t*

tasso congiunturale di inflazione
(mese corrente vs. mese precedente)

$$\frac{{}_0I_{m,t}}{{}_0I_{m-1,t}} \times 100 - 100$$

tasso tendenziale di inflazione
(stesso mese, anno precedente)

$$\frac{{}_0I_{m,t}}{{}_0I_{m,t-1}} \times 100 - 100$$