Podstawy Modelowania i Symulacji

Dawid Bajor

February 2022

1 Wstęp

Dokument zawiera opracowanie zadań na Podstawy Modelowania i Symulacji.
Zmienne wykorzystane w sprawozdaniu na podstawie numeru albumu:

C	δ	m_1	m_2	$k_1 = k_2$
0,701	0,070	1	5	1,5

Link do repozytorium
`https://github.com/ballistic262/PMIS.git`

2 Obwód RC z wymuszeniem sinusoidalnym

Równanie na obwód RC z wymuszeniem sinusoidalnym

$$q(t) = A\frac{\alpha\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Równanie nieliniowe, jednorodne. Czas po jakim napięcie w obwodzie bez wymuszenia

spadnie do 0.1

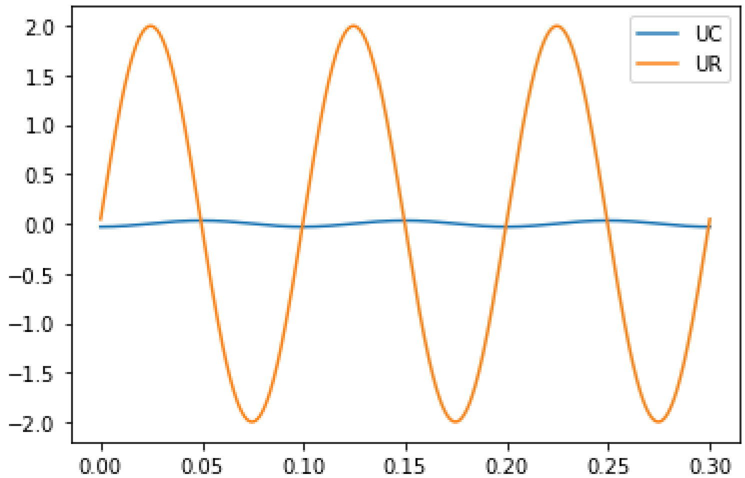
$$\frac{1}{10} = e^{-\alpha t}$$
$$\alpha = \frac{-1}{RC}$$

$$R = 1$$
$$C = 0.701$$

$$\alpha = \frac{-1}{0.701}$$
$$\frac{1}{10} = e^{-\frac{1}{0.701}t}$$

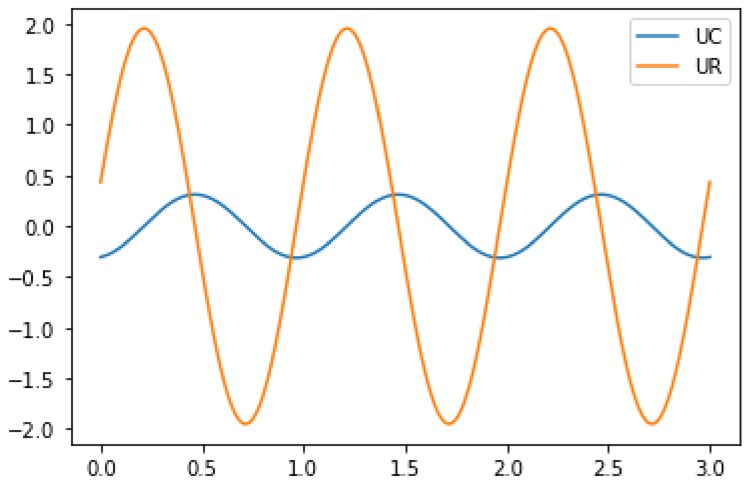
$$t \approx 1.61411$$

Maksymalne napięcie na oporniku i kondensatorze:
0.1Hz

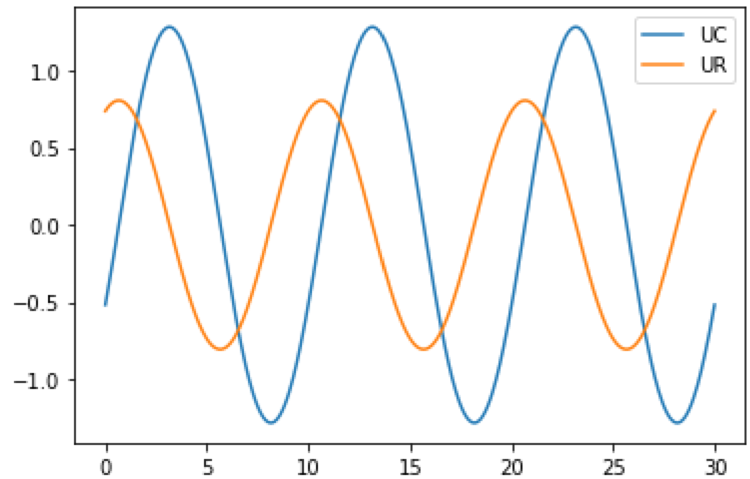


Maksymalne napięcie odczytane z wykresu dla $C \approx 0.05$, a dla $R \approx 2.0$. 1Hz

.

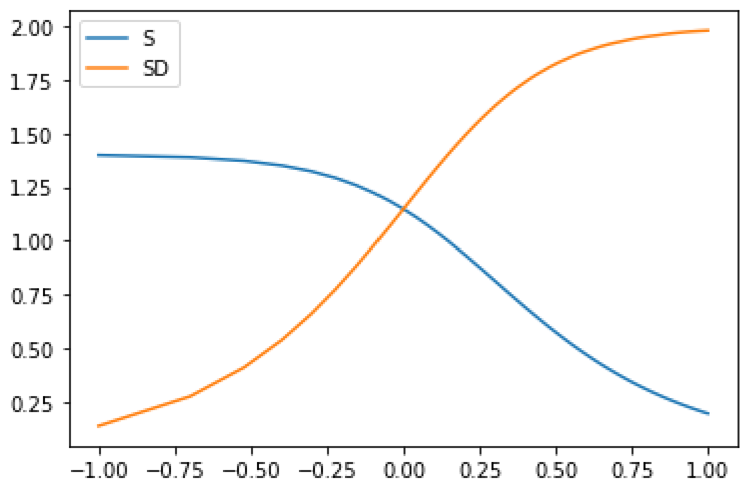


Maksymalne napięcie odczytane z wykresu dla $C \approx 0.4$, a dla $R \approx 2.0$. 10Hz



Maksymalne napięcie odczytane z wykresu dla $C \approx 1.4$, a dla $R \approx 1.8$.

Wykres charakterystyki amplitudowo-częstościowej w przedziale częstości.



3 Oscylator harmoniczny z tłumieniem bez wymuszenia

Równanie dla masy m_1 na sprężynie k_1 z tłumieniem δ.

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Gdzie

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Po przekształceniu

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

Równanie różniczkowe, jednorodne, rzędu drugiego.
Układ równań stopnia pierwszego oraz postać macierzowa.

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega^2x=0$$

$$\begin{cases} \dot{x}=v \\ \dot{v}=-2\delta v-\omega^2x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\delta \end{bmatrix}$$

$$\text{def}\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ \delta^2 & -2\delta-\lambda \end{bmatrix}$$

Wyznaczanie częstości drgań własnych

$$-\lambda(-2\lambda-\lambda)+\omega^2=0$$
$$2\delta\lambda+\lambda^2+\omega^2=0$$
$$\lambda^2+2\delta\lambda+\omega^2=0$$

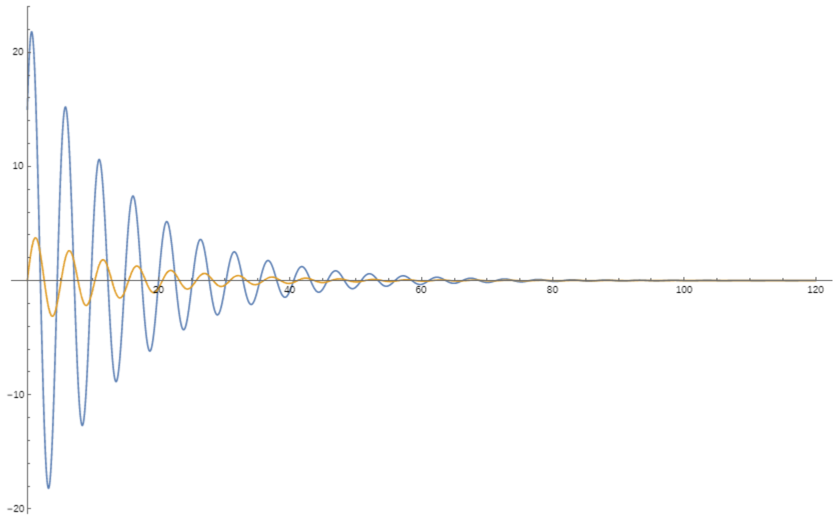
$$a=1 \quad b=2\delta \quad \delta=0,070 \quad k=1.5 \quad m=1 \quad \frac{k}{m}=\omega^2 \quad c=\omega^2$$

$$\Delta=4\delta^2-4\omega^2$$
$$\Delta=4*0,07^2-4\left(\frac{k}{m}\right)$$
$$\Delta=4*0,07^2-4\left(\frac{1.5}{1}\right)$$
$$\Delta=-5.980$$
$$\Delta=5.980i^2$$
$$\sqrt{\Delta}=2,445i$$
$$\lambda_1=(0,142,445i)/21$$
$$\lambda_2=(0,142,445i)/21$$
$$\lambda_1=-0,28-1,2225i$$
$$\lambda_2=-0,28+1,2225i$$

Częstości drgań własnych w przybliżeniu wynoszą -0,28+0,7309i oraz -0,28-0,7309i
Przebieg wychylenia w czasie dla dwóch wybranych warunków początkowych

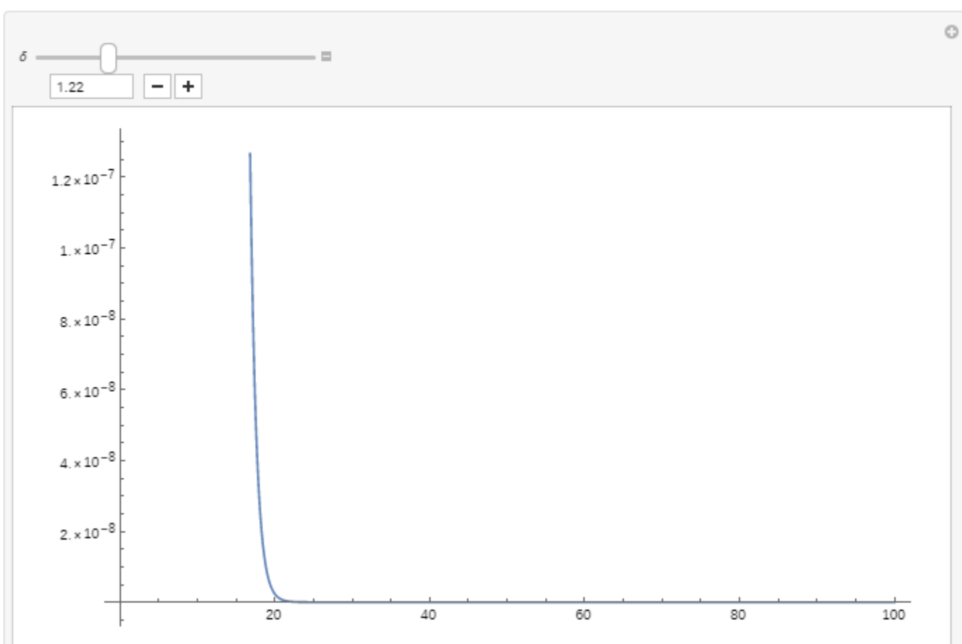
Warunki początkowe wynoszą:

$$x[0]=15$$
$$x'[0]=20$$



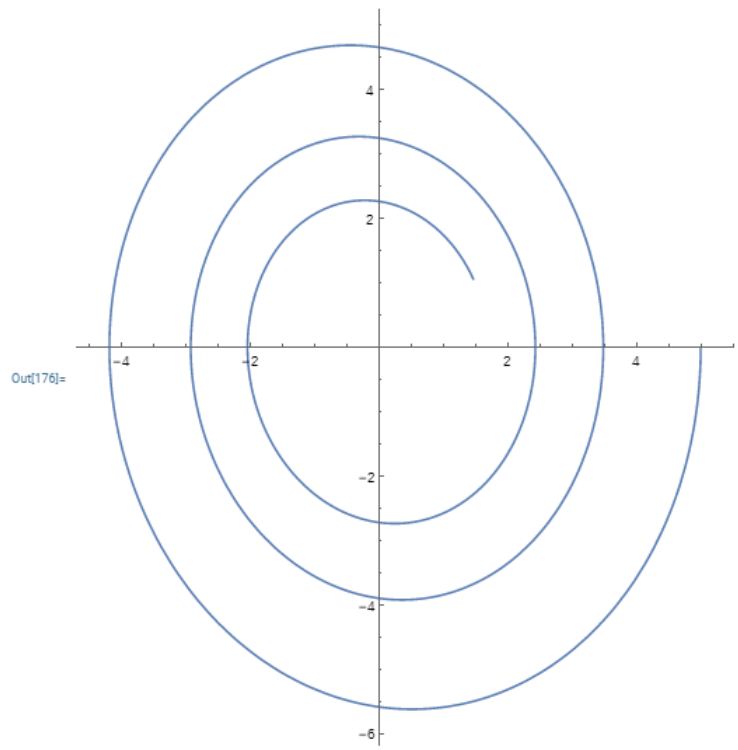
Wykres funkcji przebiegu wychyleń w czasie dla dwóch wybranych warunków początkowych.

Wychylenie początkowo ma bardzo dużą różnicę, jednak po ok. 100 sekundach ustaje i następuje wyrównanie funkcji.
Tłumienie krytyczne dla tego układu.



Wykres wskazujący tłumienie krytyczne.

Tłumienie krytyczne wynosi 1.22
Ruch układu w przestrzeni fazowej (x,v)



Wykres ruchu układu w przestrzeni fazowej (x,v).

4 Oscylator harmoniczny tłumieniem i wymuszeniem harmonicznym

Równanie dla masy m1 na sprężynie k1 z tłumieniem i wymuszeniem harmonicznym o częstości i amplitudzie 0.1m.

$$A=0.1$$
$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega^2 x = A\sin(\omega t)$$
$$\omega^2=\frac{k}{m}$$
$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\frac{k}{m}x = 0.1\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$$

Równanie różniczkowe, niejednorodne, rzędu drugiego.
Układ równań stopnia pierwszego oraz postać macierzowa.

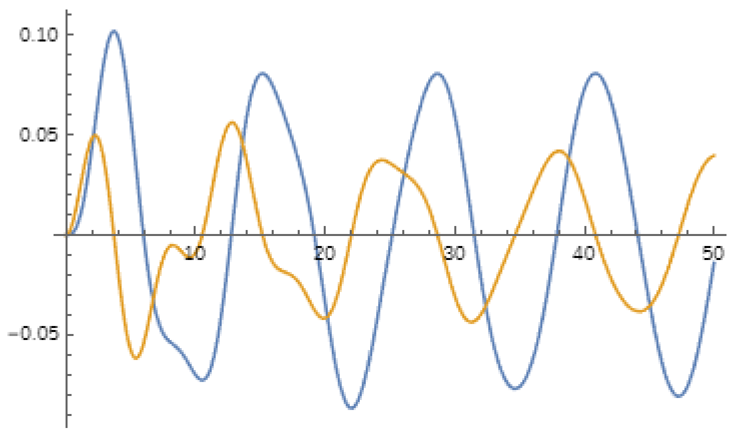
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = A\sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{v} \\ v = A\sin(\omega t) - 2\delta\dot{v} - \omega^2 x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Asin(\omega t) \end{bmatrix}$$

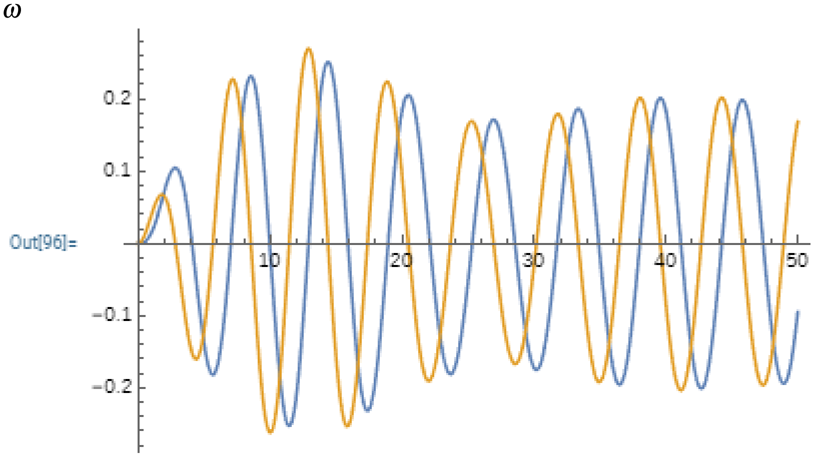
Przebieg wychylenia w czasie dla zerowych warunków początkowych i wymuszenia z częstością:

- 0.5ω



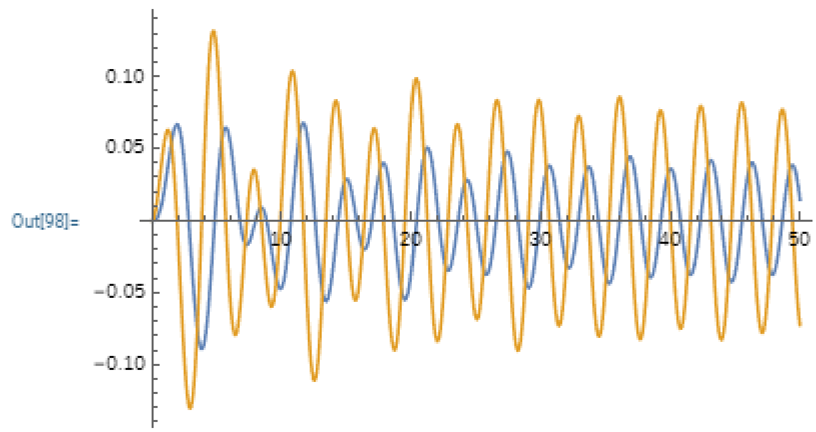
Wykres wychylenia w czasie dla zerowych warunków początkowych i wymuszenia z częstością 0.5ω

- ω



Wykres wychylenia w czasie dla zerowych warunków początkowych i wymuszenia z częstością ω

- 2ω



Wykres wychylenia w czasie dla zerowych warunków początkowych i wymuszenia z częstością 2ω

Mimo że układy miały zadaną różną częstość, to każdy z wpada w rezonans po podobnym czasie, ok. 30 sekund.

Rezonans jest zjawiskiem polegającym na osiągnięciu przez układ drgający z wymuszeniem maksymalnej amplitudy.

5 Oscylator harmoniczny podwójny bez tłumienia i bez wymuszenia

Równanie dla masy m_1 na sprężynie k_1 i połączonej z nią masy m_2 na sprężynie k_2.

$$\begin{cases} m_1 * \ddot{x}_1 = -k1x1 = +k2(x2 - x1) \\ m_2 * \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}(-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)) \\ \ddot{x}_2 = \frac{1}{m_2}(-k_2(x_2 - x_1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \frac{k_2}{m_1}x_1 \\ \ddot{x}_2 = -\frac{k_2}{m_2}x_2 - \frac{k_2}{m_2}x_1 \end{cases}$$

Równanie różniczkowe, jednorodne, rzędu drugiego. Układ równań stopnia pierwszego oraz postać macierzowa.

$$x' = V$$
$$x'' = V'$$

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_1 \\ \dot{v}_1 = \frac{-k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}\dot{x}_2 - \frac{k_2}{m1}x_1\dot{x}_2 = v_2 \\ \\ \dot{v}_2 = -\frac{k_2}{m_2}x_2 + \frac{k_2}{m_2}x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{v} \\ \ddot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} \cdot \frac{k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Wartości własne układu.

$$\det(A - \lambda f) = 0$$

$$det = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ (-\frac{k_1}{m_1} - \frac{k_2}{m_1}) & -\lambda & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{k_2}{m_2} & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Wyliczony ich sens fizyczny.

$$\lambda_1 = -0.209211i\lambda_2 = +0.209211i\lambda_3 = -1.43396i\lambda_4 = +1.43396$$

6 Modele rozwoju epidemii