$$\sqrt{5^x-a}+\frac{a-2}{\sqrt{5^x-a}}=1$$

Обозначим $5^x \overset{\text{об}}{=} t$, $t>0$

$$\sqrt{t-a}+\frac{a-2}{\sqrt{t-a}}=1$$

$$\begin{cases} t>0 \\ t-a>0 \\ \dfrac{t-a+a-2-\sqrt{t-a}}{\sqrt{t-a}}=0 \end{cases}; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t>0 \\ t>a \\ t-\cancel{a}-\sqrt{t-a}+\cancel{a}-2=0 \end{cases}; \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t>0 \\ t>a \\ \sqrt{t-a}=t-2 \end{cases}$$

С учетом ограничений на корень: $t-a=t^2-4t+4$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} t\geq 2 \\ t>a \\ t^2-5t+(a+4)=0 \end{cases}$$

$D = 25 - 4a - 16$

$D = 9 - 4a$

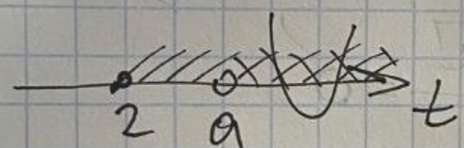
Чтобы уравнение имело 2 корня необходимо, чтобы $D > 0$

$9 - 4a > 0$

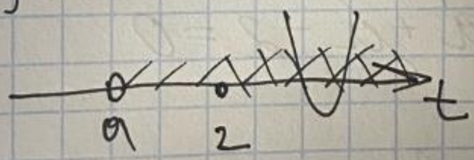
$a < \frac{9}{4}$

$f(a) = (a-2)^2$

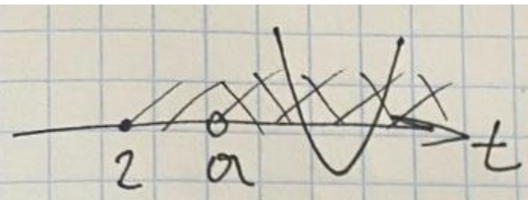
$f(2) = a - 2$



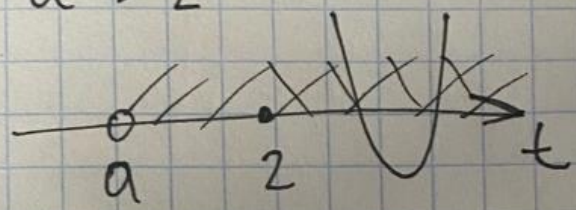
$$\begin{cases} a < \frac{9}{4} \\ f(a) > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a < \frac{9}{4} \\ a < 2 \\ f(a) > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a < \frac{9}{4} \\ a > 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a < \frac{9}{4} \\ a < 2 \\ (a-2)^2 > 0 \\ a - 2 > 0 \end{cases} \qquad \varnothing$$

Ответ: $a \in \left(2; \frac{9}{4}\right)$