目　　录

第一章　实数系和复数系

导引

分析学的主要概念(如收敛、连续、微分法和积分法)，必须有精确定义的数的概念作根据，才能讨论得满意．然而，我们并不讨论那些约束整数算术的公理，但假定读者已熟悉了有理数(即形如 m/n 的数，这里 m 和 n 都是整数且 $n\neq 0$)．

有理数系不论作为一个域来说，还是作为一个有序集(这些术语将在第 1.6 段与 1.12 段中定义)来说，对于很多意图殊感不足．例如，没有有理数 p 能满足 $p^2=2$．(我们马上就要证明这点)．这就势必引进所谓“无理数”，它们时常被写成无穷十进小数的展开式，而认为相应的有限十进小数是“逼近”它们的．例如序列

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots$$

“趋于$\sqrt{2}$”．但是，若不先把无理数$\sqrt{2}$明确地规定了，必将发生疑问：上面这个序列“趋于”的是什么呢？

所谓的“实数系”建立起来以后，这类的问题马上就得到回答．

1.1　例　我们现在证明方程

$$(1)\qquad p^2=2$$

不能被任何有理数 p 满足．倘若有那样一个 p，我们可以把它写成 $p=m/n$，其中 m 及 n 都是整数，而且可以选得不都是偶数．假定我们这样做了．于是由(1)式得出

$$(2)\qquad m^2=2n^2,$$

这表明 m^2 是偶数，因此 m 是偶数(如果 m 是奇数，那么 m^2 将是奇数)，因而 m^2 能被 4 整除．于是(2)的右边能被 4 整除，因而 n^2 是

偶数，这又说明 n 是偶数.

假定(1)式成立，就导致 m 及 n 都是偶数的结论，这与 m 及 n 的选择相矛盾. 因此，对于有理数 p,(1)式不能成立.

现在我们把这种情况考察得再稍微严密一些. 令 A 是使 $p^2<2$ 的一切正有理数 p 的集，B 是使 $p^2>2$ 的一切正有理数 p 的集. 我们来证明 A 里没有最大数，B 里没有最小数.

更明确地说，对于 A 中的每个 p，能在 A 中找到一个有理数 q，而 $p<q$，并且对于 B 中的每个 p，能在 B 中找到一个有理数 q，而 $q<p$.

为了做这件事，给每个有理数 $p>0$，配置一个数

$$q=p-\frac{p^2-2}{p+2}=\frac{2p+2}{p+2}. \tag{3}$$

于是

$$q^2-2=\frac{2(p^2-2)}{(p+2)^2}. \tag{4}$$

如果 p 在 A 中，那么 $p^2-2<0$，(3)式说明 $q>p$，而(4)式说明 $q^2<2$，因而 q 在 A 中.

如果 p 在 B 中，那么 $p^2-2>0$，(3)式说明 $0<q<p$，而(4)式说明 $q^2>2$. 因而 q 在 B 中.

1.2 评注 上面这番讨论的目的就是说明：尽管两个有理数之间还有另外的有理数(因为，如果 $r<s$，那么 $r<\frac{r+s}{2}<s$)，有理数系还是有某些空隙. 而实数系填满了这些空隙. 这就是实数系在分析学中能起基础作用的主要原因.

为了说明它和复数系的结构，我们先简单地讨论一下有序集和域的一般概念.

这里有一些在全书中要用的标准的集论的术语.

1.3 定义 若 A 是任意集(它的元素可以是数，也可以是其

它物件），我们用 $x\in A$ 表示 x 是 A 的一个元（或元素）．

如果 x 不是 A 的元，就写成 $x\notin A$．

不包含元素的集称为空集．至少包含一个元素的集，叫做非空集．

如果 A、B 都是集，并且如果 A 的每个元素是 B 的元素，就说 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$．此外，如果 B 中有一个元素不在 A 中，就说 A 是 B 的真子集．注意，对于每个集 A，有 $A\subset A$．

如果 $A\subset B$，并且 $B\subset A$，就写成 $A=B$．不然就写成 $A\neq B$．

1.4 定义 在第一章，自始至终用 Q 表示所有有理数构成的集．

有序集

1.5 定义 设 S 是一个集．S 上的序是一种关系，记作 $<$，它有下面的两个性质：

(i) 如果 $x\in S$ 并且 $y\in S$，那么在

$$x<y,\ x=y,\ y<x$$

三种述语之中，有一种且只有一种成立．

(ii) 如果 $x, y, z\in S$，又如果 $x<y$ 且 $y<z$，那么 $x<z$．

述语"$x<y$"可以读作"x 少于 y"或"x 小于 y"或"x 先于 y"．

用 $y>x$ 代替 $x<y$，时常是方便的．

记号 $x\leqslant y$ 指的是 $x<y$ 或 $x=y$，而不细说二者之中谁能成立．换句话说，$x\leqslant y$ 是 $x>y$ 的否定．

1.6 定义 在集 S 里定义了一种序，便是一个有序集

例如，如果对于任意两个有理数 r, s，规定当 $s-r$ 是正有理数时表示 $r<s$，Q 就是一个有序集．

1.7 定义 设 S 是有序集，而 $E\subset S$．如果存在 $\beta\in S$，而每个 $x\in E$，满足 $x\leqslant\beta$，我们就说 E 上有界，并称 β 为 E 的一个上界．

用类似的方法以定义下界(把$\leqslant$换成$\geqslant$就行了).

1.8 定义 设S是有序集,$E\subset S$,且E上有界. 设存在一个$\alpha\in S$,它具有以下性质:

(i) α是E的上界.

(ii) 如果$\gamma<\alpha$,γ就不是E的上界.

便把α叫做E的最小上界[由(ii)来看,显然最多有一个这样的α]或E的上确界,而记作

$$\alpha=\sup E.$$

类似地可定义下有界集E的最大下界或下确界. 述语

$$\alpha=\inf E$$

表示α是E的一个下界,而任何合于$\beta>\alpha$的β,不能是E的下界

1.9 例

(a) 把例1.1 中的集A与B看作有序集Q的子集. 集A上有界. 实际上,A的那些上界,刚好就是B的那些元. 因为B没有最小的元,所以A在Q中没有最小上界.

类似地,B下有界: B的所有下界的集,由A和所有合于$r\in Q$并且$r\leqslant 0$的r组成. 因为A没有最大的元,所以B在Q中没有最大下界.

(b) 如果$\alpha=\sup E$存在. 这α可以是E的元,也可以不是E的元. 例如, 假设E_1是所有合于$r\in Q$及$r<0$的集. 假设E_2是所有合于$r\in Q$及$r\leqslant 0$的集. 于是

$$\sup E_1=\sup E_2=0,$$

而$0\notin E_1$, $0\in E_2$.

(c) 假设$n=1,2,3,\cdots$,E由所有数$1/n$组成, 那么, $\sup E=1$,它在E中,但$\inf E=0$不在E中.

1.10 定义 有序集S,如果具有性质:

若$E\subset S$, E不空,且E上有界时, $\sup E$便在S里. 就说S有

最小上界性.

例 1.9(a)说明 Q 没有最小上界性.

我们现在来证明，在最大下界与最小上界之间，有密切的关系，也就是有最小上界性的每个有序集，一定也有最大下界性.

1.11 定理 设 S 是具有最小上界性的有序集，$B\subset S$，B 不空且 B 下有界. 令 L 是 B 的所有下界的集. 那么

$$\alpha=\sup L$$

在 S 存在，并且 $\alpha=\inf B$.

特别地说就是 $\inf B$ 在 S 存在

证 因 B 下有界，L 不空. L 刚好由这样一些 $y\in S$ 组成，它们对于每个 $x\in B$，满足不等式 $y\leqslant x$. 可见每个 $x\in B$ 是 L 的上界. 于是 L 上有界，因而我们对 S 的假定意味着 S 里有 L 的上确界；把它叫做 α.

如果 $\gamma<\alpha$，那么 γ 不是 L 的上界(参看定义 1.8)，因此 $\gamma\notin B$. 由此对于每个 $x\in B$，$\alpha\leqslant x$. 所以 $\alpha\in L$.

如果 $\alpha<\beta$，由于 α 是 L 的上界，必然 $\beta\notin L$.

我们已证明了：$\alpha\in L$. 而当 $\beta>\alpha$ 时，就有 $\beta\notin L$. 换句话说，α 是 B 的下界，但若 $\beta>\alpha$，β 就不是 B 的下界. 这就是说 $\alpha=\inf B$.

域

1.12 定义 域是一个集 F，它具有两种运算，叫做加法和乘法，这些运算满足所谓"域的公理"(A)，(M)，及(D)：

(A) 加法公理

(A_1) 如果 $x\in F$，$y\in F$，它们的和 $x+y$ 在 F 中.

(A_2) 加法是可交换的：对于所有 $x,y\in F$，

$$x+y=y+x.$$

(A_3) 加法是可结合的：对于所有 $x, y, z \in F$,

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

(A_4) F 含有元素 0，对于每个 $x \in F$，有

$$0+x=x.$$

(A_5) 对应于每个 $x \in F$，有一元素 $-x \in F$，合于

$$x+(-x)=0.$$

(M) 乘法公理

(M_1) 如果 $x \in F, y \in F$，它们的乘积 xy 在 F 中.

(M_2) 乘法是可交换的：对于所有的 $x, y \in F$,

$$xy=yx.$$

(M_3) 乘法是结合的：对于所有的 $x, y, z \in F$,

$$(xy)z=x(yz).$$

(M_4) F 含有元素 $1 \neq 0$，对于每个 $x \in F$,

$$1x=x.$$

(M_5) 如果 $x \in F$ 且 $x \neq 0$，存在元素 $1/x$，合于

$$x(1/x)=1.$$

(D) 分配律

$$x(y+z)=xy+xz$$

对于所有 $x, y, z \in F$ 成立.

1.13 评注

(a) 人们经常(在域中)用

$$x-y, \frac{x}{y}, x+y+z, xyz, x^2, x^3, 2x, 3x, \cdots$$

以代替

$$x+(-y), x\cdot\left(\frac{1}{y}\right), (x+y)+z, (xy)z, xx, xxx, x+x,$$

$$(x+x)+x, \cdots$$

(*b*) 如果在所有有理数的集 Q 里，使加法与乘法采取通常的意义，域的公理显然适用. 因此，Q 是一个域.

(*c*) 虽然详细地研究域(或其它的代数结构)并不是我们的目的，但是证明 Q 的某些众所周知的性质是域公理的推论，还是值得一做的；一旦这样做了，就不需要对实数和复数再去证明这些性质了.

1.14 命题 加法公理包含着以下几个述语:

(*a*) 如果 $x+y=x+z$，就有 $y=z$;

(*b*) 如果 $x+y=x$，就有 $y=0$;

(*c*) 如果 $x+y=0$，就有 $y=-x$;

(*d*) $-(-x)=x$.

(*a*)是消去律. (*b*)中 y 的存在是(A_4)假定了的，(*b*)断定它的唯一性；(*c*)中 y 的存在，由(A_5)假定，(*c*)断定其唯一性.

证 $x+y=x+z$ 时，(*A*)组公理可以给出

$$y=0+y=(-x+x)+y=-x+(x+y)$$
$$=-x+(x+z)=(-x+x)+z=0+z=z.$$

(*a*)得证. 在(*a*)中取 $z=0$ 就是(*b*). 在(*a*)中取 $z=-x$ 就是(*c*).

因 $-x+x=0$，(*c*)(用 $-x$ 代替 x，x 代替 y)就能产生出(*d*).

1.15 命题 乘法公理包含着以下几个述语:

(*a*) 如果 $x\neq 0$，并且 $xy=xz$，就有 $y=z$;

(*b*) 如果 $x\neq 0$，并且 $xy=x$，就有 $y=1$;

(*c*) 如果 $x\neq 0$，并且 $xy=1$，就有 $y=1/x$;

(*d*) 如果 $x\neq 0$，就有 $1/(1/x)=x$.

证明与命题 1.14 的证明类似，所以从略.

1.16 命题 对于任何 $x, y, z\in F$，域公理包含着以下的述语

(*a*) $0x=0$

(*b*) 如果 $x\neq 0$，且 $y\neq 0$，那么 $xy\neq 0$.

(c) $(-x)y=-(xy)=x(-y)$.

(d) $(-x)(-y)=xy$.

证 $0x+0x=(0+0)x=0x$. 因此，由 1.14(b) 有 $0x=0$，而 (a) 成立.

次设 $x\neq 0, y\neq 0$ 而 $xy=0$. 于是由 (a) 能推出

$$1=\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy=\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0=0.$$

矛盾. 于是 (b) 成立.

(c) 中前一等式，可由

$$(-x)y+xy=(-x+x)y=0y=0$$

结合 1.14(c) 得来；(c) 的后半可用同样方法证明. 最后，由 (c) 及 1.14(d) 得

$$(-x)(-y)=-[x(-y)]=-[-(xy)]=xy.$$

1.17 定义 有序域是一个域 F，又是合于下列两条件的有序集

(i) 当 $x, y, z\in F$ 且 $y<z$ 时，$x+y<x+z$；

(ii) 如果 $x, y\in F$，$x>0$ 且 $y>0$，那么 $xy>0$.

如果 $x>0$，就说 x 是正的；如果 $x<0$，就说 x 是负的.

例如，Q 是有序域.

凡属研究不等式关系时所施行的一切熟知的规则，可以用到任何有序域上：用正(负)量乘时，保留(逆转)不等式的方向，平方不为负数，等等. 下面的命题罗列了其中的一些.

1.18 命题 在每个有序域中，下面几条述语都正确：

(a) 如果 $x>0$，那么 $-x<0$；反过来也对.

(b) 如果 $x>0$ 而 $y<z$，那么 $xy<xz$.

(c) 如果 $x<0$ 而 $y<z$，那么 $xy>xz$.

(d) 如果 $x\neq 0$，那么 $x^2>0$. 特别有 $1>0$.

(e) 如果 $0<x<y$，那么 $0<1/y<1/x$.

证

(a) 如果 $x>0$，那么 $0=-x+x>-x+0=-x$，因此，$-x<0$. 如果 $x<0$，那么 $0=-x+x<-x+0$；因此 $-x>0$. 这就证明了 (a).

(b) 因为 $z>y$，就有 $z-y>y-y=0$，因此，$x(z-y)>0$，所以

$$xz=x(z-y)+xy>0+xy=xy.$$

(c) 由 (a)、(b) 及命题 1.16(c)

$$-[x(z-y)]=(-x)(z-y)>0,$$

因此 $x(z-y)<0$，而得 $xz<xy$.

(d) 如果 $x>0$，由定义 1.17 的第 (ii) 部分就得出 $x^2>0$. 如果 $x<0$，那么 $-x>0$，因此 $(-x)^2>0$. 但是根据命题 1.16(d)，$x^2=(-x)^2$. 因为 $1=1^2$，$1>0$.

(e) 如果 $y>0$，而 $v\leqslant 0$，那么 $yv\leqslant 0$. 但 $y\cdot(1/y)=1>0$. 因此 $1/y>0$. 类似地可得 $1/x>0$. 如果把不等式 $x<y$ 两端乘以正量 $(1/x)(1/y)$，就得到 $1/y<1/x$.

实数域

现在叙述存在定理，这是本章的核心

1.19 定理 具有最小上界性的有序域 R 存在.

此外，R 包容着 Q 作为其子域.

第二句话表示 $Q\subset R$ 而且把 R 中的加法与乘法运算用于 Q 的元时，与有理数的普通运算相一致；又正有理数是 R 中的正元素.

R 的元叫做实数.

定理 1.19 的证明相当地长，而且有几分烦琐，所以把它放在第一章的附录中了. 这证明实际是从 Q 来构造 R.

不用费多大劲，就能从这种构造法提炼出下一定理来. 但是

我们宁愿从定理 1.19 来推导它，因为这样可以对于人们怎样运用最小上界性提供一个很好的范例.

1.20 定理

(a) 如果 $x\in R, y\in R$ 且 $x>0$，那么，必定存在正整数 n，使得

$$nx>y.$$

(b) 如果 $x\in R, y\in R$ 且 $x<y$，那么一定存在 $p\in Q$ 合于

$$x<p<y.$$

(a) 时常被称为 R 的阿基米德性. (b) 可以用 Q 在 R 中稠密的说法来陈述，意思是说：任何两实数之间总有有理数.

证

(a) 设 A 是所有 nx 组成的集，这里 n 遍历正整数. 如果 (a) 不成立，那么 y 将是 A 的一个上界. 但是这样的话，R 里就有 A 的最小上界. 令 $\alpha=\sup A$. 因为 $x>0$，于是 $\alpha-x<\alpha$，并且 $\alpha-x$ 不是 A 的上界. 因此，对某个正整数 m，$\alpha-x<mx$. 但是这样的话就该 $\alpha<(m+1)x\in A$，然而这是不可能的，因为 α 是 A 的上界.

(b) 由 $x<y$，得 $y-x>0$；于是 (a) 提供一个正整数 n 使得

$$n(y-x)>1$$

再应用 (a)，可以得到正整数 m_1 及 m_2，合于 $m_1>nx$. $m_2>-nx$. 于是

$$-m_2<nx<m_1.$$

因此有正整数 $m(-m_2\leqslant m\leqslant m_1)$ 使得

$$m-1\leqslant nx<m.$$

将这些不等式联系起来就得到

$$nx<m\leqslant 1+nx<ny.$$

因为 $n>0$，从而

$$x<\frac{m}{n}<y.$$

这就证明了(b)，而$p=m/n$.

现在证明正实数的n次方根存在. 这个证明说明，在导引中所指出的困难($\sqrt{2}$的无理性)，是如何能在R里处理的.

1.21 定理 对于每个实数$x>0$及每个整数$n>0$，有一个且仅有一个实数$y>0$，使得$y^n=x$.

此数y记作$\sqrt[n]{x}$或$x^{\frac{1}{n}}$.

证 这样的y最多有一个：这是显然的，因为由$0<y_1<y_2$就有$y_1^n<y_2^n$.

设由满足$t^n<x$的所有正实数t组成集E.

如果$t=x/(1+x)$，那么$0<t<1$. 由此$t^n<t<x$. 所以$t\in E$而E不空.

如果$t>1+x$，那么$t^n>t>x$，因此$t\notin E$. 所以$1+x$是E的上界.

于是，定理1.19保证

$$y=\sup E$$

存在. 为了证明$y^n=x$，我们证明无论是$y^n<x$或是$y^n>x$都会导致矛盾.

恒等式$b^n-a^n=(b-a)(b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+a^{n-1})$当$0<a<b$时，能产生不等式

$$b^n-a^n<(b-a)nb^{n-1}.$$

假如$y^n<x$，选一个h，要它满足$0<h<1$和

$$h<\frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}.$$

置$a=y, b=y+h$，就得

$$(y+h)^n-y^n<hn(y+h)^{n-1}<hn(y+1)^{n-1}<x-y^n.$$

于是$(y+h)^n<x$而$y+h\in E$. 因$y+h>y$，这与y是E的上界这事实矛盾.

假如 $y^n>x$. 置

$$k=\frac{y^n-x}{ny^{n-1}}.$$

于是 $0<k<y$. 如果 $t\geqslant y-k$, 便可以推知

$$y^n-t^n\leqslant y^n-(y-k)^n<kny^{n-1}=y^n-x.$$

所以 $t^n>x$. 于是 $t\notin E$. 因之 $y-k$ 是 E 的上界.

但 $y-k<y$, 这与 y 是 E 的最小上界的事实矛盾.

由此 $y^n=x$. 证明完毕.

系 如果 a, b 是正实数, 而 n 是正整数, 那么

$$(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}$$

证 命 $\alpha=a^{1/n}$, $\beta=b^{1/n}$. 由于乘法可以交换[定义 1.12 中之公理(M_2)], 所以

$$ab=\alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n.$$

由定理 1.21 所说的唯一性可以断定:

$$(ab)^{1/n}=\alpha\beta=a^{1/n}b^{1/n}.$$

1.22 十进小数 我们指出实数和十进小数之间的关系作为本节的结束.

设 $x>0$ 是实数, 令 n_0 是合于 $n_0\leqslant x$ 的最大整数. (注意, n_0 的存在性, 依赖于 R 的阿基米德性.) 在取定 $n_0, n_1, \cdots, n_{k-1}$ 之后, 令 n_k 是合于

$$n_0+\frac{n_1}{10}+\cdots+\frac{n_k}{10^k}\leqslant x.$$

的最大整数. 令 E 是由数

$$(5)\qquad n_0+\frac{n_1}{10}+\cdots+\frac{n_k}{10^k}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

组成的集. 于是 $x=\sup E$. x 的十进小数展开式是

$$(6)\qquad n_0.n_1n_2n_3\cdots.$$

反之，对于任何无穷十进小数(6)来说，(5)中诸数组成的集上有界，并且(6)是 $\sup E$ 的十进小数展开式.

因为我们将永远不用小数，所以不作详细讨论.

广义实数系

1.23 定义 广义实数系由实数域 R 及两个符号 $+\infty$ 与 $-\infty$ 组成. 我们保留 R 中原来的顺序，并对任何 $x\in R$ 规定

$$-\infty<x<+\infty.$$

显然，$+\infty$ 是广义实数系的每个子集的上界，且每个不空子集有最小上界. 例如，如果 E 是一个不空实数集，它在 R 中不上有界，那么在广义实数系中 $\sup E=+\infty$.

对于下界可完全一样进行讨论.

广义实数系不成域，但习惯上作如下的约定：

(a) 如果 x 是实数，那么

$$x+\infty=+\infty,\quad x-\infty=-\infty\quad \frac{x}{+\infty}=\frac{x}{-\infty}=0.$$

(b) 如果 $x>0$，那么 $x\cdot(+\infty)=+\infty$，$x\cdot(-\infty)=-\infty$.

(c) 如果 $x<0$，那么 $x\cdot(+\infty)=-\infty$，$x\cdot(-\infty)=+\infty$.

当希望十分清楚地区别实数及符号 $+\infty$，$-\infty$ 时，便称前者为有限数.

复数域

1.24 定义 一复数是个有序的实数对（简称序对）(a,b). “有序的”的意思是，如果 $a\neq b$，那么 (a,b) 和 (b,a) 就认为是不同的.

设 $x=(a,b)$，$y=(c,d)$ 是两个复数. 当且仅当 $a=c$ 并且 $b=d$ 时，我们写成 $x=y$.（注意，这个定义并不完全是多余的；想

想表成整数之商的有理数的相等). 我们定义:

$$x+y=(a+c,b+d),$$

$$xy=(ac-bd,ad+bc).$$

1.25 定理 加法与乘法的这两个定义,把所有复数的集变成了一个域,其(0, 0)与(1, 0)起着域中0与1的作用.

证 我们只需验证定义1.12中所列的域的公理. 当然我们要用R的域结构.

设$x=(a,b)$, $y=(c,d)$, $z=(e,f)$

(A_1) 显然.

(A_2) $x+y=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=y+x.$

(A_3)
$$\begin{aligned}(x+y)+z&=(a+c,b+d)+(e,f)\\&=(a+c+e,b+d+f)\\&=(a,b)+(c+e,d+f)=x+(y+z).\end{aligned}$$

(A_4) $x+0=(a,b)+(0,0)=(a,b)=x.$

(A_5) 命$-x=(-a,-b)$则$x+(-x)=(0,0)=0$

(M_1) 显然.

(M_2) $xy=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,da+cb)=yx.$

(M_3)
$$\begin{aligned}(xy)z&=(ac-bd,ad+bc)(e,f)\\&=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)\\&=(a,b)(ce-df,cf+de)=x(yz)\end{aligned}$$

(M_4) $1\cdot x=(1,0)(a,b)=(a,b)=x.$

(M_5) 如果$x\neq 0$,就是$(a,b)\neq(0,0)$,这表示实数a, b中至少有一个不是0, 因此, 由命题1.18(d) $a^2+b^2>0$. 而我们能够定义

$$\frac{1}{x}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

于是

$$x\cdot\frac{1}{x}=(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)=1.$$

(*D*) $$\begin{aligned}x(y+z)&=(a,b)(c+e,d+f)\\&=(ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)\\&=(ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)\\&=xy+xz.\end{aligned}$$

1.26 定理 对于任何实数 a,b,有

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),\ (a,0)(b,0)=(ab,0).$$

证明显然.

定理 1.26 说明,形如 $(a,0)$ 的复数与对应的实数 a,有同样的算术性质. 所以我们可以把 $(a,0)$ 与 a 等同起来. 这个等同关系使实数域成了复数域的一个子域.

读者可能已经察觉,这里定义复数时,没有涉及 -1 的神秘的平方根. 现在证明记号 (a,b) 与较惯用的 $a+bi$ 是等价的.

1.27 定义 $i=(0,1)$.

1.28 定理 $i^2=-1$

证 $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$

1.29 定理 如果 a,b 都是实数,那么 $(a,b)=a+bi$

证 $$\begin{aligned}a+bi&=(a,0)+(b,0)(0,1)\\&=(a,0)+(0,b)=(a,b).\end{aligned}$$

1.30 定义 如果 a,b 是实数,而 $z=a+bi$,就把复数 $\bar{z}=a-bi$ 叫做 z 的共轭数. 数 a,b 分别叫做 z 的实部和虚部.

有时写成

$$a=\mathrm{Re}(z),\quad b=\mathrm{Im}(z).$$

1.31 定理 如果 z 及 w 是复数,那么

(*a*) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

(*b*) $\overline{zw}=\bar{z}\cdot\bar{w}$

(*c*) $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z), z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$.

(*d*) $z\bar{z}$ 是实数且是正数(除了 $z=0$ 时).

证 (*a*), (*b*), (*c*)都十分明显. 今证(*d*). 将 z 写成 $z=a+bi$, 并注意 $z\bar{z}=a^2+b^2$. 就行了.

1.32 定义 如果 z 是一复数, 它的绝对值 $|z|$ 是 $z\bar{z}$ 的非负平方根; 即 $|z|=(z\bar{z})^{1/2}$.

$|z|$ 的存在性(及唯一性)由定理 1.21 及定理 1.31 的 (*d*) 得来.

注意, 当 x 是实数时 $\bar{x}=x$, 因此, $|x|=\sqrt{x^2}$. 于是, 如果 $x\geqslant 0$, $|x|=x$; 如果 $x<0$, $|x|=-x$.

1.33 定理 设 z 和 w 都是复数, 那么

(*a*) $|z|>0$ 除非 $z=0$, $|0|=0$,

(*b*) $|\bar{z}|=|z|$,

(*c*) $|zw|=|z|\,|w|$,

(*d*) $|\mathrm{Re}\ z|\leqslant|z|$,

(*e*) $|z+w|\leqslant|z|+|w|$.

证 (*a*)及(*b*)是显然的. 设 $z=a+bi, w=c+di$, a, b, c, d 为实数. 于是

$$|zw|^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=|z|^2|w|^2.$$

或 $|zw|^2=(|z|\,|w|)^2$. 由定理 1.21 所说的唯一性, 便能推得(*c*).

今证(*d*), 注意 $a^2\leqslant a^2+b^2$, 由此,

$$|a|=\sqrt{a^2}\leqslant\sqrt{a^2+b^2}.$$

今证(*e*), 注意 $\bar{z}w$ 是 $z\bar{w}$ 的共轭数, 所以 $z\bar{w}+\bar{z}w=2\mathrm{Re}(z\bar{w})$. 由此,

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=z\bar{z}+z\bar{w}+\bar{z}w+w\bar{w}\\&=|z|^2+2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})+|w|^2\\&\leqslant|z|^2+2|z\bar{w}|+|w|^2\end{aligned}$$

$$=|z|^2+2|z||w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2.$$

两端开平方即得(e).

1.34 记号 如果 $x_1,\cdots,x_n$ 都是复数，把它们的和写成

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{j=1}^{n}x_j.$$

我们用一重要不等式来结束本节，它通常被称为 Schwarz 不等式.

1.35 定理 如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是复数，那么

$$\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\bar{b}_j\right|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2$$

证 设 $A=\Sigma|a_j|^2$, $B=\Sigma|b_j|^2$, $C=\Sigma a_j\bar{b}_j$ (在本证明的所有和中，j 遍历 $1,\cdots,n$ 诸值). 如果 $B=0$，那么 $b_1=\cdots=b_n=0$，而定理的结论是明显的. 因此，可假定 $B>0$. 由定理 1.31，有

$$\begin{aligned}\Sigma|Ba_j-Cb_j|^2&=\Sigma(Ba_j-Cb_j)(B\bar{a}_j-\overline{Cb_j})\\&=B^2\Sigma|a_j|^2-B\bar{C}\Sigma a_j\bar{b}_j-BC\Sigma\bar{a}_jb_j+|C|^2\Sigma|b_j|^2\\&=B^2A-B|C|^2\\&=B(AB-|C|^2).\end{aligned}$$

因第一个和中的每一项非负，而知

$$B(AB-|C|^2)\geqslant 0.$$

由 $B>0$ 推得 $AB-|C|^2\geqslant 0$. 这就是要证的不等式.

欧氏空间

1.36 定义 对于每个正整数 k，设 R^k 是一切 k 元有序组

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$$

的集，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 都是实数，称为 $\mathbf{x}$ 的坐标. R^k 中的元素称为点或向量.（特别当 $k>1$ 时是这样）. 我们用粗体字表示向量.

如果 $\boldsymbol{y}=(y_1, \cdots, y_k)$而 α 是实数，令

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_k+y_k),$$

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_k).$$

于是 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in R^k$，$\alpha\boldsymbol{x}\in R^k$．这就规定了向量的加法及向量的数(标量)乘法．这两种运算满足交换律，结合律和分配律(由实数的类似算律来看，这不难证明.)而使 R^k 成为实数域上的向量空间．$\boldsymbol{R}^k$ 的零元(有时称为原点或零向量)是一切坐标都是 0 的点 $\mathbf{0}$.

定义 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的“内积”(或标量积)为

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{k} x_i y_i.$$

又定义 $\boldsymbol{x}$ 的范数为

$$|\boldsymbol{x}|=(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}.$$

现在所规定的结构（具有上述的内积和范数的向量空间 $\boldsymbol{R}^k$）称为 k 维欧氏空间.

1.37 定理 设 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\in R^k$，而 α 是实数．那么

(*a*) $|\boldsymbol{x}|\geqslant 0$;

(*b*) $|\boldsymbol{x}|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=0$;

(*c*) $|\alpha\boldsymbol{x}|=|\alpha||\boldsymbol{x}|$;

(*d*) $|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|$

(*e*) $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$

(*f*) $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|$.

证 (*a*)，(*b*)，(*c*)都显然成立．(*d*) 是 Schwarz 不等式的直接结果．由(*d*)

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$$

$$=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}$$

$$\leqslant |\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|^2$$
$$=(|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2.$$

因而(e)获证. 最后,在(e)中用$\mathbf{x}-\mathbf{y}$代$\mathbf{x}$, 用$\mathbf{y}-\mathbf{z}$代$\mathbf{y}$就得到(f).

1.38 评注 定理 1.37(a), (b)及(f), 使我们可以把R^k看成一个度量空间(看第二章).

R^1(全体实数的集)通常称为直线或实直线. 同样, R^2称为平面或复平面(比较定义 1.24 及 1.36). 在这两种情形下, 范数恰好是相应实数或复数的绝对值.

附录

这附录, 将要从Q去创造出R, 借以证明定理 1.19. 我们把这个创造过程分为几步.

第一步 R的元是Q的确定的子集, 称为分划. 规定分划是具有以下三种性质的任意集$\alpha\subset Q$.

(Ⅰ) α不空, $\alpha\neq Q$.

(Ⅱ) 如果$p\in\alpha$, $q\in Q$且$q<p$, 那么$q\in\alpha$.

(Ⅲ) 如果$p\in\alpha$, 那么必有某个$r\in\alpha$使得$p<r$.

字母p, q, r将总是表示有理数, 而α, β, γ将总是表示分划.

注意, (Ⅲ)是说α没有最大元; (Ⅱ)暗含着两件可以直接运用的事实:

如果$p\in\alpha$而$q\notin\alpha$, 那么$p<q$.

如果$r\notin\alpha$而$r<s$, 那么$s\notin\alpha$.

第二步 规定用“$\alpha<\beta$”表示: α是β的真子集.

我们来验证这符合定义 1.5 的要求.

如果$\alpha<\beta$且$\beta<\gamma$, 那么显然$\alpha<\gamma$. (真子集的真子集还是真子集). 对于任何一对α, β, 显然三种关系

$$\alpha<\beta,\ \alpha=\beta,\ \beta<\alpha$$

之中最多有一种成立. 为了证明至少有一种成立，假定前两种不成立. 于是 α 不是 β 的子集. 由此存在一个 $p\in\alpha$, 但 $p\notin\beta$. 如果 $q\in\beta$, 那么(因为 $p\notin\beta$)$q<p$, 因而由(Ⅱ)$q\in\alpha$. 如此就有 $\beta\subset\alpha$. 因为 $\beta\neq\alpha$, 所以可以断定 $\beta<\alpha$.

于是, 现在 R 是有序集了.

第三步 有序集 R 有最小上界性.

证: 令 A 是 R 的不空子集, 且假定 $\beta\in R$ 是 A 的上界. 规定 γ 为所有 $\alpha\in A$ 的并. 换言之, $p\in\gamma$ 当且仅当对某个 $\alpha\in A$ 有 $p\in\alpha$. 今证 $\gamma\in R$, 且 $\gamma=\sup A$.

因 A 不空, 存在 $\alpha_0\in A$. 这个 α_0 不空. 因为 $\alpha_0\subset\gamma$, γ 也就不空. 此外, $\gamma\subset\beta$(因为每当 $\alpha\in A$, 必然 $\alpha\subset\beta$)所以 $\gamma\neq Q$. 于是 γ 满足性质(Ⅰ). 为了证明(Ⅱ)和(Ⅲ), 取 $p\in\gamma$. 于是有某个 $\alpha_1\in A$ 使 $p\in\alpha_1$. 如果 $q<p$, 那么 $q\in\alpha_1$, 由此 $q\in\gamma$; 这就证明了(Ⅱ). 如果选得 $r\in\alpha_1$ 并且 $r>p$, 就知道 $r\in\gamma$(因为 $\alpha_1\subset\gamma$), 所以 γ 满足(Ⅲ).

于是 $\gamma\in R$.

显然只要 $\alpha\in A$, 必然 $\alpha\leqslant\gamma$.

假定 $\delta<\gamma$, 便有 $s\in\gamma$ 而 $s\notin\delta$. 既然 $s\in\gamma$, 便有某个 $\alpha\in A$ 使得 $s\in\alpha$. 因此 $\delta<\alpha$, 而且 δ 不是 A 的上界.

这就得到了所期望的结果: $\gamma=\sup A$.

第四步 如果 $\alpha\in R$ 且 $\beta\in R$, 规定 $\alpha+\beta$ 为由所有和 $r+s$ 组成的集, 这里 $r\in\alpha$ 而 $s\in\beta$.

规定 0^* 为所有负有理数组成的集. 显然 0^* 是一个分划. 我们用 0^* 当作 0, 而来证明加法公理(见定义 1.12)在 R 中成立.

(A_1) 需要证明 $\alpha+\beta$ 是分划. 显然 $\alpha+\beta$ 是 Q 的不空子集. 取 $r'\notin\alpha$, $s'\notin\beta$, 那么对所有 $r\in\alpha$, $s\in\beta$ 来说, $r'+s'>r+s$. 所以

$r'+s'\notin\alpha+\beta$. 因此 $\alpha+\beta$ 具备性质(I).

取 $p\in\alpha+\beta$, 则 $p=r+s$, 这里 $r\in\alpha, s\in\beta$. 如果 $q<p$, 那么 $q-s<r$, 所以 $q-s\in\alpha$, 而 $q=(q-s)+s\in\alpha+\beta$, 所以(II)成立. 选 $t\in\alpha$ 使 $t>r$. 于是 $p<t+s$ 并且 $t+s\in\alpha+\beta$. 所以(III)成立.

(A_2) $\alpha+\beta$ 是所有 $r+s$ 的集, 其中 $r\in\alpha, s\in\beta$. 据同一定义, $\beta+\alpha$ 是所有 $s+r$ 的集. 因 $r+s=s+r$ 对所有 $r\in Q$ 及 $s\in Q$ 成立, 所以 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

(A_3) 和上边一样, 由 Q 内的结合律可以推得本条.

(A_4) 如果 $r\in\alpha, s\in0^*$, 那么 $r+s<r$, 因此 $r+s\in\alpha$. 如此就有 $\alpha+0^*\subset\alpha$.

为了得到相反的包含式, 取 $p\in\alpha$ 又取 $r\in\alpha$, 使 $r>p$. 就有 $p-r\in0^*$ 而 $p=r+(p-r)\in\alpha+0^*$. 所以 $\alpha\subset\alpha+0^*$. 于是断定 $\alpha+0^*=\alpha$.

(A_5) 固定了 $\alpha\in R$. 令 β 是具有以下性质的所有 p 的集:

存在 $r>0$ 使 $-p-r\notin\alpha$.

换句话说, 有比 $-p$ 小一点的有理数不在 α 内.

今证 $\beta\in R$ 并且 $\alpha+\beta=0^*$.

如果 $s\notin\alpha$ 而 $p=-s-1$, 那么 $-p-1\notin\alpha$, 由此 $p\in\beta$. 所以 β 不空. 如果 $q\in\alpha$, 那么 $-q\notin\beta$. 所以 $\beta\neq Q$. 因此 β 满足(I).

取 $p\in\beta$ 及 $r>0$, 使 $-p-r\notin\alpha$. 若 $q<p$, 则 $-q-r>-p-r$, 从而 $-q-r\notin\alpha$. 于是 $q\in\beta$, 而(II)成立. 令 $t=p+(r/2)$, 就有 $t>p$ 且 $-t-(r/2)=-p-r\notin\alpha$. 所以 $t\in\beta$. 因此 β 满足(III).

已经证明了 $\beta\in R$.

如果 $r\in\alpha$ 并且 $s\in\beta$, 那么 $-s\notin\alpha$, 因之 $r<-s$, $r+s<0$. 于是 $\alpha+\beta\subset0^*$.

为了证明反向包含式, 取 $v\in0^*$, 令 $w=-v/2$. 于是 $w>0$, 必有整数 n 使得 $nw\in\alpha$ 但 $(n+1)w\notin\alpha$. (注意, 这由于 Q 有阿基米德

性 i)命 $p=-(n+2)w$, 则由 $-p-w\notin\alpha$ 有 $p\in\beta$, 也就有

$$v=nw+p\in\alpha+\beta.$$

于是 $0^*\subset\alpha+\beta$.

我们断定了 $\alpha+\beta=0^*$.

这 β 自然该用 $-\alpha$ 来记它.

第五步 既然证明了第四步中所定义的加法满足定义 1.12 的公理(A), 那么命题 1.14 必然在 R 中成立, 并且能够证明定义 1.17 的两个要求之一:

如果 $\alpha,\beta,\gamma\in R$, 并且 $\beta<\gamma$, 那么 $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$.

实际上, 从 R 中 $+$ 的定义显然有 $\alpha+\beta\subset\alpha+\gamma$; 倘若 $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$, 消去律(命题1.14)便暗含有 $\beta=\gamma$.

又随之有, $\alpha>0^*$ 当且仅当 $-\alpha<0^*$.

第六步 在这一段文字里, 乘法比加法更麻烦一点, 这因为负有理数的乘积是正有理数. 因此, 我们首先限于在 R^+ 里来讨论, R^+ 是所有 $\alpha\in R$ 之合于 $\alpha>0^*$ 的集.

如果 $\alpha\in R^+$ 且 $\beta\in R^+$, 定义 $\alpha\beta$ 为所有 p 组成的集, $p<rs$, 而这里 $r\in\alpha$, $s\in\beta$, $r>0$, $s>0$ 是随意选定的.

定义 1^* 为所有 $q<1$ 组成的集.

于是在定义 1.12 中, 把 F 换成 R^+, 再把 1^* 当作 1 用时, 公理(M)及(D)都成立.

证法与第四步中详细给出的十分相似, 因此从略.

注意, 特别是, 定义 1.17 的第二个要求成立: 如果 $\alpha>0^*$, $\beta>0^*$, 那么 $\alpha\beta>0^*$.

第七步 令 $\alpha 0^*=0^*\alpha=0^*$ 且令

$$\alpha\beta=\begin{cases}(-\alpha)(-\beta) & \text{如果 } \alpha<0^*, \beta<0^*,\\ -[(-\alpha)(\beta)] & \text{如果 } \alpha<0^*, \beta>0^*,\\ -[\alpha\cdot(-\beta)] & \text{如果 } \alpha>0^*, \beta<0^*.\end{cases}$$

就使乘法定义完全了. 上式右端的乘积,是在第六步里定义了的.

既然(在第六步中)证了公理(M)在 R^+ 中成立,再证它们在 R 中成立就十分简单了,只要重复应用恒等式 $\gamma=-(-\gamma)$就行了,这恒等式是命题 1.14 的一部分(见第五步).

分配律

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

的证明要分情况. 例如,设 $\alpha>0^*$, $\beta<0^*$, $\beta+\gamma>0^*$, 那么 $\gamma=(\beta+\gamma)+(-\beta)$ 且(因已知分配律在 R^+ 成立)

$$\alpha\gamma=\alpha(\beta+\gamma)+\alpha\cdot(-\beta).$$

但 $\alpha\cdot(-\beta)=-(\alpha\beta)$. 于是

$$\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha(\beta+\gamma)$$

其它情形用类似的方法处理.

现在,R 是具有最小上界性的有序域的证明全部完成.

第八步 给每个 $r\in Q$ 配备一个集 r^*, 它由一切合于 $p<r$ 的 $p\in Q$ 组成. 显然每个 r^* 是一个分划, 即是 $r^*\in R$. 这些分划满足下列关系.

(a) $r^*+s^*=(r+s)^*$,

(b) $r^*s^*=(rs)^*$,

(c) $r^*<s^*$ 当且仅当 $r<s$.

为了证(a),选 $p\in r^*+s^*$,于是 $p=u+v$, 这里 $u<r, v<s$. 因此 $p<r+s$,这就是说 $p\in(r+s)^*$.

反之,假定 $p\in(r+s)^*$,那么 $p<r+s$. 选 t 使 $2t=r+s-p$. 令

$$r'=r-t,\quad s'=s-t.$$

就有 $r'\in r^*$, $s'\in s^*$ 且 $p=r'+s'$,所以 $p\in r^*+s^*$.

(a) 获证. (b)的证明与此类似.

如果 $r<s$,那么 $r\in s^*$, 但 $r\notin r^*$; 因之 $r^*<s^*$.

如果 $r^*<s^*$，那么存在一数 $p\in s^*$ 但 $p\notin r^*$. 因之，$r\leqslant p<s$. 所以 $r<s$.

(c) 获证.

第九步 在第八步中已经知道，把有理数 r 换作相应的“有理分划”$r^*\in R$ 时，和、积及顺序不变，表达这事实的术语是：有序域 Q 与有序域 Q^* 同构，Q^* 的元素是有理分划. 当然，r^* 绝不同于 r，但我们所涉及的性质(算术的及顺序)在这两个域里是一样的.

就是 Q 与 Q^* 的这个一致性，才使我们把 Q 看成 R 的子域. 定理 1.19 的第二部分，就按这种一致性来理解. 注意，当把实数域看成复数域的子域时，还会出现同样的现象，当把整数集等同于 Q 的一个子集时，这现象也在较为初等的水平上出现.

任何两个具有最小上界性的有序域同构，这是一个事实，(我们不打算在这里证明). 所以定理 1.19 的第一部分完全刻划了实数域 R.

书目所引 Landau 的和 Thurston 的书，是完全讨论数系的. Knopp 的书的第一章，轻松地描述了如何从 Q 得到 R. 在 Hewitt 及 Stromberg 书的第五节里用的是另一种构造法，其中定义实数是有理数 Cauchy 序列的等价类(见第三章).

我们这里所用的在 Q 中的分划，是 Dedekind 发明的. 从 Q 利用 Cauchy 序列来构造 R 归功于 Cantor. Cantor 及 Dedekind 都是在 1872 年发表其构造法的.

习题

除去有明确的相反的说明以外，本习题中所提到的数，都理解为实数.

1. 如果 $r(r\neq 0)$ 是有理数而 x 是无理数，证明 $r+x$ 及 rx 是无理数.
2. 证明不存在平方为 12 的有理数.
3. 证明命题 1.15.
4. 设 E 是某有序集的非空子集；又设 α 是 E 的下界，而 β 是 E 的上界.

证明 $\alpha\leqslant\beta$.

5. 设 A 是非空实数集，下有界．令 $-A$ 是所有 $-x$ 的集，$x\in A$．证明

$$\inf A=-\sup(-A).$$

6. 固定 $b>1$.

(a) 如果 m,n,p,q 是整数，$n>0,q>0$，且 $r=m/n=p/q$．证明

$$(b^m)^{\frac{1}{n}}=(b^p)^{\frac{1}{q}}.$$

因此，定义 $b^r=(b^m)^{\frac{1}{n}}$ 有意义.

(b) 证明，如果 r 与 s 是有理数，那么 $b^{r+s}=b^r\cdot b^s$.

(c) 如果 x 是实数，定义 $B(x)$ 为所有数 b^t 的集，这里 t 是有理数并且 $t\leqslant x$．证明

$$b^r=\sup B(r)$$

这里 r 是有理数．由此，对于每个实数 x，定义

$$b^x=\sup B(x)$$

是合理的.

(d) 证明，对于一切实数 x 及 y，$b^{x+y}=b^xb^y$.

7. 固定 $b>1,y>0$，按照下面的提纲来证明，存在唯一的实数 x 使 $b^x=y$（这 x 叫做以 b 为底 y 的对数）：

(a) 对每个正整数 n，$b^n-1\geqslant n(b-1)$。

(b) 因之 $b-1\geqslant n\,(b^{\frac{1}{n}}-1)$。

(c) 如果 $t>1$ 且 $n>(b-1)/(t-1)$，那么 $b^{1/n}<t$.

(d) 如果 w 使 $b^w<y$，那么对于足够大的 n，$b^{w+(1/n)}<y$．为了证明这一点，应用(c)而取 $t=y\cdot b^{-w}$.

(e) 如果 $b^w>y$，那么对于足够大的 n，$b^{w-(1/n)}>y$.

(f) 设 A 是所有使 $b^w<y$ 成立的 w 的集，证明 $x=\sup A$ 满足方程 $b^x=y$.

(g) 证明这 x 是唯一的.

8. 证明在复数域中不能定义顺序关系以使其变成有序域.

提示：-1是平方数.

9. 设 $z=a+bi,w=c+di$．若 $a<c$，或者 $a=c$ 但 $b<d$，就规定 $z<w$．证明这能使得所有复数的集变成有序集．（这种顺序关系叫做字典顺序或

辞典编纂顺序，其理由是明显的）．这种顺序关系有没有最小上界性呢？

10．设 $z=a+bi, w=u+vi$，而

$$a=\left(\frac{|w|+u}{2}\right)^{1/2}, b=\left(\frac{|w|-u}{2}\right)^{1/2}.$$

证明：如果 $v\geqslant 0$，那么 $z^2=w$，而若 $v\leqslant 0$，那么 $(\bar{z})^2=w$．由此断定每个复数（只有一个例外）有两个复平方根．

11．如果 z 是复数．证明存在 $r\geqslant 0$ 及复数 w，$|w|=1$，使 $z=rw$．是否 w 及 r 永远由 z 唯一确定？

12．如果 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是复数，试证

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

13．如果 x, y 是复数，试证

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|.$$

14．如果 z 是复数且 $|z|=1$，即 $z\bar{z}=1$，计算

$$|1+z|^2+|1-z|^2.$$

15．在什么条件下 Schwarz 不等式中的等式成立？

16．设 $k\geqslant 3$，$\mathbf{x}, \mathbf{y}\in R^k$，$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=d>0$ 且 $r>0$．试证：

(a) 如果 $2r>d$，就有无穷多个 $\mathbf{z}\in R^k$ 使

$$|\mathbf{z}-\mathbf{x}|=|\mathbf{z}-\mathbf{y}|=r.$$

(b) 如果 $2r=d$，就恰好有一个这样的 $\mathbf{z}$．

(c) 如果 $2r<d$，就没有这样的 $\mathbf{z}$．

如果 k 是 2 或 1，这些命题应怎样修正？

17．如果 $\mathbf{x}\in R^k$，$\mathbf{y}\in R^k$．试证：

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=2|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{y}|^2.$$

用几何的说法，把它解释成平行四边形的命题．

18．如果 $k\geqslant 2$，且 $\mathbf{x}\in R^k$，证明存在 $\mathbf{y}\in R^k$，使得 $\mathbf{y}\neq 0$ 但 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$．如果 $k=1$，这还对不对？

19．设 $\mathbf{a}\in R^k$，$\mathbf{b}\in R^k$，求 $\mathbf{c}\in R^k$ 和 $r>0$ 使得

$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}|=2|\mathbf{x}-\mathbf{b}|.$$

当且仅当 $|\mathbf{x}-\mathbf{c}|=r$.

（答案：$3\mathbf{c}=4\mathbf{b}-\mathbf{a}$，$3r=2|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$）

20．关于附录，设把性质(Ⅲ)从分划的定义中删去，保留顺序及加法的原来定义．证明所得的有序集有最小上界性，加法满足公理 (A_1) 到 (A_4)（零元稍有不同！）但 (A_5) 不成立．

第二章 基础拓扑

有限集、可数集和不可数集

我们从函数概念的定义开始这一节.

2.1 定义 考虑两个集 A 和 B，它们的元素可以是任何东西. 假定对于 A 的每个元素 x，按照某种方式，与集 B 的一个元素联系着，这个元素记作 $f(x)$；那么，就说 f 是从 A 到 B 的一个函数（或将 A 映入 B 内的一个映射）. 集 A 叫做 f 的定义域（或者说 f 定义在 A 上），而元素 $f(x)$ 叫做 f 的值. f 的一切值的集叫做 f 的值域.

2.2 定义 设 A 和 B 是两个集，f 是 A 到 B 内的一个映射. 如果 $E\subset A$，对于一切 $x\in E$，元素 $f(x)$ 所成的集定义为 $f(E)$. 我们称 $f(E)$ 为 E 在 f 之下的象. 按这个记法来说，$f(A)$ 就是 f 的值域. 显然 $f(A)\subset B$. 如果 $f(A)=B$，就说 f 将 A 映满 B.（注意，按照这个用法，"映满…"比"映入…内"更特别些）.

$E\subset B$ 时，$f^{-1}(E)$ 表示一切合于 $f(x)\in E$ 的 $x\in A$ 所成的集. 称 $f^{-1}(E)$ 为 E 在 f 之下的逆象. $y\in B$ 时，$f^{-1}(y)$ 是 A 中一切合于 $f(x)=y$ 的元素 x 所成的集. 如果 $f^{-1}(y)$ 对于每个 $y\in B$ 至多含有 A 中的一个元素，那么就称 f 是 A 到 B 内的 1-1（一对一的）映射. 这句话也可以表述如下：如果对于 $x_1\in A$，$x_2\in A$，当 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x_1)\neq f(x_2)$，那么 f 就是 A 到 B 内的一个 1-1 映射.

（$x_1\neq x_2$ 表示 x_1 和 x_2 是不同的元素；否则就记作 $x_1=x_2$.）

2.3 定义 如果存在 A 到 B 上的一个 1-1 映射，那么就说 A 和 B 可以建立 1-1 对应，或者说 A 和 B 具有相同的基数，或者就简

单地说A和B等价，并且记作$A\sim B$. 这个关系显然具有下列性质：

自反性：$A\sim A$.

对称性：如果$A\sim B$，就有$B\sim A$.

传递性：如果$A\sim B$，并且$B\sim C$，那么$A\sim C$.

任何具有这三个性质的关系都叫做等价关系.

2.4 定义 对于任意正整数n，令J_n表示$1, 2, \cdots, n$所成的集，令J表示全体正整数所成的集. 设A是任意一个集. 我们说

(*a*) A是有限的，如果对于某个n，$A\sim J_n$(空集也认为是有限集).

(*b*) A是无限的，如果A不是有限的.

(*c*) A是可数的，如果$A\sim J$.

(*d*) A是不可数的，如果A既不是有限的，也不是可数的.

(*e*) A是至多可数的，如果A或为有限或为可数的.

可数集有时也叫做可枚举集或可列集.

对于两个有限集A和B来说，显然$A\sim B$当且仅当A和B含有同样多个元素. 然而对于无限集来说，"含有同样多个元素"的概念就变得含糊不清了. 但是，1-1对应的概念仍然是清楚的.

2.5 例 令A是一切整数的集，那么A是可数的. 这因为我们可以如下地排列A和J：

A：$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots$

J：$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots$

在这个例子里，我们甚至可以把提供1-1对应的，从J到A的函数f的显式写出来：

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & (\text{当 } n \text{ 是偶数})\\[2ex] -\dfrac{n-1}{2} & (\text{当 } n \text{ 是奇数})\end{cases}$$

2.6 评注 一个有限集不能与它的一个真子集等价. 然而

对于无限集来说，这却是可能的. 这一点已经由例 2.5 指明了，在这里 J 是 A 的一个真子集.

事实上，定义2.4(b)的陈述，可以代之以：A 是无限的，如果 A 与它的一个真子集等价.

2.7 定义 定义在一切正整数的集 J 上的函数叫做一个序列，如果对于 $n\in J$，$f(n)=x_n$，习惯上就把序列 f 用符号 $\{x_n\}$ 来表示，或者用 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 来表示. f 的值，即元素 x_n，叫做这个序列的项. 设 A 是一个集并且对一切 $n\in J$，$x_n\in A$，那么 $\{x_n\}$ 就叫做 A 里的一个序列，或者叫做 A 的元素的一个序列. $\{x_n\}\subseteq A$

注意，一个序列的项 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 不一定各不相同.

因为每个可数集是定义在 J 上的一个 1-1 函数的值域，所以每个可数集总可以看成一个各项都不同的序列的值域. 说得随便一点，可以说每个可数集的元素，总可以"排成一个序列".

有时在定义里用一切非负整数的集来代替 J 是方便的，这就是说，不从 1 开始，而从 0 开始.

2.8 定理 可数集 A 的每个无限子集也是可数集.

证 设 $E\subset A$ 并且 E 是无限集. 把 A 的元素 x 排成一个不同元素的序列 $\{x_n\}$. 按以下方式作序列 $\{n_k\}$：

令 n_1 是使 $x_{n_1}\in E$ 的最小正整数. 当 $n_1, \cdots, n_{k-1}$ $(k=2, 3, 4, \cdots)$ 选定以后，令 n_k 是大于 n_{k-1} 并且使 $x_{n_k}\in E$ 的最小正整数.

令 $f(k)=x_{n_k}$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$. 我们便得到了 E 和 J 之间的一个 1-1 对应.

粗略地说，这个定理告诉我们，可数集表示"最小的"无限性：没有不可数集能够是可数集的子集的.

2.9 定义 设 A 和 Ω 都是集. 假定对于 A 的每个元素 α，与 Ω 的一个子集联系着，这个子集记作 E_α.

用 $\{E_\alpha\}$ 来表示以集 E_α 为元素的集. 我们有时不说集的集，而

说一组集或一族集.

许多集 E_α 的并指的是这样的集 S: $x\in S$ 当且仅当至少对于一个 $\alpha\in A$, 有 $x\in E_\alpha$, 表示并的记号是

(1) $$S=\bigcup_{\alpha\in A}E_\alpha.$$

如果 A 由整数 $1,2,\cdots,n$ 组成, 又往往写做:

(2) $$S=\bigcup_{m=1}^{n}E_m.$$

或

(3) $$S=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n.$$

如果 A 是一切正整数的集, 通常的记号是

(4) $$S=\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m.$$

(4) 里的符号 ∞ 仅仅表示对于集的可数组来取并, 不要与定义 1.23 里所引入的符号 $+\infty$, $-\infty$ 混淆了.

许多集 E_α 的交指的是这样的集 P: $x\in P$ 当且仅当对一切 $\alpha\in A$, 有 $x\in E_\alpha$. 如同对于并那样, 采用的记号是

(5) $$P=\bigcap_{\alpha\in A}E_\alpha$$

或

(6) $$P=\bigcap_{m=1}^{n}E_m=E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_n.$$

或

(7) $$P=\bigcap_{m=1}^{\infty}E_m.$$

如果 $A\cap B$ 不空, 就说 A 与 B 相交, 否则就说它们不相交.

2.10 例

(a) 设 E_1 由 1, 2, 3 组成, E_2 由 2, 3, 4 组成, 那么 $E_1\cup E_2$ 由 1,

2, 3, 4 组成，而 $E_1\cap E_2$ 由 2, 3 组成.

(*b*) 令 A 是适合 $0<x\leqslant 1$ 的实数 x 所成的集. 对于每一个 $x\in A$, 令 E_x 是适合 $0<y<x$ 的实数 y 所成的集. 那么

(i) $E_x\subset E_z$ 当且仅当 $0<x\leqslant z\leqslant 1$;

(ii) $\bigcup\limits_{x\in A}E_x=E_1$;

(iii) $\bigcap\limits_{x\in A}E_x$ 是空集;

(i) 和 (ii) 是明显的，为了证明 (iii)，我们注意，对于每个 $y>0$，总还有 $x<y$，所以 $y\notin E_x$. 因此 $y\notin\bigcap\limits_{x\in A}E_x$.

2.11 评注 并与交的许多性质都非常类似于和与积的性质；实际上，有时也把和与积这两个词用于这两个关系. 并用符号 Σ 及 Π 来代替 $\cup$ 及 $\cap$.

交换律与结合律是明显的:

(8) $$A\cup B=B\cup A;\quad A\cap B=B\cap A.$$

(9) $$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

因此在(3)与(6)中，不写括号是合理的.

分配律也成立:

(10) $$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

为了证明这一事实，将(10)的左端和右端分别记作 E 和 F.

设 $x\in E$，那么 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$，即 $x\in B$ 或 $x\in C$(也可能同时属于二者). 因此 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，从而 $x\in F$. 于是 $E\subset F$.

现在设 $x\in F$，那么 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$. 这就是说，$x\in A$ 且 $x\in B\cup C$. 因此 $x\in A\cap(B\cup C)$. 从而 $F\subset E$.

因此，就得 $E=F$.

我们再列出几个关系式，这些关系式都容易证明:

(11) $$A\subset A\cup B,$$

(12) $$A\cap B\subset A.$$

用 0 表示空集，那么

(13) $$A\cup 0=A,\quad A\cap 0=0.$$

如果 $A\subset B$，那么

(14) $$A\cup B=B,\quad A\cap B=A.$$

2.12 定理 设$\{E_n\}$ $n=1,2,3,\cdots$是可数集组成的序列，令

(15) $$S=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

那么 S 是可数的.

证 把每个集E_n 排成一个序列$\{x_{nk}\}$，$k=1,2,3,\cdots$，而来考虑无限阵列

(16) $$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

在这个阵列里，E_n 的元素构成第 n 行. 这个阵列含有 S 的一切元素. 这些元素可以按照箭头所指出的顺序排成一个序列

(17) $$x_{11};\ x_{21},\ x_{12};\ x_{31},\ x_{22},\ x_{13};\ x_{41},\ x_{32},\ x_{23},\ x_{14};\ \cdots$$

这些集 E_n 的任何两个如果有公共元素，那么这些公共元素将在(17)中不止出现一次. 因此一切正整数的集里有一个子集 T 使得 $S\sim T$，这就证明了 S 是至多可数的(定理 2.8). 因为 $E_1\subset S$，而 E^1 是无限的，所以 S 也是无限的，从而是可数的.

推论 假定 A 是至多可数的，并且对应于每个 $\alpha\in A$ 的 B_α 是至多可数的. 令

$$T=\bigcup_{\alpha\in A}B_\alpha.$$

那么T是至多可数的.

这是因为T与(15)的一个子集等价.

2.13 定理 设A是可数集. 又假设B_n是一切n元素组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的集,这里$a_k \in A$ $(k=1,\cdots,n)$,并且元素$a_1, a_2, \cdots, a_n$不一定不相同. 那么B_n是可数的.

证 B_1显然是可数的,因为$B_1=A$. 假设$B_{n-1}(n=2, 3, \cdots)$是可数的. 那么,B_n的元素具有形式

$$(b, a) \qquad (b \in B_{n-1}, a \in A). \tag{18}$$

对于每个固定的b,元素对(b, a)的集与A等价,因而是可数的. 于是B_n是可数个可数集的并. 由定理2.12,B_n是可数的.

于是由归纳法证明了这个定理.

推论 一切有理数的集是可数的.

证 应用定理2.13中$n=2$的情形. 注意每个有理数r是b/a形状的数,这里a和b是整数. 一切数对(b, a)的集是可数的. 从而一切分数b/a的集是可数的.

实际上,甚至一切代数数的集也是可数的(见习题2).

然而下面的定理告诉我们,并不是所有的无限集都是可数的.

2.14 定理 设A是由数码0和1构成的一切序列的集,这个集A是不可数的.

A的元素都是象1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, …这样的序列.

证 设E是A的一个可数子集,并且设E由一列元素$s_1, s_2, s_3, \cdots$组成. 现在构造一个序列s如下. 如果在s_n里,第n个数码是1,就令s的第n个数码取0,如果s_n中第n个数码是0,就令s的第n个数码取1. 于是序列s与E里的每个序列至少有一位不同. 从而$s \notin E$. 然而显然$s \in A$. 所以E是A的真子集.

这就证明了A的每个可数子集是A的真子集. 因此A是不可数集(否则A将是它自己的一个真子集,这不可能).

以上证法的思想是 Cantor 首先使用的，并且称为 Cantor 的对角线手法；因为如果把序列 s_1, s_2, s_3, …排成(16)那样一个阵列，那么在构造新序列时，涉及的就是对角线上的元素.

熟悉实数的二进位表示法（以 2 代替 10 为基）的读者会注意到，定理 2.14 暗示着一切实数的集是不可数的．在定理 2.43 里，还要对这个事实做另外的证明.

度量空间

2.15 定义 设 X 是一个集．它的元素叫做点，如果 X 的任意两点 p 和 q，联系于一个实数 $d(p,q)$，叫做从 p 到 q 的距离，它合乎条件：

(a) 如果 $p\neq q$，那么 $d(p,q)>0$；$d(p,p)=0$；

(b) $d(p,q)=d(q,p)$；

(c) 对于任意 $r\in X$，$d(p,q)\leqslant d(p,r)+d(r,q)$；

就称 X 是一个度量空间.

具有这三条性质的函数叫做距离函数或度量.

2.16 例 从我们的论点来说，最重要的度量空间是欧氏空间 R^k，特别是 R^1（实数轴）和 R^2（复平面）；在 R^k 中，距离定义为

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y})=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\quad(\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^k). \tag{19}$$

由定理1.37，这样定义的距离满足定义 2.15 的条件.

重要的是应该注意：一个度量空间 X 的每个子集 Y，对于同一个距离函数来说，Y 本身也是一个度量空间．因为定义 2.15 里的条件从(a)到(c)，如果对于 $p,q,r\in X$ 成立，那么显然把 p,q,r 都限制在 Y 里的时候，这些条件自然也成立.

这样一来，凡欧氏空间的子集都是度量空间．空间 $\mathscr{C}(K)$ 和 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 是度量空间的其它例子，这二者将分别在第七章和第十一章里讨论.

2.17 定义 满足条件 $a<x<b$ 的一切实数 x 的集叫做开区间，记作 (a,b).

满足条件 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的叫做闭区间，记作 $[a,b]$.

有时我们还会遇到"半开区间" $[a,b)$ 和 $(a,b]$；第一个由满足条件 $a\leqslant x<b$ 的一切 x 组成. 第二个由满足条件 $a<x\leqslant b$ 的一切 x 组成.

设 $a_i<b_i$, $i=1,2,\cdots,k$, R^k 中坐标满足不等式 $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 的一切 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 所成的集叫做一个 k-方格. 1-方格就是闭区间，2-方格就是矩形，等等.

设 $\mathbf{x}\in R^k$ 而 $r>0$. R^k 中满足条件 $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<r$（或 $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|\leqslant r$）的一切点 $\mathbf{y}$ 的集 B，叫做中心在 $\mathbf{x}$ 点，半径为 r 的开（或闭）球.

集 $E\subset R^k$ 叫做凸的，如果每当 $\mathbf{x}\in E$, $\mathbf{y}\in E$, 而且 $0<\lambda<1$ 时，就有

$$\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\in E.$$

例如，球都是凸集. 因为，如果 $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<r$, $|\mathbf{z}-\mathbf{x}|<r$, 又 $0<\lambda<1$, 那么

$$|\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z}-\mathbf{x}|=|\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})+(1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x})|$$
$$\leqslant\lambda|\mathbf{y}-\mathbf{x}|+(1-\lambda)|\mathbf{z}-\mathbf{x}|<\lambda r+(1-\lambda)r=r.$$

这证法也可以用于闭球. 容易知道 k-方格也是凸集.

2.18 定义 设 X 是一个度量空间，下面提到的一切点和一切集，都理解为 X 的点和集.

(a) 点 p 的邻域 $N_r(p)$ 指的是满足条件 $d(p,q)<r$ 的一切点 q 所成的集. 数 r 叫做 $N_r(p)$ 的半径.

(b) 点 p 叫做集 E 的极限点，如果 p 的每个邻域都含有一点 $q\in E$ 而 $q\neq p$.

(c) 如果 $p\in E$ 并且 p 不是 E 的极限点，那么，p 就叫做 E 的孤立点.

(d) E 叫做闭的，如果E的每个极限点都是E的点.

(e) 点 p 叫做 E 的一个内点，如果存在 p 的一个邻域 N，有 $N\subset E$.

(f) E 叫做开的，如果E的每个点都是E的内点.

(g) E 的余集（记作 E^c）指的是一切合于 $p\in X$ 及 $p\notin E$ 的点 p 的集.

(h) E 叫做完全的，如果E是闭集，并且E的每个点都是E的极限点.

(i) E 叫做有界的，如果有一个实数M和一个点 $q\in X$，使得一切 $p\in E$ 都满足 $d(p, q)<M$.

(j) E 叫做在X中稠密，如果X的每个点或是E的极限点，或是E的点（或兼此二者）.

我们注意，在 R^1 里，邻域就是开区间，而在 R^2 里，邻域就是圆的内部.

2.19 定理 邻域必是开集.

证 试看一个邻域 $E=N_r(p)$，令 q 是E的任意一点. 于是有一正实数 h，使得

$$d(p, q)=r-h.$$

对于一切适合条件 $d(q, s)<h$ 的点 s，我们有

$$d(p, s)\leqslant d(p, q)+d(q, s)<r-h+h=r,$$

所以 $s\in E$. 因此，q 是E的内点.

2.20 定理 如果 p 是集E的一个极限点，那么 p 的每个邻域含有E的无限多个点.

证 假设有 p 的某个邻域 N 只含有 E 的有限多个点. 令 $q_1, \cdots, q_n$ 是 $N\cap E$ 中这有限个异于 p 的点.

又令

$$r=\min_{1\leqslant m\leqslant n} d(p, q_m)$$

[我们用这个记号表示 $d(p, q_1), \cdots, d(p, q_n)$ 中最小的那个数]. 有限个正数中的最小数显然是正的，所以 $r>0$.

邻域 $N_r(p)$ 不能再含有 E 的点 q 而 $q \neq p$ 的了. 所以 p 不是 E 的极限点. 这是个矛盾. 定理得证.

推论 有限的点集没有极限点.

2.21 例 我们考虑下列 R^2 的子集:

(a) 满足条件 $|z|<1$ 的一切复数 z 的集.

(b) 满足条件 $|z| \leqslant 1$ 的一切复数 z 的集.

(c) 一个有限集.

(d) 一切整数的集.

(e) 由数 $1/n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) 所组成的集. 我们注意这个集 E 有一个极限点(即 $z=0$)，然而 E 中没有一个点是 E 的极限点：我们应当重视"有极限点"和"含有极限点"的不同.

(f) 一切复数的集(即 R^2).

(g) 开区间 (a, b).

注意(d), (e), (g)还可以看作 R^1 的子集.

这些集的某些性质表列如下:

	闭	开	完全	有界
(a)	否	是	否	是
(b)	是	否	是	是
(c)	是	否	否	是
(d)	是	否	否	否
(e)	否	否	否	是
(f)	是	是	是	否
(g)	否		否	是

在(g)里，我们把第二栏空了起来. 这是因为如果认为开区间 (a, b) 是 R^2 的子集，便不是开集，然而它是 R^1 的开子集.

2.22 定理 设 $\{E_\alpha\}$ 是若干(有限个或无限多个)集 E_α 的一个组. 那么

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c=\bigcap_\alpha (E_\alpha^c). \tag{20}$$

证 令 A 和 B 分别表示(20)的左端和右端. 如果 $x\in A$, 那么 $x\notin\bigcup_\alpha E_\alpha$. 因此对于任意 α, $x\notin E_\alpha$, 从而对任意 α, $x\in E_\alpha^c$, 所以 $x\in\bigcap_\alpha E_\alpha^c$. 即 $A\subset B$.

反过来, 如果 $x\in B$, 那么对于每个 α, $x\in E_\alpha^c$, 从而对每个 α, $x\notin E_\alpha$. 因此, $x\notin\bigcup_\alpha E_\alpha$. 即 $x\in\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c$. 于是 $B\subset A$.

这就证明了 $A=B$.

2.23 定理 E 是开集当且仅当它的余集是闭集.

证 首先设 E^c 是闭集. 取 $x\in E$. 那么 $x\notin E^c$. x 也不能是 E^c 的极限点. 于是 x 有一个邻域 N 使得 $E^c\cap N$ 是空集. 这就是说, $N\subset E$. 所以 x 是 E 的内点, 从而 E 是开的.

其次, 设 E 是开集. 令 x 是 E^c 的一个极限点. 那么 x 的每个邻域含有 E^c 的点. 所以 x 不是 E 的内点. 因为 E 是开集, 这就是说 $x\in E^c$. 因此, E^c 是闭集.

推论 F 是闭集当且仅当 F 的余集是开集.

2.24 定理

(*a*) 任意一组开集 $\{G_\alpha\}$ 的并 $\bigcup_\alpha G_\alpha$ 是开集.

(*b*) 任意一组闭集 $\{F_\alpha\}$ 的交 $\bigcap_\alpha F_\alpha$ 是闭集.

(*c*) 任意一组有限个开集 $G_1,\cdots,G_n$ 的交 $\bigcap_{i=1}^n G_i$ 是开集.

(*d*) 任意一组有限个闭集 $F_1,\cdots,F_n$ 的并 $\bigcup_{i=1}^n F_i$ 是闭集.

证 令 $G=\bigcup_{\alpha} G_\alpha$. 如果 $x\in G$, 就有某个 α, 使得 $x\in G_\alpha$. 因为 x 是 G_α 的一个内点，所以 x 也是 G 的内点，从而 G 是开集. 这就证明了(a).

根据定理 2.22

$$\left(\bigcap_{\alpha} F_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha}(F_\alpha^c), \tag{21}$$

而由定理 2.23，F_α^c 是开集. 因此由(a)知道(21)是开集，从而 $\bigcap_{\alpha} F_\alpha$ 是闭集.

其次，设 $H=\bigcap_{i=1}^{n} G_i$. 对于任意 $x\in H$，存在 x 的邻域 N_i，其半径为 r_i，使得 $N_i\subset G_i(i=1,2,\cdots,n)$. 令

$$r=\min(r_1,\cdots,r_n),$$

又令 N 是 x 的以 r 为半径的邻域. 于是对于 $i=1,\cdots,n$，$N\subset G_i$，从而 $N\subset H$，所以 H 是开集.

通过取余集，就可以由(c)得出(d)来:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n}(F_i^c).$$

2.25 例 在前面定理的(c)和(d)里，两个组的有限性是必不可少的. 例如令 G_n 是开区间 $\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)(n=1,2,3,\cdots)$，那么 G_n 是 R^1 的开子集. 令 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. 那么 G 仅由一点（即 $x=0$）组成，因而不是 R^1 的开子集.

因此，一组无限多个开集的交不一定是开集. 同理，一组无限多个闭集的并不一定是闭集.

2.26 定义 设 X 是度量空间，如果 $E\subset X$，E' 表示 E 在 X 中所有极限点组成的集. 那么，把 $\bar{E}=E\cup E'$ 叫做 E 的闭包.

2.27 定理 设 X 是度量空间，而 $E\subset X$，那么

(a) $\bar{E}$ 闭

(b) $E=\bar{E}$ 当且仅当 E 闭

(c) 如果闭集 $F\subset X$ 且 $E\subset F$, 那么 $\bar{E}\subset F$.

由(a)和(c), $\bar{E}$ 是 X 中包含 E 的最小闭子集.

证

(a) 如果 $p\in X$ 而 $p\notin\bar{E}$, 那么 p 既不是 E 的点, 又不是 E 的极限点. 因此, p 有某邻域与 E 不交. 所以 $\bar{E}$ 的余集是开集. 由此, $\bar{E}$ 闭.

(b) 如果 $E=\bar{E}$, (a)就表明 E 闭. 如果 E 闭, 那么 $E'\subset E$(据定义 2.18(d)及 2.26), 由此, $\bar{E}=E$.

(c) 如果 F 闭且 $F\supset E$, 那么 $F\supset F'$, 因此 $F\supset E'$. 于是 $F\supset\bar{E}$.

2.28 定理 设 E 是一个不空实数集, 上有界, 令 $y=\sup E$, 那么 $y\in\bar{E}$. 因此, 如果 E 闭, 那么, $y\in E$.

请与 §1.9 的例比较.

证 如果 $y\in E$, 那么 $y\in\bar{E}$. 设 $y\notin E$, 于是对于每个 $h>0$, 存在 $x\in E$, 使得 $y-h<x<y$. 因若不然, $y-h$ 就是 E 的上界了. 所以 y 是 E 的极限点, 因此 $y\in\bar{E}$.

2.29 评注 设 $E\subset Y\subset X$, 这里 X 是度量空间. 凡当说 E 是 X 的开子集时, 就是说能给每个点 $p\in E$ 配备一个正数 r, 使得 $d(p,q)<r$ 和 $q\in X$ 能保证 $q\in E$. 然而我们已经看到(第 2.16 段) Y 也是度量空间, 所以我们可以照样地在 Y 里作这些规定. 十分明白地说, 如果能给每个 $p\in E$ 配备一个 $r>0$, 凡当 $d(p,q)<r$ 且 $q\in Y$ 时, 就有 $q\in E$, 我们就说 E 关于 Y 是开的. 例 2.21(g)告诉我们, 一个集可以关于 Y 是开的, 然而却不是 X 的开子集. 但是在这两个概念之间有一简单关系, 现在我们就来讲它.

2.30 定理 设 $Y\subset X$, Y 的子集 E 关于 Y 是开的, 当且仅当 X 有某个开子集 G, 使 $E=Y\cap G$.

证 设E关于Y是开集. 那么对于每个$p\in E$, 有正数r_p使得条件$d(p,q)<r_p$与$q\in Y$保证$q\in E$. 令V_p是一切合于$d(p,q)<r_p$的$q\in X$的集, 并定义

$$G=\bigcup_{p\in E}V_p$$

那么根据定理2.19和2.24, G是X的开子集.

因为一切$p\in E$都有$p\in V_p$, 显然$E\subset G\cap Y$.

按照V_p的选取, 对于每个$p\in E$, 我们有$V_p\cap Y\subset E$, 从而$G\cap Y\subset E$. 这样一来, $E=G\cap Y$, 而定理的一半就被证明了.

反过来, 如果G是X的一个开集, 而$E=G\cap Y$, 那么每个$p\in E$有一个邻域$V_p\subset G$. 于是$V_p\cap Y\subset E$, 所以E关于Y是开集.

紧集

2.31 定义 设E是度量空间X里的一个集. E的开覆盖指的是X的一组开子集$\{G_\alpha\}$, 使得$E\subset\bigcup_\alpha G_\alpha$.

2.32 定义 度量空间X的子集K叫做紧的, 如果K的每个开覆盖总含有一个有限子覆盖.

说得更明确一些, 这个要求就是, 如果$\{G_\alpha\}$是K的一个开覆盖, 那么总有有限多个指标$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$使得

$$K\subset G_{\alpha_1}\cup\cdots\cup G_{\alpha_n}.$$

在分析学里, 特别是牵涉到连续性时(第四章), 紧性的概念是极为重要的.

每个有限集显然是紧集. 在R^k中存在很大一类无限的紧集. 这一点将见于定理2.41.

先前(在2.29段)我们说过, 如果$E\subset Y\subset X$, 那么E可能关于Y是开的, 而关于X不是开的. 因此, 集的开与不开全在于被安置的空间. 同样地, 集的闭与不闭也是如此.

然而我们即将看到，紧性表现得较好．为了叙述下一个定理，我们暂时说，如果符合了定义 2.32 的要求，K 就关于 X 是紧的．

2.33 定理 设 $K\subset Y\subset X$．那么 K 关于 X 是紧的当且仅当 K 关于 Y 是紧的．

根据这个定理，在许多场合，我们可以认为紧集本身就是紧度量空间，而不必考虑它是被安置在什么空间内的．特别是谈论开空间或闭空间尽管没什么意义（每个度量空间 X 是它自身的开子集，也是它自身的闭子集）．但是谈论紧度量空间却有意义．

证 设 K 关于 X 是紧的，并且设 $\{V_\alpha\}$ 是一组关于 Y 是开的集，使得 $K\subset \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$. 由定理 2.30，对一切 α，各有关于 X 是开的集 G_α，使得 $V_\alpha=Y\cap G_\alpha$．又因为 K 关于 X 是紧的，我们可以选出有限多个指标 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，使得

$$K\subset G_{\alpha_1}\cup\cdots\cup G_{\alpha_n}. \tag{22}$$

因为 $K\subset Y$，那么(22)意味着

$$K\subset V_{\alpha_1}\cup\cdots\cup V_{\alpha_n}. \tag{23}$$

这就证明了 K 关于 Y 是紧的．

反过来，设 K 关于 Y 是紧的．令 $\{G_\alpha\}$ 是 X 的一组开子集，并且能覆盖 K．令 $V_\alpha=Y\cap G_\alpha$. 那么便能选出若干 α，比如 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，使得(23)成立；又因为 $V_\alpha\subset G_\alpha$，所以(23)成立又意味着(22)成立．

证毕．

2.34 定理 凡度量空间的紧子集都是闭集．

证 设 K 是度量空间 X 的紧子集．我们来证明，K 的余集是 X 的一个开子集．

设 $p\in X, p\notin K$．如果 $q\in K$，令 V_q 和 W_q 分别是 p 和 q 的邻域，它们的半径小于 $\frac{1}{2}d(p, q)$［参看定义 2.18(a)］．因为 K 是紧

的. 所以在K中有有限多个点$q_1, q_2, \cdots, q_n$使得

$$K\subset W_{q_1}\cup\cdots\cup W_{q_n}=W.$$

如果令$V=V_{q_1}\cap\cdots\cap V_{q_n}$, 那么$V$是$p$的一个与$W$不相交的邻域. 因此$V\subset K^c$, 从而$p$是$K^c$的一个内点. 于是定理被证明了.

2.35 定理 凡紧集的闭子集都是紧集

证 设$F\subset K\subset X$, F是闭的(关于X), 而K是紧的. 要证明F是紧的. 令$\{V_\alpha\}$是F的一个开覆盖. 如果将F^c添加到$\{V_\alpha\}$里, 我们就得到K的一个开覆盖Ω. 因为K是紧的, 所以有Ω的一个有限子组Φ能盖住K, 从而也能盖住F. 如果F^c是Φ里的成员, 我们把它从Φ里去掉, 剩下的仍是F的一个开覆盖. 这就证明了存在$\{V_\alpha\}$的一个有限子组盖住了F.

推论 如果F是闭的而K是紧的, 那么$F\cap K$是紧的.

证 定理2.24(*b*)与2.34表明$F\cap K$是闭的, 因$F\cap K\subset K$, 由定理2.35, $F\cap K$是紧集.

2.36 定理 如果$\{K_\alpha\}$是度量空间X的一组紧子集, 并且$\{K_\alpha\}$中任意有限个集的交都不是空集, 那么$\cap K_\alpha$也不是空集.

证 取定$\{K_\alpha\}$的一个集K_1, 令$G_\alpha=K_\alpha^c$. 假定K_1中没有同时属于每个K_α的点, 那么集G_α便形成K_1的一个开覆盖. 因为K_1是紧的, 所以有有限多个指标$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 使$K_1\subset G_{\alpha_1}\cup\cdots\cup G_{\alpha_n}$, 然而这意味着

$$K_1\cap K_{\alpha_1}\cap\cdots\cap K_{\alpha_n}$$

是空集. 与题设矛盾.

推论 设$\{K_n\}$是非空紧集的序列并且$K_n\supset K_{n+1}$($n=1, 2, 3, \cdots$), 那么$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$是非空的.

2.37 定理 设E是紧集K的无限子集. 那么E在K中有极限点.

证 如果K里没有E的极限点，那么每个$q\in K$将有一个邻域V_q，它最多含有E的一个点(如果$q\in E$，这就是q). 显然，没有$\{V_\alpha\}$的有限子组能够盖住E；对于K也一样，这因为$E\subset K$. 这与K的紧性矛盾.

2.38 定理 设$\{I_n\}$是R^1中的闭区间序列，并且$I_n\supset I_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 那么$\bigcap_1^\infty I_n$不是空集.

证 设$I_n=[a_n, b_n]$. 令E是一切a_n所成的集. 那么E是非空的且上有界(b_1是一个上界). 令$x=\sup E$. 如果m和n是正整数，那么

$$a_n\leqslant a_{m+n}\leqslant b_{m+n}\leqslant b_m,$$

从而对于每个m, $x\leqslant b_m$. 因为显然$a_m\leqslant x$，所以$x\in I_m$，这里$m=1,2,3,\cdots$.

2.39 定理 设k是正整数. 如果$\{I_n\}$是k-方格的序列，并且$I_n\supset I_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，那么$\bigcap_1^\infty I_n$不是空集.

证 设I_n由一切满足条件

$$a_{n,j}\leqslant x_j\leqslant b_{n,j}\quad(1\leqslant j\leqslant k;n=1,2,3,\cdots)$$

的点$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_k)$组成. 又令$I_{n,j}=[a_{n,j}, b_{n,j}]$. 对于每个$j$，序列$\{I_{n,j}\}$满足定理2.38的题设条件. 因此存在实数$x_j^*(1\leqslant j\leqslant k)$使得

$$a_{n,j}\leqslant x_j^*\leqslant b_{n,j}\quad(1\leqslant j\leqslant k;n=1,2,3,\cdots).$$

令$\mathbf{x}^*=(x_1^*, \cdots, x_k^*)$，那么$x^*\in I_n$，这里$n=1, 2,3,\cdots$. 定理被证明了.

2.40 定理 每个k-方格是紧集.

证 令I是k-方格，它由一切满足条件$a_j\leqslant x_j\leqslant b_j(1\leqslant j\leqslant k)$的点$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_k)$组成. 令

$$\delta=\left\{\sum_{1}^{k}(b_j-a_j)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

于是当 $\mathbf{x}\in I, \mathbf{y}\in I$ 时，$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leqslant\delta$.

为了得出矛盾，假定存在 I 的一个开覆盖$\{G_\alpha\}$，它不含 I 的任何有限子覆盖. 令 $c_j=(a_j+b_j)/2$. 那么闭区间$[a_j,c_j]$和$[c_j,b_j]$确定 2^k 个 k-方格 Q_i，这些方格的并就是 I. 集 Q_i 中至少有一个，叫它做 I_1，不能被$\{G_\alpha\}$的任何子组盖住(否则 I 也将被$\{G_\alpha\}$的一个子组所盖住). 再分 I_1，并且继续这样分下去，我们得到一个序列$\{I_n\}$，它具有以下的性质:

(a) $I\supset I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$;

(b) I_n 不能被$\{G_\alpha\}$的任何子组盖住;

(c) 如果 $\mathbf{x}\in I_n, \mathbf{y}\in I_n$，那么 $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leqslant 2^{-n}\delta$.

根据(a)和定理 2.39，存在一点 $\mathbf{x}^*$，它在每个 I_n 之内. 对于某个 α，$\mathbf{x}^*\in G_\alpha$. 因为 G_α 是开的，所以存在着一个 $r>0$，使得由 $|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*|<r$ 可推出 $\mathbf{y}\in G_\alpha$. 如果 n 大到了出现 $2^{-n}\delta<r$ 的时候，(这样的 n 一定存在，否则将对一切正整数 n，$2^n\leqslant\delta/r$，由 R 的阿基米德性，这是不可能的)，因此，(c)就暗示着 $I_n\subset G_\alpha$. 这与(b)矛盾.

证毕.

下一定理中(a)和(b)的等价性就是有名的 Heine-Borel 定理.

2.41 定理 如果 R^k 中一个集 E 具有下列三性质之一，那么它也具有其它两个性质.

(a) E 是闭且有界的.

(b) E 是紧的.

(c) E 的每个无限子集在 E 内有极限点.

证 如果(a)成立，这时有某个 k-方格 I 使 $E\subset I$. 于是由定

理 2.40 和 2.35 推得(b)成立. 根据定理 2.37, 由(b)即得(c). 剩下要证明的是由(c)可得出(a).

如果E不是有界的, 那么E会有一些点$\boldsymbol{x}_n$合于

$$|\boldsymbol{x}_n|>n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

由这些$\boldsymbol{x}_n$所组成的集S是一个无限集, 并且显然在R^k中没有极限点, 因而在E中没有极限点. 于是由(c)就得出E是有界的.

如果E不是闭集, 那么存在一点$\boldsymbol{x}_0\in R^k$, 它是E的极限点, 但不在E内. 对于$n=1, 2, 3, \cdots$, 存在点$\boldsymbol{x}_n\in E$, 使得$|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0|<\frac{1}{n}$. 令$S$是这些$\boldsymbol{x}_n$所成的集. 那么$S$是无限集(不然的话, $|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0|$将要对于无限多个$n$, 取一个固定的正值). S以$\boldsymbol{x}_0$为极限点并且S在R^k中没有其它的极限点. 事实上, 如果$\boldsymbol{y}\in R^k$、$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}_0$, 那么除了有限几个$n$以外,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}|&\geqslant|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}|-|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0|\\&\geqslant|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}|-\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}|,\end{aligned}$$

这就证明了$\boldsymbol{y}$不是S的极限点(定理 2.20).

这样一来, S在E里没有极限点. 因此, 如果(c)成立, 那么E一定是闭集.

在这一点上我们应当注意, 在任何度量空间里, (b)和(c)是等价的(习题 26). 然而一般说来, (a)不能推出(b)和(c)来. 习题 16 和第十一章讨论的空间$\mathscr{L}^2$将提供这样的例子.

2.42 定理(Weierstrass) R^k中每个有界无限子集在R^k中有极限点.

证 所说的这个集E既然有界, 必是一个k-方格$I\subset R^k$的子集. 由定理 2.40, I是紧集. 从而由定理 2.37, E在I里有极限点.

完全集

2.43 定理 令 P 是 R^k 中的非空完全集. 那么 P 是不可数的.

证 因为 P 有极限点, 所以 P 是无限集. 如果 P 是可数的, 将 P 的点记作 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\cdots$. 我们按下面的方式构造一个邻域序列 $\{V_n\}$.

令 V_1 是 $\mathbf{x}_1$ 的任意一个邻域. 如果 V_1 由能使 $|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1|<r$ 的一切 $\mathbf{y}\in R^k$ 组成, V_1 的闭包 $\overline{V}_1$ 就是由 $|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1|\leqslant r$ 的一切 $\mathbf{y}$ 组成的集.

假定已经作出了 V_n, 那么 $V_n\cap P$ 非空. 因为 P 的每个点都是 P 的极限点, 所以存在一个邻域 V_{n+1}, 使得 (i) $\overline{V}_{n+1}\subset V_n$, (ii) $\mathbf{x}_n\notin\overline{V}_{n+1}$, (iii) $V_{n+1}\cap P$ 非空. 由(iii)来看, V_{n+1} 满足归纳法的假设, 因此, 这种构造法可以继续进行.

令 $K_n=\overline{V}_n\cap P$. 因为 $\overline{V}_n$ 是有界闭集, 所以 $\overline{V}_n$ 是紧集. 因为 $\mathbf{x}_n\notin K_{n+1}$, 所以 $\bigcap\limits_1^\infty K_n$ 里没有 P 的点. 因为 $K_n\subset P$, 这意味着 $\bigcap\limits_1^\infty K_n$ 是空集. 然而由(iii), 每个 K_n 不空, 并且由(i), $K_n\supset K_{n+1}$; 这与定理 2.36 的推论相矛盾.

推论 每个闭区间 $[a, b]$ $(a<b)$ 是不可数的. 特别, 一切实数的集是不可数的.

2.44 Cantor 集 我们将要构造出的这个集表明, 在 R^1 中确有不包含开区间的完全集.

令 E_0 是闭区间 $[0, 1]$. 去掉开区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 并令 E_1 是闭区间

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \qquad \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

的并．将这两个闭区间都三等分，并去掉中间的那个开区间．令 E_2 是闭区间

$$\left[0,\frac{1}{9}\right],\quad \left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right],\quad \left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right],\quad \left[\frac{8}{9},1\right]$$

的并．按照这个方式进行下去，就得到紧集 E_n 的一个序列，显然

(a) $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$;

(b) E_n 是 2^n 个闭区间的并．每个闭区间的长度是 3^{-n}.

集

$$P=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$$

叫做 Cantor 集．P 显然是紧的，并且定理 2.36 表明，P 不是空集．

如果 k 和 m 都是正整数，那么没有一个形式为

$$\left(\frac{3k-1}{3^m},\ \frac{3k+2}{3^m}\right) \tag{24}$$

的开区间能够和 P 有公共点．因为每个开区间 $(\alpha,\ \beta)$，一定含有 (24) 那样的开区间，只要

$$3^{-m}<\frac{\beta-\alpha}{6},$$

所以 P 不能含开区间．

要想证明 P 完全，只要证明 P 里没有孤立点就行了．令 $x\in P$，而 S 是包含 x 的任意一个开区间．令 I_n 是 E_n 中包含 x 的那个闭区间，选择足够大的 n，使得 $I_n\subset S$．令 x_n 是 I_n 的那个不等于 x 的端点．

从构造 P 的方法知道 $x_n\in P$．因此 x 是 P 的一个极限点，从而 P 是完备的．

Cantor 集的一个非常有趣的性质是，它给我们提供了一个测度为零的不可数集的例子（测度的概念将在第十一章里讨论）．

连通集

2.45 定义 设 A, B 是度量空间 X 的两个子集. 如果 $A\cap\bar{B}$ 及 $\bar{A}\cap B$ 都是空集，即如果 A 的点不在 B 的闭包中，B 的点也不在 A 的闭包中，就说 A 和 B 是分离的.

如果集 $E\subset X$ 不是两个不空分离集的并，就说 E 是连通集.

2.46 评注 分离的两个集当然是不相交的，但不相交的集不一定是分离的. 例如闭区间 $[0,1]$ 与开区间 $(1,2)$ 不是分离的，因为 1 是 $(1,2)$ 的极限点. 然而，开区间 $(0,1)$ 与开区间 $(1,2)$ 是分离的.

直线的连通子集的结构特别简单：

2.47 定理 实数轴 R^1 的子集 E 是连通的，当且仅当它有以下的性质：如果 $x\in E$, $y\in E$, 并且 $x<z<y$, 那么 $z\in E$.

证 假如存在 $x\in E$, $y\in E$, 及某个 $z\in(x, y)$ 而 $z\notin E$, 那么 $E=A_z\cup B_z$, 这里

$$A_z=E\cap(-\infty, z), \qquad B_z=E\cap(z, \infty).$$

因 $x\in A_z$, $y\in B_z$, A, B 都不空. 因 $A_z\subset(-\infty, z)$, $B_z\subset(z,\infty)$, 它们是分离的. 由此，E 不是连通的了.

反过来，假设 E 不连通，那么，E 就等于某两个不空分离集 A, B 的并：$E=A\cup B$. 取 $x\in A$, $y\in B$, 假定 $x<y$ (这不失一般性). 定义

$$z=\sup(A\cap[x,y]).$$

据定理 2.28, $z\in\bar{A}$; 因之 $z\notin B$. 特别有 $x\leqslant z<y$.

如果 $z\notin A$, 那么 $x<z<y$ 而 $z\notin E$.

如果 $z\in A$, 那么 $z\notin\bar{B}$, 因之存在 z_1 使 $z<z_1<y$ 且 $z_1\notin B$. 于是 $x<z_1<y$ 而 $z_1\notin E$.

习题

1. 证明空集是任何集的子集.

2. 如果存在不全是零的整数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$, 而复数 z 满足

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

就说 z 是一个代数数. 证明,所有代数数构成可数集.

提示: 对于每个正整数 N, 满足条件

$$n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = N$$

的方程, 只有有限个.

3. 证明: 存在不是代数数的实数.

4. 问: 所有无理实数组成的集是否可数?

5. 作一个实数的有界集, 使它有三个极限点.

6. 令 E' 是集 E 的一切极限点的集. 证明 E' 是闭集. 证明 E 与 $\bar{E}$ 有相同的极限点, (回想 $\bar{E} = E \cup E'$). E 与 E' 是否总有相同的极限点呢?

7. 令 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 是某度量空间的子集.

(a) 如果 $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, 证明 $\bar{B}_n = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$, $n = 1, 2, 3, \cdots$.

(b) 如果 $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 证明 $\bar{B} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$.

举例表明这个包含号能够是真正的包含.

8. 是否每个开集 $E \subset R^2$ 的每个点一定是 E 的极限点? 对 R^2 中的闭集如何呢?

9. 令 E° 表集 E 的所有内点组成的集. [看定义 2.18(e); E° 叫做 E 的内部]

(a) 证明 E° 是开集.

(b) 证明: E 是开集当且仅当 $E^\circ = E$.

(c) 如果 $G \subset E$ 且 G 开, 证明 $G \subset E^\circ$.

(d) 证明 E° 的余集是 E 的余集的闭包.

(e) E 的内部与 $\bar{E}$ 的内部是否总一样?

(f) E 的闭包与 E° 的闭包是否总一样?

10. 设 X 是无穷集. 对于 $p \in X, q \in X$, 定义

$$d(p,q)=\begin{cases}1 & (\text{如果 } p\neq q)\\ 0 & (\text{如果 } p=q)\end{cases}$$

证明这是一个度量．由此所得的度量空间的哪些子集是开集？哪些是闭集？哪些是紧集？

11．对 $x\in R^1$ 及 $y\in R^1$，定义

$$d_1(x,y)=(x-y)^2,$$

$$d_2(x,y)=\sqrt{|x-y|},$$

$$d_3(x,y)=|x^2-y^2|,$$

$$d_4(x,y)=|x-2y|,$$

$$d_5(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

其中哪些是度量？哪些不是？

12．设 $K\subset R^1$ 是由 0 及诸数 $1/n(n=1,2,3,\cdots)$ 组成的集．由定义直接证明(不用 Heine-Borel 定理) K 是紧集．

13．作一个实数的紧集，使它的极限点构成一个可数集．

14．给开区间 $(0,1)$ 造一个没有有限子覆盖的开覆盖的实例．

15．证明：如果把"紧的"这个词换成"闭的"或"有界的"，那么定理 2.36 和它的推论都不成立．(例如，在 R^1 里)．

16．把所有有理数组成的集 Q 看成度量空间，而以 $d(p,q)=|p-q|$．令 E 是所有满足 $2<p^2<3$ 的 $p\in Q$ 组成的集，证明 E 是 Q 中的有界闭集，但 E 不是紧集．E 是否为 Q 中的开集？

17．令 E 是所有 $x\in[0,1]$，其十进小数展开式中只有数码 4 和 7 者．E 是否可数？E 是否在 $[0,1]$ 稠密？E 是否紧？E 是否完全？

18．R^1 中是否存在不含有理数的不空完全集？

19．(*a*) 令 A 及 B 是某度量空间 X 中的不交闭集，证明它们是分离的．

(*b*) 证明不交开集也是分离的．

(*c*) 固定 $p\in X,\delta>0$，定义 A 为由满足 $d(p,q)<\delta$ 的一切 $q\in X$ 组成的集，而 B 为满足 $d(p,q)>\delta$ 的一切 $q\in X$ 组成的集．证明 A 与 B 是分离的．

(*d*) 证明至少含有两个点的连通度量空间，是不可数的．提示：用(*c*)．

20．连通集的闭包和连通集的内部是否总是连通集？(察看 R^2 的子集)．

21．令 A 及 B 是某个 R^k 的分离子集，设 $\mathbf{a}\in A$，$\mathbf{b}\in B$，且对 $t\in R^1$ 定义

$$p(t)=(1-t)a+tb,$$

命 $A_0=p^{-1}(A)$, $B_0=p^{-1}(B)$ [于是, $t\in A_0$ 当且仅当 $p(t)\in A$].

(*a*) 证明 A_0 与 B_0 是 R^1 中的分离子集.

(*b*) 证明存在 $t_0\in(0,1)$ 使得 $p(t_0)\notin A\cup B$.

(*c*) 证明 R^k 的凸子集是连通集.

22. 含有可数稠密子集的度量空间叫做可分的. 证明 R^k 是可分的空间. 提示: 考虑坐标都是有理数的点组成的集.

23. X 的一组开子集 $\{V_\alpha\}$ 叫做 X 的一个基, 如果以下的事实成立: 对于每个 $x\in X$ 和 X 的每个含 x 的开集 G, 总有某个 α 使得 $x\in V_\alpha\subset G$. 换句话说, X 的每个开集必是 $\{V_\alpha\}$ 中某些集的并.

证明每个可分度量空间有可数基. 提示: 取一切这样的邻域, 它的中心在 X 的某个可数稠密集内, 而它的半径是有理数.

24. 令 X 是个度量空间, 其中每个无限子集有极限点. 证明 X 是可分的. 提示: 固定 $\delta>0$, 再取 $x_1\in X$. 如果 $x_1,\cdots,x_j\in X$ 都已选定, 假如可能的话, 就选取 $x_{j+1}\in X$, 使得 $d(x_i,x_{j+1})\geqslant\delta$, 这里的 $i=1,\cdots,j$. 证明这种手续作有限多次后必然终止, 因而 X 能被有限多个半径为 δ 的邻域盖住. 取 $\delta=1/n$, $(n=1,2,\cdots)$, 并考虑相应的邻域的中心.

25. 证明紧度量空间 K 有可数基, 因此 K 必是可分的. 提示: 对于每个正整数 n, 存在着有限个半径为 $1/n$ 的邻域, 它们的并覆盖了 K.

26. 设 X 是这样一个度量空间, 其中每个无限子集有极限点. 证明 X 是紧的. 提示: 由习题 23 及 24, X 有可数基. 因此 X 的每个开覆盖必有可数子覆盖 $\{G_n\}$, $n=1,2,3,\cdots$. 如果没有 $\{G_n\}$ 的有限子组能够覆盖 X, 那么 $G_1\cup\cdots\cup G_n$ 的余集 F_n 不空. 然而 $\bigcap F_n$ 是空集. 如果 E 是这样的集, 它含有每个 F_n 的一个点, 考察 E 的一个极限点, 就得出了矛盾.

27. 度量空间 X 中的点 p 叫做 $E\subset X$ 的凝点, 假如 p 的每个邻域含有 E 的不可数无穷多个点.

设 $E\subset R^k$ 且 E 不可数. 命 P 为 E 的所有凝点的集. 证明 P 完全, 并且 E 中最多有可数多个点不在 P 中. 换句话说, 证明 $P^c\cap E$ 最多可数. 提示: 令 $\{V_n\}$ 是 R^k 的可数基, 而令 W 是这样一些 V_n 的并: 对于它们, $E\cap V_n$ 至多可数, 而来证明 $P=W^c$.

28. 证明, 可分度量空间里的每个闭子集是一个完全集(也可能是空集)和一个至多可数集的并. (推论: R^k 中每个可数闭集必有孤立点). 提示:

用习题 27.

29. 证明: R^1 中的每个开集是至多可数个不相交的开区间的并. 提示: 利用习题 22.

30. 仿照定理2.43的证明推出以下结果:

如果 $R^k=\bigcup_1^\infty F_n$, 这里 F_n 是 R^k 的闭子集, 那么, 至少有一个 F_n 具有非空的内部.

等价的表述: 如果 G_n 是 R^k 的稠密开子集, $n=1,2,\cdots$, 那末 $\bigcap_1^\infty G_n$ 不空(实际上它在 R^k 中稠密).

(这是 Baire 定理的一个特殊情形; 关于一般情形, 参看第三章习题 22).

第三章　数列与级数

这章的标题说明，这里将要初步地讨论复数的序列和级数. 然而关于收敛性的基本事实，即使在更一般的情况下阐述，也同样地容易. 所以前三节就在欧几里得空间，甚至在度量空间里讲了.

收敛序列

3.1　定义　度量空间 X 中的序列 $\{p_n\}$ 叫做收敛的，如果有一个有下述性质的点 $p\in X$：对于每个 $\varepsilon>0$，有一个正整数 N，使得 $n\geqslant N$ 时，$d(p_n, p)<\varepsilon$（这里 d 表示 X 中的距离）.

这时候，我们也说 $\{p_n\}$ 收敛于 p，或者说 p 是 $\{p_n\}$ 的极限[参看定理 3.2(b)]，并且写作 $p_n\to p$，或

$$\lim_{n\to\infty} p_n=p.$$

如果 $\{p_n\}$ 不收敛，便说它发散.

这"收敛序列"的定义不仅依赖于 $\{p_n\}$，而且依赖于 X，指明这一点很有好处；例如，序列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 在 R^1 里收敛（于 0），而在一切正实数的集里（取 $d(x, y)=|x-y|$）不收敛. 在可能发生怀疑的时候，我们宁愿明确而详细地说"在 X 中收敛"而不说"收敛".

我们记得，一切点 $p_n(n=1, 2, 3, \cdots)$ 的集是 $\{p_n\}$ 的值域，序列的值域可以是有限的，也可以是无限的. 如果它的值域是有界的，就说序列 $\{p_n\}$ 是有界的.

作为例题，我们来审辨一下下边的复数序列（即 $X=R^2$）.

(a) 如果 $s_n=1/n$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=0$；值域是无限的，但序列是

有界的.

(b) 如果 $s_n=n^2$, 那么序列$\{s_n\}$无界, 发散, 而值域是无限的.

(c) 如果 $s_n=1+[(-1)^n/n]$, 那么序列$\{s_n\}$收敛于 1, 有界而且值域是无限的.

(d) 如果 $s_n=i^n$, 那么序列$\{s_n\}$发散, 有界, 而值域是有限的.

(e) 如果 $s_n=1(n=1, 2, 3, \cdots)$那么$\{s_n\}$收敛于 1, 有界而且值域是有限的.

现在, 把度量空间中收敛序列的一些重要性质汇集起来.

3.2 定理 设$\{p_n\}$是度量空间X中的序列

(a) $\{p_n\}$收敛于 $p\in X$, 当且仅当 p 点的每个邻域, 能包含$\{p_n\}$的, 除有限项以外的一切项.

(b) 如果 $p\in X$, $p'\in X$, $\{p_n\}$收敛于 p 又收敛于 p', 那么 $p'=p$.

(c) 如果$\{p_n\}$收敛, $\{p_n\}$必有界.

(d) 如果 $E\subset X$, 而 p 是 E 的极限点, 那么在 E 中有一个序列$\{p_n\}$, 使 $p=\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

证 (a) 假定 $p_n\to p$, 并设 V 是 p 点的邻域. 对于某个 $\varepsilon>0$, 条件 $d(q, p)<\varepsilon$, $q\in X$ 意味着 $q\in V$. 对应于这个 ε, 存在着 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时有 $d(p_n, p)<\varepsilon$. 所以 $n\geqslant N$ 就得出 $p_n\in V$.

反过来, 假定 p 点的每个邻域除有限个点外, 包含一切点 p_n. 固定 $\varepsilon>0$, 并设 V 是满足 $d(p, q)<\varepsilon$ 的 $q\in X$ 的集. 根据假定, (对应于这个邻域)存在一个 N, 使得 $n\geqslant N$ 时 $p_n\in V$, 所以 $n\geqslant N$ 时, $d(p_n, p)<\varepsilon$; 这就是说 $p_n\to p$.

(b) 设 $\varepsilon>0$ 已给定, 那么存在正整数 N, N', 使当

$$n\geqslant N \text{ 有 } d(p_n, p)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$n\geqslant N' \text{ 有 } d(p_n, p')<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 如果 $n\geqslant \max(N, N')$, 就有

$$d(p,p')\leqslant d(p,p_n)+d(p_n,p')<\varepsilon.$$

由于数 ε 是任意的，可以断定 $d(p,p')=0$.

(c) 假定 $p_n\to p$. 那么存在着正整数 N，使得当 $n>N$ 有 $d(p_n,p)<1$. 令

$$r=\max\{1,d(p_1,p),\cdots,d(p_N,p)\},$$

那么，当 $n=1,2,3,\cdots$时，$d(p_n,p)\leqslant r$.

(d) 对于每个正整数 n，有点 $p_n\in E$，使 $d(p_n,p)<1/n$. 给定了 $\varepsilon>0$，选取 N，使得 $N\varepsilon>1$. 如果 $n>N$，就得 $d(p_n,p)<\varepsilon$. 因此 $p_n\to p$.

证毕.

对于 R^k 中的序列，我们可以研究收敛性与代数运算之间的关系. 首先考虑复数序列.

3.3 定理 假定$\{s_n\}$，$\{t_n\}$是复数序列，而且 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t$. 那么

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n+t_n)=s+t$;

(b) 对于任何数 c，$\lim\limits_{n\to\infty}cs_n=cs$，$\lim\limits_{n\to\infty}(c+s_n)=c+s$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}s_nt_n=st$;

(d) 只要 $s_n\neq0\ (n=1,2,3,\cdots)$且 $s\neq0$，就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{s_n}=\dfrac{1}{s}$.

证 (a) 给定了 $\varepsilon>0$，存在着正整数 N_1,N_2 使得

$$n\geqslant N_1 \text{ 时，}\quad |s_n-s|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$n\geqslant N_2 \text{ 时，}\quad |t_n-t|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

如果 $N=\max(N_1,N_2)$，那么 $n\geqslant N$ 时，便有

$$|(s_n+t_n)-(s+t)|\leqslant|s_n-s|+|t_n-t|<\varepsilon.$$

这就证明了(a). 至于(b)的证明则很容易.

(c) 我们用恒等式

(1) $\qquad s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s).$

给定了 $\varepsilon>0$，存在着正整数 N_1, N_2，使得

$$n\geqslant N_1 \text{ 时} \quad |s_n - s| < \sqrt{\varepsilon},$$

$$n\geqslant N_2 \text{ 时} \quad |t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}.$$

如果取 $N=\max(N_1, N_2)$，那么 $n\geqslant N$ 时就有

$$|(s_n - s)(t_n - t)| < \varepsilon$$

由此

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - s)(t_n - t) = 0.$$

现把 (a) 和 (b) 用于恒等式(1)，就可以断定

$$\lim_{n\to\infty}(s_n t_n - st) = 0$$

(d) 选一个 m，使当 $n\geqslant m$ 时，$|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|$，就知道

$$|s_n| > \frac{1}{2}|s| \quad (n\geqslant m).$$

给定了 $\varepsilon>0$，就存在正整数 N，$N>m$，使得当 $n\geqslant N$ 时

$$|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|^2\varepsilon.$$

因此，当 $n\geqslant N$ 时，

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s_n - s}{s_n s}\right| < \frac{2}{|s|^2}|s_n - s| < \varepsilon.$$

3.4 定理

(a) 假定 $\mathbf{x}_n \in R^k$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 而

$$\mathbf{x}_n = (\alpha_{1,n}, \cdots, \alpha_{k,n}).$$

那么序列 $\{\mathbf{x}_n\}$ 收敛于 $\mathbf{x} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$，当且仅当

(2) $$\lim \alpha_{j,n} = \alpha_j \quad (1\leqslant j\leqslant k).$$

(b) 假定 $\{\mathbf{x}_n\}$，$\{\mathbf{y}_n\}$ 是 R^k 中的序列，$\{\beta_n\}$ 是实数序列，并且 $\mathbf{x}_n\to\mathbf{x}$，$\mathbf{y}_n\to\mathbf{y}$，$\beta_n\to\beta$. 那么

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y},\ \lim \mathbf{x}_n\cdot\mathbf{y}_n = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y},\ \lim_{n\to\infty}\beta_n\mathbf{x}_n = \beta\mathbf{x}.$$

证

(a) 如果 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, 那么, 从 R^k 中范数的定义马上可以推得不等式

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \leqslant |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}|$$

这说明等式(2)成立.

反之, 如果(2)成立, 对应于每个 $\varepsilon > 0$, 有一个正整数 N, 使得 $n \geqslant N$ 时,

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

因此, $n \geqslant N$ 时

$$|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}| = \left\{ \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{j,n} - \alpha_j|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon,$$

所以 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$. 这就证明了($a$)

(b) 可以由(a)和定理 3.3 推出来.

子序列

3.5 定义 设有序列$\{p_n\}$, 取正整数序列$\{n_i\}$, 使 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, 那么序列$\{p_{n_i}\}$便叫做$\{p_n\}$的子序列, 如果$\{p_{n_i}\}$收敛, 就把它的极限叫做$\{p_n\}$的部分极限.

显然, 序列$\{p_n\}$收敛于 p, 当且仅当它的任何子序列收敛于 p. 我们把证明的细节留给读者.

3.6 定理

(a) 如果$\{p_n\}$是紧度量空间 X 中的序列, 那么$\{p_n\}$有某个子序列, 收敛到 X 中的某个点.

(b) R^k 中的每个有界序列含有收敛的子序列.

证

(a) 设 E 是$\{p_n\}$的值域. 如果 E 有限, 那么必有 p 及序列$\{n_i\}$

$(n_1<n_2<n_3<\cdots)$使得:

$$p_{n_1}=p_{n_2}=\cdots=p.$$

显然,这样得到的子序列$\{p_{n_i}\}$收敛于 p.

如果E是无限的,定理 2.37 说明E有极限点 $p\in X$. 选取 n_1 使 $d(p,p_{n_1})<1$. 选定 $n_1,n_2,\cdots,n_{i-1}$ 以后,据定理 2.20 知道一定有正整数 $n_i>n_{i-1}$, 使得 $d(p,p_{n_i})<\frac{1}{i}$. 于是子序列$\{p_{n_i}\}$收敛于 p.

(b) 这由(a)即可得到. 因为定理 2.40 说明 R^k 的每个有界子集必含于 R^k 的一个紧子集中.

3.7 定理 度量空间X里的序列$\{p_n\}$的部分极限组成X的闭子集.

证 设 E^* 是$\{p_n\}$的所有部分极限组成的集, q 是 E^* 的极限点. 现在需要证明 $q\in E^*$.

选 n_1, 使 $p_{n_1}\neq q$(如果没有这样的 n_1, 那么 E^* 只有一个点, 那就没有什么要证的了). 令 $\delta=d(q,p_{n_1})$. 假设已经选好了 $n_1,\cdots,n_{i-1}$, 因为 q 是 E^* 的极限点, 必有 $x\in E^*$, 使 $d(x,q)<2^{-i}\delta$. 因 $x\in E^*$, 必有 $n_i>n_{i-1}$, 使得 $d(x,p_{n_i})<2^{-i}\delta$. 于是对于 $i=1,2,3,\cdots$,

$$d(q,p_{n_i})\leqslant 2^{1-i}\delta.$$

这就是说 $\{p_{n_i}\}$收敛于 q. 因此 $q\in E^*$.

Cauchy 序列

3.8 定义 度量空间X中的序列$\{p_n\}$叫做 Cauchy 序列, 如果对于任何 $\varepsilon>0$ 存在着正整数 N, 只要 $n\geqslant N$ 和 $m\geqslant N$ 便有 $d(p_n,p_m)<\varepsilon$.

在 Cauchy 序列的讨论中,以及在今后出现的其它情况下,下述几何概念是有用的.

3.9 定义 设E是度量空间X的子集,又设S是一切形式为

$d(p,q)$的实数的集，这里 $p\in E, q\in E$. 数 $\sup S$ 叫做 E 的直径，记作 $\operatorname{diam} E$.

如果$\{p_n\}$是 X 中的序列，而 E_N 由点 $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \cdots$组成. 那么，从上边的两个定义来看，显然可以说：$\{p_n\}$是 Cauchy 序列，当且仅当

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam} E_N = 0.$$

3.10 定理

(*a*) 如果E是度量空间X中的集，$\bar{E}$是E的闭包，那么

$$\operatorname{diam} \bar{E} = \operatorname{diam} E.$$

(*b*) 如果$\{K_n\}$是X中的紧集的序列，并且 $K_n\supset K_{n+1}(n=1, 2, 3, \cdots)$，又若

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} K_n = 0.$$

那么$\bigcap\limits_1^\infty K_n$由一个点组成.

证

(*a*) 因为$E\subset \bar{E}$，显然

$$\operatorname{diam} E \leqslant \operatorname{diam} \bar{E}$$

固定了 $\varepsilon>0$，再取 $p\in\bar{E}, q\in\bar{E}$. 根据 $\bar{E}$ 的定义，必然在E中有两点 p', q' 使得 $d(p,p')<\varepsilon, d(q,q')<\varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned} d(p,q) &\leqslant d(p,p') + d(p',q') + d(q'q) \\ &< 2\varepsilon + d(p',q') \leqslant 2\varepsilon + \operatorname{diam} E. \end{aligned}$$

可见 $\operatorname{diam} \bar{E} \leqslant 2\varepsilon + \operatorname{diam} E$，又因为 ε 是任意的，所以 (*a*) 被证明了.

(*b*) 令 $K=\bigcap\limits_{n=1}^\infty K_n$. 根据定理 2.36, K不空. 如果K不只包含一个点，那就得 $\operatorname{diam} K>0$. 然而对于每个 n，有 $K_n\supset K$，从而

diam $K_n \geqslant$ diam K. 这与假设条件 diam$K_n \to 0$ 矛盾.

3.11 定理

(*a*) 在度量空间中,收敛序列是 Cauchy 序列.

(*b*) 如果 X 是紧度量空间,并且如果 $\{p_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列,那么 $\{p_n\}$ 收敛于 X 的某个点.

(*c*) 在 R^k 中,每个 Cauchy 序列收敛.

注: 收敛的定义与 Cauchy 序列定义之间的差别是, 前者明显地含有极限,而后者则不然.于是定理 3.11(*b*) 可以使我们断定已知序列是否收敛,而不需知道它要收敛的极限.

定理 3.11 中的第三条即是 R^k 中的序列收敛, 当且仅当它是 Cauchy 序列;时常叫做判断收敛的 Cauchy 准则.

证

(*a*) 若 $p_n \to p$ 且 $\varepsilon > 0$,便有正整数 N,保证只要 $n \geqslant N$, 便有 $d(p, p_n) < \varepsilon$. 因此,只要 $n \geqslant N$ 且 $m \geqslant N$

$$d(p_n, p_m) \leqslant d(p_n, p) + d(p, p_m) < 2\varepsilon.$$

于是 $\{p_n\}$ 是 Cauchy 序列.

(*b*) 设 $\{p_n\}$ 是紧空间 X 中的 Cauchy 序列, 对于 $N = 1, 2, 3, \cdots$,令 E_N 是由 $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \cdots$ 组成的集. 那么,按定义 3.9 及定理 3.10(*a*),

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{diam} \bar{E}_N = 0. \tag{3}$$

每个 $\bar{E}_N$ 既是紧空间的闭子集, 因而必是紧集(定理 2.35). 又因为 $E_N \supset E_{N+1}$, 所以 $\bar{E}_N \supset \bar{E}_{N+1}$.

根据定理3.10(*b*),在 X 中有唯一的 p 在每个 $\bar{E}_N$ 中.

设给定了 $\varepsilon > 0$. 据(3),有整数 N_0,凡当 $N \geqslant N_0$ 的时候,就有 diam $\bar{E}_N < \varepsilon$. 由于 $p \in \bar{E}_N$,所以对每个 $q \in \bar{E}_N$, $d(p, q) < \varepsilon$,当然对每个 $q \in E_N$ 也有 $d(p, q) < \varepsilon$. 换句话说,只要 $n \geqslant N_0$,就 $d(p, p_n) < \varepsilon$. 这正是说 $p_n \to p$.

(c) 设$\{x_n\}$是R^k中的Cauchy序列. 象在(b)中那样定义E_N,但要把p_i换成$\mathbf{x}_i$. 有某个N, diam $E_N<1$. $\{\mathbf{x}_n\}$的值域是E_N与有限集$\{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_{N-1}\}$的并. 所以$\{X_n\}$有界. 因$R^k$的每个有界子集在$R^k$中有紧闭包(定理2.41),由(b)即得(c).

3.12 定义 如果度量空间X中的每个Cauchy序列在X中收敛,就说它是完备的.

因此,定理3.11是说,所有紧度量空间及所有欧氏空间是完备的. 定理3.11还说明,完备度量空间X的闭子集E是完备的.(E中的每个Cauchy序列是X中的Cauchy序列,因此它收敛于某$p\in X$,但因E是闭集,所以实际$p\in E$). 以$d(x,y)=|x-y|$为距离,一切有理数组成的空间是不完备度量空间的一个例子.

定理3.2(c)及定义3.1的例(d)说明,收敛序列是有界的. 但R^k中的有界序列不一定收敛. 然而,还有收敛性就等价于有界性这样一种重要情况;对于R^1中的单调序列就是这样.

3.13 定义 实数序列$\{s_n\}$叫做

(a) 单调递增的,如果$s_n\leqslant s_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$;

(b) 单调递减的,如果$s_n\geqslant s_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$.

单调递增和单调递减序列,组成单调序列类.

3.14 定理 单调序列$\{s_n\}$收敛,当且仅当它是有界的.

证 假定$s_n\leqslant s_{n+1}$(另一种情形的证明和这类似). 设E是$\{s_n\}$的值域,如果$\{s_n\}$有界,设s是E的最小上界,那么

$$s_n\leqslant s \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

对于每个$\varepsilon>0$,一定有一个正整数N,使$s-\varepsilon<s_N\leqslant s$,如果不然的话,$s-\varepsilon$将要是$E$的上界了. 因为$\{s_n\}$递增,所以$n\geqslant N$时有

$$s-\varepsilon<s_n\leqslant s.$$

这说明$\{s_n\}$收敛(于s).

逆命题可以从定理3.2(c)推出来.

上极限和下极限

3.15 定义 设$\{s_n\}$是有下列性质的实数序列：对于任意的实数 M，有一个正整数 N，而 $n\geqslant N$ 时有 $s_n\geqslant M$，我们便把这写作

$$s_n\to+\infty.$$

类似地，如果对于任意的实数 M，有一个正整数N，而 $n\geqslant N$ 时有 $s_n\leqslant M$，我们便把这写作

$$s_n\to-\infty.$$

应当注意，我们现在对某些类型的发散序列也象对收敛序列一样地使用了在定义 3.1 中引进的符号→，但是，在定义 3.1 中讲的收敛和极限的定义毫不改变.

3.16 定义 设 $\{s_n\}$ 是实数序列. E是所有可能的子序列$\{s_{n_k}\}$的极限 x(在扩大了的实数系里，$s_{n_k}\to x$) 组成的集. E含有定义 3.5 所规定的部分极限，可能还有 $+\infty$，$-\infty$ 两数.

回想一下定义 1.8 和1.23，令

$$s^*=\sup E,$$

$$s_*=\inf E.$$

s^* 和 s_* 两数叫做序列$\{s_n\}$的上极限和下极限. 采用的记号是

$$\limsup_{n\to\infty} s_n=s^*,\quad \liminf_{n\to\infty} s_n=s_*.$$

3.17 定理 设 $\{s_n\}$ 是实数序列，设E和 s^* 的意义和定义 3.16 中说的一样，那么 s^* 有以下两种性质：

(*a*) $s^*\in E$.

(*b*) 如果 $x>s^*$，那么就有正整数 N，能使 $n\geqslant N$ 时有 $s_n<x$.

此外，s^* 是唯一具有性质(*a*)和(*b*)的数.

当然，对于 s_*，与此类似的结论也正确.

证

(*a*) 如果 $s^*=+\infty$，那么 E 不是上有界；因此 $\{s_n\}$ 不是上有界，因而有子序列 $\{s_{n_k}\}$ 合于 $s_{n_k}\to+\infty$.

如果 s^* 是实数，那么 E 上有界，从而至少有一个部分极限.因此，(*a*)可以从定理 3.7 和 2.28 推出来.

如果 $s^*=-\infty$，那么 E 只包含一个元素，就是 $-\infty$，从而没有部分极限. 就是说，对于任意实数 M，只有有限个 n 的值，使得 $s_n>M$. 于是 $s_n\to-\infty$.

这就在所有情形下证明了(*a*).

(*b*) 假定有一个数 $x>s^*$，而且有无限多个 n 的值使得 $s_n>x$. 那时，则有一个数 $y\in E$，使 $y\geqslant x>s^*$. 这与 s^* 的定义矛盾.

所以 s^* 满足条件(*a*)和(*b*).

为了证明唯一性，我们假定有两个数 p 和 q 都满足条件(*a*)和(*b*)，并且假定 $p<q$. 取 x 要它适合 $p<x<q$. 因为 p 满足(*b*)，那么当 $n\geqslant N$ 时有 $s_n<x$. 但是，如果真这样的话，q 就不能满足(*a*)了.

3.18 例

(*a*) 设 $\{s_n\}$ 是包含一切有理数的序列. 那么，每个实数是部分极限，而且

$$\limsup_{n\to\infty} s_n=+\infty,\ \liminf_{n\to\infty} s_n=-\infty.$$

(*b*) 设 $s_n=(-1)^n[1+(1/n)]$，则

$$\limsup_{n\to\infty} s_n=1\quad \liminf_{n\to\infty} s_n=-1.$$

(*c*) 对于实数序列 $\{s_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$，当且仅当

$$\limsup_{n\to\infty} s_n=\liminf_{n\to\infty} s_n=s.$$

我们用一个有用的定理来结束这一节，它的证明十分容易.

3.19 定理 如果 N 是固定的正整数，当 $n\geqslant N$ 时 $s_n\leqslant t_n$，那么

$$\liminf_{n\to\infty} s_n\leqslant \liminf_{n\to\infty} t_n,$$

$$\limsup_{n\to\infty} s_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} t_n.$$

一些特殊序列

现在，我们来计算一些常见序列的极限．各个证明都是根据下述事实：如果N是某个固定的正整数，当$n\geqslant N$时，$0\leqslant x_n\leqslant s_n$而且$s_n\to 0$，那么，$x_n\to 0$．

3.20 定理

(a) $p>0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$，

(b) $p>0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1$．

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$．

(d) $p>0$，而α是实数时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(1+p)^n}=0.$$

(e) $|x|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$．

证

(a) 取$n>(1/\varepsilon)^{1/p}$．（注意，这里用到实数的阿基米德性．）

(b) 如果$p>1$，令$x_n=\sqrt[n]{p}-1$，那么，$x_n>0$，再根据二项式定理，

$$1+nx_n\leqslant(1+x_n)^n=p.$$

于是

$$0<x_n\leqslant\frac{p-1}{n}.$$

所以$x_n\to 0$．如果$p=1$，(b)是显然的；如果$0<p<1$，取倒数就可以得到结论．

(c) 令$x_n=\sqrt[n]{n}-1$．那么$x_n\geqslant 0$，再根据二项式定理，

$$n=(1+x_n)^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}x_n^2.$$

从而

$$0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad (n \geqslant 2)$$

(*d*) 设 k 是一个正整数, $k>\alpha$. 当 $n>2k$ 时,

$$(1+p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}$$

从而

$$0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha-k} \quad (n>2k)$$

因为 $\alpha-k<0$, 由(*a*)知道 $n^{\alpha-k} \to 0$.

(*e*) 在(*d*)中取 $\alpha=0$.

级数

在这章的后部, 如果没有相反的声明, 所考虑的一切序列和级数都是复数值的. 下面有几条定理可以推广到以 R^k 里的元素为项的级数. 习题 15 提到了它们.

3.21 定义 设有序列 $\{a_n\}$, 我们用

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \quad (p \leqslant q)$$

表示和 $a_p+a_{p+1}+\cdots+a_q$. 联系着 $\{a_n\}$, 作成序列 $\{s_n\}$, 其中

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

我们也用

$$a_1+a_2+a_3+\cdots$$

作为 $\{s_n\}$ 的符号表达式, 或者简单地记作

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

记号(4)叫做无穷级数, 或只说级数, s_n 叫做这级数的部分和.

如果 s_n 收敛于 s，我们就说级数收敛，并且记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

s 叫做这级数的和；但是必须清楚地理解，s 是（部分）和的序列的极限，而不是单用加法得到的。

如果 s_n 发散，就说级数发散。

有时为了符号上的方便，我们也考虑形式象

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{5}$$

的级数。如果不致于引起误解，或者(4)与(5)的区别无关紧要时，也常常只写 Σa_n 来代替它们。

显然，关于序列的每一个定理都能按级数的语言来叙述。（令 $a_1 = s_1$，当 $n > 1$ 时，令 $a_n = s_n - s_{n-1}$）反过来也是如此。虽然如此，一并考虑这两个概念还是有益处的。

Cauchy 准则（定理 3.11）可以按以下形式重新叙述：

3.22 定理 Σa_n 收敛，当且仅当，对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在着整数 N，使得 $m \geqslant n \geqslant N$ 时

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leqslant \varepsilon. \tag{6}$$

特别地，当 $m = n$ 时，(6)变作

$$|a_n| \leqslant \varepsilon \quad (n \geqslant N)$$

换句话说：

3.23 定理 如果 Σa_n 收敛，那么 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

但是条件 $a_n \to 0$ 不能保证 Σa_n 收敛。例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散；至于证明，见定理 3.28.

对于单调序列的定理 3.14，在级数方面也有相应的定理.

3.24 定理 各项不是负数[①]的级数收敛，当且仅当它的部分和构成有界数列.

现在来讲另一种性质的收敛检验法，即是所谓"比较验敛法".

3.25 定理

(*a*) 如果 N_0 是某个固定的正整数. 当 $n\geqslant N_0$ 时 $|a_n|\leqslant c_n$ 而且 Σc_n 收敛，那么级数 Σa_n 也收敛.

(*b*) 如果当 $n\geqslant N_0$ 时 $a_n\geqslant d_n\geqslant 0$ 而且 Σd_n 发散，那么 Σa_n 也发散.

注意，检验法(*b*)只能用于各项 a_n 都不是负数的级数.

证 根据 Cauchy 准则，给定了 $\varepsilon>0$，存在着 $N\geqslant N_0$，能使 $m\geqslant n\geqslant N$ 时成立

$$\sum_{k=n}^{m} c_k\leqslant\varepsilon.$$

所以

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right|\leqslant\sum_{k=n}^{m}|a_k|\leqslant\sum_{k=n}^{m} c_k\leqslant\varepsilon.$$

随之也就得到(*a*).

其次，(*b*)可以由(*a*)推出来，因为，如果 Σa_n 收敛，那么 Σd_n 也应当收敛(注意，(*b*)也可以由定理 3.24 推出来).

比较验敛法是非常有用的一个方法；为了有效地应用它，我们必需熟悉许多已知其收敛或发散的非负项级数.

非负项级数

在一切级数之中，最简单的大约是几何级数了.

①"不是负数"便一定是指实数.

3.26 定理 如果 $0\leqslant x<1$，那么

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}.$$

如果 $x\geqslant 1$，这级数就发散.

证 如果 $x\neq 1$，

$$s_n=\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

令 $n\to\infty$，就得到定理的结论. 当 $x=1$ 时，得到

$$1+1+1+\cdots$$

它显然是发散的.

应用中出现的许多情况是，级数的各项单调递减. 于此，下边的 Cauchy 定理特别有价值. 定理的明显的特点是由 $\{a_n\}$ 的一个相当"稀"的子序列，可以判断 Σa_n 的收敛或发散.

3.27 定理 假定 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant 0$，那么，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，当且仅当级数

(7) $$\Sigma 2^k a_{2^k}=a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\cdots$$

收敛.

证 根据定理 3.24，现在只考虑两者的部分和是否有界就行了. 设

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

$$t_k=a_1+2a_2+\cdots+2^k a_{2^k}.$$

当 $n<2^k$ 时，

$$\begin{aligned}s_n&\leqslant a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^k}+\cdots a_{2^{k+1}-1})\\&\leqslant a_1+2a_2+\cdots+2^k a_{2^k}=t_k,\end{aligned}$$

因此，

(8) $$s_n\leqslant t_k$$

另一方面，当 $n>2^k$ 时，

$$s_n \geqslant a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k})$$

$$\geqslant \frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{k-1}a_{2^k}=\frac{1}{2}t_k,$$

因此

(9) $$2s_n \geqslant t_k$$

由(8)和(9)来看，序列$\{s_n\}$和$\{t_k\}$，或者同时有界，或者同时无界.

证毕.

3.28 定理 如果 $p>1$，$\sum\frac{1}{n^p}$就收敛，如果 $p\leqslant 1$，它就发散.

证 如果 $p\leqslant 0$，发散性可由定理 3.23 得出. 如果 $p>0$，用定理 3.27，这就要看级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k\frac{1}{2^{kp}}=\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(1-p)}.$$

然而，当且仅当 $1-p<0$ 时才能够 $2^{1-p}<1$，再与几何级数比较一下，(在定理 3.26 中取 $x=2^{1-p}$)就把定理推出来了.

我们进一步用定理 3.27 来证明:

3.29 定理 如果 $p>1$

(10) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}$$

就收敛；如果 $p\leqslant 1$，这级数就发散.

评注 "$\log n$"表示数 n 以 e 为底的对数(参看第一章习题9)；这个数 e 马上就要定义(参看定义 3.30) 让级数从 $n=2$ 开始，是因为 $\log 1=0$.

证 对数函数（第八章将要详细地讨论它）的单调性说明$\{\log n\}$是递增的，所以$\left\{\frac{1}{n\log n}\right\}$是递减的. 从而可以把定理 3.27

用于(10);这就要看

$$(11)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}2^k\frac{1}{2^k(\log 2^k)^p}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k\log 2)^p}=\frac{1}{(\log 2)^p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}.$$

于是,定理 3.29 就从定理 3.28 推出来了.

这种(构造极数的)方法,显然可以继续进行. 例如

$$(12)\qquad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log n\log\log n}$$

发散,然而级数

$$(13)\qquad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log n(\log\log n)^2}$$

收敛.

级数(12)的各项与(13)的各项差得很少. 但是一个发散而另一个却收敛. 从定理 3.28 到定理 3.29,然后到(12) 和(13) 这样的过程, 如果继续下去, 我们将得到一对一对的收敛和发散的级数, 它们的对应项之差比(12)和(13)的更要小. 可能有人因此而猜想,应该有一种终极的境界,搞到一个"界限", 它把一切收敛级数和一切发散级数分在两旁——最低限度哪怕是只考虑单调系数的级数也好. "界限"这个观念自然十分模糊. 我们所希望做出的论点是: 不论把这观念搞得怎样确切, 这猜想还是不正确的. 习题 11(b)和12(b)可以作为例证.

在收敛理论的这一方面,我们不想再深入下去. 于此指给读者去看 Knopp 著的 "Theory and Applications of Infinite Series" 第 IX 章,尤其是 § 41.

数 e

3.30 定义 $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

这里 $n\geqslant 1$ 时，$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$；而 $0!=1$。

因

$$s_n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots\cdot n}$$
$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

所以级数收敛，而定义有意义．实际上，这级数收敛得很快，从而使我们能够把 e 计算得十分精密．

e 还可以按另一极限过程来定义，它的证明对于极限的运算提供了一个很好的说明．注意到这一点是有益的．

3.31 定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$

证 设

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},\ t_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

根据二项式定理

$$t_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

因此 $t_n\leqslant s_n$，根据定理 3.19

(14)
$$\limsup_{n\to\infty} t_n\leqslant e$$

其次，如果 $n\geqslant m$，那么

$$t_n\geqslant 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

固定了 m 并令 $n\to\infty$，我们得到

$$\liminf_{n\to\infty} t_n\geqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}.$$

因此，
$$s_m\leqslant\liminf_{n\to\infty} t_n.$$

让 $m\to\infty$，最终得到

$$e\leqslant\liminf_{n\to\infty} t_n. \tag{15}$$

定理从(14)和(15)就推出来了.

级数$\sum\frac{1}{n!}$的收敛速度可以估计如下：设 s_n 的意义就象上边那样，于是

$$e-s_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right\}=\frac{1}{n!n}.$$

因此，

$$0<e-s_n<\frac{1}{n!n}. \tag{16}$$

这样一来，比如以 s_{10} 为 e 的近似值，误差就小于 10^{-7}，不等式(16)在理论上也是有价值的，因为它能使我们很容易地证明 e 是无理数.

3.32 定理 数 e 是无理数

证 假定 e 是有理数，那么 $e=p/q$，这里 p，q 是正整数. 由(16)得

$$0<q!(e-s_q)<\frac{1}{q}. \tag{17}$$

根据假定，$q!e$ 是正整数. 因为

$$q!s_q=q!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)$$

也是正整数，于是知道 $q!(e-s_q)$ 是正整数.

因为 $q\geqslant1$，那么(17)暗示 0 与 1 之间还有正整数. 这样我们就陷入了矛盾.

实际上，e 甚至不是代数数. 关于它的简单证明可以看书目所列 Niven 的书第 25 页或 Herstein 的书第 176 页.

根值验敛法与比率验敛法

3.33 定理（**根值验敛法**）设有 Σa_n，令 $\alpha=\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$。那么

(a) $\alpha<1$ 时，Σa_n 收敛；

(b) $\alpha>1$ 时，Σa_n 发散；

(c) $\alpha=1$ 时，无结果.

证 如果 $\alpha<1$，便可以[根据定理 3.17(b)] 选一个 β 和一个正整数 N，要求 $\alpha<\beta<1$，而且当 $n\geqslant N$ 时

$$\sqrt[n]{|a_n|}<\beta.$$

这就是说 $n\geqslant N$ 时得出

$$|a_n|<\beta^n.$$

因为 $0<\beta<1$，那么 $\Sigma\beta^n$ 收敛. 据比较验敛法，Σa_n 必收敛.

如果 $\alpha>1$，那么再根据定理 3.17，一定有一个序列 $\{n_k\}$，使得

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\longrightarrow\alpha.$$

所以对于无穷多个 n 的值，会出现 $|a_n|>1$，因此，Σa_n 收敛的必要条件(定理 3.23) $a_n\to0$ 不能成立.

为了证明(c)，我们来看级数

$$\Sigma\frac{1}{n},\qquad\Sigma\frac{1}{n^2}.$$

这两个级数的 α 都等于 1，但前者发散而后者收敛.

3.34 定理(**比率验敛法**) 关于级数 Σa_n

(a) 如果 $\limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$，它就收敛.

(b) 如果有某个固定的正整数 n_0，$n\geqslant n_0$ 时 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geqslant1$，它就发散.

证

如果满足了(a)的要求，便可以找到 $\beta<1$ 和正整数 N，使得

$n \geqslant N$ 时，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta.$$

一个个地写出来就是

$$|a_{N+1}| < \beta |a_N|$$
$$|a_{N+2}| < \beta |a_{N+1}| < \beta^2 |a_N|,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|a_{N+p}| < \beta^p |a_N|.$$

这意味着当 $n \geqslant N$ 时，

$$|a_n| < |a_N| \beta^{-N} \cdot \beta^n,$$

这样一来，(a)的结论就可以根据 $\Sigma\beta^n$ 收敛，由比较验敛法推出来了。

如果当 $n \geqslant n_0$ 时，$|a_{n+1}| \geqslant |a_n|$，便容易知道，条件 $a_n \to 0$ 不能成立。由此就推出(b)。

注：知道 $\lim a_{n+1}/a_n = 1$，对于 Σa_n 的收敛性，什么都说明不了；$\Sigma 1/n$ 及 $\Sigma 1/n^2$ 这两个级数就能说明此点。

3.35 例

(a) 考虑级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots,$$

对于它，

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0,$$

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty.$$

根值验敛法说明它是收敛的；比率验敛法无效.

(b) 对于级数

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots$$

也是这样. 在这里，

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{8},$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=2,$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}.$$

3.36 评注 比率验敛法时常比根值验敛法容易使用，这因为计算比值较之计算 n 次根容易. 然而根值验敛法发挥作用的范围较广. 更确切地说，凡比率验敛法判定为收敛的，根值验敛法一定也能判定为收敛. 凡当根值验敛无能为力时，比率验敛法一定也无能为力. 这是定理 3.37 的直接结果. 并且上边的例题就是实据.

在检验发散方面，这两个检验法都没有判别力. 总是从 $n\to\infty$ 时 a_n 不趋于零来推导发散性.

3.37 定理 对于任意的正数序列 $\{c_n\}$，有

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

证 我们来证明第二个不等式，第一个的证明十分相似. 令

$$\alpha=\limsup_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

如果 $\alpha=+\infty$，便无须证明. 如果 α 有限，取 $\beta>\alpha$. 必有正整数 N，

使得 $n\geqslant N$ 时

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}\leqslant\beta.$$

个别地说，对于任何 $p>0$,

$$c_{N+k+1}\leqslant\beta c_{N+k}\quad(k=0,1,\cdots,p-1).$$

把这些不等式连乘起来，就得到

$$c_{N+p}\leqslant\beta^p c_N,$$

或者

$$c_n\leqslant c_N\beta^{-N}\cdot\beta^n\quad(n\geqslant N).$$

于是

$$\sqrt[n]{c_n}\leqslant\sqrt[n]{c_N\beta^{-N}}\cdot\beta,$$

由此根据定理 3.20(b)，得到

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}\leqslant\beta. \tag{18}$$

又因为(18)对于任何 $\beta>\alpha$ 都成立，于是我们得到

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}\leqslant\alpha.$$

幂级数

3.38 定义 设有复数序列 $\{c_n\}$，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n \tag{19}$$

叫做幂级数．c_n 叫做这级数的系数；z 是复数．

一般地说，这个级数收敛或发散在于数 z 的选取．准确地说，联系着每个幂级数有一个圆，叫做收敛圆，如果 z 在这圆以内，(19)就收敛，如果 z 在这圆外，(19)就发散．(为了能概括所有的情形，就必须把平面看作半径为无限大的圆的内部，而把一点看作是半径为零的圆)级数在收敛圆上的性质，变化多端，不能这样简

单地叙述.

3.39 定理 设有幂级数 $\sum c_n z^n$, 令

$$\alpha=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|},\quad R=\frac{1}{\alpha}.$$

(如果 $\alpha=0$, 便要 $R=+\infty$; 如果 $\alpha=+\infty$, 便要 $R=0$).
那么 $\sum c_n z^n$ 在 $|z|<R$ 时收敛; $|z|>R$ 时发散.

证 令 $a_n=c_n z^n$ 并施以根值验敛法:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=|z|\cdot\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{|z|}{R}.$$

附注 R 叫做 $\sum c_n z^n$ 的收敛半径.

3.40 例

(a) 级数 $\sum n^n z^n$ 的 $R=0$.

(b) 级数 $\sum\frac{z^n}{n!}$ 的 $R=+\infty$(对于这一例,用比率验敛法比用根值验敛法容易些.)

(c) 级数 $\sum z^n$ 的 $R=1$. 如果 $|z|=1$, 级数就发散; 因为 $n\to\infty$ 时 z^n 不趋于零.

(d) $\sum\frac{z^n}{n}$ 的 $R=1$. $z=1$ 时级数发散, 而在收敛圆 $|z|=1$ 的其它点上都收敛. 最后这句话将在定理 3.44 中证明.

(e) $\sum\frac{z^n}{n^2}$ 的 $R=1$. 根据比较验敛法, 这级数在收敛圆 $|z|=1$ 的一切点上收敛. 这因为, $|z|=1$ 时, $\left|\frac{z^2}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$.

分部求和法

3.41 定理 设有两个序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 当 $n\geqslant 0$ 时, 令

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,$$

而令 $A_{-1}=0$. 那么，在 $0\leqslant p\leqslant q$ 时，有

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n=\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n-b_{n+1})+A_q b_q-A_{p-1}b_p. \tag{20}$$

证

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n=\sum_{n=p}^{q}(A_n-A_{n-1})b_n$$

$$=\sum_{n=p}^{q} A_n b_n-\sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1},$$

显然，右边最后一个表达式等于(20)的右端.

公式(20)，即所谓“分部求和公式”，在研究形如 $\sum a_n b_n$ 的级数时是有用的；当 $\{b_n\}$ 单调时，尤其有用. 现在就来用用它.

3.42 定理 假设

(a) $\sum a_n$ 的部分和 A_n 构成有界序列；

(b) $b_0\geqslant b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots$；

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$

那么，$\sum a_n b_n$ 收敛.

证 选取 M，使得一切 A_n 满足 $|A_n|\leqslant M$，取定了 $\varepsilon>0$，一定有正整数 N，使 $b_N\leqslant(\varepsilon/2M)$. 当 $N\leqslant p\leqslant q$ 时有

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right|=\left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n-b_{n+1})+A_q b_q-A_{p-1}b_p\right|$$

$$\leqslant M\left|\sum_{n=p}^{q-1}(b_n-b_{n+1})+b_q+b_p\right|=2Mb_p\leqslant 2Mb_N$$

$$\leqslant\varepsilon.$$

现在从 Cauchy 准则便推得出敛性了. 我们注意，在上面写的那一串式子里，第一次不等自然是靠 $b_n-b_{n+1}\geqslant 0$ 得来的.

3.43 定理 假定

(a) $|c_1|\geqslant|c_2|\geqslant|c_3|\geqslant\cdots$；

(*b*) $c_{2m-1}\geqslant 0, c_{2m}\leqslant 0$ ($m=1,2,3,\cdots$);

(*c*) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$

那么, $\sum c_n$ 收敛.

满足条件(*b*)的级数叫做"交错级数". 此定理是 Leibnitz 发现的.

证 令 $a_n=(-1)^{n+1}, b_n=|c_n|$, 尔后使用定理 3.42.

3.44 定理 假定 $\sum c_n z^n$ 的收敛半径是 1, 再假定 $c_0\geqslant c_1\geqslant c_2\geqslant\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$, 那么, $\sum c_n z^n$ 在圆 $|z|=1$ 的每个点上收敛, 只有在 $z=1$ 这一点可能是例外.

证 令 $a_n=z^n, b_n=c_n$. 如果 $|z|=1$ 而 $z\neq 1$, 便有

$$|A_n|=\left|\sum_{m=0}^{n} z^m\right|=\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right|\leqslant\frac{2}{|1-z|}.$$

于是, 定理 3.42 的假设被满足了.

绝对收敛

如果级数 $\sum|a_n|$ 收敛, 就说级数 $\sum a_n$ 绝对收敛.

3.45 定理 如果 $\sum a_n$ 绝对收敛, 那么 $\sum a_n$ 就收敛.

证 定理的断语是不等式

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right|\leqslant\sum_{k=n}^{m}|a_k|$$

和 Cauchy 准则的直接结果.

3.46 评注 就正项级数而论, 绝对收敛与收敛是一回事.

如果 $\sum a_n$ 收敛而 $\sum|a_n|$ 发散, 便说 $\sum a_n$ 非绝对收敛. 例如, 级数

$$\sum\frac{(-1)^n}{n}$$

非绝对收敛 (定理 3.43).

比较验敛法，和根值与比率验敛法一样，实际上是绝对收敛的检验法．因此，它丝毫不能识别非绝对收敛的级数．分部求和法有时却可以用来处理后者．特别的，幂级数在收敛圆内是绝对收敛的．

我们将会看到，对于绝对收敛级数完全可以象有限项之和那样来进行运算．它们可以逐项相乘，也可以改变加项的次序而不影响级数的和．然而，对于非绝对收敛的级数，这些就不正确了．因此，对它们进行运算时，要多加注意．

级数的加法和乘法

3.47 定理 如果 $\sum a_n=A$ 而 $\sum b_n=B$，那么 $\sum(a_n+b_n)=A+B$，而且，对于任意的常数 c，$\sum ca_n=cA$．

证 设

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\quad B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k$$

那么

$$A_n+B_n=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k).$$

既然 $\lim A_n=A$，$\lim B_n=B$，所以知道

$$\lim_{n\to\infty}(A_n+B_n)=A+B.$$

第二个断语的证明还要简单些．

于是，两个级数可以逐项相加，而且所得的级数收敛于这两个级数的和之和．在考究两个级数的积时，情况就复杂了．首先我们应当给积下定义．这可以用几种不同的方法去做；我们将要讨论所谓"Cauchy 乘积"．

3.48 定义 设有 $\sum a_n$ 及 $\sum b_n$．令

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

那么就称级数 $\sum c_n$ 为所给两个级数的积.

还可以把下面这事作为这个定义的来由. 如果取两个幂级数 $\sum a_nz^n$ 及 $\sum b_nz^n$, 照多项式乘法那样把它们逐项相乘, 合并 z 的同次幂各项就得到

$$\begin{aligned}\sum a_nz^n\cdot\sum b_nz^n&=(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots)(b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots)\\&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z\\&\quad+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2+\cdots\\&=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\end{aligned}$$

令 $z=1$, 这等式就归结为上边的定义了.

3.49 例 如果

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\quad B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k,\quad C_n=\sum_{k=0}^{n}c_k,$$

而且 $A_n\to A$, $B_n\to B$; 这时候因为没有 $C_n=A_nB_n$ 的关系, $\{C_n\}$ 是否收敛于 AB, 完全是不清楚的. $\{C_n\}$ 对 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 的依赖关系非常复杂(参看定理 3.50 的证明). 现在我们来证明, 两个收敛级数的乘积, 确实可以是发散的.

级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

收敛(定理 3.43), 把这个级数自乘, 得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}c_n=1&-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\&-\left(\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots\end{aligned}$$

因此

$$c_n=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

因为

$$(n-k+1)(k+1)=\left(\frac{n}{2}+1\right)^2-\left(\frac{n}{2}-k\right)^2\leqslant\left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$

那么

$$|c_n|\geqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n+2}=\frac{2(n+1)}{n+2}$$

所以 $\sum c_n$ 收敛的必要条件 $c_n\to 0$ 不能满足.

鉴于下面的 Mertens 定理，我们注意到这里讨论的是两个非绝对收敛级数的乘积.

3.50 定理 假定

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}b_n=B$,

(d) $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$.

那么

$$\sum c_n=AB.$$

这就是说，两个收敛级数，如果至少有一个绝对收敛，它们的乘积就收敛，而且收敛于正确的数值(原来两个和的乘积)

证 令

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\quad B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k,\quad C_n=\sum_{k=0}^{n}c_k,\quad \beta_n=B_n-B.$$

那么

$$\begin{aligned}C_n&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)\\&=a_0B_n+a_1B_{n-1}+\cdots+a_nB_0\\&=a_0(B+\beta_n)+a_1(B+\beta_{n-1})+\cdots+a_n(B+\beta_0)\\&=A_nB+a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_0\end{aligned}$$

令

$$\gamma_n=a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_0$$

我们想要证明的是 $C_n\to AB$. 因为 $A_nB\to AB$, 所以只要证明

(21) $$\lim_{n\to\infty}\gamma_n=0$$

就够了. 令

$$\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$$

[正是在这里用着了(a)]. 假设 $\varepsilon>0$ 已经给定了. 由(c), $\beta_n\to0$. 于是可以选一个 N, 使得 $n\geqslant N$ 时, $|\beta_n|<\varepsilon$, 在这时候,

$$\begin{aligned}|\gamma_n|&\leqslant|\beta_0a_n+\cdots+\beta_Na_{n-N}|+|\beta_{N+1}a_{n-N-1}+\cdots+\beta_na_0|\\&\leqslant|\beta_0a_n+\cdots+\beta_Na_{n-N}|+\varepsilon\alpha\end{aligned}$$

让 N 固定, 而让 $n\to\infty$; 由于 $k\to\infty$ 时, $a_k\to0$, 这就得到

$$\limsup_{n\to\infty}|\gamma_n|\leqslant\varepsilon\alpha,$$

因为 ε 是任意的, 所以(21)是必然的.

可能提出的另一个问题是: 当级数 $\sum c_n$ 收敛时, 它的和一定等于 AB 吗? 阿贝尔证明这个问题的答案是肯定的.

3.51 定理 如果级数 $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ 分别收敛于 A, B, C, 并且 $c_n=a_0b_n+\cdots+a_nb_0$, 那么, $C=AB$.

这里没有做关于绝对收敛的假定, 在定理 8.2 之后, 有一个(借助于幂级数连续性的)简单证明.

级数的重排

3.52 定义 设$\{k_n\}$, $n=1, 2, 3, \cdots$, 是由正整数作成的序列，在它里边每个正整数要出现一次，而且只出现一次(按定义 2.4 的记号来说，$\{k_n\}$就是从 J 到 J 上的一个 1-1 函数). 令

$$a_n' = a_{k_n} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

我们就说 $\sum a_n'$ 是 $\sum a_n$ 的重排.

如果$\{s_n\}$, $\{s_n'\}$是 $\sum a_n$, $\sum a_n'$ 的部分和的序列. 容易知道，这两个序列一般是由完全不同的数组成的. 这样，就要发生一个问题：在怎样的条件下，收敛级数的一切重排都收敛，以及它们的和是否必然相同.

3.53 例 试看收敛级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots \tag{22}$$

和它的一个重排

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots, \tag{23}$$

其中在两个正项之后，总跟着一个负项. 如果 s 是(22)的和，那么

$$s<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

设 s_n' 是 s 的第 n 个部分和. 因为，当 $k\geqslant 1$ 时，

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}>0,$$

于是知道 $s_3'<s_6'<s_9'<\cdots$. 由此，

$$\limsup s_n'>s_3'=\frac{5}{6}.$$

所以(23)一定不能收敛于 s, [然而(23)确实收敛，这一点留给读者去证明].

用这例题可以说明下列属于 Riemann 的定理.

3.54 定理 设实级数 $\sum a_n$ 收敛而不绝对收敛. 假定

$$-\infty\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant+\infty.$$

那么一定存在着重排 $\sum a_n'$, 它的部分和 s_n' 满足

(24) $$\liminf_{n\to\infty} s_n'=\alpha,\quad \limsup_{n\to\infty} s_n'=\beta.$$

证 令

$$p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2},\quad q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}\quad (n=1,2,3,\cdots).$$

于是 $p_n-q_n=a_n$, $p_n+q_n=|a_n|$, $p_n\geqslant0$, $q_n\geqslant0$. 级数 $\sum p_n$, $\sum q_n$ 一定都发散.

因为, 假如这两个级数都收敛, 那么

$$\sum(p_n+q_n)=\sum|a_n|$$

也就收敛, 这与题设矛盾. 因为

$$\sum_{n=1}^N a_n=\sum_{n=1}^N(p_n-q_n)=\sum_{n=1}^N p_n-\sum_{n=1}^N q_n,$$

所以, 如果 $\sum p_n$ 发散而 $\sum q_n$ 收敛(或者反过来), $\sum a_n$ 必发散. 这又与题设矛盾. 所以 $\sum p_n$ 及 $\sum q_n$ 都发散.

现在把 $\sum a_n$ 里的非负项, 按它们出现的顺序记作 P_1, P_2, $P_3,\cdots$. 把 $\sum a_n$ 的负项的绝对值也按原来的顺序记作 $Q_1, Q_2, Q_3,\cdots$.

级数 $\sum P_n$, $\sum Q_n$ 与 $\sum p_n$, $\sum q_n$ 的区别仅仅是一些等于零的项, 因此, 它们都发散.

现在, 选两个序列 $\{m_n\}$, $\{k_n\}$, 使级数

(25) $$P_1+\cdots+P_{m_1}-Q_1-\cdots-Q_{k_1}+P_{m_1+1}+\cdots+P_{m_2}-Q_{k_1+1}-\cdots-Q_{k_2}+\cdots$$

满足(24). 显然, 这是 $\sum a_n$ 的重排.

取实数序列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, 使 $\alpha_n\to\alpha$, $\beta_n\to\beta$, $\alpha_n<\beta_n$, $\beta_1>0$.

设 m_1, k_1 是使

$$P_1+\cdots+P_{m_1}>\beta_1,$$

$$P_1+\cdots+P_{m_1}-Q_1-\cdots-Q_{k_1}<\alpha_1$$

的最小正整数；m_2, k_2 是使

$$P_1+\cdots+P_{m_1}-Q_1-\cdots-Q_{k_1}+P_{m_1+1}+\cdots+P_{m_2}>\beta_2,$$

$$P_1+\cdots+P_{m_1}-Q_1-\cdots-Q_{k_1}+P_{m_1+1}+\cdots+P_{m_2}$$
$$-Q_{k_1+1}-\cdots-Q_{k_2}<\alpha_2$$

的最小正整数；照这样接连地取下去. 因为 ΣP_n 和 ΣQ_n 发散，所以这是办得到的.

如果 x_n 与 y_n 表示 (25) 里末项为 P_{m_n} 与 $-Q_{k_n}$ 的部分和，那么

$$|x_n-\beta_n|\leqslant P_{m_n}, \quad |y_n-\alpha_n|\leqslant Q_{k_n}.$$

因为 $n\to\infty$ 时，$P_n\to 0$, $Q_n\to 0$, 所以 $x_n\to\beta$, $y_n\to\alpha$.

最后，很明显，任何小于 α 或大于 β 的数，都不能是(25)的部分和所作成序列的(部分)极限.

3.55 定理 设 Σa_n 是绝对收敛的复数项级数，那么 Σa_n 的每个重排收敛，而且它们都收敛于同一个和.

证 设 $\Sigma a_n'$ 是一个重排，它的部分和为 s_n'. 给定 $\varepsilon>0$, 就有正整数 N 使得 $m\geqslant n\geqslant N$ 时有

$$\sum_{i=n}^{m}|a_i|\leqslant\varepsilon. \tag{26}$$

现在选 p 使正整数 $1, 2, \cdots, N$ 包含在集 $k_1, k_2, \cdots, k_p$ 中(这里用的是定义 3.52 中的记号). 那么，当 $n>p$ 时，这些数 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 在差数 s_n-s_n' 中都被消掉，因此，由(26), $|s_n-s_n'|\leqslant\varepsilon$. 所以 $\{s_n'\}$ 与 $\{s_n\}$ 收敛到同样的和数.

习题

1. 证明：序列 $\{s_n\}$ 的收敛性包含着 $\{|s_n|\}$ 的收敛性. 逆命题对吗?

2. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

3. 设 $s_1=\sqrt{2}$，且

$$s_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{s_n}}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

证明$\{s_n\}$收敛，而且当 $n=1,2,3,\cdots$时，$s_n<2$.

4. 求下边定义的序列$\{s_n\}$的上、下极限:

$$s_1=0,\ s_{2m}=\frac{s_{2m-1}}{2},\ s_{2m+1}=\frac{1}{2}+s_{2m}.$$

5. 对任意两个实数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$，有

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant\limsup_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n;$$

这里假定右端的和不是$\infty-\infty$的形状.

6. 研究Σa_n 的性质(收敛或发散)，如果

(a) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

(b) $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

(c) $a_n=(\sqrt[n]{n}-1)^n$;

(d) $a_n=\dfrac{1}{1+z^n}$, z 取复数值.

7. 证明，如果 $a_n\geqslant0$，那么 Σa_n收敛包含着

$$\Sigma\frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

收敛.

8. 如果 Σa_n 收敛，而$\{b_n\}$单调有界. 证明 Σa_nb_n 也收敛.

9. 求下列每个幂级数的收敛半径:

(a) Σn^3z^n,　　(b) $\Sigma\dfrac{2^n}{n!}z^n$,

(c) $\Sigma\dfrac{2^n}{n^2}z^n$,　　(d) $\Sigma\dfrac{n^3}{3^n}z^n$.

10. 假定幂级数 Σa_nz^n 的系数都是整数，其中有无限多个不是零. 证明收敛半径最大是 1.

11. 假定 $a_n>0$，$s_n=a_1+\cdots+a_n$ 而 Σa_n 发散.

(a) 证明 $\Sigma\dfrac{a_n}{1+a_n}$发散.

(*b*) 证明

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}}+\cdots+\frac{a_{N+k}}{s_{N+k}}\geqslant 1-\frac{s_N}{s_{N+k}},$$

再证明

$$\sum\frac{a_n}{s_n}$$

发散.

(*c*) 证明

$$\frac{a_n}{s_n^2}\leqslant\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n},$$

再证明 $\sum\frac{a_n}{s_n^2}$收敛.

(*d*) $\sum\frac{a_n}{1+na_n}$, $\sum\frac{a_n}{1+n^2a_n}$怎样呢?

12. 设 $a_n>0$ 且 $\sum a_n$ 收敛. 令

$$r_n=\sum_{m=n}^{\infty}a_m$$

(*a*) 证明 $m<n$ 时 $\frac{a_m}{r_m}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}>1-\frac{r_n}{r_m}$, 再证明 $\sum\frac{a_n}{r_n}$发散.

(*b*) 证明$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}<2(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}})$, 再证明 $\sum\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$收敛.

13. 证明两个绝对收敛级数的 Cauchy 乘积也绝对收敛.

14. 设$\{s_n\}$为复数序列, 定义它的算术平均数 σ_n 为

$$\sigma_n=\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}, \ (n=0, 1, 2, \cdots).$$

(*a*) 如果 $\lim s_n=s$, 证明 $\lim\sigma_n=s$.

(*b*) 作这样一个序列$\{s_n\}$, 使$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$ 但$\{s_n\}$不收敛.

(*c*) 是否能出现这样的事: 对一切 n, $s_n>0$, 虽然 $\lim\sigma_n=0$, 但是 $\limsup s_n=\infty$?

(*d*) 对于 $n\geqslant 1$, 令 $a_n=s_n-s_{n-1}$. 证明

$$s_n-\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}ka_k$$

假定$\lim(na_n)=0$ 并且$\{\sigma_n\}$收敛. 证明$\{s_n\}$收敛. [这是(*a*) 的一个逆命题,

但是添了一条假设：$na_n\to0$].

(e) 在较弱的假定下，推导上一个结论：假设 $M<\infty$，对于一切 n，$|na_n|<M$ 而且 $\lim\sigma_n=\sigma$. 按下列步骤证明 $\lim s_n=\sigma$：

如果 $m<n$，那么

$$s_n-\sigma_n=\frac{m+1}{n-m}(\sigma_n-\sigma_m)+\frac{1}{n-m}\sum_{i=m+1}^{n}(s_n-s_i).$$

对于这些 i，

$$|s_n-s_i|\leqslant\frac{(n-i)M}{i+1}\leqslant\frac{(n-m-1)M}{m+2}.$$

使 $\varepsilon>0$ 固定，给每个 n 配置一个正整数 m，满足

$$m<\frac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon}<m+1.$$

于是 $(m+1)/(n-m)\leqslant1/\varepsilon$，而 $|s_n-s_i|<M\varepsilon$. 所以

$$\limsup_{n\to\infty}|s_n-\sigma|\leqslant M\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，$\lim s_n=\sigma$.

15. 定义 3.21 可以推广到 a_n 在某个固定的 R^k 之中的情形. 绝对收敛定义为 $\Sigma|a_n|$ 收敛. 证明诸定理 3.22, 3.23, 3.25(a), 3.33, 3.34, 3.42, 3.45, 3.47 和 3.55. 在这种更一般的情况下都真确.（在任一个证明里，只需稍作修改）.

16. 固定正数 α. 选 $x_1>\sqrt{\alpha}$ 且用递推公式

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\alpha}{x_n}\right)$$

来定义 $x_2, x_3, x_4, \cdots$

(a) 证明 $\{x_n\}$ 单调下降且 $\lim x_n=\sqrt{\alpha}$.

(b) 令 $\varepsilon_n=x_n-\sqrt{\alpha}$，证明

$$\varepsilon_{n+1}=\frac{\varepsilon_n^2}{2x_n}<\frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}},$$

于是令 $\beta=2\sqrt{\alpha}$，就得到

$$\varepsilon_{n+1}<\beta\left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^n}\quad(n=1, 2, 3, \cdots).$$

(c) 这是计算平方根的一个好算法，因为递推公式简单且收敛的极快. 例如，如果 $\alpha=3$ 而 $x_1=2$，证明 $\varepsilon_1/\beta<\frac{1}{10}$，所以

$$\varepsilon_5<4\cdot 10^{-16}, \quad \varepsilon_6<4\cdot 10^{-32}.$$

17. 固定 $\alpha>1$. 取 $x_1>\sqrt{\alpha}$ 且定义

$$x_{n+1}=\frac{\alpha+x_n}{1+x_n}=x_n+\frac{\alpha-x_n^2}{1+x_n}$$

(a) 证明 $x_1>x_3>x_5>\cdots$.

(b) 证明 $x_2<x_4<x_6<\cdots$.

(c) 证明 $\lim x_n=\sqrt{\alpha}$.

(d) 将这种方法的收敛速度与习题 16 中所述方法的收敛速度相比较.

18. 把习题 16 中的递推公式换成

$$x_{n+1}=\frac{p-1}{p}x_n+\frac{\alpha}{p}x_n^{-p+1}$$

(这里 p 是固定的正整数), 并且描述所得序列 $\{x_n\}$ 的性质.

19. 对于每个序列 $a=\{\alpha_n\}$, 其中 α_n 是 0 或 2, 作一个实数

$$x(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{3^n}$$

证明, 由所有 $x(a)$ 组成的集, 恰好就是在 2.44 节中所描述的 Cantor 集.

20. 设 $\{p_n\}$ 是距离空间 X 中的 Cauchy 序列, 且有某个子序列 $\{p_{n_i}\}$ 收敛于一点 $p\in X$. 证明整个序列 $\{p_n\}$ 收敛于 p.

21. 证明与定理 3.10(b) 的类似定理: 如果序列 $\{E_n\}$ 里的 E_n 都是完备度量空间 X 中的有界闭集, $E_n\supset E_{n+1}$ 并且

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}E_n=0$$

那么 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 恰由一点组成.

22. 设 X 是完备度量空间, 而序列 $\{G_n\}$ 里的 G_n 都是 X 的稠密开子集. 证明 Baire 定理: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$ 不空(事实上它在 X 中稠密.)

提示: 找一个由邻域 $E_n(\bar{E}_n\subset G_n)$ 组成的收缩序列, 并应用习题 21.

23. 设 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 是度量空间 X 里的 Cauchy 序列. 证明, 序列 $\{d(p_n, q_n)\}$ 收敛.

提示: 对于任意的 m, n 有

$$d(p_n, q_n)\leqslant d(p_n, p_m)+d(p_m, q_m)+d(q_m, q_n),$$

因此，当 m,n 很大时

$$\left|d(p_n, q_n)-d(p_m, q_m)\right|$$

就很小.

24. 设X是度量空间

(a) 称X中的两个 Cauchy 序列$\{p_n\}$，$\{q_n\}$是等价的，如果

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n)=0$$

证明这是一个等价关系.（定义 2.3）.

(b) 设 X^* 是这样得到的一切等价类的集. 如果 $P\in X^*$, $Q\in X^*$, $\{p_n\}\in P$, $\{q_n\}\in Q$, 定义

$$\Delta(P, Q)=\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n)$$

根据习题23，这极限是存在的. 如果把$\{p_n\}$和$\{q_n\}$各代以等价序列，试证：数$\Delta(P, Q)$不变，从而Δ是 X^* 里的距离函数.

(c) 证明所得的度量空间 X^* 是完备的.

(d) 对于每个 $p\in X$，有一个各项都是 p 的 Cauchy 序列；设 P_p 是 X^* 中的包含着这个序列的成员. 证明对于一切 $p, q\in X$，有

$$\Delta(P_p, P_q)=d(p, q).$$

换句话说，由等式$\varphi(p)=P_p$确定的映射，是从X到 X^* 内的等距映射（亦即保持距离的映射）.

(e) 证明，$\varphi(X)$在 X^* 中稠密，并且当X完备时，$\varphi(X)=X^*$.

根据 (d)，可以把X与$\varphi(X)$等同起来，而且认为X被嵌入于完备距离空间 X^* 之中了. X^* 叫做X的完备化（空间）.

25. 设X是度量空间，它的点都是有理数，以 $d(x, y)=|x-y|$ 为距离. 问这空间的完备化是什么？（与习题 24 比较）.

第四章 连 续 性

在定义 2.1 和 2.2 中引进了函数概念和一些与它有关的术语. 虽然我们(在后面各章里)主要感兴趣的是实函数和复函数(即值是实数或复数的函数), 但是我们也要讨论向量值函数(即在 R^k 中取值的函数) 和在任意度量空间中取值的函数. 我们在这个更一般的基础上将要讨论的定理, 并不会因为我们限制在(例如)实函数而显得容易些, 放弃不必要的假定和用适当普遍的措词来叙述和证明定理, 反而会使得情景确实简洁了.

我们的函数的定义域也是度量空间, 遇有不同的要求, 便加以适当的说明.

函数的极限

4.1 定义 令 X 和 Y 是度量空间, 假设 $E\subset X$, f 将 E 映入 Y 内. 且 p 是 E 的极限点. 凡是我们写当 $x\to p$ 时 $f(x)\to q$, 或

(1) $$\lim_{x\to p} f(x)=q$$

的时候, 就是存在一个点 $q\in Y$ 具有以下的性质: 对于每个 $\varepsilon>0$, 存在着 $\delta>0$, 使得

(2) $$d_Y(f(x),q)<\varepsilon$$

对于满足

(3) $$0<d_X(x,p)<\delta$$

的一切点 $x\in E$ 成立.

记号 d_X 和 d_Y 分别表示 X 和 Y 中的距离.

如果 X 和(或) Y 换成实直线, 复平面或某一欧氏空间 R^k, 那

么，距离 d_X 和 d_Y 自然该换成绝对值或相应的范数（见第2.16段）.

应当注意 $p\in X$，但是上面的定义中，并不一定要求 p 是 E 的点. 此外，即使 $p\in E$，也完全可能 $f(p)\neq\lim\limits_{x\to p}f(x)$.

我们还可以将这个定义用序列的极限改述为:

4.2 定理 令 X, Y, E, f 和 p 是定义 4.1 说的那些，那么

$$\lim_{x\to p}f(x)=q \tag{4}$$

当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}f(p_n)=q \tag{5}$$

对于 E 中合于

$$p_n\neq p,\quad \lim_{n\to\infty}p_n=p \tag{6}$$

的每个序列 $\{p_n\}$ 成立.

证 假定(4)成立，取 E 中满足(6)的 $\{p_n\}$. 给定了 $\varepsilon>0$，那么就有 $\delta>0$，使得当 $x\in E$ 且 $0<d_X(x,p)<\delta$ 时，$d_Y(f(x),\ q)<\varepsilon$. 同样又有 N 使得当 $n>N$ 时，$0<d_X(p_n,p)<\delta$. 这样，对于 $n>N$，我们有 $d_Y(f(p_n),q)<\varepsilon$. 这就证明了(5)成立.

反过来，假定(4)不成立. 这时便有某个 $\varepsilon>0$，使得对于每个 $\delta>0$，都有点 $x\in E$（依赖于 δ），对这个 x 来说，$d_Y(f(x),\ q)\geqslant\varepsilon$ 但 $0<d_X(x,p)<\delta$. 取 $\delta_n=1/n$，$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 我们就在 E 中找到一个满足(6)，但使(5)式不成立的序列.

推论 如果 f 在 p 有极限，那么这极限是唯一的.

这可以由定理 3.2(*b*) 及定理 4.2 推出来.

4.3 定义 设有定义在 E 上的两个复函数 f 和 g，我们用 $f+g$ 表示一个函数，它给 E 的每个点 x 配置的数是 $f(x)+g(x)$. 我们用类似的方法定义两个函数的差 $f-g$，积 fg 及商 f/g，约定商只定义在 E 的那些使 $g(x)\neq0$ 的点 x 上. 如果 f 给 E 的每点 x 配置同一个数 c，那么 f 就叫做一个常数函数，或简单地叫做一

个常数，并记作 $f=c$. 设 f 和 g 都是实函数，如果对于每个 $x\in E$ 来说$f(x)\geqslant g(x)$，那么有时为了简便，就记作 $f\geqslant g$.

类似地，如果 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 把 E 映入 R^k 内，使用

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x)=\mathbf{f}(x)+\mathbf{g}(x),\quad (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x)=\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x)$$

来定义 $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ 及 $\mathbf{f}\mathbf{g}$；再若 λ 是实数，便定义$(\lambda\mathbf{f})(x)=\lambda\mathbf{f}(x)$.

4.4 定理 假设 $E\subset X$，X 是度量空间，p 是 E 的极限点，f 与 g 是 E 上的复函数，而且

$$\lim_{x\to p}f(x)=A,\quad \lim_{x\to p}g(x)=B$$

那么

(a) $\lim\limits_{x\to p}(f+g)(x)=A+B$,

(b) $\lim\limits_{x\to p}(fg)(x)=AB$,

(c) $\lim\limits_{x\to p}(f/g)(x)=A/B$，假定 $B\neq 0$.

证 依照定义 4.3，这些论断可以从序列的类似性质（定理 3.3)直接推出来.

评注 如果 $\mathbf{f}$ 与 $\mathbf{g}$ 将 E 映入 R^k 内，那么(a)仍然成立，而(b)就要变为

(b′) $$\lim(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$$

(参看定理3.4).

连续函数

4.5 定义 设 X 与 Y 是度量空间，$E\subset X$，$p\in E$，并且 f 将 E 映入 Y 内，如果对于每一个 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，对于一切满足 $d_X(x,p)<\delta$ 的点 $x\in E$ 来说,

$$d_Y(f(x),f(p))<\varepsilon,$$

就说 f 在 p 点连续.

如果 f 在 E 的每一点都连续，就说 f 在 E 上连续.

应该注意，要使 f 在点 p 连续，f 必须在点 p 有定义.（这一点请与定义 4.1 后面的说明对比一下）.

如果 p 是 E 的一个孤立点，那末由我们的定义推知，每一个以 E 为定义域的函数都在点 p 连续. 因为，不管取的哪个 $\varepsilon>0$，总可以选一个 $\delta>0$，使得满足 $d_X(x, p)<\delta$ 的点 $x\in E$ 只有 $x=p$；于是

$$d_Y(f(x), f(p))=0<\varepsilon.$$

4.6 定理 在定义 4.5 里所假定的情况下，再假定 p 是 E 的极限点. 那么，f 在 p 点连续当且仅当

$$\lim_{x\to p} f(x)=f(p)$$

证 只要将定义 4.1 和 4.5 对比一下就清楚了.

现在我们转到函数的复合. 下面定理的一种简述是：连续函数的连续函数是连续的.

4.7 定理 设 X, Y, Z 是度量空间，$E\subset X$，f 将 E 映入 Y 内，g 将 f 的值域 $f(E)$ 映入 Z 内，而 h 是由

$$h(x)=g(f(x)) \quad (x\in E)$$

定义的 E 到 Z 内的映射. 如果 f 在点 $p\in E$ 连续，并且 g 在点 $f(p)$ 连续，那么 h 在点 p 连续.

这个函数 h 叫做 f 与 g 的复合函数或 f 和 g 合成. 记号

$$h=g\circ f$$

在本书中经常用.

证 设 $\varepsilon>0$ 已经给定. 因为 g 在 $f(p)$ 连续，便有 $\eta>0$ 使得当 $d_Y(y, f(p))<\eta$ 和 $y\in f(E)$ 有 $d_Z(g(y), g(f(p)))<\varepsilon$. 又因为 f 在 p 点连续，那么存在着 $\delta>0$，使得当 $d_X(x,p)<\delta$ 和 $x\in E$ 有 $d_Y(f(x), f(p))<\eta$. 由此知道：当 $d_X(x,p)<\delta$ 和 $x\in E$ 有 $d_Z(h(x),h(p))=d_Z(g(f(x)),g(f(y)))<\varepsilon$. 所以 h 在点 p 连续.

4.8 定理 将度量空间X映入度量空间Y内的映射f在X上连续，当且仅当对于Y的每个开集V来说，$f^{-1}(V)$是X中的开集.

（逆像的定义已见于定义 2.2）这是连续性的一个极有用的特征.

证 设f在X上连续而V是Y中开集. 我们必须证明，$f^{-1}(V)$的每个点都是$f^{-1}(V)$的内点. 设$p\in X$，且$f(p)\in V$. 由于V是开集，必定存在着$\varepsilon>0$，使得当$d_Y(f(p),y)<\varepsilon$有$y\in V$，而由于f在点p连续，就又存在$\delta>0$，使当$d_X(x,p)<\delta$有$d_Y(f(x),f(p))<\varepsilon$. 所以，只要$d_X(x,p)<\delta$就保证了$x\in f^{-1}(V)$.

反之，设对于Y中的每个开集V来说，$f^{-1}(V)$是X中的开集. 固定了$p\in X$与$\varepsilon>0$，令V是满足$d_Y(y,f(p))<\varepsilon$的一切$y\in Y$所成的集，那么V是开集，因而$f^{-1}(V)$是开集，因而存在着$\delta>0$使得当$d_X(p,x)<\delta$有$x\in f^{-1}(V)$. 然而一旦$x\in f^{-1}(V)$，便将要$f(x)\in V$，所以$d_Y(f(x),f(p))<\varepsilon$.

这就完成了定理的证明.

推论 将度量空间X映入度量空间Y内的映射f是连续的，当且仅当对于Y中的每个闭集C，$f^{-1}(C)$是闭集.

这由本定理即可推知. 因为一个集是闭集，当且仅当它的余集是开集. 然而对每个$E\subset Y$，$f^{-1}(E^c)=[f^{-1}(E)]^c$.

现在我们转到复值和向量值函数，以及定义在R^k的子集上的函数.

4.9 定理 设f与g是度量空间X上的复连续函数. 那么，$f+g$，fg与f/g在X上连续.

在最后的情形中，当然必须假定对于一切$x\in X$，$g(x)\neq 0$.

证 在X的孤立点无须证明. 在极限点，论断是定理 4.4 与定理 4.6 的直接结果.

4.10 定理

(a) 设 $f_1, \cdots, f_k$ 是度量空间 X 上的实函数，并且 $\mathbf{f}$ 是由

(7) $$\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \cdots, f_k(x)) \quad (x \in X)$$

定义而将 X 映入 R^k 内的映射. 那么，$\mathbf{f}$ 连续当且仅当 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 都连续.

(b) 如果 $\mathbf{f}$ 与 $\mathbf{g}$ 是将 X 映入 R^k 内的连续映射，那么 $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ 与 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ 都在 X 上连续.

函数 $f_1, \cdots, f_k$ 叫作 $\mathbf{f}$ 的分量. 注意，$\mathbf{f}+\mathbf{g}$ 是把 X 映入 R^k 内的映射，而 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ 则是 X 上的实函数.

证 部分(a)能由不等式

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leqslant |\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)| = \left\{\sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - f_i(y)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

推出来，其中 $j=1, 2, \cdots, k$. 部分(b)是(a)与定理 4.9 的直接结果.

4.11 例 如果 $x_1, \cdots, x_k$ 是点 $\mathbf{x} \in R^k$ 的坐标. 由

(8) $$\varphi_i(\mathbf{x}) = x_i \quad (\mathbf{x} \in R^k)$$

定义的函数 φ_i 必然在 R^k 上连续，这因为不等式

$$|\varphi_i(\mathbf{x}) - \varphi_i(\mathbf{y})| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

表示，我们可以在定义 4.5 中取 $\delta = \varepsilon$. 这些函数 φ_i 有时称为坐标函数.

重复应用定理 4.9 可以证明每个单项式

(9) $$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

在 R^k 上连续，其中 $n_1, \cdots, n_k$ 是非负的整数. 因为常数显然是连续的，所以(9)式用常数乘后还连续. 由此推知，每个由

(10) $$P(\mathbf{x}) = \sum c_{n_1 \cdots n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} \quad (\mathbf{x} \in R^k)$$

给出的多项式 P 在 R^k 上连续. 这里系数 $c_{n_1 \cdots n_k}$ 是复数，$n_1, \cdots, n_k$

是非负的整数，并且(10)中的和只有有限多项.

更进一步，$x_1, \cdots, x_k$ 的每个有理函数，即形式如(10)的两个多项式的商，只要它的分母不为零，便在 R^k 上连续.

从三角形不等式容易看出

(11) $$\big||\mathbf{x}|-|\mathbf{y}|\big| \leqslant |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^k)$$

所以，映射 $\mathbf{x} \to |\mathbf{x}|$ 是 R^k 上的连续函数.

现在，如果 $\mathbf{f}$ 是一个由度量空间 X 映入 R^k 内的连续映射，并且 φ 在 X 上由 $\varphi(p)=|\mathbf{f}(p)|$ 定义，那么，用定理 4.7 可以推知，φ 是 X 上的连续实函数.

4.12 评注 我们定义了在一个度量空间 X 的某个子集 E 上定义的函数的连续概念. 然而，E 在 X 中的余集在这个定义中不起任何作用(注意，这情况同函数的极限有些不同). 因此，去掉 f 的定义域的余集我们毫不介意. 这就是说，我们可以只谈度量空间映入另一度量空间内的连续映射，而不谈子集的映射. 这样可以简化某些定理的叙述和证明. 我们已经在定理 4.8 到 4.10 中应用了这个原理，并且在下边关于紧性的一节中还要这样做.

连续性与紧性

4.13 定义 将集 E 映入 R^k 内的映射 $\mathbf{f}$ 叫做有界的，如果有一个实数 M，使得 $\mathbf{f}(x)$ 对于一切 $x \in E$ 满足 $|\mathbf{f}(x)| \leqslant M$.

4.14 定理 设 f 是把紧度量空间 X 映入度量空间 Y 内的连续映射. 那么 $f(X)$ 是紧的.

证 设 $\{V_\alpha\}$ 是 $f(X)$ 的一个开覆盖. 由于 f 连续，定理 4.8 说明每个集 $f^{-1}(V_\alpha)$ 是开的. 由于 X 是紧的，那么存在着有限个指标 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，使得

(12) $$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}).$$

由于对每个 $E \subset Y$ 来说 $f(f^{-1}(E)) \subset E$，那么，(12)就意味着

(13) $$f(X)\subset V_{\alpha_1}\cup\cdots\cup V_{\alpha_n}.$$

这样就完成了证明.

附注：我们利用了关系式 $f(f^{-1}(E))\subset E$，它对于 $E\subset Y$ 成立. 如果 $E\subset X$，则 $f^{-1}(f(E))\supset E$，两种情形等号都未必能用.

现在我们推导定理 4.14 的几个推论.

4.15 定理 如果 f 是把紧度量空间 X 映入 R^k 内的连续映射，那么，$f(X)$ 是闭的和有界的. 因此，f 是有界的.

这可以从定理 2.41 推出来. 这个结果当 f 是实函数时特别重要：

4.16 定理 设 f 是紧度量空间 X 上的连续实函数，并且

(14) $$M=\sup_{p\in X}f(p),\quad m=\inf_{p\in X}f(p),$$

那么，一定存在着两点 $r,s\in X$，使得 $f(r)=M$，及 $f(s)=m$.

(14) 中的记号表示 M 是一切数 $f(p)$（这里 p 遍历 X）的集的最小上界，而 m 是这个数集的最大下界.

这个结论也可以叙述如下：在 X 中存在着两点 r 和 s，对一切 $x\in X$ 来说，$f(r)\leqslant f(x)\leqslant f(s)$；即 f（在 r 点）达到它的最大值并且（在 s 点）达到它的最小值.

证 根据定理 4.15，$f(X)$ 是一个闭的且有界的实数集，因此，根据定理 2.28，$f(X)$ 包含 $M=\sup f(X)$ 及 $m=\inf f(x)$.

4.17 定理 设 f 是把紧度量空间 X 映满度量空间 Y 的连续 1-1 映射. 那么，按

$$f^{-1}(f(x))=x\quad(x\in X)$$

在 Y 上定义的逆映射 f^{-1}，是 Y 映满 X 的连续映射.

证 将定理 4.8 应用到 f^{-1}（代替 f），我们看到只需证明，对于 X 中的每个开集 V 来说，$f(V)$ 是 Y 中的开集. 设取定了一个这样的集 V.

V 的余集 V^c 在 X 中是闭的，因而是紧的（定理 2.35），因而

$f(V^c)$是Y的紧子集(定理4.14),因而在Y中是闭的(定理2.34).由于f是一对一的,并且是映满的,所以$f(V)$是$f(V^c)$的余集,因此,$f(V)$是开的.

4.18 定义 设f是把度量空间X映入度量空间Y内的映射. 我们说f在X上是一致连续的,如果对于每个$\varepsilon>0$总存在着一个$\delta>0$,对于X中一切满足$d_X(p,q)<\delta$的p和q来说,都能使

$$d_Y(f(p),f(q))<\varepsilon. \tag{15}$$

让我们来考虑连续和一致连续这两个概念之间的区别.首先,一致连续是函数在一个集上的性质,而连续则能在单个点上来定义. 问一个给定的函数在某一点上是否一致连续,是没有意义的.其次,如果f在X上连续,那么对于每个$\varepsilon>0$和X的每个点p,可以找到一个数$\delta>0$具有定义4.5所说的性质.这个δ依赖于ε也依赖于p. 但若f在X上一致连续,便能对于每个$\varepsilon>0$,找到一个数$\delta>0$,它适用于X的一切点p.

显然,每个一致连续的函数是连续的. 从下面的定理可以知道,在紧集上这两个概念是等价的.

4.19 定理 设f是把紧度量空间X映入度量空间Y内的一个连续映射. 那么,f在X上一致连续.

证 设$\varepsilon>0$已经给定,由于f连续,我们可以为每个点$p\in X$配置一个正数$\varphi(p)$,使得当

$$q\in X \text{ 和 } d_X(p,q)<\varphi(p) \text{ 有 } d_Y(f(p),f(q))<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

设$J(p)$是满足

$$d_X(p,q)<\frac{1}{2}\varphi(p) \tag{17}$$

的一切$q\in X$的集. 由于$p\in J(p)$,所以一切集$J(p)$构成的组是X的一个开覆盖;再由于是紧的,X中存在着点$p_1,\cdots,p_n$组成的有

限集，使得

$$X \subset J(p_1) \cup \cdots \cup J(p_n). \tag{18}$$

我们取

$$\delta = \frac{1}{2} \min [\varphi(p_1), \cdots, \varphi(p_n)], \tag{19}$$

那么 $\delta > 0$.（这就是紧性定义中固有的，覆盖的有限性之所以不可缺少的所在．有限多个正数的最小数是正数，至于无限多个正数的下确界却很可能是 0．）

现在设 p 和 q 是 X 中合于 $d_X(p, q) < \delta$ 的点．根据 (18) 一定有一个整数 m，$1 \leqslant m \leqslant n$，使得 $p \in J(p_m)$，因而

$$d_X(p, p_m) < \frac{1}{2}\varphi(p_m) \tag{20}$$

于是又得到

$$d_X(q, p_m) \leqslant d_X(p, q) + d_X(p, p_m) < \delta + \frac{1}{2}\varphi(p_m) \leqslant \varphi(p_m).$$

最后，由(16)就可证明

$$d_Y(f(p), f(q)) \leqslant d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(q), f(p_m)) < \varepsilon.$$

证完．

在习题 10 中指出了另一种证法．

现在来证明，在定理 4.14, 4.15, 4.16 及 4.19 的题设中，紧性是不可缺少的．

4.20 定理 设 E 是 R^1 中的不紧的集．那么

(a) 有在 E 上连续却不是有界的函数．

(b) 有在 E 上连续且有界，却没有最大值的函数．

此外，如果 E 又是有界的，那么

(c) 有在 E 上连续却不一致连续的函数．

证 先设 E 是有界的，因此有一个点设为 x_0，它是 E 的极限点，却不是 E 的点．考虑

$$f(x)=\frac{1}{x-x_0}\quad (x\in E). \tag{21}$$

这个函数在 E 上连续(定理 4.9),但显然无界. 为了看出(21)不一致连续,设 $\varepsilon>0$ 与 $\delta>0$ 是任意的,并且取一点 $x\in E$ 使 $|x-x_0|<\delta$, 取一个与 x_0 足够近的 t, 这时尽管 $|t-x|<\delta$ 还是可以使得 $|f(t)-f(x)|$ 大于 ε. 因为对于每个 $\delta>0$ 都这样, 所以 f 在 E 上不一致连续.

由

$$g(x)=\frac{1}{1+(x-x_0)^2}\quad (x\in E) \tag{22}$$

给出的函数 g 在 E 上连续;又因 $0<g(x)<1$, 那么 g 也是有界的; 显然

$$\sup_{x\in E} g(x)=1,$$

然而对于一切 $x\in E$, $g(x)<1$; 所以 E 上没有最大值.

我们已经对有界集 E 证明了这定理. 现在假设 E 是无界的. 这时, $f(x)=x$ 可以证实(a), 而

$$h(x)=\frac{x^2}{1+x^2}\quad (x\in E) \tag{23}$$

可以证实(b), 这因为

$$\sup_{x\in E} h(x)=1,$$

并且对一切 $x\in E$, $h(x)<1$.

如果从假设中去掉有界性, 论断(c)就不成立了. 例如, 设 E 是一切整数的集, 那么定义在 E 上的每个函数都在 E 上一致连续. 为了明白这一点, 只需取定义 4.18 中的 $\delta<1$.

我们在本节最后, 证明定理 4.17 中的紧性也是不可缺少的.

4.21 例 设 X 是实直线上的半开区间 $[0, 2\pi)$, Y 是一切到原点的距离为 1 的点组成的圆, 并且 f 是由

(24) $$f(t)=(\cos t, \sin t) \qquad (0\leqslant t<2\pi)$$

定义的，使X映满Y的映射，三角函数余弦与正弦的连续性，以及它们的周期性将在第八章中建立. 使用这些结果，容易看出，f是把X映满Y的连续1-1映射.

然而，逆映射（它存在，因为f是一对一的并且是映满的）在点$(1,0)=f(0)$不连续. 当然，这个例中的X不是紧的.（尽管Y是紧的，而f^{-1}还是不连续，注意到这一点是有益的.）

连续性与连通性

4.22 定理 设f是把连通的度量空间X映入度量空间Y内的连续映射，E是X的连通子集，那么$f(E)$是连通的.

证 假如A, B是Y的两个分离的不空子集，而$f(E)=A\cup B$. 令$G=E\cap f^{-1}(A)$, $H=E\cap f^{-1}(B)$.

于是$E=G\cup H$，且G和H都不空.

因$A\subset\bar{A}$（A的闭包），所以$G\subset f^{-1}(\bar{A})$. 因为f连续，所以$f^{-1}(\bar{A})$是闭集，因之$\bar{G}\subset f^{-1}(\bar{A})$. 于是$f(\bar{G})\subset\bar{A}$. 因$f(H)=B$且$\bar{A}\cap B$是空集. 所以$\bar{G}\cap H$是空集.

同理可知$G\cap\bar{H}$是空集. 因此G与H是分离的. 但当E是连通集时，这不可能.

4.23 定理 设f是区间$[a,b]$上的连续实函数. 如果$f(a)<f(b)$，并且c是一个合于$f(a)<c<f(b)$的数，那么必有一点$x\in(a,b)$使$f(x)=c$.

当然，如果$f(a)>f(b)$也有类似的结果成立. 粗略地说，这定理是说连续实函数能取得一个区间的一切中间值.

证 根据定理2.47，$[a, b]$是连通的，于是定理4.22说明$f([a,b])$是R^1的连通子集，如果再一次借助于定理2.47便得到所要证的论断.

4.24 评注 初看起来，好象定理 4.23 有一条逆定理，即是说或许会这样想：如果对于任何两点 $x_1<x_2$ 以及 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的任一数 c 都有 (x_1,x_2) 中的一点 x，使 $f(x)=c$，那么 f 必须连续.

从例 4.27(*d*)可以得出结论：并不如此.

间断

如果 x 是函数 f 的定义域中的一点，而在这点 f 不连续，那么我们说 f 在 x 间断. 如果 f 定义在一个闭区间或定义在一个开区间上，那么习惯上把间断分为两类. 在讲这分类之前，我们必须定义 f 在 x 的右极限和左极限，对此，分别用 $f(x+)$ 和 $f(x-)$ 表示它们.

4.25 定义 设 f 定义在 (a,b) 上，考虑任一点 x，$a\leqslant x<b$. 如果对于 $(x,\ b)$ 中一切满足 $t_n\to x$ 的序列 $\{t_n\}$ 来说，$f(t_n)\to q$（当 $n\to\infty$），那么我们就写成

$$f(x+)=q.$$

为了对于 $a<x\leqslant b$，得到 $f(x-)$ 的定义，我们就把序列 $\{t_n\}$ 限制在 (a,x) 之内.

显然，在 (a,b) 的任一点 x，$\lim\limits_{t\to x}f(t)$ 存在，当且仅当

$$f(x+)=f(x-)=\lim_{t\to x}f(t).$$

4.26 定义 设 f 定义在 $(a,\ b)$ 上，如果 f 在一点 x 间断，并且如果 $f(x+)$ 和 $f(x-)$ 都存在，就说 f 在 x 发生了第一类间断，或简单间断. 其它的间断称为第二类间断.

函数发生简单间断的方式有两种：$f(x+)\neq f(x-)$，（在这情况下数值 $f(x)$ 无关紧要）或 $f(x+)=f(x-)\neq f(x)$.

4.27 例

(*a*) 定义

$$f(x)=\begin{cases}1 & (\text{当 } x \text{ 是有理数}),\\ 0 & (\text{当 } x \text{ 是无理数}).\end{cases}$$

这时 f 在每个点 x 发生一次第二类间断,因为 $f(x+)$ 和 $f(x-)$ 都不存在.

(*b*) 定义

$$f(x)=\begin{cases}x & (\text{当 } x \text{ 是有理数}),\\ 0 & (\text{当 } x \text{ 是无理数}).\end{cases}$$

这时 f 在 $x=0$ 连续,而在每个其它的点发生第二类间断.

(*c*) 定义

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & (-3<x<-2),\\ -x-2 & (-2\leqslant x<0),\\ x+2 & (0\leqslant x<1).\end{cases}$$

这时 f 在 $x=0$ 发生一次简单间断,而在 $(-3,1)$ 的其它每个点连续.

(*d*) 定义

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

因为 $f(0+)$ 和 $f(0-)$ 都不存在,所以 f 在 $x=0$ 发生一次第二类间断.我们尚未证明 $\sin x$ 是连续函数.如果我们暂时承认这个结果,那么定理 4.7 就说明 f 在每个点 $x\neq 0$ 连续.

单调函数

现在我们来研究那些在一个给定开区间上不减的(或不增)的函数.

4.28 定义 设 f 是 (a, b) 上的实函数.如果当 $a<x<y<b$

时有 $f(x)\leqslant f(y)$，便说 f 在 (a,b) 上单调递增. 如果把后一个不等式掉转方向，就得到单调递减函数的定义了. 单调函数类既包含递增的也包含递减的函数.

4.29 定理 设 f 在 (a,b) 上单调递增. 那么在 (a,b) 的每个点 x, $f(x+)$ 与 $f(x-)$ 都存在. 更确切些,

$$\sup_{a<t<x} f(t)=f(x-)\leqslant f(x)\leqslant f(x+)=\inf_{x<t<b} f(t) \tag{25}$$

此外，如果 $a<x<y<b$，那么

$$f(x+)\leqslant f(y-) \tag{26}$$

关于单调递减的函数，显然有类似的结果.

证 根据假设，$f(t)$ 在 $a<t<x$ 上的值的集，以数 $f(x)$ 为上界，因此有最小上界，把它记作 A. 显然 $A\leqslant f(x)$，我们需证 $A=f(x-)$.

设有 $\varepsilon>0$. 从 A 的定义(它是最小上界)，必然存在着 $\delta>0$，使得当 $a<x-\delta<x$，有

$$A-\varepsilon<f(x-\delta)\leqslant A. \tag{27}$$

由于 f 是单调的，所以有

$$f(x-\delta)\leqslant f(t)\leqslant A \qquad (x-\delta<t<x). \tag{28}$$

把(27)式和(28)式结合起来，我们就能看到

$$|f(t)-A|<\varepsilon \qquad (x-\delta<t<x).$$

所以 $f(x-)=A$.

用完全相同的方法可以证明(25)式的后一半.

其次，如果 $a<x<y<b$，从(25)式就知道

$$f(x+)=\inf_{x<t<b} f(t)=\inf_{x<t<y} f(t). \tag{29}$$

这后一步相等是把(25)应用到 (a,y) (以代替 (a,b))得出来的. 类似地,

$$f(y-)=\sup_{a<t<y} f(t)=\sup_{x<t<y} f(t). \tag{30}$$

比较(29)和(30)两式，就得出(26)来了.

推论 单调函数没有第二类间断.

这推论蕴含着如下理论，即是单调函数至多在一个可数点集上间断. 习题 17 里有一个一般的定理，也列出了证明要点. 这里我们讲一个适用于单调函数的简单证明，而不必引用这个一般定理.

4.30 定理 设 f 在 (a, b) 上单调，那么 (a, b) 中使 f 间断的点的集至多是可数的.

证 为了确定起见，假定 f 是递增的，并设 E 是使 f 间断的点的集.

对于 E 的每个点 x，我们都联系上一个满足

$$f(x-)<r(x)<f(x+)$$

的有理数 $r(x)$.

由于 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1+)\leqslant f(x_2-)$，所以 $x_1\neq x_2$ 时 $r(x_1)\neq r(x_2)$.

这样就在集 E 与有理数集的一个子集之间建立了 1-1 对应. 我们知道，后者是可数的.

4.31 评注 应该注意到一个单调函数的间断点不一定是孤立点. 事实上，给定 (a, b) 的任一可数子集 E，甚至它可以是稠密的，我们总能造一个函数 f，在 (a, b) 上单调，在 E 的每一点间断，并且没有 (a, b) 的其它点使 f 间断.

为了证明这一点，设 E 的点排成一个序列 $\{x_n\}$，$n=1, 2, 3, \cdots$. 设 $\{c_n\}$ 是一个正数序列，$\sum c_n$ 收敛. 定义

(31) $$f(x)=\sum_{x_n<x}c_n\quad(a<x<b)$$

这个求和的方法，照下边这样来理解：对那些使 $x_n<x$ 的指标 n 求和. 如果没有点 x_n 在 x 的左边，那么，这个和里没有东西，

按通常的约定，定义它为 0. 由于(31)绝对收敛，各项排列的顺序无关紧要.

下列 f 的性质的证明留给读者:

(a) f 在(a,b)上单调递增;

(b) f 在 E 的每个点间断；事实上,

$$f(x_n+)-f(x_n-)=c_n.$$

(c) f 在(a,b)的其它每个点连续.

其次，不难看出在$(a,\ b)$的所有点上 $f(x-)=f(x)$. 如果一个函数 f 满足这个条件，我们就说 f 左连续. 如果在(31)中是遍取一切使 $x_n\leqslant x$ 的指标来求和的，就在 $(a,\ b)$ 的每一点 $f(x+)=f(x)$, f 就是右连续的.

这一类函数还可以用其它的方法来定义，作为一例请参看定理 6.16.

无限极限与在无穷远点的极限

为了使我们能在广义实数系中作运算，我们用邻域的说法把定义 4.1 重述一遍，借以扩大它的范围.

对于任一实数 x，我们已经定义了 x 的邻域就是任一开区间 $(x-\delta,x+\delta)$.

4.32 定义 对于任一实数 c，合于 $x>c$ 的实数 x 的集叫做 $+\infty$的一个邻域，记作$(c,+\infty)$. 类似地，集$(-\infty,c)$是$-\infty$的一个邻域.

4.33 定义 设 f 是定义在 E 上的实函数，A 与 x 在广义实数系中. 如果对于 A 的每个邻域 U 存在着 x 的一个邻域 V，使得 $V\cap E$ 不空，并且对一切 $t\in V\cap E$, $t\neq x$, 有 $f(t)\in U$. 我们说

$$\text{当 } t\to x \text{ 时}\quad f(t)\to A$$

稍一考虑即可看出，当 A 和 x 是实数时，这与定义 4.1 是一

致的.

同定理 4.4 类似的定理仍然成立. 它的证明并没有什么新的东西. 为了完备起见, 我们把它叙述出来.

4.34 定理 设 f 与 g 定义在 E 上, 假定当 $t\to x$ 时

$$f(t)\to A,\quad g(t)\to B;$$

那么

(a) $f(t)\to A'$ 则有 $A'=A$,

(b) $(f+g)(t)\to A+B$,

(c) $(fg)(t)\to AB$,

(d) $(f/g)(t)\to A/B$

只要(b), (c), (d)的右端有定义.

注意 $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, ∞/∞, $A/0$ 是没有定义的. (参看定义 1.23.)

习题

1. 设 f 是定义在 R^1 上的实函数, 它对于每个 $x\in R^1$, 满足

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x-h)]=0$$

这是不是意味着 f 连续呢?

2. 如果 f 是把度量空间 X 映入度量空间 Y 内的连续映射. 证明对一切集 $E\subset X$,

$$f(\bar{E})\subset\overline{f(E)},$$

($\bar{E}$ 是 E 的闭包). 举例说明 $f(\bar{E})$ 能够是 $\overline{f(E)}$ 的真子集.

3. 设 f 是度量空间 X 上的连续实函数, 令 $Z(f)$ (f 的零点集)是使 $f(p)=0$ 的一切 $p\in X$ 所成的集. 证明 $Z(f)$ 是闭集.

4. 设 f 与 g 是把度量空间 X 映入度量空间 Y 内的连续映射, E 是 X 的稠密子集. 证明 $f(E)$ 在 $f(X)$ 中是稠密的. 如果对一切 $p\in E$, $g(p)=f(p)$, 证明对一切 $p\in X$, $g(p)=f(p)$. (换句话说, 连续映射被它的定义域的一个稠密子集所确定).

5. 设 f 是定义在闭集 $E\subset R^1$ 上的连续实函数. 证明存在着 R^1 上的连

续实函数 g，使得 $g(x)=f(x)$ 对一切 $x\in E$ 成立.（这样的函数 g 叫做 f 的从 E 到 R^1 的连续开拓.）证明如果去掉"闭"字，这个结论就可能不成立. 试把这个结论扩充到向量值函数上去. 提示：让 g 的图象在组成 E 的余集的每个开区间上，是直线段（参看第二章习题 29）. 如果把 R^1 换成任意的度量空间，这个结论仍然成立，但是它的证明就不这么简单了.

6. 如果 f 定义在 E 上，那么 f 的图象就是点 $(x, f(x))$ 所成的集，其中 $x\in E$. 特别地如果 E 是实数的一个集，并且 f 还是实值的，那么 f 的图象便是平面的一个子集.

设 E 是紧的，证明：f 在 E 上连续当且仅当它的图象是紧的.

7. 如果 $E\subset X$，且 f 是定义在 X 上的函数，那么 f 在 E 上的约束，指的是这样一个函数 g，它的定义域是 E，并且对于 $p\in E$，$g(p)=f(p)$. 在 R^2 上定义 f 与 g：$f(0,0)=g(0,0)=0$；而当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f(x,y)=xy^2/(x^2+y^4)$，$g(x,y)=xy^2/(x^2+y^6)$. 证明 f 在 R^2 上有界，g 在 $(0,0)$ 的每个邻域中无界，并且 f 在 $(0,0)$ 不连续，但是 f 与 g 在 R^2 中每一直线上的约束却都是连续的.

8. 设 f 是 R^1 中有界集 E 上的一致连续实函数. 证明 f 在 E 上有界.

如果把 E 的有界性从假设中去掉，证明这个结论不成立.

9. 证明，一致连续的定义中的要求，可以用集的直径的说法改述如下：对于每个 $\varepsilon>0$，存在着 $\delta>0$，对于一切 $\operatorname{diam}E<\delta$ 的 $E\subset X$ 来说，$\operatorname{diam}f(E)<\varepsilon$.

10. 把下列对定理 4.19 所作的另一种证明，详细地补充起来：如果 f 不一致连续，那么对于某个 $\varepsilon>0$，有 X 里的两个序列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$，虽然 $d_X(p_n,q_n)\to0$，但是 $d_Y(f(p_n),f(q_n))>\varepsilon$. 用定理 2.37 去找矛盾.

11. 设 f 是把度量空间 X 映入度量空间 Y 内的一致连续映射. 证明如果 $\{x_n\}$ 是 X 中的柯西序列，那么 $\{f(x_n)\}$ 就是 Y 中的柯西序列. 利用这个结果，对习题 13 中所说的定理，作另一种证明.

12. 一致连续函数的一致连续函数是一致连续函数.

把这句话更精确地叙述出来，并证明它.

13. 设 E 是度量空间 X 的稠密子集. 再设 f 是在 E 上定义的一致连续的实函数. 证明 f 有一个从 E 到 X 的连续开拓（名词见习题 5）（唯一性是习题 4 的直接结果）.

提示：对于每个 $p\in X$ 和每个正整数 n，把满足 $d(p,q)<\frac{1}{n}$ 的一切 $q\in E$ 的集记为 $V_n(p)$．用习题 9 证明 $f(V_1(p)), f(V_2(p)), \cdots$ 各集的闭包的交只有一个点，比如说是 R^1 中的 $g(p)$．证明，如此定义的函数 g，就是所求的 f 的开拓．

能把值域空间 R^1 换成 R^k 吗？换成任何紧度量空间行吗？换成任何完备度量空间，或换成任何度量空间行不行？

14. 令 $I=[0,1]$ 是单位闭区间．设 f 是把 I 映入 I 内的连续映射．证明至少有一个 $x\in I$，满足 $f(x)=x$．

15. 设 f 是把 X 映 Y 内的映射．如果它把 X 中的每个开集 V 映成 Y 中的开集 $f(V)$，就说 f 是开映射．

证明，把 R^1 映入 R^1 内的每个连续开映射是单调的．

16. 令 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，即 $[x]$ 是满足 $x-1<[x]\leq x$ 的整数．又设 $(x)=x-[x]$ 表示 x 的小数部分．函数 $[x]$ 与 (x) 各有什么样的间断？

17. 设 f 是定义在 (a,b) 上的实函数．证明使 f 发生简单间断的点所成的集是至多可数的．提示：设 E 是使 $f(x-)<f(x+)$ 的点 x 所成的集．把 E 的每个点 x，联系上有理数的一个三元组 (p,q,r)，p,q,r 要满足

(a) $f(x-)<p<f(x+)$，

(b) $a<q<t<x$ 蕴含 $f(t)<p$，

(c) $x<t<r<b$ 蕴含 $f(t)>p$．

一切这样的三元组构成可数集．证明每个三元组至多与 E 的一个点相联系．对其它可能类型的简单间断点，可类似地处理．

18. 每个有理数 x 能写成 $x=m/n$ 的形式；其中 $n>0$，并且 m,n 是没有公因数的整数．当 $x=0$ 时，我们取 $n=1$．考虑在 R^1 上，由

$$f(x)=\begin{cases}0 & (\text{当 } x \text{ 是无理数})\\ \dfrac{1}{n} & (\text{当 } x=m/n)\end{cases}$$

定义的函数 f．证明 f 在每个无理点连续，并且在每个有理点，f 有一个简单间断．

19. 设 f 是定义在 R^1 上的实函数，并且具有中间值性质，也即是：如果 $f(a)<c<f(b)$，那么，在 a,b 之间有一个 x，使 $f(x)=c$．

再假定，当 r 是有理数时，由满足 $f(x)=r$ 的一切 x 组成闭集．

证明 f 是连续函数.

提示：如果 $x_n \to x_0$，但有某个 r，它对于一切 n 总是 $f(x_n) > r > f(x_0)$，那么 x_n 与 x_0 之间一定有个 t_n，$f(t_n)=r$. 于是 $t_n \to x_0$. 找出矛盾.（美国数学月刊 1966 年卷 73，第 782 页. N. J. Fine.）

20. 如果 E 是度量空间 X 的非空子集. 定义 $x \in X$ 到 E 的距离为

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z).$$

(*a*) 证明 $\rho_E(x)=0$ 当且仅当 $x \in \bar{E}$

(*b*) 对一切 $x \in X$，$y \in X$，证明

$$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leqslant d(x, y)$$

然后借此证明 ρ_E 是 X 上的一致连续函数.

提示：$\rho_E(x) \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$，因之

$$\rho_E(x) \leqslant d(x, y) + \rho_E(y).$$

21. 设 K 与 F 是度量空间 X 中的不相交的集，K 是紧的，F 是闭的. 证明 $p \in K$，$q \in F$ 时，必有 $\delta > 0$ 合于 $d(p, q) > \delta$. 提示：ρ_F 是 K 上的连续正值函数.

再证，如果这两个不相交的集都是闭集，但都不是紧集，那么结论可能不成立.

22. 设 A 与 B 是度量空间 X 中的不相交非空闭集，并且定义

$$f(p) = \frac{\rho_A(p)}{\rho_A(p) + \rho_B(p)} \quad (p \in X).$$

证明 f 是 X 上的连续函数，它的值域属于 $[0, 1]$，在 A 上 $f(p)=0$，而在 B 上 $f(p)=1$. 这就建立了习题 3 的一个逆命题：每个闭集 $A \subset X$ 必为 X 上某个实函数 f 的 $Z(f)$.

令

$$V = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right),\ W = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

证明 V 与 W 都是开的，而且不相交. 再证 $A \subset V$，$B \subset W$.（这样，在度量空间中，一对不相交的闭集，能用一对不相交的开集覆盖. 度量空间的这个性质称为正规性）.

23. 定义在 (a, b) 上的实值函数 f 叫做凸的，如果当 $a < x < b$，$a < y < b$，$0 < \lambda < 1$ 时，

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

证明每个凸函数是连续函数. 再证凸函数的递增凸函数是凸函数. (例如, 如果 f 是凸函数, 那么 e^f 也是凸函数.)

如果 f 是 (a, b) 上的凸函数, 并且 $a<s<t<u<b$, 证明

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\leq\frac{f(u)-f(s)}{u-s}\leq\frac{f(u)-f(t)}{u-t}.$$

24. 设 f 是定义在 (a, b) 上的连续实值函数, 并且对于一切 $x, y\in(a, b)$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2},$$

证明 f 是凸函数.

25. 如果 $A\subset R^k$ 及 $B\subset R^k$, 定义 $A+B$ 为由一切的和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 组成的集, 这里 $\mathbf{x}\in A$, $\mathbf{y}\in B$.

(a) 如果 K 是 R^k 里的紧子集, 而 C 是 R^k 里的闭子集. 证明 $K+C$ 是闭集.

提示: 取 $\mathbf{z}\notin K+C$, 令 $F=\mathbf{z}-C$ 为由一切 $\mathbf{z}-\mathbf{y}$ 组成的集, 这里 $\mathbf{y}\in C$. 那么 K 与 F 不相交. 象习题 21 那样选一个 δ. 证明以 $\mathbf{z}$ 为球心, 以 δ 为半径的球与 $K+C$ 不相交.

(b) 设 α 是个无理数, C_1 为一切整数构成的集, C_2 是一切 $n\alpha$ 构成的集, $n\in C_1$. 证明 C_1 与 C_2 是 R^1 的闭子集, 但它们的和 C_1+C_2 不闭; 这后一点由证明 C_1+C_2 是 R^1 的可数稠子集推得.

26. 设 X, Y, Z 是度量空间, Y 紧. 设 f 把 X 映入 Y 内, g 是 Y 到 Z 内的一一连续映射, 并且对于 $x\in X$, 令 $h(x)=g(f(x))$.

证明: 如果 h 一致连续, 那么, f 就一致连续.

提示: g^{-1} 的定义域 $g(Y)$ 紧, 而 $f(x)=g^{-1}(h(x))$.

再证, 如果 h 连续, f 就连续.

(把例 4.21 修改一下, 或者举个其它的例子) 证明 Y 是紧的这个假定不能省略, 即使 X 和 Z 都是紧的也是这样.

第五章 微 分 法

本章除最后一节外，我们集中注意于定义在闭区间或开区间上的实函数，这不是为了方便，而是因为当我们从实函数转到向量值函数的时候，本质的差别就出现了，定义在 R^k 上的函数的微分法，以后在第九章讨论.

实函数的导数

5.1 定义 设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的实值函数，对于任意的 $x\in[a, b]$，作(差)商

$$\varphi(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \qquad (a<t<b,\ t\neq x), \tag{1}$$

然后定义

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\varphi(t), \tag{2}$$

但是这里要假定等式右端(按定义 4.1)的极限存在.

于是联系着函数 f 有一个函数 f'，它的定义域是 $[a, b]$ 中所有使极限(2)存在的 x 点的集，f' 叫做 f 的导(函)数.

如果 f' 在 x 点有定义，便说 f 在 x 点可微(或可导). 如果 f' 在集 $E\subset[a, b]$ 的每一点有定义，便说 f 在 E 上可微.

可以在(2)内考虑左极限或右极限，这就引出了左导数和右导数的定义. 特别是在端点 a, b 上，导数(如果存在的话)分别是右导数和左导数. 但是我们对单侧导数不作详细讨论.

如果 f 定义在开区间 (a, b) 内，且若 $a<x<b$，这时和前边一样，$f'(x)$ 还是由(1)，(2)来定义，但是这时 $f'(a)$ 和 $f'(b)$ 就没有定

义了.

5.2 定理 设 f 定义在 $[a, b]$ 上. 如果 f 在点 $x\in[a, b]$ 可微, 那么 f 在 x 点连续.

证 由定理 4.4, 当 $t\to x$ 时, 有

$$f(t)-f(x)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\cdot(t-x)\to f'(x)\cdot 0=0$$

证毕.

定理的逆命题不成立. 在某些孤立点不可微的连续函数是不难制造的. 在第七章, 甚至我们还将得到一个在整个直线上连续但处处不可微的函数.

5.3 定理 设 f 和 g 定义在 $[a, b]$ 上, 并且都在点 $x\in[a, b]$ 可微, 那么 $f+g, fg, f/g$ 便也在 x 点可微, 而且:

(a) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$;

(b) $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

(c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$.

对于(c), 自然要假定 $g(x)\neq 0$.

证 由定理 4.4, (a)显然成立.

令 $h=fg$, 那么

$$h(t)-h(x)=f(t)[g(t)-g(x)]+g(x)[f(t)-f(x)].$$

两端除以 $t-x$, 再注意当 $t\to x$ 时 $f(t)\to f(x)$ (定理 5.2). (b)就被证明了.

再令 $h=f/g$, 那么

$$\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=\frac{1}{g(t)g(x)}\left[g(x)\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f(x)\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right].$$

令 $t\to x$, 并且应用定理 4.4 及定理 5.2, 便可以得到(c).

5.4 例 显然任何常数的导数是零. 如果 f 定义为 $f(x)=x$，那么 $f'(x)=1$. 重复运用 (b) 和 (c)，便可以证明 x^n 是可微的，导函数为 nx^{n-1}，这里的 n 是任何整数. (如果 $n<0$，必须限于 $x\neq 0$). 于是每个多项式是可微的，因而每个有理函数除掉在那些使分母为零的点以外也是可微的.

下一定理，通常称为微分法的"链规则"，用来求复合函数导数，它可能是求导数的最重要的定理. 在第九章还会看到它的更普遍的说法.

5.5 定理 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$f'(x)$ 在某点 $x\in[a,b]$ 存在，g 定义在一个包含 f 的值域的区间 I 上，又在点 $f(x)$ 可微. 如果

$$h(t)=g(f(t)), \qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

那么 h 在 x 点可微，并且

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x). \tag{3}$$

证 设 $y=f(x)$，从导数定义，知道

$$f(t)-f(x)=(t-x)[f'(x)+u(t)], \tag{4}$$

$$g(s)-g(y)=(s-y)[g'(y)+v(s)], \tag{5}$$

这里 $t\in[a,b]$，$s\in I$，并且当 $t\to x$ 时，$u(t)\to 0$，当 $s\to y$ 时 $v(s)\to 0$. 现在令 $s=f(t)$，先用 (5)，然后用 (4) 便可以得到

$$\begin{aligned}h(t)-h(x)&=g(f(t))-g(f(x))\\&=[f(t)-f(x)]\cdot[g'(y)+v(s)]\\&=(t-x)\cdot[f'(x)+u(t)]\cdot[g'(y)+v(s)]\end{aligned}$$

设 $t\neq x$，

$$\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=[g'(y)+v(s)]\cdot[f'(x)+u(t)]. \tag{6}$$

由于 f 的连续性，知道当 $t\to x$ 时，$s\to y$，于是 (6) 式右端趋于 $g'(y)f'(x)$，这就得到了 (3) 式.

5.6 例

(a) 设 f 定义为

(7) $$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0). \end{cases}$$

先承认 $\sin x$ 的导数是 $\cos x$(我们在第八章里讨论三角函数). 当 $x\neq 0$ 时我们可以运用定理 5.3 及定理 5.5, 得到

(8) $$f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\quad (x\neq 0).$$

在 $x=0$, 由于 $1/x$ 无定义, 便不能用这两个定理了, 现在直接按导数定义来计算. 对于 $t\neq 0$

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\sin\frac{1}{t}.$$

当 $t\to 0$ 时, 这不能趋于任何极限, 所以 $f'(0)$ 不存在.

(b) 设 f 定义为

(9) $$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

像刚才一样, 可以求得

(10) $$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\quad (x\neq 0)$$

在 $x=0$, 按导数定义计算, 得到

$$\left|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right|=\left|t\sin\frac{1}{t}\right|\leqslant|t|\qquad (t\neq 0)$$

令 $t\to 0$, 就知道

(11) $$f'(0)=0$$

所以 f 在所有点 x 可微, 但是 f' 不是连续函数, 这因为(10)式右端第二项 $\cos\frac{1}{x}$, 当 $x\to 0$ 时不趋于任何极限.

中值定理

5.7 定义 设 f 是定义在度量空间 X 上的实值函数，称 f 在点 $p\in X$ 取得局部极大值，如果存在着 $\delta>0$，当 $d(p,q)<\delta$ 而且 $q\in X$ 时有 $f(q)\leqslant f(p)$.

局部极小值可以类似定义.

下面的定理是导数的许多应用的基础.

5.8 定理 设 f 定义在 $[a,b]$ 上；$x\in[a,b]$，如果 f 在 x 点取得局部极大值而且 $f'(x)$ 存在，那么，$f'(x)=0$.

对于局部极小值的类似的命题，自然也是对的.

证 按照定义 5.7 选取 δ，那么

$$a<x-\delta<x<x+\delta<b$$

若是 $x-\delta<t<x$，就应该

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\geqslant 0$$

令 $t\to x$，便知道 $f'(x)\geqslant 0$.

若是 $x<t<x+\delta$，就应该

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\leqslant 0,$$

这又将表示 $f'(x)\leqslant 0$，所以 $f'(x)=0$.

5.9 定理 设 f 与 g 是 $[a,b]$ 上的连续实函数，它们在 (a,b) 中可微，那么便有一点 $x\in(a,b)$，使得

$$[f(b)-f(a)]g'(x)=[g(b)-g(a)]f'(x).$$

注意：并不要求在区间端点上可微.

证 令

$$h(t)=[f(b)-f(a)]g(t)-[g(b)-g(a)]f(t),\ a\leqslant t\leqslant b.$$

那么 h 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，而且

(12) $$h(a)=f(b)g(a)-f(a)g(b)=h(b).$$

要证本定理，就得证明在某点 $x\in(a,b)$，$h'(x)=0$.

如果 h 是常数，那么不论在哪一点 $x\in(a,b)$，都有 $h'(x)=0$. 如果有某个 $t\in(a,b)$ 使得 $h(t)>h(a)$，设 x 是使 h 达到最大值的点（定理 4.16），从（12）来看，$x\in(a,b)$，于是定理 5.8 说明 $h'(x)=0$. 如果有某个 $t\in(a,b)$ 使得 $h(t)<h(a)$，只要把在 $[a,b]$ 内的那个 x 选得使 h 达到它的最小值，上述论证仍然有效.

这个定理常常叫做一般中值定理；下面的特殊情形就是通常所说的中值定理.

5.10 定理 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的实连续函数，在 (a,b) 内可微，那么一定有一点 $x\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x).$$

证 在定理 5.9 中取 $g(x)=x$ 即得.

5.11 定理 设 f 在 (a,b) 内可微，

(a) 如果对于所有 $x\in(a,b)$，$f'(x)\geqslant 0$，那么 f 便是单调递增的.

(b) 如果对于所有 $x\in(a,b)$，$f'(x)=0$，那么 f 便是常数.

(c) 如果对于所有 $x\in(a,b)$，$f'(x)\leqslant 0$，那么 f 便是单调递减的.

证 所有结论都可以从下列等式获得：

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(x),$$

这等式对于 (a,b) 中的任意一对点 x_1，x_2 都成立，而 x 是 x_1 与 x_2 之间的某个点.

导数的连续性

我们已经看到（例 5.6(b)）一个函数 f 可以有处处存在、但在某些点间断的导数 f'. 可是，并不是每个函数必是个导函数. 特

别的一点是，在一个闭区间上处处存在的导函数与闭区间上的连续函数之间，却有一个重要的共同性质：任何中间值都能取到(比较定理 4.23). 确切的表述是

5.12 定理 设 f 是 $[a, b]$ 上的实值可微函数，再设 $f'(a)<\lambda<f'(b)$，那么必有一点 $x\in(a, b)$ 使 $f'(x)=\lambda$.

对于 $f'(a)>f'(b)$ 的情形，当然也有类似的结果.

证 令 $g(t)=f(t)-\lambda t$. 于是 $g'(a)<0$，从而有某个 $t_1\in(a, b)$ 使得 $g(t_1)<g(a)$；同样，$g'(b)>0$，从而有某个 $t_2\in(a, b)$ 使得 $g(t_2)<g(b)$. 因此，据定理 4.16，g 在 (a, b) 的某点 x 上达到它在 $[a, b]$ 上的最小值. 再据定理 5.8，$g'(x)=0$. 因而 $f'(x)=\lambda$.

推论 如果 f 在 $[a, b]$ 上可微，那么 f' 在 $[a, b]$ 上便不能有简单间断.

但是 f' 很可能有第二类间断.

L'Hospital 法则

下面的定理在求极限时时常用到.

5.13 定理 假设实函数 f 和 g 在 (a, b) 内可微，而且对于所有 $x\in(a, b)$，$g'(x)\neq 0$. 这里 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$. 已知

(13) 当 $x\to a$ 时，$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\to A$，

如果

(14) 当 $x\to a$ 时，$f(x)\to 0$，$g(x)\to 0$，

或是

(15) 当 $x\to a$ 时，$g(x)\to+\infty$，

那么

(16) 当 $x\to a$ 时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}\to A$.

如果是 $x \to b$, 或者(15)中如果是 $g(x) \to -\infty$, 各种类似的叙述自然也都是正确的. 注意, 我们现在是按照定义 4.33 推广了的意义来使用极限概念的.

证 先考虑 $-\infty \leqslant A < +\infty$ 的情形. 选择一个实数 q 使 $A < q$, 再选一个 r 使 $A < r < q$. 由 (13) 知道有一点 $c \in (a, b)$, 使得当 $a < x < c$ 有

(17)
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r.$$

如果 $a < x < y < c$, 那么定理 5.9 说明有一点 $t \in (x, y)$ 使得

(18)
$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r.$$

先看(14)成立的情形. 在(18)中令 $x \to a$, 便看到

(19)
$$\frac{f(y)}{g(y)} \leqslant r < q \quad (a < y < c).$$

再看(15)成立的情形. 在(18)中让 y 固定, 我们可以选一点 $c_1 \in (a, y)$, 使 $a < x < c_1$ 能够保证 $g(x) > g(y)$ 及 $g(x) > 0$. 将(18)两端乘以 $[g(x)-g(y)]/g(x)$, 便得到

(20)
$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad (a < x < c_1).$$

如果在(20)式中令 $x \to a$, (15)式说明必有一点 $c_2 \in (a, c_1)$ 使

(21)
$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \qquad (a < x < c_2).$$

总之, (19)与(21)式都说明对于任意的 q, 只要 $A < q$, 便有一点 c_2, 使得 $a < x < c_2$ 足以保证 $f(x)/g(x) < q$.

同理, 若是 $-\infty < A \leqslant +\infty$, 选择 $p < A$, 便可以找到一点 c_3, 使得

(22)
$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (a < x < c_3).$$

结合起这两方面就得到了(16)式.

高阶导数

5.14 定义 如果 f 在一个区间上有导函数 f'，而 f' 自身又是可微的，把 f' 的导函数记作 f''，叫做 f 的二阶导数. 照这样继续下去就得到

$$f,\ f',\ f'', f^{(3)},\ \cdots,\ f^{(n)},$$

这许多函数，其中每一个是前一个的导函数. $f^{(n)}$ 叫做 f 的 n 阶导函数.

为了要 $f^{(n)}(x)$ 在 x 点存在，$f^{(n-1)}(x)$ 必须在 x 点的某个邻域里存在(当 x 是定义 f 的区间的端点时，$f^{(n-1)}(x)$ 必须在它有意义的那个单侧邻域里存在)，而且 $f^{(n-1)}$ 必须在 x 点可微. 因为 $f^{(n-1)}$ 必须在 x 的邻域里存在，那么，$f^{(n-2)}$ 又必须在 x 的邻域里可微.

Taylor 定理

5.15 定理 设 f 是 $[a,b]$ 上的实函数，n 是正整数，$f^{(n-1)}$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f^{(n)}(t)$ 对每个 $t\in(a,b)$ 存在. 设 α，β 是 $[a,b]$ 中的不同的两点，再规定

$$P(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k, \tag{23}$$

那么，在 α 与 β 之间一定存在着一点 x，使得

$$f(\beta)=P(\beta)+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n. \tag{24}$$

当 $n=1$ 时，这就是中值定理. 一般地说，这定理说明 f 能被一个 $n-1$ 次多项式逼近；如果能知道 $|f^{(n)}(x)|$ 的上界，(24)还可以使我们估计误差.

证 设 M 是由

$$f(\beta)=P(\beta)+M(\beta-\alpha)^n \tag{25}$$

决定的数. 再令

$$(26)\qquad g(t)=f(t)-P(t)-M(t-\alpha)^n\quad(a\leqslant t\leqslant b).$$

现在需要证明在 α 与 β 之间有某个 x 满足 $n!M=f^{(n)}(x)$. 由(23)式及(26)式知道

$$(27)\qquad g^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)-n!M\quad(a<t<b),$$

因而如果能证明 α 与 β 之间有某个 x 使 $g^{(n)}(x)=0$, 证明就完成了.

因为 $P^{(k)}(\alpha)=f^{(k)}(\alpha)$ 对于 $k=0,\cdots,n-1$ 成立, 所以

$$(28)\qquad g(\alpha)=g'(\alpha)=\cdots=g^{(n-1)}(\alpha)=0.$$

M的选取方法说明 $g(\beta)=0$, 由于 $g(\alpha)=g(\beta)=0$, 在 α 与 β 之间有某个 x_1 使 $g'(x_1)=0$(用中值定理), 由于 $g'(\alpha)=g'(x_1)=0$, 在 α 与 x_1 之间有某个 x_2 使 $g''(x_2)=0$, 如此推演 n 次, 达到的结论是: 在 α 与 x_{n-1} 之间有某个 x_n 使 $g^{(n)}(x_n)=0$, x_n 在 α 与 x_{n-1}之间, 必然也在 α 与 β 之间.

向量值函数的微分法

5.16 评注 定义 5.1 可以毫无改变地用到定义在 $[a,\ b]$上的复值函数上, 定理 5.2 及定理 5.3 连同它们的证明依然有效. 如果 f_1 和f_2分别是 f 的实部和虚部. 即如果

$$f(t)=f_1(t)+if_2(t)$$

$(a\leqslant t\leqslant b)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$是实的, 那么显然有

$$(29)\qquad f'(x)=f_1'(x)+if_2'(x).$$

并且 f 在 x 点可微当且仅当 f_1, f_2 都在 x 点可微.

转到一般向量值函数, 就是转到把$[a,\ b]$映入 R^k内的映射 f 时, 仍然可以用定义 5.1 来定义 $f'(x)$. 现在(1)中的 $\varphi(t)$对于每个 t 是 R^k 中的一点, (2)中的极限是对于 R^k 的范数来取的. 换句话说, $f'(x)$是 R^k 中的一点(如果存在的话), 它满足

(30) $$\lim_{t\to x}\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right|=0,$$

f' 仍然是在 R^k 中取值的函数.

如果 $f_1, \cdots, f_k$ 是 f 的分量，就是定理 4.10 中所定义的分量，那么

(31) $$f'=(f_1', \cdots, f_k'),$$

而且 f 在 x 点可微当且仅当 $f_1, \cdots, f_k$ 都在 x 点可微.

定理 5.2 在本节内照样成立，定理 5.3(a)、(b)也成立，只是要把 fg 换作内积 $f\cdot g$(定义 4.3).

但是对于中值定理以及它的一个推论——L'Hospital 法则，情况却发生了变化. 下面两个例子说明它们对于向量值函数不再有效.

5.17 例 对于实数 x，定义

(32) $$f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

(上式可以作为复指数幂 e^{ix} 的定义，在第八章还要充分讨论这些函数). 这时

(33) $$f(2\pi)-f(0)=1-1=0,$$

但是 $$f'(x)=ie^{ix},$$

(34)

所以对于一切实数 x，$|f'(x)|=1$.

于是定理 5.10 在这种情形下不再成立.

5.18 例 在区间 $(0,1)$ 内，定义 $f(x)=x$ 及

(35) $$g(x)=x+x^2e^{i/x^2}.$$

因为对于一切实数 t 都有 $|e^{it}|=1$，这就不难看到

(36) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

其次，

(37) $$g'(x)=1+\left\{2x-\frac{2i}{x}\right\}e^{i/x^2}\quad(0<x<1),$$

所以

(38) $$|g'(x)|\geqslant\left|2x-\frac{2i}{x}\right|-1\geqslant\frac{2}{x}-1.$$

因此

(39) $$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|=\frac{1}{|g'(x)|}\leqslant\frac{x}{2-x},$$

于是

(40) $$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0.$$

(36)与(40)式说明，L'Hospital 法则在这种情形上失效了．还要注意，从(38)来看，在$(0,1)$上 $g'(x)\neq 0$.

然而，中值定理有一个推论对于向量值函数来说仍然适用，如果说用场的话，这个推论差不多和中值定理一样．由定理 5.10 可以直接推出：

(41) $$|f(b)-f(a)|\leqslant(b-a)\sup_{a<x<b}|f'(x)|.$$

5.19 定理 设 f 是把$[a,\ b]$映入 R^k 内的连续映射，并且 f 在(a,b)内可微，那么，必有 $x\in(a,b)$，使得

$$|f(b)-f(a)|\leqslant(b-a)|f'(x)|.$$

证[①] 设 $z=f(b)-f(a)$，且定义

$$\varphi(t)=z\cdot f(t)\quad(a\leqslant t\leqslant b).$$

于是 φ 是$[a,b]$上的实值连续函数，并在$(a,\ b)$内可微．所以由中值定理，必有某个 $x\in(a,b)$使得

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(x)=(b-a)z\cdot f'(x).$$

另一方面，

① V. P. Havin 将本书第二版译成了俄文，并在原证明下边加了这个证明．

$$\varphi(b)-\varphi(a)=z\cdot f(b)-z\cdot f(a)=z\cdot z=|z|^2.$$

用 Schwarz 不等式得到

$$|z|^2=(b-a)|z\cdot f'(x)|\leqslant(b-a)|z||f'(x)|.$$

因此，$|z|\leqslant(b-a)|f'(x)|$. 证毕.

习题

1. 设 f 对于所有实数有定义，并且假定对于一切实数 x 及 y

$$|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2.$$

证明 f 是常数.

2. 设在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，试证 f 在 (a,b) 内严格递增.

又令 g 是 f 的反函数. 试证 g 可微，并且

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}\quad(a<x<b).$$

3. 设 g 是 R^1 上的实函数，并且它的导数有界（比如说 $|g'|\leqslant M$）. 固定了 $\varepsilon>0$，再定义 $f(x)=x+\varepsilon g(x)$. 试证，当 ε 足够小的时候，f 就是 1-1 的.（ε 所可能取的值的集，是能够确定出来的，它只与 M 有关）.

4. 若 $C_0,\cdots,C_n$ 都是实常数，而

$$C_0+\frac{C_1}{2}+\cdots+\frac{C_{n-1}}{n}+\frac{C_n}{n+1}=0,$$

试证方程

$$C_0+C_1x+\cdots+C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n=0$$

在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

5. 设 f 对一切 $x>0$ 有定义并且可微，当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to0$. 令 $g(x)=f(x+1)-f(x)$. 试证 $x\to+\infty$ 时 $g(x)\to0$.

6. 设

(a) f 对于 $x\geqslant0$ 连续，

(b) $f'(x)$ 对于 $x>0$ 存在，

(c) $f(0)=0$，

(d) f' 单调递增.

令

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}\quad(x>0),$$

试证 g 是单调递增的.

7. 设 $f'(x), g'(x)$ 都存在, $g'(x)\neq 0$, $f(x)=g(x)=0$. 试证

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(这对于复值函数也适用).

8. 设 f' 在 $[a,b]$ 上连续, $\varepsilon>0$, $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$. 试证存在着一个这样的 δ: 只要 $0<|t-x|<\delta$, 就有

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

(这可以说成是, 如果 f' 在 $[a,b]$ 上连续, 那么 f 便在 $[a,b]$ 上一致可微). 这对于向量值函数也成立吗?

9. 设 f 是 R^1 上的连续实函数, 对于一切 $x\neq 0$, $f'(x)$ 存在, 并且当 $x\to 0$ 时 $f'(x)\to 3$. 问: $f'(0)$ 是不是存在?

10. 设 f 和 g 都是 $(0,1)$ 上的复值可微函数, 当 $x\to 0$ 时 $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$, $f'(x)\to A$, $g'(x)\to B$, 这里 A, B 是两个复数, $B\neq 0$. 试证

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$$

请与例 5.18 比较. 提示:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{f(x)}{x}-A\right\}\frac{x}{g(x)}+A\cdot\frac{x}{g(x)}.$$

把定理 5.13 应用到 $f(x)/x$ 及 $g(x)/x$ 的实部和虚部上去.

11. 设 f 在 x 的某个邻域内有定义, 并设 $f''(x)$ 存在, 试证

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

举例说明, 即使 $f''(x)$ 不存在, 这个极限也可能存在.

提示: 用定理 5.13.

12. 如果 $f(x)=|x|^3$, 对于所有实数 x 计算 $f'(x)$ 及 $f''(x)$. 证明 $f^{(3)}(0)$ 不存在.

13. 设 a, c 都是实数, $c>0$, 而 f 是定义在 $[-1,1]$ 上的函数:

$$f(x)=\begin{cases}x^a\sin(x^{-c}) & (\text{当 } x\neq 0 \text{ 时}),\\ 0 & (\text{当 } x=0 \text{ 时}).\end{cases}$$

试证以下诸命题:

(*a*) 当且仅当 $a>0$ 时，f 是连续函数.

(*b*) 当且仅当 $a>1$ 时，$f'(0)$ 存在.

(*c*) 当且仅当 $a\geqslant 1+c$ 时，f' 有界.

(*d*) 当且仅当 $a>1+c$ 时，f' 连续.

(*e*) 当且仅当 $a>2+c$ 时，$f''(0)$ 存在.

(*f*) 当且仅当 $a\geqslant 2+2c$ 时，f'' 有界.

(*g*) 当且仅当 $a>2+2c$ 时，f'' 连续.

14. 设 f 是 (a, b) 上的可微实函数. 试证：当且仅当 f' 单调递增时 f 才是凸函数. 再假定对于一切 $x\in(a, b)$ $f''(x)$ 存在，试证当且仅当对于一切 $x\in(a, b)$，$f''(x)\geqslant 0$ 时，f 才是凸函数.

15. 设 $a\in R^1$，f 是 (a, ∞) 上的二次可微实函数，M_0，M_1，M_2 分别是 $|f(x)|$，$|f'(x)|$，$|f''(x)|$ 在 (a, ∞) 上的最小上界. 试证

$$M_1^2\leqslant 4M_0M_2.$$

提示：如果 $h>0$，Taylor 定理说明，有某个 $\xi\in(x, x+2h)$，使得

$$f'(x)=\frac{1}{2h}[f(x+2h)-f(x)]-hf''(\xi).$$

因此，

$$|f'(x)|\leqslant hM_2+\frac{M_0}{h}.$$

为了证明 $M_1^2=4M_0M_2$ 确实能够出现，取 $a=-1$，再定义

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & (-1<x<0)\\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & (0\leqslant x<\infty)\end{cases}$$

然后证明 $M_0=1, M_1=4, M_2=4$.

对于向量值函数，$M_1^2\leqslant 4M_0M_2$ 是否还成立？

16. 设 f 在 $(0, \infty)$ 上二次可微，f'' 在 $(0, \infty)$ 上有界，并且当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$. 试证当 $x\to\infty$ 时，$f'(x)\to 0$.

提示：在习题 15 中令 $a\to\infty$.

17. 设 f 是 $[-1, 1]$ 上的三次可微实值函数，

$$f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0$$

试证：一定有某个 $x\in(-1, 1)$，使 $f^{(3)}(x)\geqslant 3$.

注意，对于函数 $\frac{1}{2}(x^3+x^2)$ 来说，等式成立.

提示：在定理 5.15 中取 $\alpha=0, \beta=\pm1$，用来证明存在着 $s\in(0,1)$ 和 $t\in(-1,0)$ 使得

$$f^{(3)}(s)+f^{(3)}(t)=6.$$

18. 设 f 是 $[a,b]$ 上的实值函数，n 是正整数，对于每个 $t\in[a,b]$，$f^{(n-1)}$ 存在．令 α, β 及 P 的定义是 Taylor 定理 5.15 那样的．对于 $t\in[a,b]$，$t\neq\beta$，定义

$$Q(t)=\frac{f(t)-f(\beta)}{t-\beta},$$

并把

$$f(t)-f(\beta)=(t-\beta)Q(t)$$

在 $t=\alpha$ 处微分 $n-1$ 次，就得到 Taylor 定理的下面这种形式：

$$f(\beta)=P(\beta)+\frac{Q^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^n.$$

19. 设 f 在 $(-1,1)$ 上定义，并且 $f'(0)$ 存在．又设 $-1<\alpha_n<\beta_n<1$，而当 $n\to\infty$ 时 $\alpha_n\to0, \beta_n\to0$．定义差商

$$D_n=\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}.$$

试证下面诸命题：

(a) 如果 $\alpha_n<0<\beta_n$，那么 $\lim D_n=f'(0)$．

(b) 如果 $0<\alpha_n<\beta_n$，并且 $\{\beta_n/(\beta_n-\alpha_n)\}$ 有界，那么 $\lim D_n=f'(0)$．

(c) 如果 f' 在 $(-1,1)$ 连续，那么 $\lim D_n=f'(0)$．

试举出一个这样的例子来：f 在 $(-1,1)$ 上可微（但 f' 在 0 点不连续），并且使得 α_n, β_n 这样地趋于零：$\lim D_n$ 存在，但不等于 $f'(0)$．

20. 试述并证明一个这样的不等式：它是由 Taylor 定理推出来的，并且对于向量值函数仍然有效．

21. 设 E 是 R^1 的闭子集．从第四章习题 22 知道，在 R^1 上有一个实连续函数 f，它的零点集是 E．对于每个闭子集 E，是否准能找到这样的函数 f，它在 R^1 上可微，或 n 次可微，甚至任意次可微呢？

22. 设 f 是 $(-\infty,\infty)$ 上的实函数．如果 $f(x)=x$，就说 x 是 f 的不动点．

(a) 如果 f 可微，并且对每个实数 t，$f'(t)\neq1$．试证 f 最多有一个不动点．

(b) 证明函数

$$f(t)=t+(1+e^t)^{-1}$$

虽然对一切实数 t，$0<f'(t)<1$，仍然没有不动点.

(c) 但是，如果有一个常数 $A<1$，对一切实数 t，$|f'(t)|\leqslant A$，试证 f 有不动点 x，并且 $x=\lim x_n$，其中 x_1 是任意一个实数，并且对 $n=1,2,3,\cdots$

$$x_{n+1}=f(x_n).$$

(d) 试证在(c)中所说的方法能够按照曲折的道路

$$(x_1,x_2)\to(x_2,x_2)\to(x_2,x_3)\to(x_3,x_3)\to(x_3,x_4)\to\cdots$$

实现.

23. 函数

$$f(x)=\frac{x^3+1}{3}$$

有三个不动点，比如说是 α,β,γ，

$$-2<\alpha<-1,\ 0<\beta<1,\ 1<\gamma<2.$$

任意取 x_1，而用 $x_{n+1}=f(x_n)$ 来确定 $\{x_n\}$.

(a) 如果 $x_1<\alpha$，试证当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to-\infty$.

(b) 如果 $\alpha<x_1<\gamma$，试证当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to\beta$.

(c) 如果 $\gamma<x_1$，试证当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to+\infty$.

于是，β 能用这方法定出来，但 α,γ 就不能.

24. 习题 22(c)所说的方法，当然也能用于把$(0,\infty)$映到$(0,\infty)$的函数.

固定某个 $\alpha>1$，而令

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\alpha}{x}\right),\quad g(x)=\frac{\alpha+x}{1+x}.$$

f 和 g 都以$\sqrt{\alpha}$为在$(0,\infty)$内的唯一不动点. 试根据 f 和 g 的性质，阐明第三章习题 16 中的收敛速度为什么比习题 17中的收敛速度快得多？(比较 f' 与 g'，画习题 22 所说的曲折路线)

对于 $0<\alpha<1$ 的情形作同一问题.

25. 设 f 在$[a,b]$上二次可微，$f(a)<0$，$f(b)>0$，对一切 $x\in[a,b]$ $f'(x)\geqslant\delta>0$ 及 $0\leqslant f''\leqslant M$. 令 ξ 是(a,b)内使 $f(\xi)=0$ 的唯一的点.

试按下面计算 ξ 的牛顿法的步骤，完成其细节.

(a) 选定 $x_1\in(\xi,b)$，而用

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

来确定$\{x_n\}$，用 f 图象的一条切线几何地解释这个等式.

(b) 试证 $x_{n+1}<x_n$, 并且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi.$$

(c) 用 Taylor 定理证明，有某个 $t_n\in(\xi, x_n)$，使

$$x_{n+1}-\xi=\frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n-\xi)^2.$$

(d) 设 $A=M/2\delta$, 推导不等式

$$0\leqslant x_{n+1}-\xi\leqslant\frac{1}{A}[A(x_1-\xi)]^{2^n}.$$

与第三章习题 16 及习题 18 比较之.

(e) 证明牛顿方法等于求

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

的不动点.

当 x 靠近 ξ 时, $g'(x)$的性态如何?

(f) 设 $f(x)=x^{1/3}$, $x\in(-\infty, \infty)$, 试试牛顿法会发生什么情况?

26. 设 f 在$[a, b]$上可微，$f(a)=0$，并且设有实数 A，使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$ 在$[a, b]$上成立. 试证对于一切 $x\in[a, b]$，$f(x)=0$. 提示：固定 $x_0\in[a, b]$，令

$$M_0=\sup_{a\leqslant x\leqslant x_0}|f(x)|,\ M_1=\sup_{a\leqslant x\leqslant x_0}|f'(x)|.$$

对于任意的 $x\in[a, x_0]$

$$|f(x)|\leqslant M_1(x_0-a)\leqslant A(x_0-a)M_0.$$

因此，如果 $A(x_0-a)<1$，那么 $M_0=0$. 这就是说，在$[a, x_0]$上 $f=0$. 如此继续进行.

27. 用 $a\leqslant x\leqslant b$ 和 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 表示平面上的矩形 R. 设 ϕ 是定义在 R 上的实函数. 所谓初值问题

$$y'=\phi(x, y),\ y(a)=c\qquad(\alpha\leqslant c\leqslant\beta)$$

的解，按照它的定义来说，是$[a, b]$上的一个可微函数 f，它合于 $f(a)=c$，$\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta$ 而且

$$f'(x)=\phi(x, f(x))\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

试证，如果有一个常数 A，只要$(x, y_1)\in R$，$(x, y_2)\in R$，就必定有

$$|\phi(x, y_2)-\phi(x, y_1)|\leqslant A|y_2-y_1|$$

那么，初值问题的解最多有一个.

提示：把习题 26 应用到两个解的差上去．注意，这个唯一性定理，不能用于初值问题

$$y' = y^{1/2}, y(0) = 0.$$

它有两个不同的解：$f(x) = 0$ 及 $f(x) = x^2/4$．把它的一切解找出来．

28．对于形式为

$$y_j' = \phi_j(x, y_1, \cdots, y_k), y_j(a) = c_j \quad (j = 1, 2, \cdots, k)$$

的微分方程组，写出一个与前题类似的（解唯一性的）定理，并加以证明．

注意，这方程又能写成

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{\phi}(x, \mathbf{y}), \mathbf{y}(a) = \mathbf{c}$$

的形式，这里 $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_k)$ 遍历一个 k-方格．$\boldsymbol{\phi}$ 是把一个 $(k+1)$-方格映入 k 维欧氏空间内的映射，这个 k 维欧氏空间的分量是 $\phi_1, \cdots, \phi_k$，$\mathbf{c}$ 是向量 $(c_1, \cdots, c_k)$．把习题 26 用到向量值函数上去．

29．把习题 28 特殊化，考虑方程组

$$y_j' = y_{j+1} \quad (j = 1, \cdots, k-1),$$

$$y_k' = f(x) - \sum_{j=1}^{k} g_j(x) y_j,$$

这里 $f, g_1, \cdots, g_k$ 都是 $[a, b]$ 上的连续实函数，从而对于带有初始条件

$$y(a) = c_1, y'(a) = c_2, \cdots, y^{(k-1)}(a) = c_k$$

的方程

$$y^{(k)} + g_k(x) y^{(k-1)} + \cdots + g_2(x) y' + g_1(x) y = f(x)$$

导出唯一性定理来．

第六章 RIEMANN STIELTJES 积分

本章以 Riemann 积分的定义为基础, 而 Riemann 积分又明显地依赖于实轴的序结构. 因此, 开始时, 我们先讨论区间上实值函数的积分, 后几节再推广到区间上的复值和向量值函数的积分. 到第十及十一两章再讨论在不是区间的集上的积分.

积分的定义和存在性

6.1 定义 设$[a,b]$是给定的区间. $[a,b]$的分法P指的是有限点集$x_0, x_1, \cdots, x_n$, 其中

$$a=x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n=b.$$

把这里每个数减去它的前邻数的差记作

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1} \qquad (i=1,\cdots,n)$$

现在假设f是定义在$[a,b]$上的有界实函数. 对应于$[a,b]$的每个分法P, 令

$$M_i=\sup f(x) \qquad (x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i),$$

$$m_i=\inf f(x) \qquad (x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i),$$

$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,$$

$$L(P,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,$$

最后置

$$(1)\qquad \overline{\int_a^b} fdx = \inf U(P,f),$$

$$(2)\qquad \underline{\int_a^b} fdx = \sup L(P,f).$$

其中最大下界与最小上界是对$[a,b]$的所有分法而取的.(1)和(2)的左端分别称为f在$[a,b]$上的 Riemann上积分与下积分.

如果上积分与下积分相等，就说f在$[a, b]$上 Riemann 可积，记作$f\in\mathscr{R}$(即是$\mathscr{R}$表示 Riemann 可积函数的集合)．并且用

$$(3)\qquad \int_a^b fdx$$

或

$$(4)\qquad \int_a^b f(x)dx$$

表示(1)和(2)的共同值.

这就是f在$[a, b]$上的 Riemann 积分．因为f是有界的,所以存在着两个数m和M,使得

$$m\leqslant f(x)\leqslant M \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

因此,对于每个P,

$$m(b-a)\leqslant L(P,f)\leqslant U(P,f)\leqslant M(b-a).$$

从而数$L(P, f)$和$U(P,f)$组成一个有界集．这说明,对于每个有界函数f，上积分与下积分都有定义．关于它们是否相等的问题，即是f的可积性问题，是更为细致的问题．我们将不去孤立地研究 Riemann 积分,而马上去考虑更一般的情形.

6.2 定义 设α是$[a,b]$上的一个单调递增函数(因$\alpha(a)$和$\alpha(b)$有限，从而α在$[a,b]$上有界)．对应于$[a,b]$的每个分法P,记

$$\Delta\alpha_i=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})$$

显然$\Delta\alpha_i\geqslant 0$．对于$[a,b]$上任意的有界实函数$f$,令

$$U(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\alpha_i,$$

$$L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\alpha_i,$$

这里 M_i, m_i 与定义 6.1 中的含义相同, 并且定义

(5) $$\overline{\int_a^b} f d\alpha=\inf\ U(P,f,\alpha),$$

(6) $$\underline{\int_a^b} f d\alpha=\sup\ L(P,f,\alpha),$$

其中的 inf 及 sup 都是对所有分法而取的.

如果(5)和(6)的左端相等, 我们就用

(7) $$\int_a^b f d\alpha$$

有时也用

(8) $$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

表示它们的共同值.

这就是$[a, b]$上 f 关于 α 的 Riemann-Stieltjes 积分(或简称为 Stieltjes 积分).

如果 (7) 存在, 即 (5) 和 (6) 相等, 我们就说 f 关于 α 在 Riemann 意义上可积, 并记作 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

取 $\alpha(x)=x$, 即见 Riemann 积分是 Riemann-Stieltjes 积分的特殊情形. 但是我们要明确指出, 在一般情形, α 甚至不一定是连续的.

关于这个概念还要说几句话. 与(8) 相比我们宁愿采用 (7) 式, 因为在(8)中出现的字母 x 丝毫不增加(7)的内容. 我们用哪个字母去代表所谓的"积分变量"是无关紧要的. 例如, (8)就与

$$\int_a^b f(y)d\alpha(y)$$

相同．积分依赖于 f，α，a 和 b，但与积分变量无关，也可把它略去．

积分变量所起的作用很象求和的指标：两个记号

$$\sum_{i=1}^{n} c_i, \quad \sum_{k=1}^{n} c_k$$

是相同的，因为每一个指的都是 $c_1+c_2+\cdots+c_n$.

当然，添上积分变量也无妨，而且在许多情形这样做实际上是方便的．

现在我们研究积分(7)的存在．有些话现在说一次，以后不再每次说明，假定 f 是有界实函数，而 α 在$[a, b]$上单调递增，当不会产生误解时，我们将用$\int$代替$\int_a^b$.

6.3 定义 我们称分法 P^* 是 P 的加细，如果 $P^*\supset P$(即 P 的每个点都是 P^* 的点)．设有两个分法 P_1 和 P_2,如果 $P^*=P_1\cup P_2$,便称 P^* 是它们的共同加细．

6.4 定理 如果 P^* 是 P 的加细，那么

(9) $$L(P, f, \alpha)\leqslant L(P^*, f, \alpha)$$

而且

(10) $$U(P^*, f, \alpha)\leqslant U(P, f, \alpha).$$

证 为了证(9)，先设 P^* 只比 P 多一个点．设这个附加的点是 x^*,并假定 $x_{i-1}<x^*<x_i$,其中 x_{i-1} 和 x_i 是 P 的两个相邻的点．令

$$w_1=\inf f(x) \quad (x_{i-1}\leqslant x\leqslant x^*),$$

$$w_2=\inf f(x) \quad (x^*\leqslant x\leqslant x_i).$$

显然 $w_1\geqslant m_i$ 及 $w_2\geqslant m_i$．与前面一样，这里的

$$m_i=\inf f(x) \quad (x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i),$$

因此，

$$\begin{aligned}
&L(P^*,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)\\
=&w_1[\alpha(x^*)-\alpha(x_{i-1})]+w_2[\alpha(x_i)-\alpha(x^*)]\\
&-m_i[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]\\
=&(w_1-m_i)[\alpha(x^*)-\alpha(x_{i-1})]\\
&+(w_2-m_i)[\alpha(x_i)-\alpha(x^*)]\geqslant 0
\end{aligned}$$

如果 P^* 比 P 多含 k 个点，我们把上述论证重复 k 次，就得到(9)式. (10)式的论证是类似的.

6.5 定理 $\underline{\int_a^b} f d\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f d\alpha$.

证 设 P^* 是两个分法 P_1 和 P_2 的共同加细. 由定理 6.4,

$$L(P_1,f,\alpha)\leqslant L(P^*,f,\alpha)\leqslant U(P^*,f,\alpha)\leqslant U(P_2,f,\alpha)$$

因此

(11) $$L(P_1,f,\alpha)\leqslant U(P_2,f,\alpha)$$

让 P_2 保持不变，而对所有的 P_1 取 sup, (11)式就给出

(12) $$\underline{\int} f d\alpha \leqslant U(P_2,f,\alpha)$$

在(12)中，对所有的 P_2 取 inf，就得到本定理.

6.6 定理 在$[a,b]$上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$当且仅当对于任意的 $\varepsilon>0$，存在一个分法P使得

(13) $$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon$$

证 对于任意的 P，有

$$L(P,f,\alpha)\leqslant \underline{\int} f d\alpha \leqslant \overline{\int} f d\alpha \leqslant U(P,f,\alpha).$$

所以(13)式意味着

$$0\leqslant \overline{\int} f d\alpha - \underline{\int} f d\alpha < \varepsilon$$

因此，如果(13)式对于每个 $\varepsilon>0$ 都能成立，就必然有

$$\overline{\int} f d\alpha = \underline{\int} f d\alpha$$

这就是 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$.

反之，假设 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ 并给定 $\varepsilon > 0$，于是存在分法 P_1 和 P_2，使得

$$U(P_2, f, \alpha) - \int f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{14}$$

$$\int f d\alpha - L(P_1, f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{15}$$

把 P 选为 P_1 和 P_2 的共同加细，那么定理 6.4，连同 (14) 式和 (15) 式说明

$$U(P, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha) \leqslant \int f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f, \alpha) + \varepsilon$$
$$\leqslant L(P, f, \alpha) + \varepsilon.$$

于是，对于这个分法 P, (13) 成立.

定理 6.6 给可积性提供了一个方便的判别法. 在运用它之前，先说一点有密切关系的事项.

6.7 定理

(*a*) 如果(13)式对某个 P 及某个 ε 成立，那么(当还用这同一个 ε 时) (13)式对 P 加细后仍成立.

(*b*) 如果对于 $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$, (13)式成立，而 s_i，t_i 是 $[x_{i-1}, x_i]$ 内的任意点，那么

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i < \varepsilon.$$

(*c*) 如果 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ 并且 (*b*) 的题设还成立，那么

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon.$$

证 由定理 6.4 得出 (a), 在 (b) 中所做的题设之下, $f(s_i)$ 及 $f(t_i)$ 都位于 $[m_i, M_i]$ 内, 所以 $|f(s_i)-f(t_i)|\leqslant M_i-m_i$ 因此

$$\sum_{i=1}^{n}|f(s_i)-f(t_i)|\Delta\alpha_i\leqslant U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha),$$

这就证出了 (b). 从几个明显的不等式

$$L(P,f,\alpha)\leqslant\sum f(t_i)\Delta\alpha_i\leqslant U(P,f,\alpha)$$

及

$$L(P,f,\alpha)\leqslant\int f d\alpha\leqslant U(P,f,\alpha)$$

证明了 (c).

6.8 定理 如果 f 在 $[a,b]$ 上连续, 那么在 $[a,b]$ 上, $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

证 给定了 $\varepsilon>0$, 选 $\eta>0$ 使得

$$[\alpha(b)-\alpha(a)]\eta<\varepsilon.$$

因为 f 在 $[a,b]$ 上一致连续 (定理 4.19). 所以存在着 $\delta>0$, 当 $x\in[a,b]$, $t\in[a,b]$ 并且 $|x-t|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(t)|<\eta \tag{16}$$

假若 P 是 $[a,b]$ 的任何合于 $\Delta x_i<\delta\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的分法, 那么由 (16) 便有

$$M_i-m_i\leqslant\eta \quad (i=1,\cdots,n) \tag{17}$$

因此

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i$$

$$\leqslant\eta\sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i=\eta[\alpha(b)-\alpha(a)]<\varepsilon.$$

根据定理 6.6 知道 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

6.9 定理 如果 f 在 $[a,b]$ 上单调, α 在 $[a,b]$ 上连续, 那么

$f\in\mathscr{R}(\alpha)$.（当然，仍然假定 α 单调）.

证 假设给定了 $\varepsilon>0$. 对于任意正整数 n，选分法 P，使得

$$\Delta\alpha=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n},\ (i=1,2,\cdots,n)$$

因为 α 连续，所以这是能作到的（定理 4.23）.

我们假定 f 单调递增（递减的情形与此相仿），那么

$$M_i=f(x_i),\quad m_i=f(x_{i-1}),\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

因此只要把 n 取得充分大，便有

$$\begin{aligned}&U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)\\&=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\\&=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}[f(b)-f(a)]<\varepsilon.\end{aligned}$$

由定理 6.6 知道 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

6.10 定理 假设 f 在 $[a,b]$ 上有界，只有有限个间断点. α 在 f 的每个间断点上连续，那么 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

证 假设给定了 $\varepsilon>0$. 令 $M=\sup|f(x)|$. 设 E 是使 f 间断的点的集. 由于 E 有限，而 α 在 E 的每点连续，我们可以取有限个不相交的闭区间 $[u_j,v_j]\subset[a,b]$ 把 E 盖住，同时要对应的各差数 $\alpha(v_j)-\alpha(u_j)$ 的和小于 ε. 进而我们能够把这些区间安置得让 $E\cap(a,b)$ 的每个点在某个 $[u_j,v_j]$ 内部.

从 $[a,b]$ 去掉开区间 (u_j,v_j). 剩下的集 K 是紧的. 因而 f 在 K 上一致连续. 于是有一个 $\delta>0$，保证 $s\in K$，$t\in K$，$|s-t|<\delta$ 时 $|f(s)-f(t)|<\varepsilon$.

现在照下边说的方法给 $[a,b]$ 作分法 $P=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,x_n\}$：每个 u_j 在 P 里出现，每个 v_j 在 P 里出现，任何开区间 (u_j,v_j) 没有点在 P 里出现. 如果 x_{i-1} 不是 u_j 之一，那么 $\Delta x_i<\delta$.

注意，对于每个 i，$M_i-m_i<2M$，并且 $M_i-m_i\leqslant\varepsilon$，除非 x_{i-1} 是 u_j 之一．于是照着定理 6.8 的证明那样

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)\leqslant[\alpha(b)-\alpha(a)]\varepsilon+2M\varepsilon$$

因为 ε 是任意的，定理 6.6 说明 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$．

附注：如果 f 与 α 有一个共同的间断点，f 便未必属于 $\mathscr{R}(\alpha)$．习题 3 说明了这一点．

6.11 定理 假设在 $[a,b]$ 上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，$m\leqslant f\leqslant M$．ϕ 在 $[m,M]$ 上连续，并且在 $[a,b]$ 上 $h(x)=\phi(f(x))$．那么在 $[a,b]$ 上 $h\in\mathscr{R}(\alpha)$．

证 选定 $\varepsilon>0$．因为 ϕ 在 $[m,M]$ 上一致连续，所以有 $\delta>0$ 合于 $\delta<\varepsilon$，并且当 s，$t\in[m,M]$ 时，只要 $|s-t|\leqslant\delta$ 便能使 $|\phi(s)-\phi(t)|<\varepsilon$．

因为 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，所以有 $[a,b]$ 的分法 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 使得

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\delta^2. \tag{18}$$

设 M_i,m_i 的意义和定义 6.1 所说的相同，而 M_i^*，m_i^* 是关于 h 的类似的数．把 $1,2,\cdots,n$ 这些数分作两类：如果 $M_i-m_i<\delta$，便使 $i\in A$，如果 $M_i-m_i\geqslant\delta$，便使 $i\in B$．

当 $i\in A$ 时，δ 的选取法表明 $M_i^*-m_i^*\leqslant\varepsilon$．

当 $i\in B$ 时，$M_i^*-m_i^*\leqslant 2K$．这里 $K=\sup|\phi(t)|,m\leqslant t\leqslant M$．根据(18)，得到

$$\delta\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i\leqslant\sum_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i<\delta^2 \tag{19}$$

所以 $\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i<\delta$，因而

$$\begin{aligned}&U(P,h,\alpha)-L(P,h,\alpha)\\&=\sum_{i\in A}(M_i^*-m_i^*)\Delta\alpha_i+\sum_{i\in B}(M_i^*-m_i^*)\Delta\alpha_i\\&\leqslant\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)]+2K\delta<\varepsilon[\alpha(b)-\alpha(a)+2K]\end{aligned}$$

因为 ε 是任意的，由定理 6.6 有 $h\in\mathscr{R}(\alpha)$.

评注：这定理提出一个问题，即是：什么样的函数恰好 Riemann 可积？答案在定理 11.33(b).

积分的性质

6.12 定理

(a) 如果在$[a,b]$上 $f_1\in\mathscr{R}(\alpha)$ 且 $f_2\in\mathscr{R}(\alpha)$，那么

$$f_1+f_2\in\mathscr{R}(\alpha),$$

对任意的常数 c，$cf\in\mathscr{R}(\alpha)$，并且

$$\int_a^b (f_1+f_2)\,d\alpha=\int_a^b f_1 d\alpha+\int_a^b f_2 d\alpha,$$

$$\int_a^b cf d\alpha=c\int_a^b f d\alpha.$$

(b) 如果在$[a,b]$上 $f_1(x)\leqslant f_2(x)$，那么

$$\int_a^b f_1 d\alpha\leqslant\int_a^b f_2 d\alpha.$$

(c) 如果在$[a,b]$上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，并且 $a<c<b$，那么在$[a,c]$及$[c,b]$上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，并且

$$\int_a^c f d\alpha+\int_c^b f d\alpha=\int_a^b f d\alpha.$$

(d) 如果在$[a, b]$上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$并且在$[a, b]$上 $|f(x)|\leqslant M$，那么

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right|\leqslant M[\alpha(b)-\alpha(a)].$$

(e) 如果 $f\in\mathscr{R}(\alpha_1)$并且 $f\in\mathscr{R}(\alpha_2)$，那么 $f\in\mathscr{R}(\alpha_1+\alpha_2)$并且

$$\int_a^b fd(\alpha_1+\alpha_2)=\int_a^b fd\alpha_1+\int_a^b fd\alpha_2;$$

如果 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$而 c 是个正常数，那么 $f\in\mathscr{R}(c\alpha)$而且

$$\int_a^b f d(c\alpha)=c\int_a^b f d\alpha.$$

证 如果 $f=f_1+f_2$ 而 P 是 $[a, b]$ 的任意分法，就能得到

$$L(P, f_1, \alpha)+L(P, f_2, \alpha)\leqslant L(P, f, \alpha)\leqslant U(P, f, \alpha)\leqslant U(P, f_1, \alpha)+U(P, f_2, \alpha). \tag{20}$$

如果 $f_1\in\mathscr{R}(\alpha)$，$f_2\in\mathscr{R}(\alpha)$，并设 $\varepsilon>0$ 已经给定. 便存在分法 $P_j(j=1, 2)$ 使得

$$U(P_j, f_j, \alpha)-L(P_j, f_j, \alpha)<\varepsilon.$$

如果把 P_1 和 P_2 换成它们的共同加细 P，这些不等式仍然成立. 于是(20)说明

$$U(P, f, \alpha)-L(P, f, \alpha)<2\varepsilon.$$

这就证明了 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

用这同一个 P 可以得到

$$U(P, f_j, \alpha)<\int f_j d\alpha+\varepsilon \quad (j=1, 2),$$

因此，(20)说明

$$\int f d\alpha\leqslant U(P, f, \alpha)<\int f_1 d\alpha+\int f_2 d\alpha+2\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，所以能断定

$$\int f d\alpha\leqslant\int f_1 d\alpha+\int f_2 d\alpha. \tag{21}$$

如果在(21)式中用 $-f_1$ 和 $-f_2$ 取代 f_1 和 f_2，不等式便掉转方向，从而证明了等式成立.

定理 6.12 的其它断语的证明都十分类似，不需作详细叙述. 在(c)条中的要点在于，当逼近 $\int f d\alpha$ 时，(经过加细) 我们可以限于考虑包含点 c 的分法.

6.13 定理 如果在 $[a, b]$ 上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，$g\in\mathscr{R}(\alpha)$，那么

(a) $fg\in\mathscr{R}(\alpha)$;

(b) $|f|\in\mathscr{R}(\alpha)$ 而且 $\left|\int_a^b fd\alpha\right|\leqslant\int|f|d\alpha$.

证 如果取 $\phi(t)=t^2$, 定理 6.11 说明, 当 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ 时, $f^2\in\mathscr{R}(\alpha)$. 利用恒等式

$$4fg=(f+g)^2-(f-g)^2$$

就能完成(a)的证明

如果取 $\phi(t)=|t|$, 定理 6.11 同样说明 $|f|\in\mathscr{R}(\alpha)$, 选择 $c=\pm1$, 使得

$$c\int fd\alpha\geqslant0.$$

于是由于 $cf\leqslant|f|$, 所以

$$\left|\int fd\alpha\right|=c\int fd\alpha=\int cfd\alpha\leqslant\int|f|d\alpha.$$

6.14 定义 单位阶跃函数 I 的定义是

$$I(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant0,\\ 1 & x>0.\end{cases}$$

6.15 定理 如果 $a<s<b$, f 在 $[a,b]$ 上有界, f 在 s 点连续, 而 $\alpha(x)=I(x-s)$, 那么

$$\int_a^b fd\alpha=f(s).$$

证 取分法 $P=\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$, 其中 $x_0=a$, 而 $x_1=s<x_2<x_3=b$. 于是

$$U(P,f,\alpha)=M_2,\quad L(P,f,\alpha)=m_2.$$

因为 f 在 s 点连续, 我们知道, 当 $x_2\to s$ 时, M_2 与 m_2 都趋于 $f(s)$.

6.16 定理 假定对于 $n=1,2,3,\cdots$, $c_n\geqslant0$, $\sum c_n$ 收敛. $\{s_n\}$ 是 (a,b) 之内的一串不同的点, 并且

$$\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nI(x-s_n).\tag{22}$$

设 f 在 $[a, b]$ 上连续，那么

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n). \tag{23}$$

证 用比较验敛法可以证明级数(22)对于每个 x 收敛. 它的和 $\alpha(x)$ 显然是单调的, $\alpha(a)=0$, $\alpha(b)=\sum c_n$(这是在评注 4.31里出现的那种函数.)

假设已经给定了 $\varepsilon>0$, 再选一个能实现

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon$$

的 N. 令

$$\alpha_1(x)=\sum_{n=1}^{N} c_n I(x-s_n),\quad \alpha_2(x)=\sum_{N+1}^{\infty} c_n I(x-s_n).$$

根据定理 6.12 和 6.15,

$$\int_a^b f d\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n). \tag{24}$$

由于 $\alpha_2(b)-\alpha_2(a)<\varepsilon$,

$$\left|\int_a^b f d\alpha_2\right| \leqslant M\varepsilon, \tag{25}$$

其中 $M=\sup|f(x)|$. 既然 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, 那么从(24)和(25)可以推得

$$\left|\int_a^b f d\alpha - \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n)\right| \leqslant M\varepsilon \tag{26}$$

让 $N\to\infty$, 就得到(23).

6.17 定理 假定 α 单调递增. 在 $[a, b]$ 上 $\alpha'\in\mathscr{R}$. 设 f 是 $[a, b]$ 上的有界实函数，于是 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ 当且仅当 $f\alpha'\in\mathscr{R}$. 这时候,

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx. \tag{27}$$

证 假设给定了 $\varepsilon>0$, 并将定理 6.6 用于 α': 有 $[a, b]$ 的一

个分法 $P=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，使得

$$U(P, \alpha')-L(P, \alpha')<\varepsilon \tag{28}$$

由中值定理知道有 $t_i\in[x_{i-1}, x_i]$，使得

$$\Delta\alpha_i=\alpha'(t_i)\Delta x_i\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

如果 $s_i\in[x_{i-1}, x_i]$，那么据(28)及定理 6.7(b)便有

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha'(s_i)-\alpha'(t_i)|\Delta x_i<\varepsilon. \tag{29}$$

命 $M=\sup|f(x)|$. 因为

$$\sum_{i=1}^{n}f(s_i)\Delta\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}f(s_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i,$$

从(29)式即得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(s_i)\Delta\alpha_i-\sum_{i=1}^{n}f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i\right|\leqslant M\varepsilon. \tag{30}$$

特别地，对于 $s_i\in[x_{i-1}, x_i]$的一切选取法，

$$\sum_{i=1}^{n}f(s_i)\Delta\alpha_i\leqslant U(P, f\alpha')+M\varepsilon.$$

所以

$$U(P, f, \alpha)\leqslant U(P, f\alpha')+M\varepsilon.$$

同样的论证可以从(30)推得

$$U(P, f\alpha')\leqslant U(P, f, \alpha)+M\varepsilon$$

于是

$$|U(P, f, \alpha)-U(P, f\alpha')|<M\varepsilon. \tag{31}$$

注意，如果把P换作它的任何加细，(28)依然真确. 从而(31)依然真确. 我们断定

$$\left|\overline{\int_a^b} f d\alpha-\overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx\right|<M\varepsilon.$$

但 ε 是任意的，所以对于任何有界的 f

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx. \tag{32}$$

按照完全一样的方法可以从(30)推得下积分的相等．本定理随之成立．

6.18 评注 前面两条定理显示了 Stieltjes 积分方法所固有的普遍性和适应性．假若 α 是纯阶跃函数［这经常是指(22)式那样形状的函数］积分就变成有限或无限的级数．假若 α 有可积的导数，积分就变作普通的 Riemann 积分．这就能够在许多情形之下同时研究级数和积分而不必分别讨论了．

为了说明这一点，试看一个物理问题．有一段单位长的直导线，有一轴垂直于此导线于一端点，导线关于这轴的惯性矩是

$$\int_0^1 x^2 dm, \tag{33}$$

这里 $m(x)$ 是区间 $[0, x]$ 之内所含的质量．如果认为导线的密度 ρ 是连续的，即是说如果 $m'(x)=\rho(x)$，那么(33)变为

$$\int_0^1 x^2\rho(x)dx \tag{34}$$

另一方面，如果导线由集中于若干点 x_i 的质量 m_i 组成；(33)就变为

$$\sum_i x_i^2 m_i \tag{35}$$

所以(34)式与(35)式是(33)式的特殊情形，然而(33)式包括的还要多；例如 m 连续而不是处处可微的情形．

6.19 定理(换元) 假设 φ 是严格递增的连续函数，它把闭区间 $[A, B]$ 映满 $[a, b]$．假设 α 在 $[a, b]$ 上单调递增，而且在 $[a, b]$ 上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$．在 $[A, B]$ 上定义 β 与 g 为

$$\beta(y)=\alpha(\varphi(y)),\quad g(y)=f(\varphi(y)). \tag{36}$$

那么 $g\in\mathscr{R}(\beta)$ 而且

(37) $$\int_A^B g d\beta=\int_a^b f d\alpha.$$

证 对应于$[a,b]$的每个分法 $P=\{x_0,\cdots,x_n\}$，有$[A, B]$的一个分法 $Q=\{y_0,\cdots,y_n\}$，其中 $x_i=\varphi(y_i)$. $[A, B]$的所有分法都是按照这个方法求得的. 因为 f 在$[x_{i-1},x_i]$上所取的值，都与 g 在$[y_{i-1},y_i]$上所取的值恰好一样，故而知道

(38) $$U(Q,g,\beta)=U(P,f,\alpha),\ L(Q,g,\beta)=L(P,f,\alpha).$$

因为 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，可以把 P 选得使 $U(P,f,\alpha)$ 和 $L(P,f,\alpha)$ 都靠近于 $\int f d\alpha$. 那么(38)与定理 6.6 合在一起就说明 $g\in\mathscr{R}(\beta)$，因而(37)成立. 证明完毕.

让我们注意下边的特殊情形：

取 $\alpha(x)=x$，那么 $\beta=\varphi$. 假设在$[A, B]$上 $\varphi'\in\mathscr{R}$. 如果将定理 6.17 用于(37)的左端，就得到

(39) $$\int_a^b f(x)dx=\int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

积分与微分

在本节，我们仍限于考虑实函数. 我们将要证明，在某种意义上说，积分和微分是互逆的运算.

6.20 定理 设在$[a,b]$上 $f\in\mathscr{R}$. 对于 $a\leqslant x\leqslant b$，令

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

那么 F 在$[a, b]$上连续；如果 f 又在$[a,b]$的 x_0 点连续，那么 F 便在 x_0 可微，并且

$$F'(x_0)=f(x_0)$$

证 因 $f\in\mathscr{R}$，所以 f 有界. 假设对于 $a\leqslant t\leqslant b$，$|f(t)|\leqslant M$.

如果 $a \leqslant x < y \leqslant b$, 那么由定理 6.12 的 (c) 和 (d) 知道

$$|F(y)-F(x)|=\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leqslant M(y-x),$$

给定了 $\varepsilon>0$, 只要 $|y-x|<\varepsilon/M$, 就会有

$$|F(y)-F(x)|<\varepsilon$$

这就证明了 F 的连续性(而且实际上是一致连续性).

现在假设 f 在 x_0 点连续. 给定了 $\varepsilon>0$, 选一个 $\delta>0$ 使得在 $|t-x_0|<\delta$ 并 $a\leqslant t\leqslant b$ 时,

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

因此, 如果

$$x_0-\delta<s\leqslant x_0\leqslant t<x_0+\delta \text{ 而且 } a\leqslant s<t\leqslant b,$$

根据定理 6.12(d), 便有

$$\left|\frac{F(t)-F(s)}{t-s}-f(x_0)\right|$$
$$=\left|\frac{1}{t-s}\int_s^t [f(u)-f(x_0)]\,du\right|<\varepsilon.$$

这就直接推得 $F'(x_0)=f(x_0)$ 了.

6.21 微积分基本定理 如果在 $[a,b]$ 上 $f\in\mathscr{R}$. 在 $[a,b]$ 上又有可微函数 F 合于 $F'=f$, 那么

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

证 假设给定了 $\varepsilon>0$, 选 $[a,b]$ 的分法 $P=\{x_0,\cdots,x_n\}$ 使得 $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$. 由中值定理知存在一些点 $t_i\in[x_{i-1},x_i]$, 它们对于 $i=1,\cdots,n$ 使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=f(t_i)\Delta x_i.$$

由此

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i=F(b)-F(a)$$

现在，从定理 6.7(c)推得

$$\left|F(b)-F(a)-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

因为它对于任何 $\varepsilon>0$ 成立，证明就完成了.

6.22 定理(分部积分) 假定 F 和 G 都是 $[a, b]$ 上的可微函数. $F'=f\in\mathscr{R}$, $G'=g\in\mathscr{R}$. 那么

$$\int_a^b F(x)g(x)dx=F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_a^b f(x)G(x)dx.$$

证 令 $H(x)=F(x)G(x)$，然后将定理 6.21 用于 H 和它的导数. 注意，根据定理 6.13, $H'\in\mathscr{R}$.

向量值函数的积分

6.23 定义 设 f_1, $\cdots$, f_k 是$[a, b]$上的实函数，并设 $\mathbf{f}=(f_1,\cdots,f_k)$是将$[a, b]$映入 R^k 内的映射. 如果 α 在$[a, b]$上单调递增，那么说 $\mathbf{f}\in\mathscr{R}(\alpha)$，指的就是对于 $j=1, 2, \cdots, k$, $f_j\in\mathscr{R}(\alpha)$. 果真如此的话，就定义

$$\int_a^b \mathbf{f}d\alpha=\left(\int_a^b f_1 d\alpha, \cdots, \int_a^b f_k d\alpha\right).$$

换句话说，$\int \mathbf{f}d\alpha$ 是 R^k 中的点，而$\int f_j d\alpha$ 是它的第 j 个坐标.

显然，定理 6.12 的(a),(c),(e)三条，对于这些向量值的积分是成立的；这只要把前面的结果用于每个坐标就成了. 关于定理 6.17, 6.20 及 6.21，同样也对. 作为例证，我们把定理 6.21 的类似定理叙述一下.

6.24 定理 设 $\mathbf{f}$ 及 $\mathbf{F}$ 是把$[a, b]$映入 R^k 的映射，$\mathbf{f}$ 在$[a, b]$上 $\in\mathscr{R}$并且 $\mathbf{F}'=\mathbf{f}$，那么

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)dt=\mathbf{F}(b)-\mathbf{F}(a)$$

但是，与 6.13(b)类似的定理，有些新的特点，至少在它的证

明上是如此.

6.25 定理 如果 f 是把$[a,b]$映入 R^k 内的映射，并且对于$[a,b]$上的某个单调递增函数 α, $f\in\mathscr{R}(\alpha)$, 那么$|f|\in\mathscr{R}(\alpha)$, 而且

(40) $$\left|\int_a^b f d\alpha\right|\leqslant\int_a^b|f|d\alpha$$

证 如果 $f_1,\cdots,f_k$ 是 f 的分量, 那么

(41) $$|f|=(f_1^2+\cdots+f_k^2)^{1/2}.$$

根据定理 6.11，每个函数 f_j^2 属于$\mathscr{R}(\alpha)$；因此它们的和也属于$\mathscr{R}(\alpha)$. 因为 x^2 是 x 的连续函数, 定理 4.17 说明，对于任意实数 M, 平方根函数在$[0,M]$上连续. 如果再一次应用定理 6.11，那么(41)式表明$|f|\in\mathscr{R}(\alpha)$.

为了证明(40)式，置 $\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_k)$, 其中 $y_i=\int f_i d\alpha$. 于是 $\mathbf{y}=\int f d\alpha$, 并且

$$|\mathbf{y}|^2=\sum y_j^2=\sum y_j\int f_j d\alpha$$
$$=\int\Bigl(\sum y_j f_j\Bigr)d\alpha.$$

根据 Schwarz 不等式

(42) $$\sum y_j f_j(t)\leqslant|\mathbf{y}|\,|f(t)|\quad(a\leqslant t\leqslant b)$$

因此, 由定理 6.12(b)就有

$$|\mathbf{y}|^2\leqslant|\mathbf{y}|\int|f|d\alpha.$$

如果 $\mathbf{y}=0$, (40)就是显然的. 如果 $\mathbf{y}\neq0$，用$|\mathbf{y}|$除(43)式就得到(40).

可求长曲线

我们用一个几何趣味的论题来结束这一章，这也给前面一些

理论提供一项应用．$k=2$ 的情形（即是平面曲线的情形）在研究复变数的解析函数时相当重要．

6.26 定义 将闭区间$[a, b]$映入 R^k 的映射 γ 叫做 R^k 里的曲线．为了重视参数区间$[a,b]$，也可以说 γ 是$[a,b]$上的曲线．

假如 γ 是一对一的，γ 就称作弧．

假如 $\gamma(a)=\gamma(b)$；就说 γ 是闭曲线．

应当注意这里定义的曲线是映射而不是点集．结合着 R^k 里的每个曲线 γ，总有 R^k 的一个子集，即是 γ 的值域，但是不同的曲线可以有相同的值域．

我们给$[a,b]$的每个分法 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$和$[a, b]$上的每个曲线 γ，配置一个数

$$\Lambda(P,\gamma)=\sum_{i=1}^{n}|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})|.$$

这个和里的第 i 项就是 R^k 里 $\gamma(x_{i-1})$ 与 $\gamma(x_i)$ 两点间的距离．所以 $\Lambda(P,\gamma)$就是按照顺序以 $\gamma(x_0)$，$\gamma(x_1)$，$\cdots$，$\gamma(x_n)$为顶点的折线的长．当分法越来越密时，这折线就越来越接近于 γ 的值域．这样看来，我们把

$$\Lambda(\gamma)=\sup\Lambda(P,\gamma)$$

定义作 γ 之长是合理的；这里的 sup 是对 $[a, b]$ 的一切分法来取的．

假若 $\Lambda(\gamma)<\infty$，就说 γ 是可求长的．

有许多情形，$\Lambda(\gamma)$能用 Riemann 积分表示．我们将要对于连续可微的曲线 γ，即是导数 γ' 连续的曲线证明这一点．

6.27 定理 假如 γ' 在$[a,b]$上连续，γ 便是可求长的，而且

$$\Lambda(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|dt.$$

证 如果 $a\leqslant x_{i-1}<x_i\leqslant b$，那么

$$|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})|=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\gamma'(t)\,dt\right|\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\gamma'(t)|\,dt.$$

所以对于$[a, b]$的每个分法 P,

$$\Lambda(P,\gamma)\leqslant\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt,$$

从而

$$\Lambda(\gamma)\leqslant\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt.$$

今证明反向的不等式，假设给定了 $\varepsilon>0$. 既然 γ' 在$[a, b]$上一致连续，便有 $\delta>0$, 使得

$$|\gamma'(s)-\gamma'(t)|<\varepsilon$$

在$|s-t|<\delta$ 时成立. 设 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$是$[a, b]$的分法，对于一切 i, $\Delta x_i<\delta$. 如果 $x_{i-1}\leqslant t\leqslant x_i$, 必然

$$|\gamma'(t)|\leqslant|\gamma'(x_i)|+\varepsilon.$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\gamma'(t)|\,dt&\leqslant|\gamma'(x_i)|\Delta x_i+\varepsilon\Delta x_i\\&=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\gamma'(t)+\gamma'(x_i)-\gamma'(t)]\,dt\right|+\varepsilon\Delta x_i\\&\leqslant\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\gamma'(t)\,dt\right|+\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\gamma'(x_i)-\gamma'(t)]\,dt\right|\\&\quad+\varepsilon\Delta x_i\\&\leqslant|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})|+2\varepsilon\Delta x_i.\end{aligned}$$

把这些不等式相加，就得到

$$\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt\leqslant\Lambda(P,\gamma)+2\varepsilon(b-a)$$

由于 ε 是任意的

$$\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt\leqslant\Lambda(\gamma).$$

证明就完成了.

习题

1. 假设 α 在 $[a,b]$ 上递增，$a\le x_0\le b$，α 在 x_0 连续，$f(x_0)=1$，并且当 $x\ne x_0$ 时 $f(x)=0$. 试证 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ 并且 $\int f d\alpha=0$.

2. 假设在 $[a,b]$ 上 $f\ge 0$，f 连续，并且 $\int_a^b f(x)\,dx=0$. 试证，对于所有的 $x\in[a,b]$，$f(x)=0$（与习题 1 比较）.

3. 三个函数 β_1,β_2,β_3 定义如下：对于 $j=1,2,3$，当 $x<0$ 时 $\beta_j(x)=0$，当 $x>0$ 时 $\beta_j(x)=1$；并且 $\beta_1(0)=0$，$\beta_2(0)=1$，$\beta_3(0)=\frac{1}{2}$. 设 f 是 $[-1,1]$ 上的有界函数.

(a) 证明 $f\in\mathscr{R}(\beta_1)$ 当且仅当 $f(0+)=f(0)$，在这个情形还有

$$\int f d\beta_1=f(0).$$

(b) 对 β_2 陈述并说明类似的结果.

(c) 证明 $f\in\mathscr{R}(\beta_3)$ 当且仅当 f 在 0 点连续.

(d) 如果 f 在 0 点连续，证明

$$\int f d\beta_1=\int f d\beta_2=\int f d\beta_3=f(0)$$

4. 如果对于一切无理点 x，$f(x)=0$，对于一切有理点 x，$f(x)=1$. 证明对于任意的 $a<b$，在 $[a,b]$ 上 $f\notin\mathscr{R}$

5. 假如 f 是 $[a,b]$ 上的有界实函数，在 $[a,b]$ 上 $f^2\in\mathscr{R}$. 是否必然 $f\in\mathscr{R}$？如果假定 $f^3\in\mathscr{R}$，答案是否改变？

6. 设 P 是 2.44 所作的 Cantor 集. 设 f 是 $[0,1]$ 上的有界实函数，它在 P 以外的每点连续，试证在 $[0,1]$ 上 $f\in\mathscr{R}$. 提示：P 能被有限个开区间盖住，这些区间的总长可以任意小. 照定理 6.10 那样处理.

7. 假定 f 是 $(0,1]$ 上的实函数，对于每个 $c>0$，在 $[c,1]$ 上 $f\in\mathscr{R}$. 定义

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{c\to 0}\int_c^1 f(x)\,dx$$

只须这极限存在（而且是有限的）.

(a) 若是在 $[0,1]$ 上 $f\in\mathscr{R}$，证明这定义和旧定义相同.

(b) 作一个函数 f，使上述的极限存在，然而用 $|f|$ 换了 f 这极限便不存

在.

8. 假若 a 是固定的，b 是大于 a 的任意数，在 $[a,b]$ 上 $f\in\mathscr{R}$. 定义

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

只要这极限存在(而且是有限的). 这时便说左端的积分收敛. 如果把 f 换作 $|f|$ 它仍然收敛，就说它绝对收敛.

假定 $f(x)\geqslant 0$，并且在 $[1,\infty]$ 上单调递减. 试证

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

收敛，当且仅当

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

收敛(这是关于级数收敛性的"积分"检验法).

9. 证明分部积分有时能用于习题 7.8 所定义的"非正常"积分(列出适当的假设，编成定理，再加以证明). 例如证明

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}\,dx=\int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}\,dx.$$

证明这两个积分之中有一个绝对收敛，另一个则不然.

10. 设 p 与 q 都是正实数，满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

证明下列各命题:

(*a*) 假若 $u\geqslant 0$，且 $v\geqslant 0$，那么

$$uv\leqslant\frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$$

当且仅当 $u^p=v^q$ 时等号适用.

(*b*) 假若 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，$g\in\mathscr{R}(\alpha)$，$f\geqslant 0$，$g\geqslant 0$，而且

$$\int_a^b f^p\,d\alpha=1=\int_a^b g^q\,d\alpha,$$

那么

$$\int_a^b fg\,d\alpha\leqslant 1.$$

(*c*) 假若 f 与 g 是属于 $\mathscr{R}(\alpha)$ 的复值函数，那么

$$\left|\int_a^b fg\,d\alpha\right|\leqslant\left\{\int_a^b |f|^p\,d\alpha\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_a^b |g|^q\,d\alpha\right\}^{1/q}.$$

这是 Hölder 不等式．当 $p=q=2$ 时，寻常叫做 Schwarz 不等式（注意定理 1.35 是这不等式的极特别的情形）．

(*d*) 证明 Hölder 不等式对于习题 7.8 所说的“非正常”积分也真确．

11．设 α 是$[a,b]$上固定的递增函数．对于 $u\in\mathscr{R}(\alpha)$ 定义

$$\|u\|_2=\left\{\int_a^b|u|^2d\alpha\right\}^{1/2}.$$

假若 $f, g, h\in\mathscr{R}(\alpha)$，像定理 1.37 的证明里那样，作为 Schwarz 不等式的推论，证明三角形不等式

$$\|f-h\|_2\leqslant\|f-g\|_2+\|g-h\|_2.$$

12．沿用第 11 题的记号，假定 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，并且 $\varepsilon>0$．证明在$[a,b]$上存在着连续函数 g 满足$\|f-g\|_2<\varepsilon$．

提示：设 $P=\{x_0,\cdots,x_n\}$是$[a,b]$的一个适当的分法，如果 $x_{i-1}<t<x_i$，定义

$$g(t)=\frac{x_i-t}{\Delta x_i}f(x_{i-1})+\frac{t-x_{i-1}}{\Delta x_i}f(x_i)$$

13．定义

$$f(x)=\int_x^{x+1}\sin(t^2)\,dt$$

(*a*) 求证 $x>0$ 时 $|f(x)|<\dfrac{1}{x}$

提示：置 $t^2=u$，再分部积分以证 $f(x)$等于

$$\frac{\cos(x^2)}{2x}-\frac{\cos[(x+1)^2]}{2(x+1)}-\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{4u^{3/2}}du$$

用-1 代替$\cos u$．

(*b*) 证明

$$2xf(x)=\cos(x^2)-\cos[(x+1)^2]+r(x),$$

其中$|r(x)|<c/x$，而 c 是常数．

(*c*) 求 $xf(x)$当 $x\to\infty$时的上、下极限．

(*d*) $\int_0^\infty\sin(t^2)\,dt$ 收敛吗？

14．同样地讨论

$$f(x)=\int_x^{x+1}\sin(e^t)\,dt$$

求证 $\qquad e^x|f(x)|<2$

和 $$e^x f(x)=\cos(e^x)-e^{-1}\cos(e^{x+1})+r(x),$$
其中$|r(x)|<Ce^{-x}$, C是某个常数.

15. 假设f是$[a,b]$上的连续可微的实函数, $f(a)=f(b)=0$, 并且
$$\int_a^b f^2(x)dx=1$$
求证
$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx=-\frac{1}{2}$$
和
$$\int_a^b[f'(x)]^2dx\cdot\int_a^b x^2f^2(x)dx>\frac{1}{4}.$$

16. 对于$1<s<\infty$, 定义
$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$
(这是Riemann的ζ函数, 在研究质数的分布时极为重要)。
求证

(a) $\zeta(s)=s\int_1^{\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}dx,$

和

(b) $\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_1^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx,$

其中$[x]$表示不大于x的最大整数.

证明(b)里的积分对于一切$s>0$收敛.

提示: 为了证明(a)可以求$[1,N]$上的积分与定义$\zeta(s)$的级数的第N个部分和之差.

17. 假定α在$[a,b]$上单调递增, g连续, 而且对于$a\leq x\leq b$, $g(x)=G'(x)$. 求证
$$\int_a^b\alpha(x)g(x)dx=G(b)\alpha(b)-G(a)\alpha(a)-\int_a^b Gd\alpha.$$

提示: 取实的g无损于一般性. 给定$P=\{x_0,\cdots,x_n\}$, 选$t_i\in(x_{i-1},x_i)$使$g(t_i)\Delta x_i=G(x_i)-G(x_{i-1})$. 证明
$$\sum_{i=1}^n\alpha(x_i)g(t_i)\Delta x_i=G(b)\alpha(b)-G(a)\alpha(a)-\sum_{i=1}^n G(x_{i-1})\Delta\alpha_i.$$

18. 设复平面里的曲线$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$, 是由

$$\gamma_1(t)=e^{it},\gamma_2(t)=e^{2it},\gamma_3(t)=e^{2\pi it\sin(1/t)}$$

定义在$[0,2\pi]$之上的. 求证这三个曲线的值域相同, γ_1与γ_2为可求长, γ_1的长是2π, γ_2的长是4π, 而γ_3不可求长.

19. 设γ_1是定义在$[a,b]$上的R^k里的曲线; ϕ是把$[c,d]$映满$[a,b]$的连续1-1映射, 而$\phi(c)=a$; 再定义$\gamma_2(s)=\gamma_1(\phi(s))$. 求证$\gamma_2$是弧, 是闭曲线或是可求长曲线当且仅当$\gamma_1$也是这样的. 证明$\gamma_2$与$\gamma_1$的长相同.