Laboratorium 7

Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

Bartosz Balawender

15.04.2021

1.Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest przeprowadzenie interpolacji wielomianowej Newtona.

2.Opis problemu

Należy przeprowadzić interpolację wielomianową Newtona dla funkcji :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

3.Opis metody

Interpolację będziemy wykonywać kolejno dla n = 5, 10, 15, 20 indeksując węzły: i = 0,1,2,….,n. Ustawiamy także przedział, dla którego będziemy wyznaczać przybliżone wartości funkcji $[x_{min}, x_{max}]$

Korzystamy ze wzoru interpolacyjnego , który jest postaci:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \cdot \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i)$$

Gdzie:

- $f^{(j)}(x_0)$ – to iloraz rzędu j liczony dla węzła x_0
- x_i – są położeniami węzłów

Następnie należy wyznaczyć zgodnie z poniższą tabelą znajdującą się po prawej stronie należy wyznaczyć wartości różnicowych

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
y_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_1 & f^{(1)}_{x_0,\ldots} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_2 & f^{(1)}_{x_1} & f^{(2)}_{x_0} & 0 & 0 & 0 \\
y_3 & f^{(1)}_{x_2} & f^{(2)}_{x_1} & f^{(3)}_{x_0} & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & 0 \\
y_n & f^{(1)}_{x_{n-1}} & f^{(2)}_{x_{n-2}} & f^{(3)}_{x_{n-3}} & \ldots & f^{(n)}_{x_0} \\
\hline
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
f_{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
f_{1,0} & f_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
f_{2,0} & f_{2,1} & f_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\
f_{3,0} & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & 0 \\
f_{n,0} & f_{n,1} & f_{n,2} & f_{n,3} & \ldots & f_{n,n} \\
\hline
\end{array}$$

Gdzie:

- zerowa kolumna (y_i) oznacza wartości funkcji w węzłach
- elementy $f_{j,j}$ są ilorazami różnicowymi rzędu j występującymi we wzorze (1) na wielomian interpolacyjny Wn(x)

Prawą tabelkę wyznaczamy zgodnie z zapisanym niżej pseudokodem:

$$
\begin{aligned}
&for(j = 1; j <= n; j++)\{\\
&\quad for(i = j; i <= n; i++)\{\\
&\qquad f_{i,j} = \frac{f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}};\\
&\quad \}\\
&\}
\end{aligned}
$$

Na koniec, gdy mamy już obliczone wartości ilorazów różnicowych możemy zastosować wzór interpolacyjny (1) do wyznaczenia przybliżonych wartości funkcji w podanym wcześniej przedziale $[x_{min}, x_{max}]$.

Takie same obliczenia powtarzamy później dla zoptymalizowanych położeń węzłów, podmieniają tylko instrukcję określającą położenia węzłów na:

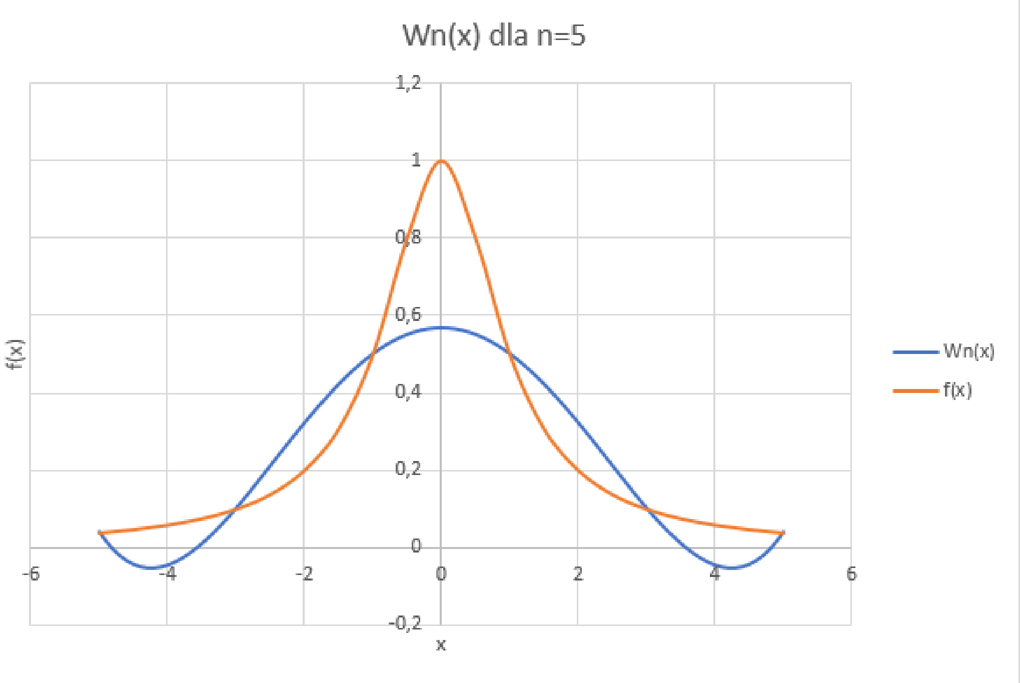
$$x_i = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)\cos\left(\pi\frac{2i+1}{2n+2}\right) + (x_1 + x_1)\right], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Zoptymalizowane przez nas węzły są zerami wielomianów Czebyszewa.

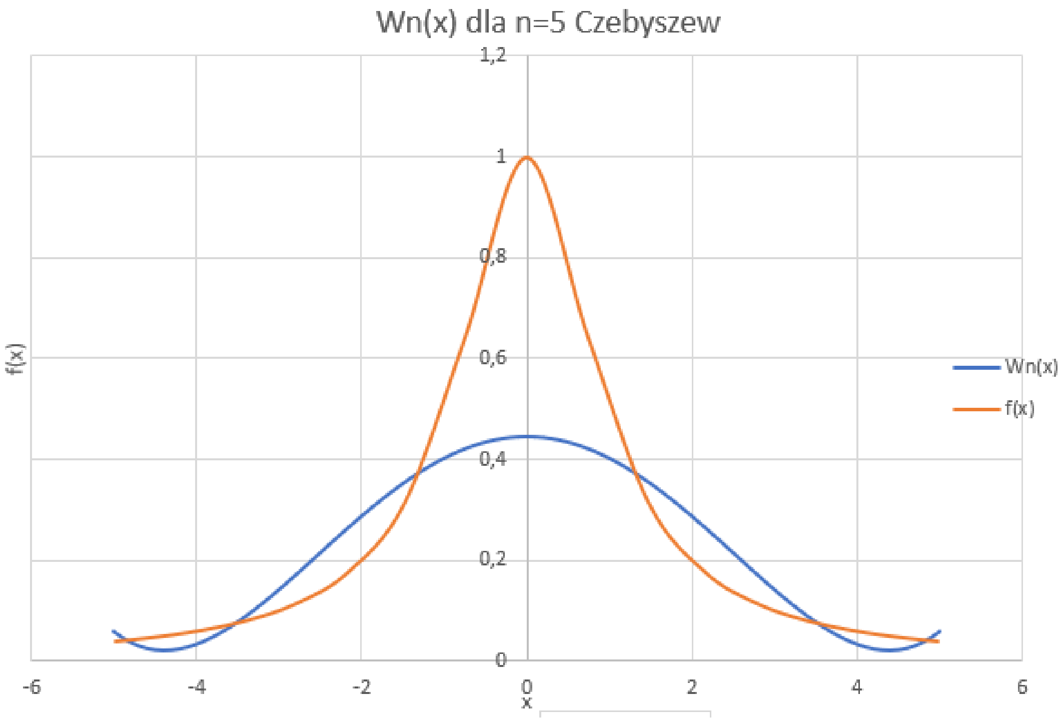
4.Wyniki

Jak już wcześniej wspomniałem interpolację przeprowadzaliśmy dla n = 5, 10, 15, 20. W uprzednio ustawionych przedziale [-5, 5].

4.1 Wykresy otrzymane dla n =5

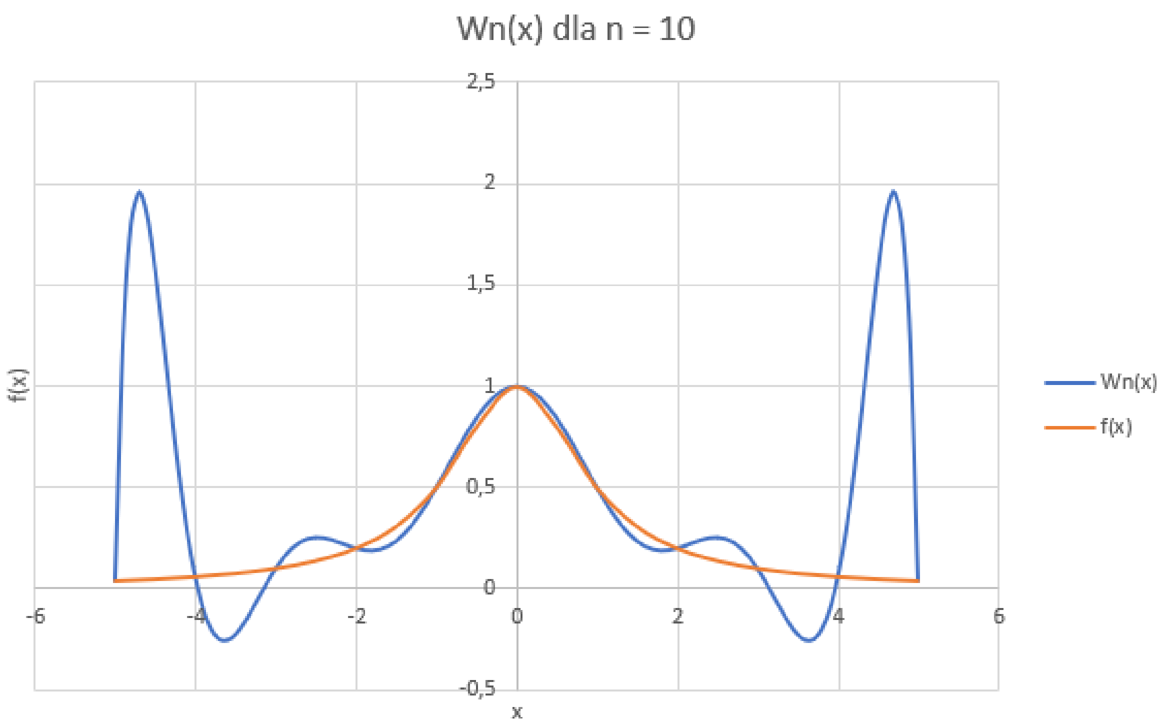


Wykres 1. Wykres zależności wielomianu interpolacyjnego oraz funkcji f(x) od węzła x dla n=5

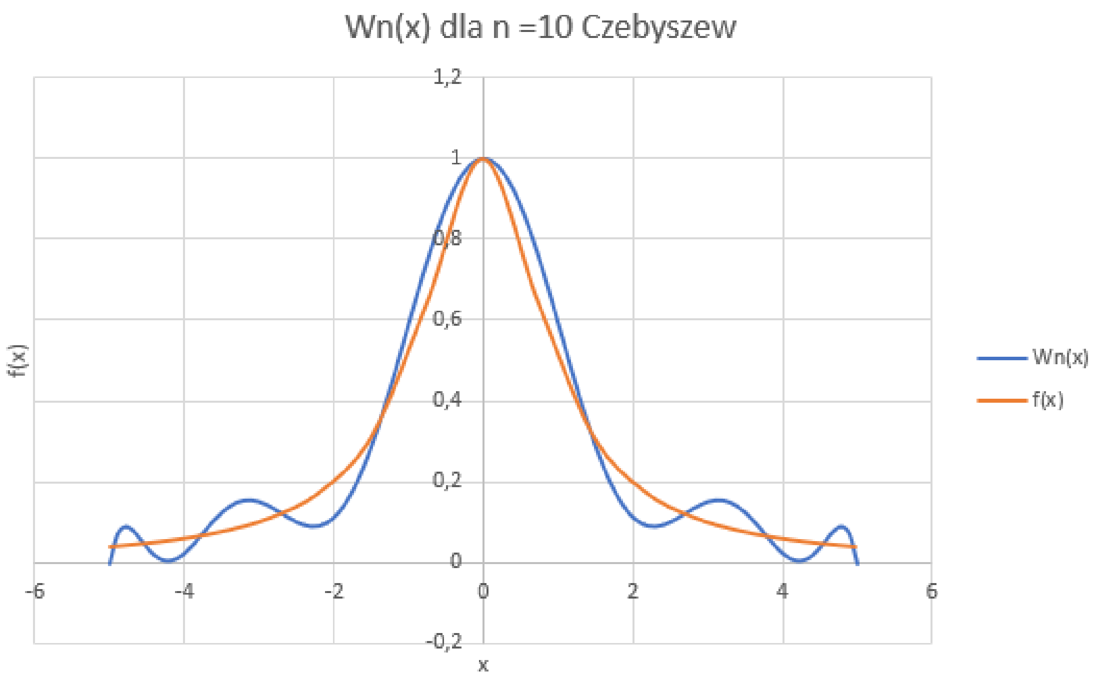


Wykres 2. Wykres zależności wielomianu interpolacyjnego oraz funkcji f(x) od węzła x dla n=5 , dla zoptymalizowanych położeń węzłów

4.2 Wykresy otrzymane dla n = 10

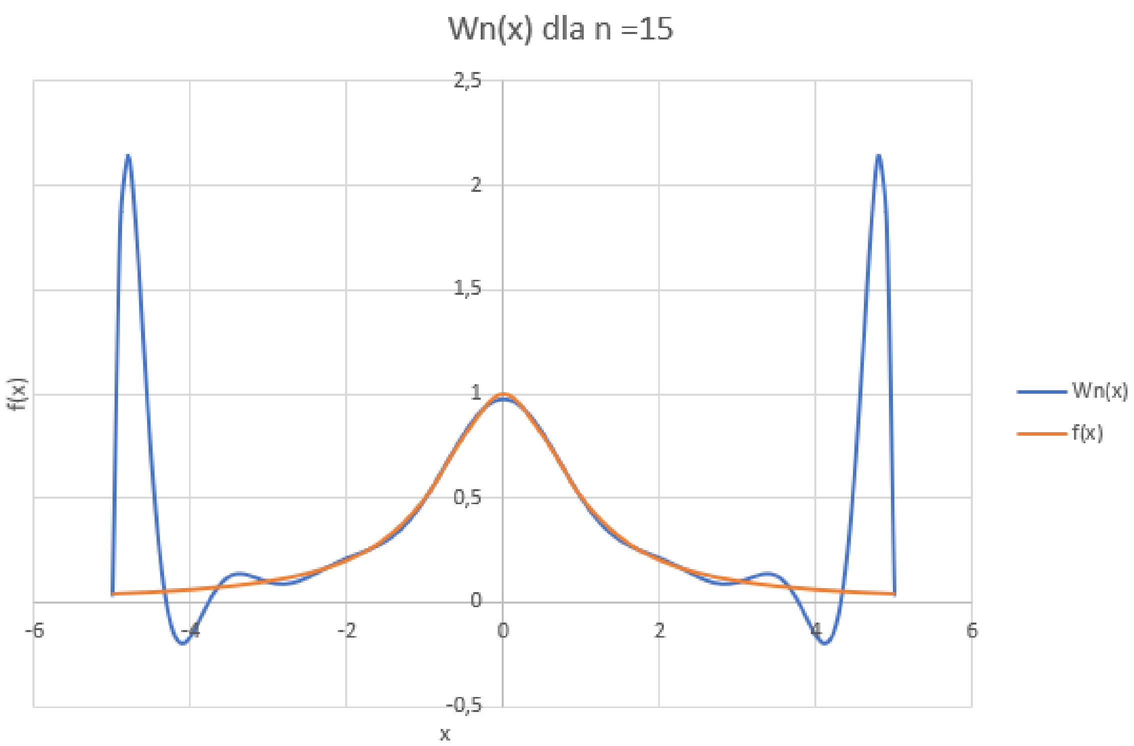


Wykres 3. Wykres zależności wielomianu interpolacyjnego oraz funkcji f(x) od węzła x dla n=10

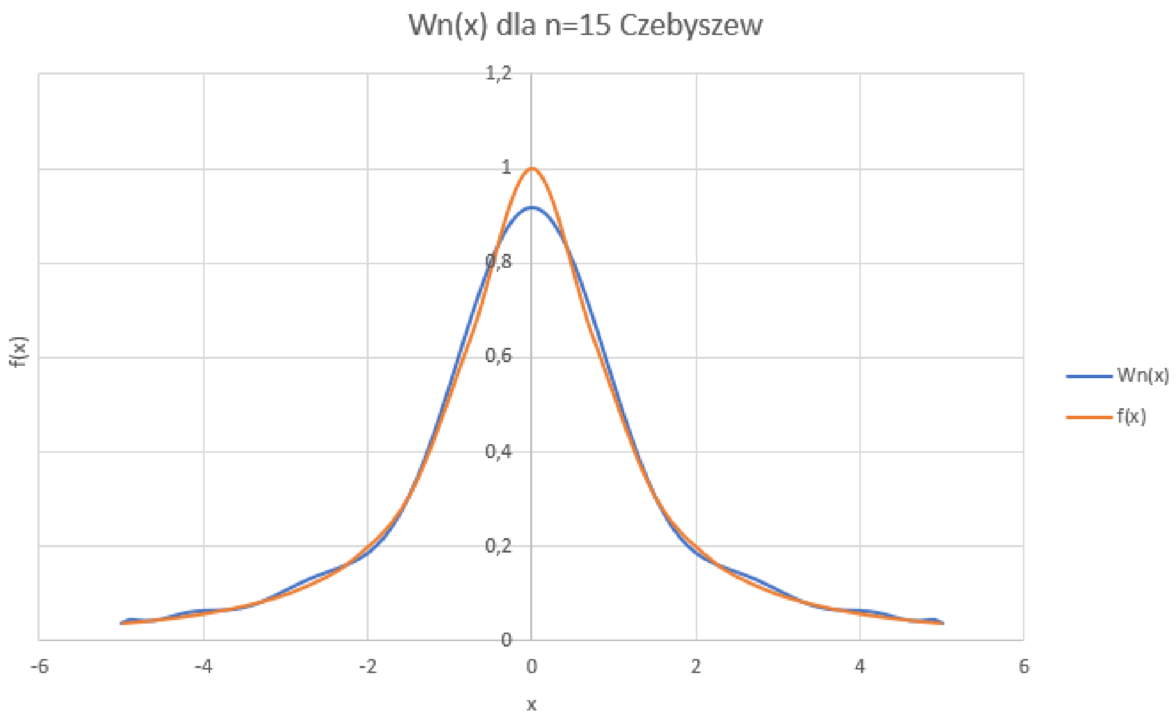


Wykres 4. Wykres zależności wielomianu interpolacyjnego oraz funkcji f(x) od węzła x dla n=10 , dla zoptymalizowanych położeń węzłów

4.3 Wykresy otrzymane dla n = 15

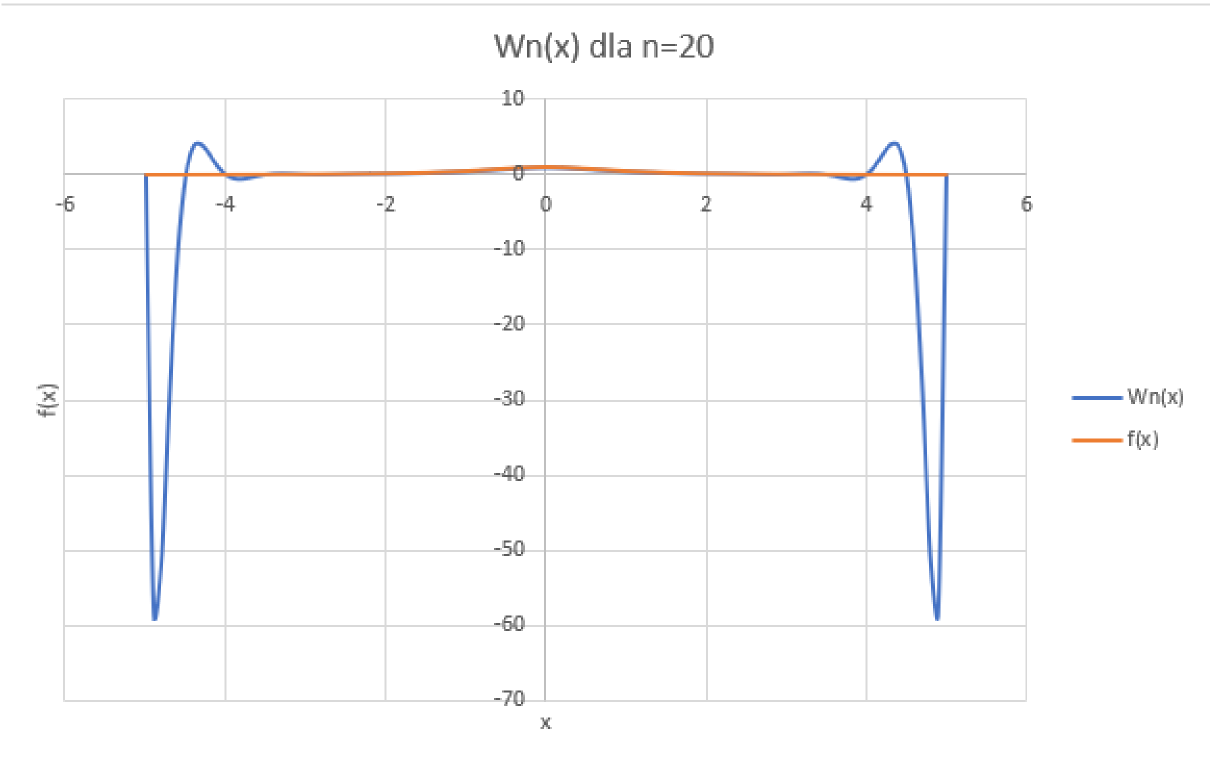


Wykres 5. Wykres zależności wielomianu interpolacyjnego oraz funkcji f(x) od węzła x dla n=15

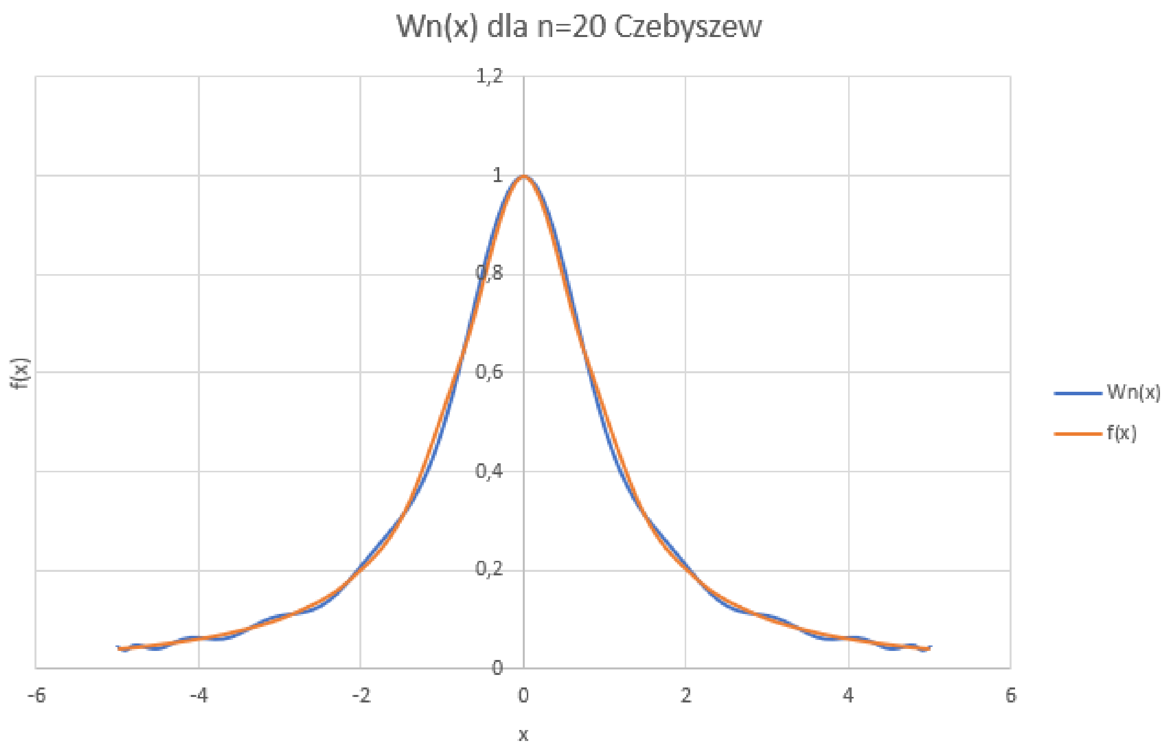


Wykres 6. Wykres zależności wielomianu interpolacyjnego oraz funkcji f(x) od węzła x dla n=15 , dla zoptymalizowanych położeń węzłów

4.4 Wykresy otrzymane dla n = 20



Wykres 7. Wykres zależności wielomianu interpolacyjnego oraz funkcji f(x) od węzła x dla n=20



Wykres 8. Wykres zależności wielomianu interpolacyjnego oraz funkcji f(x) od węzła x dla n=20 , dla zoptymalizowanych położeń węzłów

5.Wnioski

Na podstawie powyższych wykresów można zauważyć, że węzły zoptymalizowane, czyli te będące zerami wielomianu Czebyszewa pozwalają nam na dokładniejsze dopasowanie funkcji na krańcach przedziału. Dzieję się tak przez to, że węzły na początku i końcu zagęszczają się.

Również przedstawione powyżej wykresy potwierdzają poprawność działa algorytmu interpolacji wielomianowej Newtona