Laboratorium 6

Rozwiązywanie układów równań nieliniowych

Bartosz Balawender

18.04.2021

1.Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie pierwiastków układu równań nieliniowych metodą Newtona.

2.Opis problemu

Naszym zadaniem jest wyznaczenie pierwiastków poniższego nieliniowego układu równań:

$$\begin{cases} 2xy^2 - 3x^2y - 2 = 0 \\ x^2y^3 + 2xy - 12 = 0 \end{cases}$$

3.Opis metod

Jak już wcześniej wspomniałem w celu rozwiązania powyższego układu równań posłużymy się metodą Newtona, która pozwala nam na wyznaczenie pierwiastków równań nieliniowych postaci:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = 0 \end{cases}$$

Algorytm ten polega na wyborze punktu wektora startowego r_0 .W naszym przypadku jest to r_0 = [10, 10] oraz r_0[10, -4], ponieważ rozwiązujemy nasz układ dla dwóch różnych punktów startowych. Następnie iteracyjnie przekształcamy nasz wektor aż do momentu, gdy kolejne jego przybliżenia będą dla nas satysfakcjonujące.

W k-tej iteracji dostajemy wektor rozwiązań $r_k = [x_k, y_k]$, zależny od kroku k – 1 w następujący sposób:

$$r_k = r_{k-1} + \Delta r$$

Gdzie Δr jest iloczynem macierzy odwrotnej do macierzy Jacobiego funkcji f oraz wektora kolumnowego, który składa się z kolejnych wartości funkcji f. W naszym przypadku Δr można przedstawić za pomocą wzoru:

$$\Delta \mathbf{r} = -\begin{bmatrix} 2y^2 - 6xy & 4xy - 3x^2 \\ 2xy^3 + 2y & 3x^2y^2 + 2x \end{bmatrix}^{-1}_{r=r_{k-1}} \cdot \begin{bmatrix} 2xy^2 - 3x^2y - 2 \\ x^2y^3 + 2xy - 12 \end{bmatrix}_{r=r_{k-1}}$$

Kryterium zakończenia obliczeń jest w zadanej normie oraz dokładności ε . My za warunek zakończenia przyjmujemy moment, w którym norma wektora Δr, jest mniejsza dokładności, którą ustalamy na $\varepsilon = 10^{-6}$. Warunek ten można przedstawić wzorem:

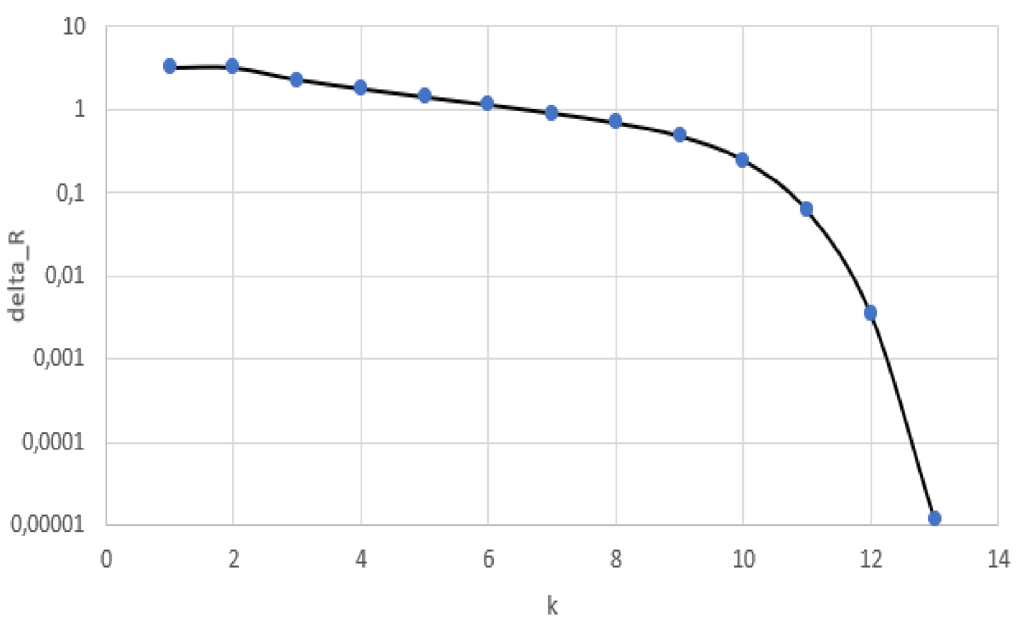
$$\|\Delta r\| = \|r_k - r_{k-1}\| < 10^{-6}$$

Co oznacza, że odległość między kolejnymi punktami iteracji będzie dostatecznie mała

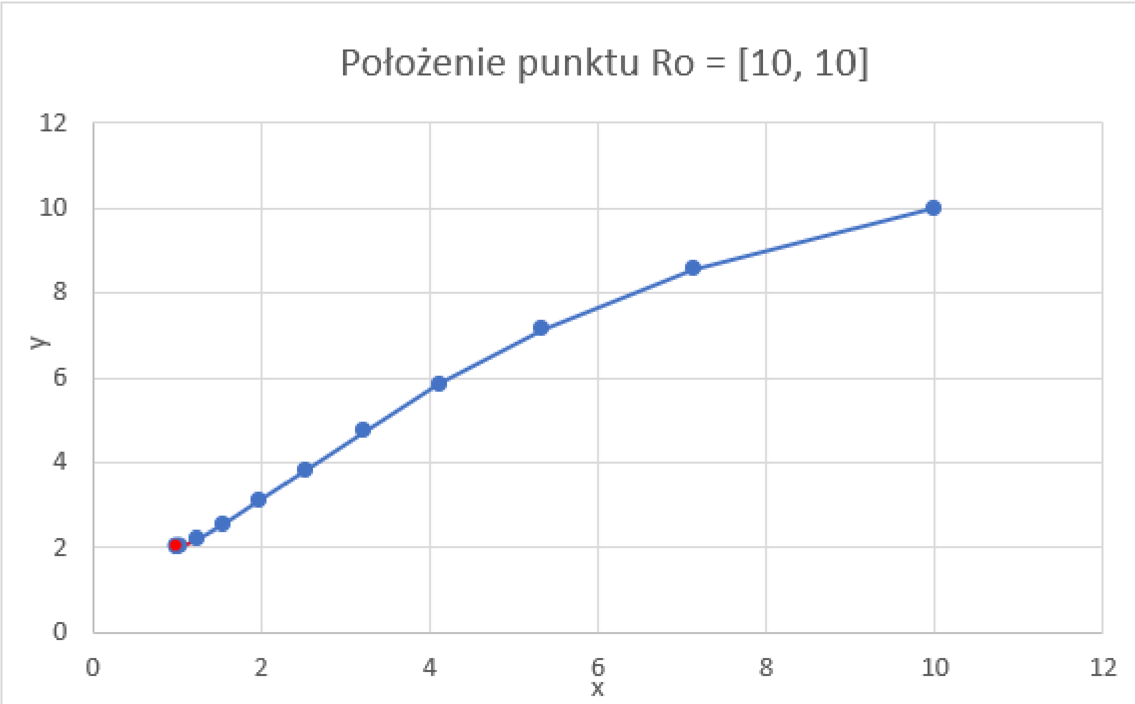
4.Wyniki

4.1 Wyniki otrzymane dla punktu startowego r_0 = [10, 10]

Dla takiego punktu startowego rozwiązaniem naszego nieliniowego układu równań była para liczb: x = 1, oraz y = 2. Pierwiastki te otrzymaliśmy wykonując 13 iteracji.



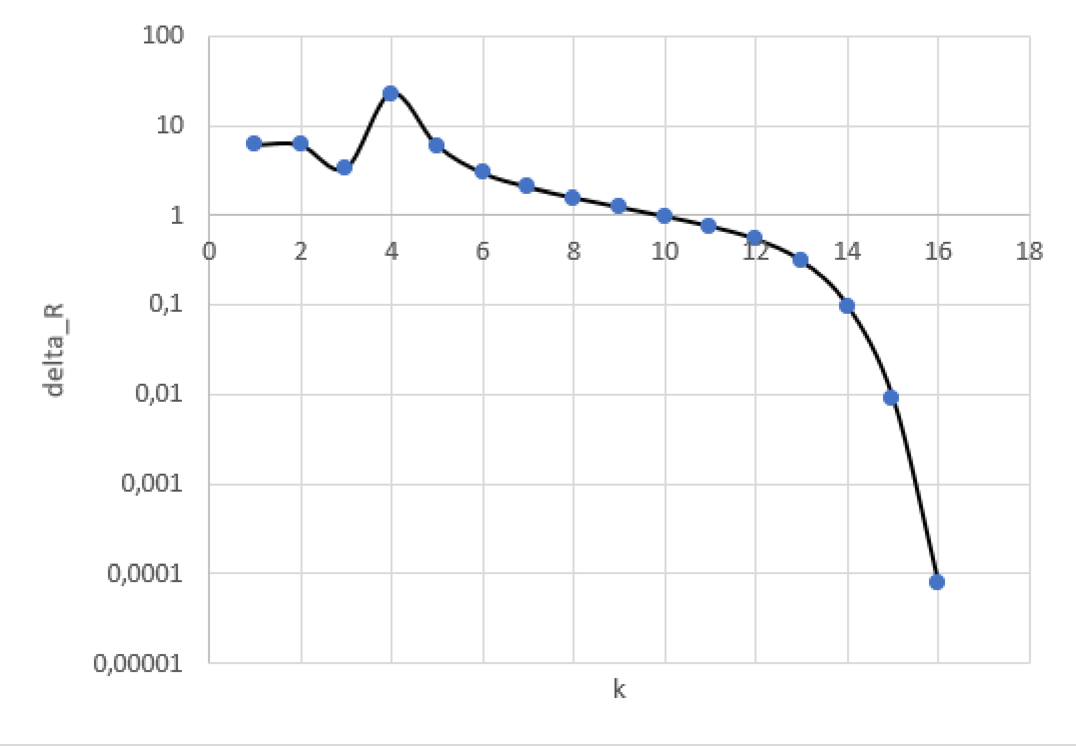
Wykres1. Wykres zależności normy wektora Δr od iteracji k



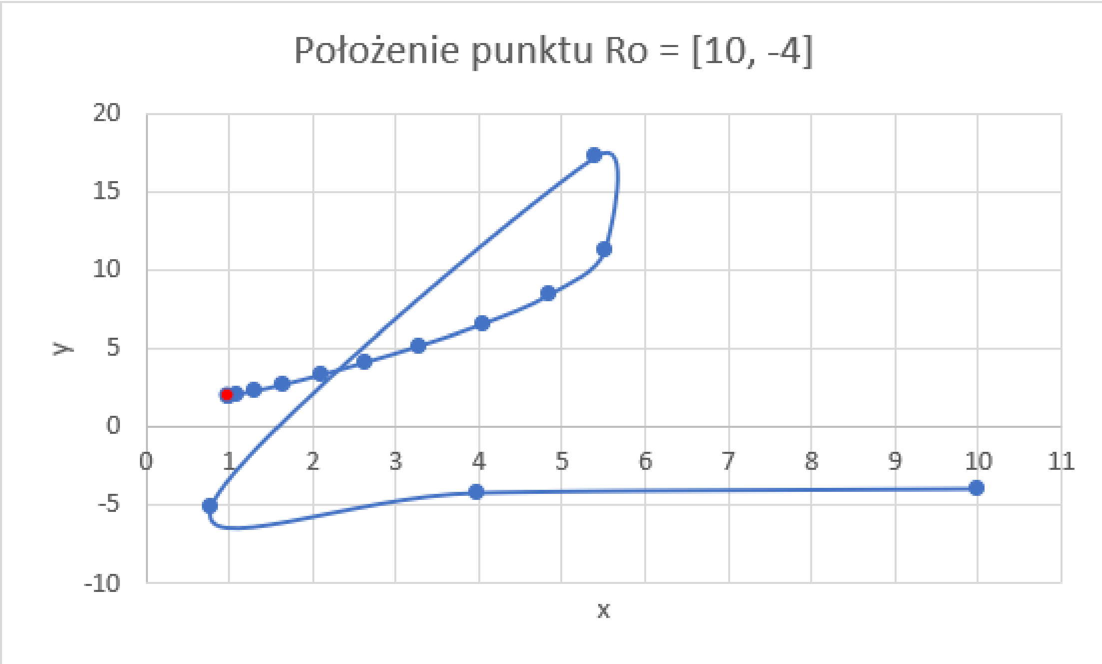
Wykres2. Wykres zmiany wektora początkowego w kolejnych iteracjach r_0 = [10,10]

4.2 Wyniki otrzymane dla punktu startowego r_0 = [10, -4]

Dla tego punktu startowego otrzymaliśmy ten wynik, a mianowicie x = 1 oraz y = 2. Wynik ten jednak udało nam się uzyskać dopiero po 16 iteracjach.



Wykres3. Wykres zależności normy wektora Δr od iteracji k



Wykres4. Wykres zmiany wektora początkowego w kolejnych iteracjach r_0 = [10,-4]

5.Wnioski

1.Metoda Newtona pozwala nam w dość szybki i prosty sposób znaleźć rozwiązanie nieliniowego układu równań liniowych. Algorytm ten ma jednak i swoje wady. Dla większych układów równań niż ten przedstawiony czas trwania algorytmu mógłby nieco wzrosnąć poprzez operację liczenia pochodnych oraz odwracania macierzy, które wykonujemy w każdej iteracji.

2. Ilość iteracji w metodzie Newtona w dużej mierze zależny od punktu startowego. Co można zauważyć na powyższych wykresach. Na „Wykresie 4” możemy zaobserwować duże skoki pomiędzy kolejnymi rozwiązaniami.