Laboratorium 2: Układy równań liniowych (2)

Bartosz Balawender

14.03.2021

1.Cel ćwiczenia: rozwiązanie układu algebraicznych równań liniowych metodą LU, wyznaczenie za pomocą macierzy współczynników LU wyznacznika macierzy oraz macierzy odwrotnej do pierwotnej

2.Opis problemu:

Mamy dane N punktów (xi , yi) dla i = 1, . . . , N, przez które prowadzimy wielomian interpolacyjny w(x) , czyli wielomian N−1 o tej własności, że w(xi) = yi . W celu znalezienie współczynników c_i wielomianu korzystamy z zależności:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i x^i$$

Współczynniki c_i tego wielomianu dane są układem N liniowych równań algebraicznych o N niewiadomych:

$$\begin{cases} c_0 & +c_1x_1 & +c_2x_1^2 & +\dots & +c_{N-2}x_1^{N-2}+ & c_{N-1}x_1^{N-1} & = y_1 \\ c_0 & +c_1x_2 & +c_2x_2^2 & +\dots & +c_{N-2}x_2^{N-2}+ & c_{N-1}x_2^{N-1} & = y_2 \\ & & & \vdots & & & \\ c_0 & +c_1x_N & +c_2x_N^2 & +\dots & +c_{N-2}x_N^{N-2}+ & c_{N-1}x_N^{N-1} & = y_N \end{cases}$$

Powyższy układ równań zapisany w postaci macierzowej **Ax =b** prezentuje się następująco:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-2} & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{N-2} & x_2^{N-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^{N-2} & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad (1)$$

Układ ten należało rozwiązać rozkładają macierz A na macierze LU. Należało również za pomocą ów rozkładu wyznaczyć macierz odwrotną A^{-1} oraz podać wyznacznik det A.

Na koniec na jednym wykresie należało umieścić węzły interpolacyjne oraz wartości wielomianu w przedziale [x_1 ; x_N]. Wartości wielomianu należało wyznaczyć korzystając ze schematu *Hornera.*

3.Opis metody:

Do rozwiązania układu równań (1) zastosowałem rozkład macierzy A na macierze L i U. Metoda ta polega na zapisaniu macierzy współczynników A jako iloczyn macierz dolnotrójkątnej L oraz górnotrójkątnej U tak ,że **A = LU**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Metoda Doolittle'a:

Zadaną macierz A można rozłożyć na macierze **L** i **U** na wiele sposobów, ja posłużyłem się metodą Doolittle'a. W tym sposobie równanie **A = LU** traktowane jest jakoś układ n^2 równań z taką samą liczbą niewiadomych. Zakładają, że na diagonali macierzy **L** znajdują się 1, szukamy elementów l_{ij} dla $i > j$ (elementy położone poniżej przekątnej macierzy **L**) oraz u_{ij} dla $j \geq i$ (elementy macierzy **U** położone na i powyżej przekątnej).

Metoda polega na naprzemiennym wyznaczaniu elementów macierzy **L** i **U**, raz wyznaczana jest wartość wiersza macierzy **U** ,a raz wartości kolumny macierzy **L**. Wartości te wyznaczyłem za pomocą wzorów ogólnych :

$$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Wzór ogólny na poszczególne wiersze macierzy U

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \text{ dla } j \in \{i,\ i+1, \ldots,\ n\}$$

Wzór ogólny na poszczególne kolumny macierzy L

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right) \text{ dla } j \in \{i+1,\ i+2, \ldots,\ n\}.$$

Rozwiązywanie układu równań liniowych po rozkładzie LU:

Gdy nasze macierze LU mają już postać:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Nasz układ równań **Ax = b** przyjmuje wówczas postać: L*U*x = b.
Rozwiązanie takiego układu sprowadza się do rozwiązania dwóch równań:

L * z = b

U * x = z

Obydwa równania zawierają macierze trójkątne, więc nie stanowią one dużego problemu do rozwiązania.

Wyznacznik macierzy A na podstawie otrzymanych macierzy L i U można wyznaczyć w prosty sposób, a mianowicie:

$$\mathbf{det(A) = det(L \cdot U) = det(L) \cdot det(U)}$$

Z czego wiadomo, że macierz L posiada tylko 1 na przekątnej, więc powyższe równanie sprowadza się do:

$$\mathbf{det(A) = det(U)}$$

U jest macierzą trójkątną ,więc sprowadza się to do obliczenia iloczynu współczynników na jej przekątnej

W celu obliczenia macierzy odwrotnej A^{-1} skorzystałem z własności, że macierz A jest macierzą nieosobliwą ,więc jej macierz odwrotną można wówczas przestawić jako iloczyn macierz U^{-1} i L^{-1}.

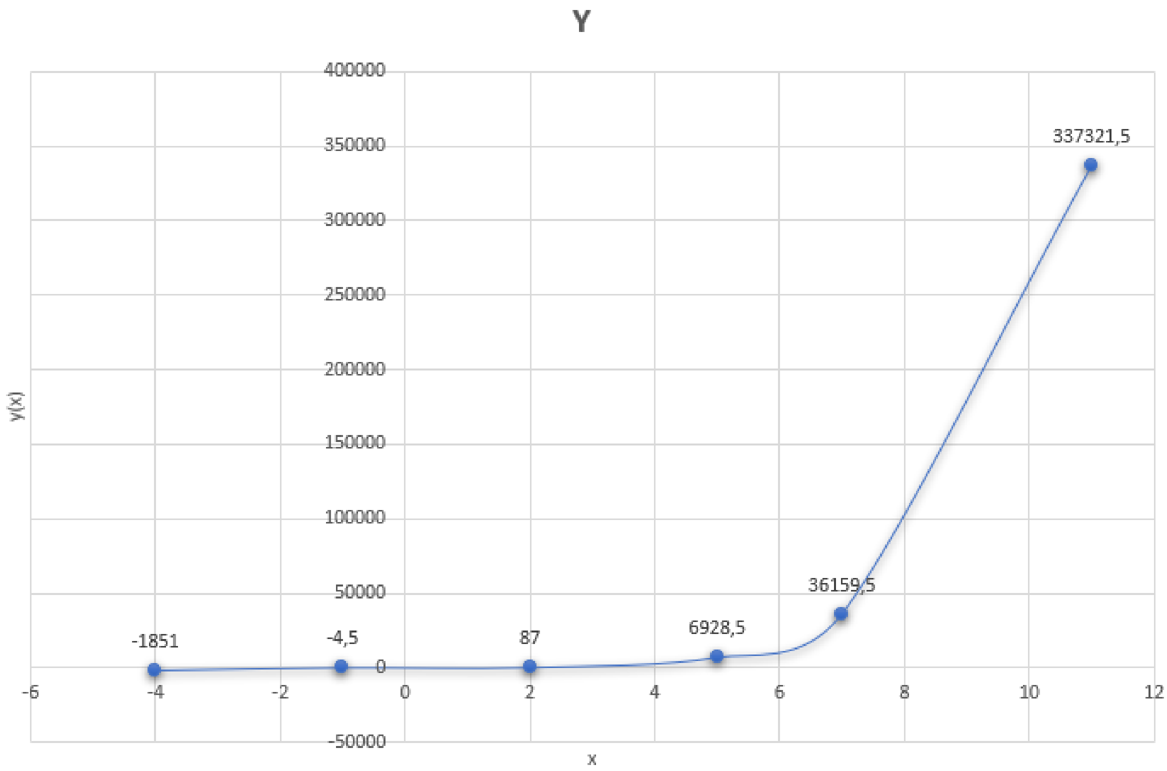
$$\mathbf{A^{-1} = U^{-1} * L^{-1}}$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy A obliczamy ze wzoru:

$$k(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||$$

Wskaźnik ten określa nam jaki wpływ na błąd otrzymanego przez nas wyniku ma błąd reprezentacji numerycznej danych wejściowych. ||A|| oznacza normę macierzy – wybieramy jej największy element.

4.Wyniki



Wykres1. Wykres zależności węzłów interpolacyjnych wielomianu od wartości wielomianu w przedziale $x_1 : x_N$

Przedział x ustawiłem [-4;11] , a natomiast wartości obliczyłem za pomocą schematu Hornera.

5.Podsumowanie

Podczas tego zadania rozwiązywaliśmy UARL za pomocą rozkładu macierz pierwotnej A na macierze L i U. Dzięki tej metodzie nie tylko sprawnie rozwiązaliśmy układ równań, pomogła nam ona również w kolejnych etapach zadania, którymi było:

-obliczenie wyznacznika macierzy A

-obliczenie macierz odwrotnej

-znalezienie wskaźnika uwarunkowania macierzy

Co świadczy o tym, że metoda LU świetnie sprawuję się podczas rozwiązywania układów równań liniowych. Otrzymane w wyniku rozkładu macierze L i U pozwalają nam na szybkie wyznaczenie w/w wartości, co bardzo ułatwia nam działanie na macierzy.

Zawsze należy sprawdzić wskaźnik uwarunkowania macierzy. Jeżeli jest od bardzo wysoki, oznacza to , że nasz problem jest źle uwarunkowany i wprowadza nam olbrzymie błędy w odpowiedziach.