Laboratorium 13

Całkowanie numeryczne przy użyciu kwadratur Gaussa

Bartosz Balawender

13.06.2021

1.Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było obliczenie całek za pomocą kwadratur Gaussa i porównanie wyników z ich dokładnymi wartościami

2.Opis problemu

Za pomocą kwadratur Gaussa należało obliczyć następujące całki:

Przy użyciu kwadratury Gaussa-Leganre'a:

$$c_1 = \int_0^2 \frac{x}{4x^2+1} dx$$

Przy użyciu kwadratury Gaussa-Leguerre'a:

$$c_2 = \int_0^\infty x^k \, exp(-x) \, dx$$

Przy użyciu kwadratury Gaussa-Hermite'a:

$$c_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} sin^2(x) \, sin^4(x) \, exp(-x^2 - y^2) \, dx \, dy$$

3.Opis metody

W naszych rozwiązaniach rozpatrujemy kwadratury Gaussa typu:

$$S(f) = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k)$$

$$A_k = \int_a^b p(x)\phi_k(x) \, dx$$

Ustalamy p(x) jako naszą funkcję wagową oraz liczbę węzłów (N+1) i szukamy:

-położeń węzłów

-współczynników kwadratur A_k

Wzór na współczynniki A_k otrzymujemy korzystając z tożsamości Cristofela-Darboux:

$$A_k = -\frac{2}{(N+2)P_{N+2}(x_k)P'_{N+1}(x_k)}$$

Dokonujemy transformacji liniowej zmiennej niezależnej, móc zastosować powyższe wzory w przedziale [a, b].

$$x \in [1, 1] \qquad , t \in [a, b]$$

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$$

$$f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right) = g(x)$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx S(f) = \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{N} A_k f(t_k)$$

Gdzie:

$$t_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_k$$

Podczas sumowania pomijamy wagę, ponieważ jest już ona uwzględniona w A_k

Kwadratura Gaussa-Legandre'a:

Mając ustalony stopień wielomianu (n) i numer jego zera (k) wyznaczamy jego przybliżone położenie:

$$x_k = \left\{1 - \frac{n-1}{8n^3} - \frac{1}{384n^4}\left(39 - \frac{28}{sin^2\,\phi_k}\right)\right\} cos(\phi_k) + O(n^{-5})$$

Gdzie:

$$\phi_k = \frac{\pi\left(k - \frac{1}{4}\right)}{n + \frac{1}{2}}$$

Kwadratura Gaussa-Leguerre'a:

Przedział całkowania [a, b] = [0, ∞], funkcja wagowa $p(x) = e^{-x}$
Współczynniki kwadratur określone są wzorem:

$$A_k = \frac{\left((N+1)!\right)^2}{L_{N+1}(x_k)L_{N+2}(x_k)}$$

Gdzie węzły x_k są zerami wielomianu $L_{N+1}(x)$

A kwadratura postać:

$$\int_0^\infty \sigma^\lambda \rho(x)\,dx \approx S(f) = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k)$$

Kwadratura Gaussa-Hermite'a

Przedział całkowania [a, b] = [-∞, ∞], funkcja wagowa p(x) = e^{-x}

Ciąg wielomianów ortogonalnych stanowią wielomiany Hermite'a

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

które związane są relacją rekurencyjną

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$$

W algorytmie zastosowałem procedury:

- gauleg – dla kwadratury Gaussa-Legandre'a
- gaulag – dla kwadratury Gaussa-Leguerre'a
- gauher – dla kwadratury Gaussa-Hermite'a

Wartości całek do porównania otrzymujemy ze wzorów analitycznych:

$$c_1 = \int \frac{x}{a^2x^2 \pm c^2}\,dx = \frac{1}{2a^2} ln|a^2x^2 \pm c^2|$$

$$c_2 = \int_0^\infty x^k\, exp(-x)\,dx = k!$$

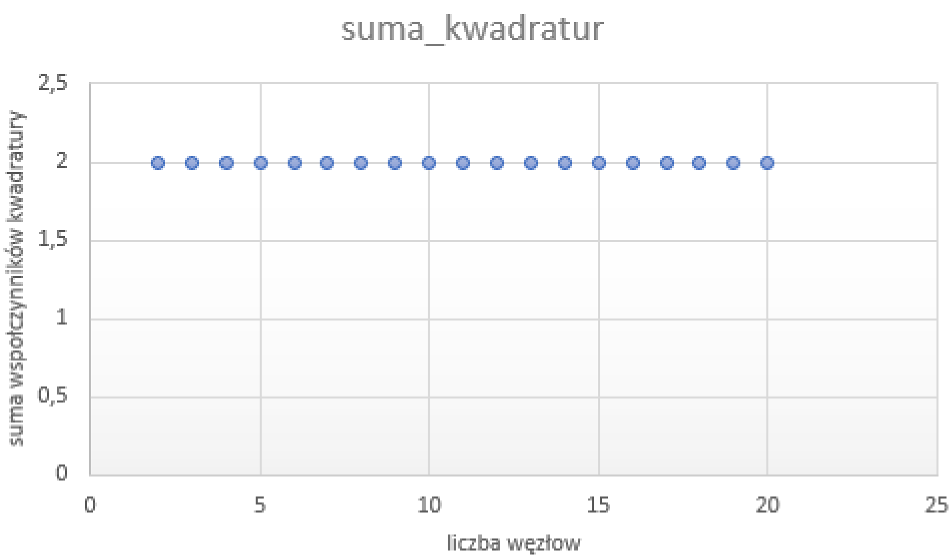
$$c_3 = 0.1919832644$$

4.Wyniki

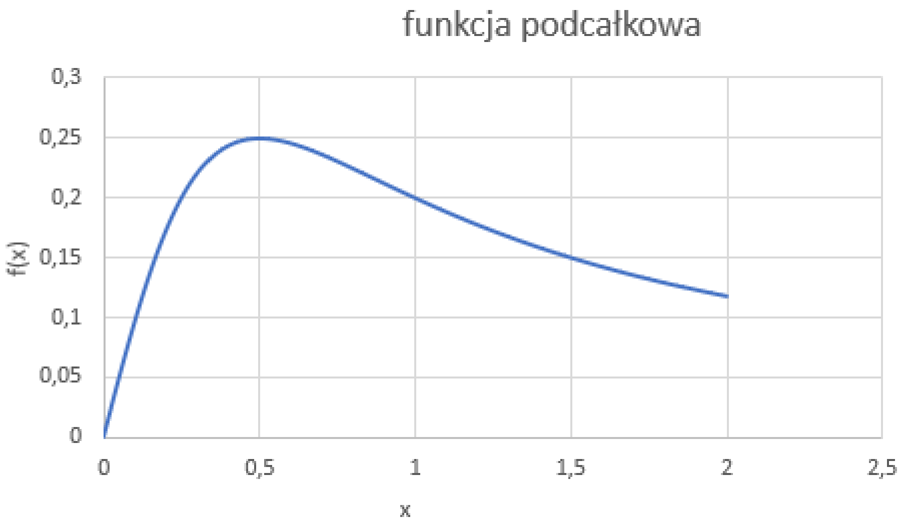
4.1 Całka numer 1(kwadratura Gaussa-Legandre'a)

liczba węzłów n = 2, 3, …, 20

Wykres 1. Różnica między dokładną, a numeryczną wartością całki c_1
w zależności o liczby węzłów



Wykres 2. Suma współczynników kwadratury w zależności od liczby węzłów

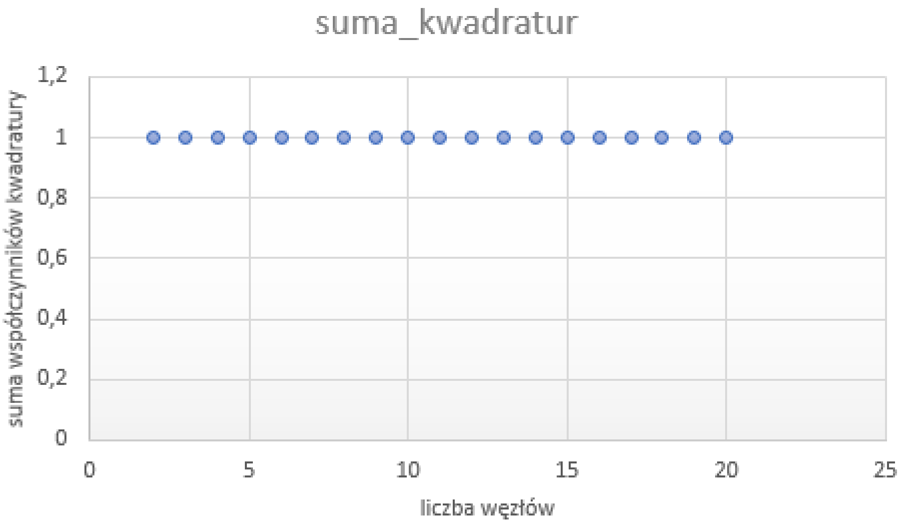


Wykres 3. Wykres funkcji podcałkowej $f(x) = \frac{x}{4x^2+1}$

4.2 Całka numer 2(kwadratura Gaussa-Leguerre'a)

K = 5, liczba węzłów n = 2, 3, …, 20

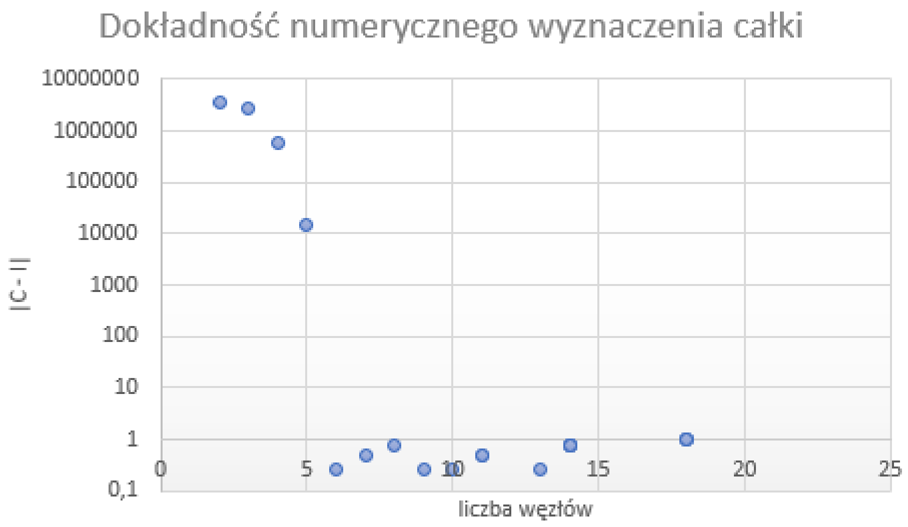
Wykres 4. Różnica między dokładną, a numeryczną wartością całki c_2
w zależności o liczby węzłów (k=5)



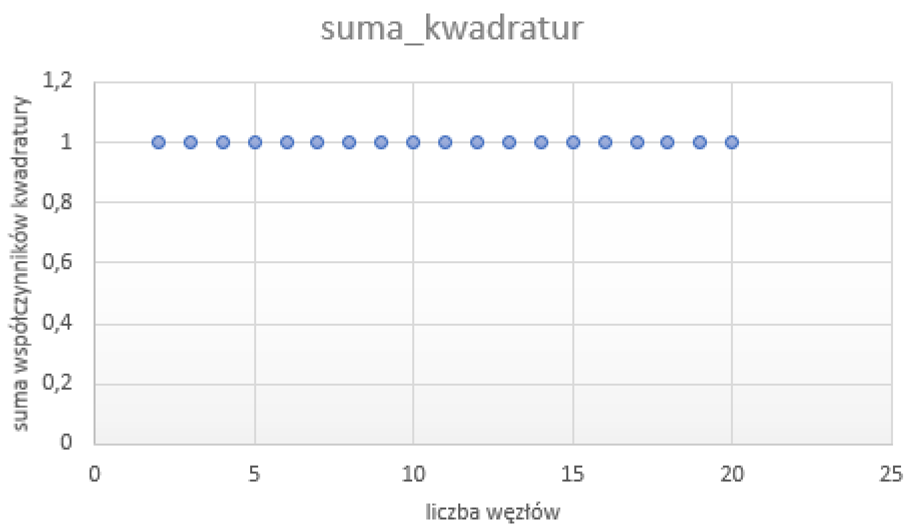
Wykres 5. Suma współczynników kwadratury w zależności od liczby węzłów (k=5)

Wykres 6. Wykres funkcji podcałkowej $f(x) = x^5$

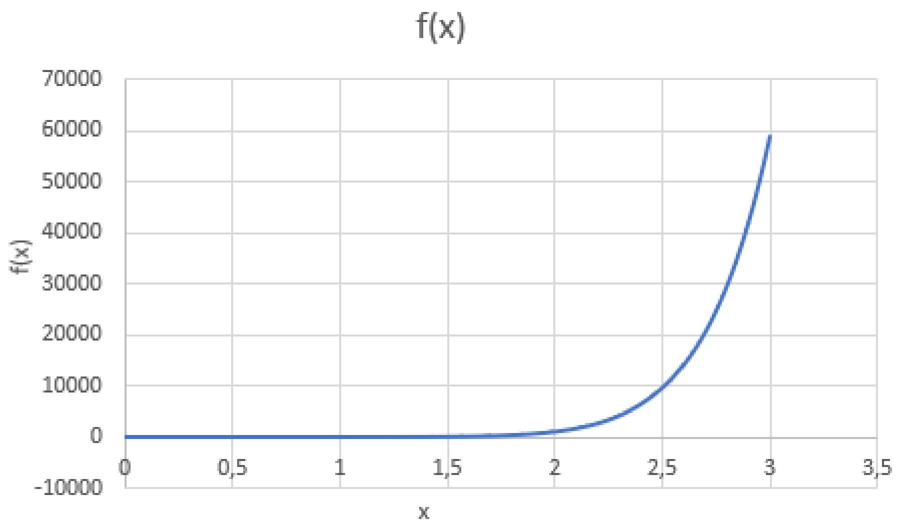
K = 10, liczba węzłów n = 2, 3, …, 20



Wykres 7. Różnica między dokładną, a numeryczną wartością całki c_2
w zależności o liczby węzłów (k=10)

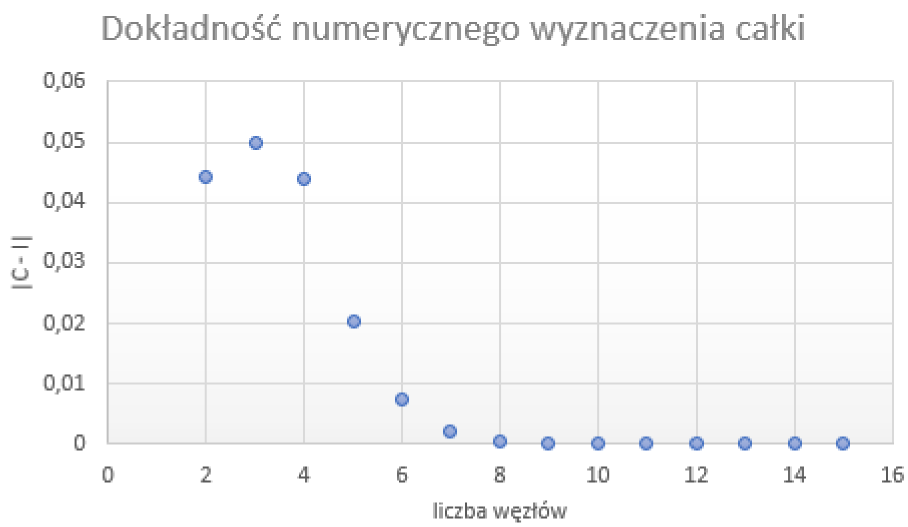


Wykres 8. Suma współczynników kwadratury w zależności od liczby węzłów (k=10)



Wykres 9. Wykres funkcji podcałkowej $f(x) = x^{10}$

4.3 Całka numer 3(kwadratura Gaussa-Hermite'a) liczba węzłów n = 2, 3, …, 15



Wykres 10. Różnica między dokładną, a numeryczną wartością całki c_3
w zależności o liczby węzłów

5.Wnioski

1) Na podstawie wykresów dla całki c_2 można stwierdzić, że wartość oczekiwana całki zależy od stopnia wielomianu podcałkowego. Im mniejszy stopień k wielomianu tym mniej węzłów potrzebujemy do otrzymania szukanej wartości całki. Można również wywnioskować, że wraz ze wzrostem liczy węzłów nasza wyliczona numerycznie całka jest coraz dokładniejsza

2) Powyższe wykresy potwierdzają poprawność działania trzech użytych przez nas metod oszacowania wartości całek. Jak można zauważyć na wykresie |C – I| w zależności o liczby węzłów dla każdego z przypadków dość szybko udało nam się otrzymać wartości bliskie dokładnemu wynikowi.