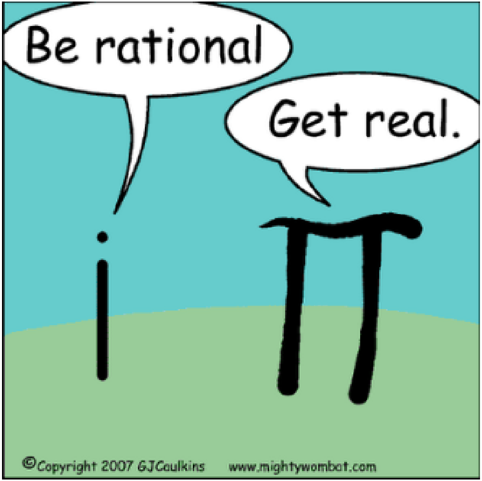
Complexos



Teresa M. Quinteiro
Sandra G. Martins

Versão 1.2

Forma algébrica dos números complexos

Definição

Chama-se *número complexo* a todo o elemento do conjunto

$$\mathbb{C} = \{z \mid \ z = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R}, \ \text{e} \ i^2 = -1\}.$$

Definições

No complexo $z = a + bi$

- a é a *parte real* e representa-se por $Re(z)$;
- b é a *parte imaginária* e representa-se por $Im(z)$;
- i é a *unidade imaginária*;
- Se $b = 0$ então $z = a + i0 = a$ é um número real;
- Se $b \neq 0$ e $a = 0$ então $z = 0 + bi = bi$ diz-se *imaginário puro*;

Ex: Para os complexos $z = a + bi$ que se seguem complete:

z=a+bi	a=Re(z)	b=Im(z)
$2+3i$		
$-3+6i$		
$4i-1$		
$7-i$		
$i+3$		
i		
6		
$\frac{1}{2}+\sqrt{3}i$		

Definições

No complexo $z = a + bi$

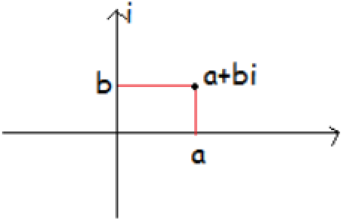
- O *conjugado* de $z = a + bi$ é o número complexo $\overline{z} = a - bi$;
- O *módulo* de $z = a + bi$ é o número real não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ex: Aumente a tabela anterior...

	$Re(z)$	$Im(z)$	$\overline{z}$	$\vert z\vert$.
$2+3i$				
$-3+6i$				
$4i-1$				
$7-i$				
$i+3$				
i				
6				
$\frac{1}{2}+\sqrt{3}i$				

Representação geométrica

Num referencial Oxy a cada número complexo $z = a + bi$ pode fazer-se corresponder o ponto $P(a, b)$. O ponto P chama-se *afixo* de $z = a + bi$.



Ex: Represente o complexo e o seu conjugado; qual o significado do seu módulo?

- $z1 = 2 + 3i$
- $z2 = 5 - 7i$
- $z3 = -i + 3$
- $z4 = -i$
- $z5 = 2$

Definição

- Adição

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$

Ex: Calcule

- $6+7i-2+4i=$
- $5+2i-1-i+3+5+4i-5=$
- $5-2i+8i-5+8i-\sqrt{2}i-\frac{1}{2}=$

Definição

- Multiplicação

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i;$$

Ex: Calcule

- $(3+5i)(-2+4i) =$
- $(5+2i)(-1-i) =$
- $3i(5-2i) =$
- $(8i-5)i + 2i - 3 =$
- $(-i+5)(3-i) =$

Ex: Calcule:

- $i^0 =$
- $i^1 =$
- $i^2 =$
- $i^3 =$
- $i^4 =$
- $i^5 =$
- $i^6 =$
- $i^7 =$
- $i^{10} =$
- $i^{250} =$

Potencias de i ($n \in \mathbb{N}_0$)

- $$i^0 = 1, \;\; i^1 = i, \;\; i^2 = -1, \;\; i^3 = -i.$$

  De um modo geral, $i^n = i^{4q+r} = i^r$, sendo r o resto da divisão de n por 4.

Ex: Calcule

- $i^9 =$
- $i^{26} =$
- $i^{63} =$
- $i^{1043} =$
- $i^{721} =$
- $i^{2721} =$

Definição

- Divisão $(z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_2 \neq 0)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

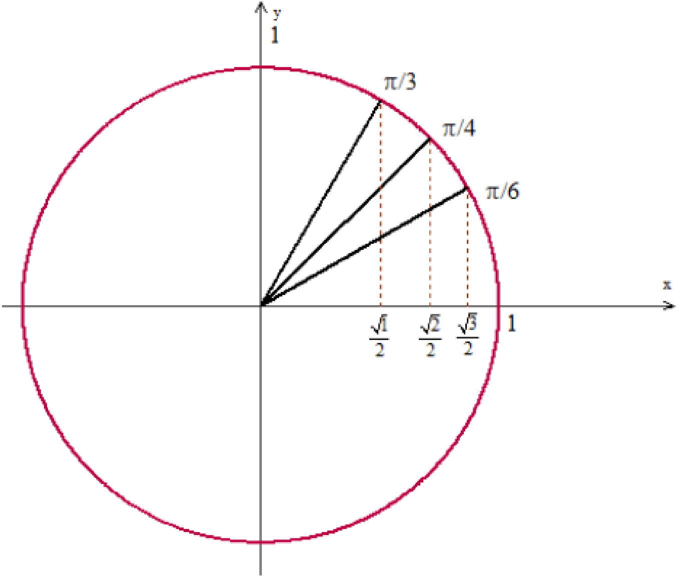
Ex: Calcule

1. $\dfrac{3+5i}{-2+4i} =$
2. $\dfrac{2-4i}{-i+3} =$
3. $\dfrac{6-2i}{i} =$
4. $\dfrac{i+1}{1-i} =$
5. $(i+1)(2-3i)^{-2} =$

Propriedades

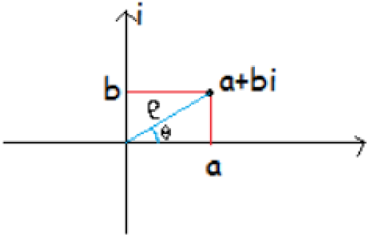
Sejam $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Prove que são verdadeiras:

- $\overline{\overline{z}} = z$;
- $|z| = |\overline{z}|$;
- $z + \overline{z} = 2Re(z)$;
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
- $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.



- $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) =$
- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) =$
- $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) =$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$
- $\sin(-\pi) =$
- $\cos(0) =$
- $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$
- $\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) =$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) =$
- $\tan\left(\frac{-\pi}{3}\right) =$
- $\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) =$
- $\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) =$
- $\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) =$
- $\tan\left(\frac{-10\pi}{3}\right) =$

Forma trigonométrica dos números complexos



Represente geometricamente e na forma algébrica:

1. $\rho = 4$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$
2. $\rho = 3$ e $\theta = \pi$
3. $\rho = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$

Relembre:

$$\cos\theta = \frac{ADJ}{HIP}$$

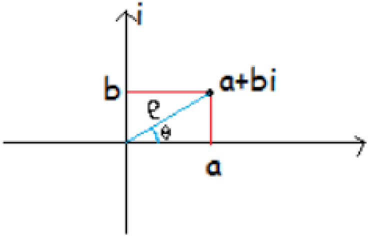
$$\sin\theta = \frac{OP}{HIP}$$

Em geral:

$$\begin{cases} a = \rho\cos\theta \\ b = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$z = a + bi = \rho(\cos(\theta) + i\ \sin(\theta)) = \rho cis(\theta)$$

Forma trigonométrica dos números complexos



Representa geometricamente e na forma trigonométrica:

1. $z = 2 + 2i$
2. $z = 7i$
3. $z = 1 + \sqrt{3}i$
4. $z = 4\sqrt{3} - 4i$

Relembre:

$$\cos\theta = \frac{ADJ}{HIP}$$

$$\sin\theta = \frac{OP}{HIP}$$

Em geral:

- ρ=*Módulo* de z:
  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- θ= *Argumento* de z:
  $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$
  $\sin\theta = \frac{b}{\rho}$

Forma exponencial dos nºs complexos

De

$$z = \rho(\cos(\theta) + i \ \sin(\theta)) = \rho cis\theta$$

Usando a

identidade de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

obtemos a *Forma exponencial*

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

1. Mostre que $e^{i\pi} + 1 = 0$.
2. Apresente na forma algébrica, trigonométrica e exponencial os seguintes números complexos:
   - $z1 = 2 + 2i$
   - $z2 = 3cis(\pi)$
   - $z3 = -1 + i$
   - $z4 = 4cis(\frac{\pi}{2})$
   - $z5 = -i$
   - $z6 = 3cis(\frac{-\pi}{6})$
   - $z7 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$
   - $z8 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$
   - $z9 = 2\sqrt{2}e^{\frac{-5\pi i}{6}}$

Sejam $z_1 = \rho_1 \ cis \ \theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \ cis \ \theta_2$.
Através da representação geométrica deduza as fórmulas para:

- Igualdade

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_2 = \rho_1 \ \wedge \ \theta_2 - \theta_1 = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Conjugado

$$\bar{z}_1 = \rho_1 \ cis \ (-\theta_1).$$

- Simétrico

$$-z_1 = \rho_1 \ cis \ (\pi + \theta_1).$$

Fórmulas de De Moivre

Sejam $z_1 = \rho_1 \; cis \; \theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \; cis \; \theta_2$. Temos que

- Multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \; cis \; (\theta_1 + \theta_2).$$

- Potênciação (expoente inteiro)

$$z_1^n = \rho_1^n \; cis \; (n\theta_1), \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

- Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \; cis(\theta_1 - \theta_2).$$

Ex:

1. Sendo $z_1 = 2cis(\pi)$ e $z_2 = 3cis(\frac{\pi}{2})$ calcule:
   - $z_1.z_2$
   - z_1^5
   - $\dfrac{z_1}{z_2}$
2. Sendo $z_1 = 5cis(\frac{\pi}{3})$ e $z_2 = 4cis(\frac{\pi}{4})$ calcule:
   - $\overline{z_1}.z_2$
   - $-z_1^4$
   - $-\dfrac{z_1}{z_2}$

Fórmulas de De Moivre (cont.)

Seja $z_1 = \rho_1 \ cis \ \theta_1$. Temos que

- Radicação

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{\rho_1} \ cis \ \frac{\theta_1 + 2k\pi}{n} = \sqrt[n]{\rho_1} \ cis \ \frac{\theta_1}{n} \cdot \ cis \frac{2k\pi}{n}$$

$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, \ n \in \mathbb{N}.$

Ex: Calcule

- $\sqrt[5]{2cis(\pi)}$
- $\sqrt[3]{27cis(\frac{\pi}{2})}$
- $\sqrt[5]{32cis(\frac{\pi}{3})}$
- $\sqrt[4]{10cis(\frac{\pi}{5})}$

Represente geometricamente estas raízes.

Encontre as duas raízes r_1 e r_2 de $3x^2 + 12 = 0$ por dois processos...

Agora calcule

$$(x - r_1)(x - r_2)$$

Qual diferença para $3x^2 + 12$?

Proposição

Se um número complexo $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ *é raíz de uma equação polinomial* $P(x) = 0$, *com coeficientes reais, então o complexo conjugado* $\overline{z} = a - bi$ $(b \neq 0)$ *também é raíz da equação.*

Teorema

Toda a equação polinomial de grau n $(n \geq 1)$ *admite* n *e somente* n *raízes complexas, contando com as suas multiplicidades. Além disso,* $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ *onde* a_n *é o coeficiente do termo de maior grau de* $P(x)$ *e* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *são as suas* n *raízes complexas.*

Ex:Decompor em factores

1. $x^2 + 1$
2. $2x^2 - 16x + 50$
3. $4x^2 + 12$
4. $x^2 + 16$
5. $x^2 + 10x + 34$
6. $x^4 + 2x^3 + 5x^2$
7. $x^6 - x^3 + 1$
8. $x^4 - 2x^2 + 1$
9. $x^8 + 17x^4 + 16$

1. Qual o polinómio $p(x)$ de grau 3, com raízes x=1, x=-3 e x=2 em que $p(-1) = 10$?
2. Qual o polinómio $p(x)$ de grau 5, com raízes x=i, x=-3i e x=1 em que $p(0) = 1$?
3. Qual o polinómio $p(x)$ de grau 3, com raízes x=1+2i, x=5 em que $p(1) = 5$?

Exercícios da folha:

5

7b)e)n)

12

16

11a)

...

TPC: Resolver TODOS os exercícios da Folha1.

Recordemos aqui a Fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Ex.:

- Mostre que $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Para $z \in \mathbb{C}$, $z = x + yi$ temos que $e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Designamos esta função por Exponencial complexa

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y), \quad z = x + yi.$$

Facilmente verificamos que estende a Exponencial real - $e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i\sin 0) = e^x$ - e que satisfaz as propriedades usuais das exponenciais, nomeadamente, $e^{z+w} = e^z e^w$, para $z, w \in \mathbb{C}$.

De forma igualmente fácil deduzimos, para $y \in \mathbb{R}$ as expressões

$$\sin(y) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \cos(y) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Definimos as funções Seno e Coseno complexas que estendem as correspondentes funções reais por expressões análogas: para $z \in \mathbb{C}$ temos

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Ex.: Deduza as seguintes relações :

1. $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$;
2. $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$;
3. $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$;
4. $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

A função complexa Tangente define-se por $\tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}$ ou seja

$$\tan(z) = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Para $z \in \mathbb{C}$, definimos as funções Seno Hiperbólico, Coseno Hiperbólico e Tangente Hiperbólica complexas como extensões das correspondentes funções reais

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

Ex.: Verifique que:

1. $\cosh(z) = \cos(iz)$;
2. $\sinh(z) = -i\sin(iz)$;
3. $\tanh(z) = -i\tan(iz)$.

Dado um complexo z em representação exponencial, $z = \rho e^{i\theta}$, dado que $\ln(z) = \ln(\rho e^{i\theta}) = \ln(\rho) + \ln(e^{i\theta}) = \ln(\rho) + i\theta$, definimos Logaritmo complexo por

$$\ln(z) = \ln(\rho) + i\theta,$$

onde $\ln(\rho)$ designa o logaritmo real de $\rho > 0$. Em particular, os números reais negativos têm logaritmos complexos, apesar de não terem logaritmos reais.

Como o argumento θ de cada $z \neq 0$ pode ser escolhido num conjunto infinito de valores que diferem de múltiplos inteiros de 2π, o logaritmo complexo pode ser escolhido entre infinitos valores que diferem de múltiplos inteiros de $i2\pi$. Para garantir a unicidade e a continuidade, chama-se valor principal do logaritmo de z, $z \in \mathbb{C}$, a $\ln(z) = \ln(\rho) + i\theta$ com $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Assim como a exponencial complexa, o logaritmo complexo estende o real e tem propriedades semelhantes, nomeadamente, $\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w)$, $z, w \in \mathbb{C}$.