Prezado aluno, em cada questão desta prova, você deve fornecer o **desenvolvimento** da mesma. Boa sorte!

Questão 1 (2,0 pontos) - *Prove por indução que, para todo número natural $n > 0$, vale a seguinte expressão:*

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

(Base da indução) Vamos verificar a expressão para $n_0 = 1$

$$(2(1)-1)^2 = 1 = \frac{(1)(2(1)-1)(2(1)+1)}{3} = \frac{(1)(1)(3)}{3} = \frac{(1)(1)(3)}{3} = 1.$$

(Hipótese de indução) Vamos presumir que a proposição fornecida é válida para algum $k \leq 1$, isto é:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

(Passo indutivo) Vamos somar $(2(k+1)-1)^2$ a ambos os lados da equação acima.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + ((2(k+1)-1)^2) = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + ((2(k+1)-1)^2)$$

Vamos agora desenvolver o lado direito da expressão acima:

$$\begin{aligned}
\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + ((2(k+1)-1)^2) &= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + \frac{3((2(k+1)-1)^2)}{3} = \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2(k+1)-1)^2}{3} = \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+2-1)^2}{3} = \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} = \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} = \\
&= (2k+1)\frac{k(2k-1) + 3(2k+1)}{3} = \\
&= (2k+1)\frac{2k^2 - k + 6k + 3}{3} = \\
&= (2k+1)\frac{2k^2 + 5k + 3}{3} = \\
&= (2k+1)\frac{(k+1)(2k+3)}{3} = \\
&= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} = \\
&= \frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3}.
\end{aligned}$$

Repare que a expressão obtida na manipulação algébrica acima é exatamente $P(k+1)$. Sendo assim, pelo princípio da induçao matemática, a expressão fornecida é verdadeira para todo $n > 0$. CQD.

Questão 2 (2,0 pontos) - *Prove por indução matemática que, para todo número natural $n > 0$, a seguinte expressão sempre gera um número divisível por 7:*

$$2^{3n} - 1$$

(Base da indução) Vamos verificar a expressão para $n_0 = 1$

$$2^{3(1)} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Portanto a base da indução está garantida.
(Hipótese de indução) Vamos presumir que a proposição fornecida é válida para algum $k \leq 1$, isto é:

$$2^{3k} - 1 \text{ é divisível por 7.}$$

(Passo indutivo) Vamos desenvolver a expressão que corresponde à proposição $P(k+1)$:

$$\begin{aligned} 2^{3(k+1)} - 1 &= 2^{3k+3} - 1 \\ &= 2^{3k} \times 2^3 - 1 \\ &= 8 \times 2^{3k} - 1 \\ &= 8 \times (2^{3k} + 1 - 1) - 1 \\ &= 8 \times (7m + 1) - 1 \\ &= 56m + 8 - 1 \\ &= 56m + 7 \end{aligned}$$

Repare que obtivemos um número da forma $56m + 7$, $m \in \mathcal{Z}$. Esse número é claramente divisível por 7 (porque suas duas parcelas são divisíveis por 7). Sendo assim $P(k) \to P(k+1)$. Portanto, pelo princípio da indução, P(n) é verdadeira para todo $n > 0$. CQD.

Questão 3 **(2,0 pontos)** - *Cada usuário em um sistema de computadores possui uma senha. Cada senha possui tamanho entre 6 e 8 caracteres, em que cada caracter é uma letra maiúscula ou um dígito. Cada senha deve necessariamente conter no mínimo um dígito. Quantas são as senhas possíveis nesse sistema?*

Pelo princípio da adição, podemos dividir o problema em três subproblemas, a saber, calcular $S(6)$, $S(7)$ e $S(8)$, onde $S(k)$ é a quantidade de senhas de tamanho k.
Cálculo de $S(6)$:

$$(10 + 26) \times (10 + 26) \times (10 + 26) \times (10 + 26) \times (10 + 26) \times (10 + 26).$$

Quantidade de senhas de 6 dígitos que não contêm dígito algum: $26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^6$. Sendo assim,

$$S(6) = 36^6 - 26^6$$

De forma análoga, obtemos S(7) e S(8):

$$S(7) = 36^7 - 26^7$$

$$S(8) = 36^8 - 26^8$$

Finalmente, $T = 36^6 - 26^6 + 36^7 - 26^7 + 36^8 - 26^8$.

Questão 4 **(2,0 pontos)** - *Um pacote com jujubas contém dúzias delas. Há jujubas de oito cores diferentes. Quantas jujubas devemos retirar do pacote de forma a garantir que tenhamos* *a) no mínimo duas jujubas da mesma cor?*

b) três da mesma cor?

Usamos o princípio das casas de pombos (PCP) para resolver esse problema. Cada casa corresponde a uma cor, o que resulta em 8 casas (porque há 8 cores). Cada jujuba retirada do pacote é depositada na casa correspondente a sua cor.

a) Pelo PCP, precisamos retirar 9 jujubas para garantir que retiramos no mínimo duas da mesma cor. Para entender, repare que poderíamos, por obra do acaso, retirar 8 jujubas de cores diferentes; mas, ao retirarmos a nona jujuba, esta necessariamente seria de mesma cor que alguma outra jujuba previamente retirada.

b) Precisamos retirar 17 jujubas. Repare que poderíamos retirar 16 jujubas de tal forma que houvesse 2 de cada cor. Mas, após isso, ao retirmos a décima sétima jujuba, esta seria de mesma cor que alguma jujuba retirada anteriormente.

Questão 5 (2,0 pontos) - *Apresente a implementação de uma função (em pseudocódigo, ou em linguagem C, ou em linguagem Java) que, dada a matriz de adjacências de um grafo não-direcionado de N vértices, informe se esse grafo é completo ou não: quando a matriz passada como parâmetro corresponder a um grafo completo, a função deve retornar 1, e deve retornar 0 em caso contrário. Para fins de uniformidade, considere a seguinte assinatura para esta função:*

$$\text{int ehGrafoCompleto(int[N][N] matriz)}$$

```
int ehGrafoCompleto(int[N][N] matriz) {
    int i, j;
    for(i = 0; i < N; i++) {
      for(j = 0; j < N; j++) {
        if(matriz[i][j] != 0 || matriz[i][j] != 1) {
          return 0;
        }
        if(i == j && matriz[i][j] != 0) {
          return 0;
        }
        if(i != j && matriz[i][j] != 1) {
          return 0;
        }
      }
    }
    return 1;
}
```