P3 - EDO

Nome:

1)[2.5 pontos] Resolva a equação diferencial abaixo utilizando o método da variação de parâmetros

$$y'' + y = \sec t$$

2)[1.5 pontos] Encontre uma solução particular para a equação diferencial

$$y'' - 6y' + 9y = 5t^2 e^t$$

3)a)[1.0 ponto] ANULADA.

b)[1.5 pontos] Encontre a solução geral da equação diferencial $y' - 5y = \sin t$

4)[1.0 pontos] Resolva a equação diferencial dada

$$y' = \frac{x^8}{\sqrt{y} + y^2}$$

5)[2.5 pontos] Resolva o P.V.I.

$$y' = \frac{-2e^{2x}\sin y - 2xy}{e^{2x}\cos y + x^2}$$

e $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

1) A homogênea possui equação característica $r^2+1=0 \therefore r=\pm i$ logo, a forma da solução da homogênea é $C_1\cos t + C_2 \operatorname{sen} t$, sendo $y_1=\cos t$ e $y_2=\operatorname{sen} t$. Sendo assim uma solução particular é $v_1\cos t + v_2 \operatorname{sen} t = y_p$, onde

$$\begin{cases} v_1'\cos t + v_2'\operatorname{sen} t = 0 \\ v_1'(\cos t)' + v_2'(\operatorname{sen} t)' = (\sec t)/1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1'\cos t + v_2'\operatorname{sen} t = 0 & \times(\operatorname{sen} t) \\ -v_1'\operatorname{sen} t + v_2'\cos t = \sec t & \times(\cos t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1'\operatorname{sen} t\cos t + v_2'\operatorname{sen}^2 t = 0 \\ -v_1'\operatorname{sen} t\cos t + v_2'\cos^2 t = 1 \end{cases}$$

$\oplus$

$$v_2' = 1 \therefore v_2 = t$$

Como

$$v_1'\cos t + v_2'\operatorname{sen} t = 0$$

$$v_1'\cos t = -\operatorname{sen} t$$

$$v_1' = \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t} \therefore v_1 = \ln|\cos t|$$

Solução $y_G = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t + (\cos t).\ln|\cos t| + t\operatorname{sen} t$

2) A equação característica é $r^2-6r+9=(r-3)^2=0$ e $r_1=3=r_2$.

Como a não homogeneidade é $5t^2e^{1t}$ e 1 não é raiz da equação característica, a forma de uma solução particular é $y_p=(At^2+Bt+C)e^{1t}$

Derivando

$$y_p'=(2At+B)e^t+(At^2+Bt+C)e^t=e^t(At^2+Bt+C+2At+B)$$

Derivando novamente

$$y_p''=(2A)e^t+(2At+B)e^t+(2At+B)e^t+(At^2+Bt+C)e^t$$

$$y_p''=e^t((2A)+2At+B+2At+B+At^2+Bt+C)$$

Como

$$y_p''-6y_p'+9y_p=5t^2e^t$$

$$e^t(2A+2At+B+2At+B+At^2+Bt+C)-6e^t(At^2+Bt+C+2At+B)+9.(At^2+Bt+C)e^t=5t^2e^t$$

$$e^t.(2A+\underline{2At}+B+\underline{2At}+B+\underline{At^2}+\underline{Bt}+C-\underline{6At^2}-\underline{6Bt}-6C-\underline{12At}-6B+\underline{9At^2}+\underline{9Bt}+9C)=5t^2e^t$$

$$4At^2 + t.(2A + 2A + B - 6B - 12A + 9B) + (2A + B + B + C - 6C$$
$$-6B + 9C) = 5t$$

$$4At^2 + t.(-8A + 4B) + (2A - 4B + 4C) = 5t^2 + 0t + 0$$

$$\begin{cases} 4A + 0B + 0C = 5 \\ -8A + 4B + 0C = 0 \\ 2A - 4B + 4C = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{5}{4} \;\; ; \;\; -8A + 4B = 0 \Longrightarrow B = 2A$$
$$B = \frac{5}{2}$$

e

$$2A - 4B + 4C = 0$$
$$\frac{5}{2} - \frac{20}{2} + 4.C = 0$$
$$4C = \frac{15}{2}$$
$$C = 15/8$$

$$y_p = \left(\frac{5}{4}t^2 + \frac{5}{2}t + \frac{15}{8}\right)e^t \;\; //$$

3) b)

Lema: Se $K \neq 0$, $\int e^{Kx} \operatorname{sen} x \, dx = \dfrac{e^{Kx}(K \operatorname{sen} x - \cos x)}{(K^2+1)} + C$

Prova:

$\int e^{Kx} \operatorname{sen} x \, dx = -\int \underbrace{e^{Kx}}_{u} \underbrace{(-\operatorname{sen} x) dx}_{dv} =$

Por partes

$= -\left(\cos x \, e^{Kx} - \int (\cos x) \cdot K e^{Kx} dx\right)$

$= -\cos x \, e^{Kx} + K \int \underbrace{e^{Kx}}_{u} \underbrace{\cos x \, dx}_{dv}$

Partes novamente

$= -\cos x \, e^{Kx} + K \cdot \left(e^{Kx} \operatorname{sen} x - \int (\operatorname{sen} x) K e^{Kx} dx\right)$

$= -\cos x \, e^{Kx} + K e^{Kx} \operatorname{sen} x - K^2 \int (\operatorname{sen} x) e^{Kx} dx$

Logo

$(K^2+1) \int e^{Kx} \operatorname{sen} x \, dx = K e^{Kx} \operatorname{sen} x - \cos x \, e^{Kx}$

$\int e^{Kx} \operatorname{sen} x \, dx = \dfrac{e^{Kx}(K \operatorname{sen} x - \cos x)}{(K^2+1)} + C$

Voltando à equação

$y' - 5y = \text{sen}\, t$

A equação característica da homogênea é

$r - 5 = 0 \Rightarrow r = 5$ e $y = Ce^{5t}$

Variação de parâmetros:

- $y = c(t)e^{5t}$. Logo $y = c(t)e^{5t}$
- $y' - 5y = \text{sen}\, t$

$c'(t)e^{5t} + \cancel{5c(t)e^{5t}} - \cancel{5c(t)e^{5t}} = \text{sen}\, t$

$c'(t) = e^{-5t}\text{sen}\, t$ e $c(t) = \int e^{-5t}\text{sen}\, t\, dt$

Do Lema anterior

$$c(t) = \frac{e^{-5t}(-5\,\text{sen}\, t - \cos t)}{26} + C$$

$$y(t) = \frac{(-5\,\text{sen}\, t - \cos t)}{26} + Ce^{+5t}$$

4) $dy(\sqrt{y}+y^2)=x^8dx$ (Variáveis separáveis)

Integrando

$$\frac{y^{3/2}}{3/2}+\frac{y^3}{3}=\frac{x^9}{9}+C$$

$$\frac{2\sqrt{y^3}}{3}+\frac{y^3}{3}=\frac{+x^9}{9}+C$$

$$3y^3+6\sqrt{y^3}=x^9+C$$

5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(-2e^{2x}\operatorname{sen} y - 2xy)}{e^{2x}\cos y + x^2}$

$(2e^{2x}\operatorname{sen} y + 2xy)dx + (e^{2x}\cos y + x^2)dy = 0$

$M = 2e^{2x}\operatorname{sen} y + 2xy$ e $N = e^{2x}\cos y + x^2$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2x}\cos y + 2x = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ a equação diferencial é exata. Logo $M = u_x$ e $(N = u_y)$

$u = \int u_x \, dx + \phi(y)$

$u = \int (2e^{2x}\operatorname{sen} y + 2xy)dx + \phi(y)$

$u = \operatorname{sen} y \int 2e^{2x} dx + y \int 2x dx + \phi(y)$

$u = e^{2x}\,\text{sen}\,y + x^2 y + \phi(y)$

Derivando u em relação a y:

$u_y = \cancel{e^{2x}\cos y + x^2} + \phi'(y) = N = \cancel{e^{2x}\cos y + x^2}$

$\phi'(y) = 0 \therefore \phi(y) = C_1$

Logo

$u = e^{2x}\,\text{sen}\,y + x^2 y + C_1$

$e^{2x}\,\text{sen}\,y + x^2 y + C = 0$

Gabarito

Como $y(0) = \frac{\pi}{2}$ segue que

$e^{2\cdot 0}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + 0^2 \cdot \frac{\pi}{2} + C = 0$ $\quad C = 1$

e

$e^{2x}\,\text{sen}\,y + x^2 y + 1 = 0$