P3 - CÁLCULO A VÁRIAS VARIÁVEIS

1) Considere $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 3x^2 + 3y^2 - 36x - 36y + 1$. Encontre:

   a) A equação do plano tangente à f no ponto $P = (1,-1)$.
   b) A derivada direcional de f no ponto $P = (1,-1)$ na direção de $\vec{v} = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$.
   c) Os pontos críticos de f e classifique-os.

2) Resolva a integral dupla abaixo, onde D é região delimitada pelo triangulo formado pelos pontos $A = (0,-1)$, $B = (1,0)$ e $C = (0,1)$.

$$\int\int_D 6x^2 \, dy \, dx$$

3) Resolva a integral dupla abaixo, onde D é a região delimitada por $4 \leq x^2 + y + 2 \leq 16$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

$$\int\int_D x\sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

4) Calcule a integral tripla abaixo, onde E é o tetraedro sólido delimitado pelos quatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 3$.

$$\int\int_E\int 720z^7 dV$$

5) Seja E a parte do sólido delimitado pelo cone circular $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ e pela semiesfera $z = \frac{1}{3}\sqrt{1 - 9x^2 - 9y^2}$ que está no primeiro octante, encontre o valor da constante k de tal forma que a equação abaixo seja verdadeira.

$$\int\int_E\int \frac{kxyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dV = 1$$

P3 - CÁLCULO A VÁRIAS VARIÁVEIS

1)

a. $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6x - 36$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = -36$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 + 6y - 36$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -36$

$z = 2(1)^3 + 2(-1)^3 - 3(1)^2 + 3(-1)^2 - 36 * 1 + 36(-1) + 1$

$z = 1$

$-36(x-1) - 36(y+1) - (z-1) = 0$

$-36x + 36 - 36y - 36 - z + 1 = 0$

$z = -36x - 36y + 1$

---

b. $|\vec{v}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{16}\right)} = \sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{5}{12}$

$D\vec{f} = -36\left(\frac{\frac{-1}{3}}{\frac{5}{12}}\right) - 36\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}\right)$

$D\vec{f} = -36\left(-\frac{12}{15}\right) - 36\left(\frac{12}{20}\right)$

$D\vec{f} = -36\left(-\frac{4}{5}\right) - 36\left(\frac{3}{5}\right)$

$D\vec{f} = \frac{144}{5} - \frac{108}{5} = \frac{36}{5}$

---

c. $6x^2 - 6x - 36 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 * 1(-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = 3 \; ou -2$

$6y^2 + 6y - 36 = 0$

$y^2 + y - 6 = 0$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 * 1(-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = -3 \; ou \; 2$

$(3,-3), (3,2), (-2,2), (-2,-3)$

$\frac{\partial f^2}{x^2} = 12x - 6$

$\frac{\partial f^2}{xy} = 0$

$\frac{\partial f^2}{yx} = 0$

$\frac{\partial f^2}{y^2} = 12y + 6$

$(3,-3) \quad \begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{vmatrix} \quad -900$ Ponto de sela

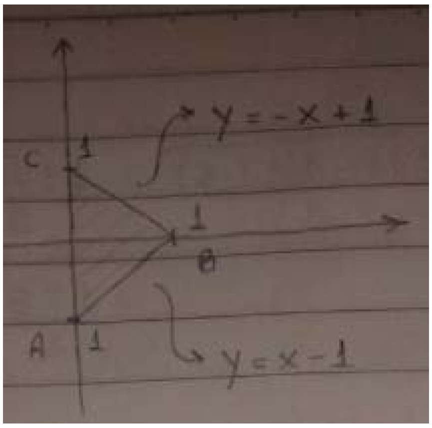
$(3,2) \quad \begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{vmatrix} \quad 900$ Mínimo local

$(-2,2) \quad \begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{vmatrix} \quad -900$ Ponto de sela

$(-2,-3) \quad \begin{vmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{vmatrix} \quad 900$ Mínimo local

P3 - CÁLCULO A VÁRIAS VARIÁVEIS

2)



$$\int_0^1 \int_{x-1}^{-x+1} 6x^2\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 |y6x^2|_{x-1}^{-x+1}\, dx$$
$$= \int_0^1 (-x+1) * 6x^2 - (x-1) * 6x^2\, dx$$
$$= \int_0^1 -6x^3 + 6x^2 - 6x^3 + 6x^2\, dx$$
$$= \int_0^1 -12x^3 + 12x^2\, dx$$

$$= \left|\frac{12x^4}{4} + \frac{12x^3}{3}\right|_0^1 = |-3x^4 + 4x^3|_0^1 = 1$$

---

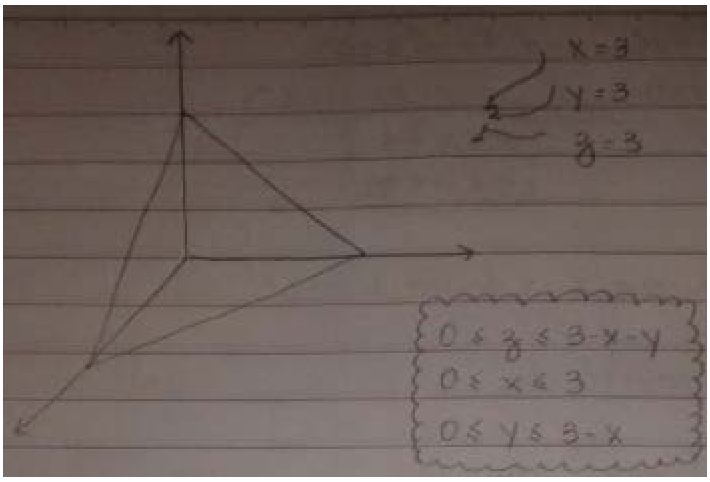
3) $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16 \rightarrow 4 \leq r^2 \leq 16$
$x \geq 0$ e $y \geq 0$

$$\boldsymbol{2 \leq r \leq 4}$$
$$\boldsymbol{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 r * cos\theta * r * r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^4 r^3 * cos\theta\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{r^4 * cos\theta}{4}\right|_2^4 d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 256cos\theta - 16cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 240cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{4}|240sen\theta|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{240}{4} * \left(sen(90°) - sen(0°)\right) = 60$$

P3 - CÁLCULO A VÁRIAS VARIÁVEIS

4)



$$\int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} 720z^7 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{3-x} \left| \frac{720z^8}{8} \right|_0^{3-x-y} dy \, dx$$

$$= 90 \int_0^3 \int_0^{3-x} (3-x-y)^8 \, dy \, dx$$

$$= 90 \int_0^3 u^8 * (-du) \, dx$$

$\boldsymbol{u = 3 - x - y}$
$\boldsymbol{du = -1}$

$$= 90 \int_0^3 \left| \frac{u^9}{9} * (-du) \right|_0^{3-x} dx$$

$$= -10 \int_0^3 |u^9|_0^{3-x} \, dx$$

$$= -10 \int_0^3 (3-x)^9 \, dx$$

$$= -10 |u^9 * (-du)|_0^3 \, dx$$

$\boldsymbol{u = 3 - x}$
$\boldsymbol{du = -1}$

$$= 1|u^{10}|_0^3 = 3^{10}$$