P2 - Equações Diferenciais Ordinárias

Nome:

Questões

1)[1.5 pontos] Prove que para $s > 0$,

$$\mathscr{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2},$$

2)[1.5 pontos] Encontre a solução do problema de valor inicial $y'' + y = \sin 2t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, utilizando transformadas de Laplace.

3)[1.5 pontos] Encontre a solução do problema de valor inicial $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = 7/2$, $y'(0) = -4$, $y''(0) = 5/2$, $y'''(0) = -2$.

4)[1.0 ponto] Resolva, pelo método da variação de parâmetros, a equação diferencial

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}$$

.

5)[0.5 ponto] Use o método dos coeficientes indeterminados para descobrir a forma da solução EDO

$$8y'(x) - 2y(x) = 3x^{100}e^{4x}\cos 25x$$

. Explique o motivo de tal solução ser da forma que você escreveu.

1) $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}, \; s>0.$

$$F = \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-st} \cos at \, dt$$

$$F = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a} \int_0^n \underbrace{e^{-st}}_{u} \cdot \underbrace{(a \cos at)\,dt}_{\substack{(\operatorname{sen} at)' \\ dv}}$$

$$F = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a} \cdot \left(e^{-st} \operatorname{sen} at \Big]_{t=0}^{t=n} - \int_0^n (\operatorname{sen} at)(-s) e^{-st} \, dt \right)$$

$$F = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a} \cdot \left(e^{-sn} \operatorname{sen} an - e^{-s \cdot 0} \operatorname{sen} a \cdot 0 + (s) \int_0^n e^{-st} (\operatorname{sen} at) \, dt \right)$$

feito na lista propo... tolia para la...

$$F = \frac{1}{a} \cdot \left(0 - 0 + s \cdot \frac{a}{s^2+a^2} \right)$$

$$F = \frac{1}{\cancel{a}} \cdot \left(\frac{s \cdot \cancel{a}}{s^2+a^2} \right)$$

$$F = \frac{s}{s^2+a^2}, \; s>0$$

3) A equação característica é $r^4-1=0$

$$(r^2)^2-(1)^2=(r^2-1).(r^2+1)=(r-1).(r+1).(r^2+1)=0$$

$$r_1=1,\ r_2=-1,\ r_3=i,\ r_4=-i$$

$$y(t)=C_1e^{t}+C_2e^{-t}+e^{0.t}.(C_3\cos 1.t+C_4\operatorname{sen} 1.t)$$

$$y(t)=C_1e^{t}+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\operatorname{sen} t$$

Assim

$$y(0)=\boxed{\frac{7}{2}=C_1+C_2+C_3}$$

$$y'(t)=C_1e^{t}-C_2e^{-t}-C_3\operatorname{sen} t+C_4\cos t$$

e

$$y'(0)=\boxed{C_1-C_2+C_4=-4}$$

$$y''(t)=C_1e^{t}+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\operatorname{sen} t$$

e

$$y''(0)=\boxed{5/2=C_1+C_2-C_3}$$

$$y'''(t)=C_1e^{t}-C_2e^{-t}+C_3\operatorname{sen} t-C_4\cos t$$

$$y'''(0)=\boxed{C_1-C_2-C_4=-2}$$

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + C_4 = -4 & (i) \\ C_1 - C_2 - C_4 = -2 & (ii) \end{cases}$$

$(i) - (ii)$

$\Downarrow$

$C_4 - (-C_4) = -4 - (-2)$

$2C_4 = -2$

$C_4 = -1$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 7/2 & (iii) \\ C_1 + C_2 - C_3 = 5/2 & (iv) \end{cases}$$

$(iii) - (iv) \quad C_3 - (-C_3) = 7/2 - 5/2$

$2C_3 = 1$

$C_3 = 1/2$

De (i) e do (iii)

$$\begin{cases} C_1 - C_2 - 1 = -4 \\ C_1 + C_2 + 1/2 = 7/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = -3 \\ C_1 + C_2 = 3 \end{cases} \rightarrow C_1 = 0 \text{ e } C_2 = 3$$

Solução

$$y = 3e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \operatorname{sen} t$$

4) Resolver é encontrar a solução (geral). Logo precisamos somar a solução da homogênea com uma sol. particular.

Sol. da homogênea

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Eq. característica

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$(r+1)^2 = 0 \therefore r_1 = r_2 = -1$$

Logo $y_h = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$

Soluções $\{\underbrace{e^{-t}}_{= y_1}, \underbrace{t e^{-t}}_{= y_2}\}$

Para determinar uma sol. particular

$$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = f/a \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1' e^{-t} + v_2' t e^{-t} = 0 \\ -v_1' e^{-t} + v_2' (t e^{-t})' = e^{-t}/1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1' e^{-t} + v_2' t e^{-t} = 0 \quad (i) \\ -v_1' e^{-t} + v_2'(e^{-t} - t e^{-t}) = e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1' e^{-t} + v_2' t e^{-t} = 0 \\ -v_1' e^{-t} + v_2' e^{-t} - v_2' t e^{-t} = e^{-t} \end{cases}$$

$(+)$

$$\cancel{v_2' e^{-t} = e^{-t}}$$

$$v_2' = 1 \quad \therefore \quad v_2 = t$$

Logo de (i)

$$v_1' e^{-t} + v_2' t e^{-t} = 0$$

$$v_1' e^{-t} + 1 . t e^{-t} = 0$$

$$v_1' = -t$$

$$v_1 = \frac{-t^2}{2}$$

Solução: $y_G = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + \left(\frac{-t^2}{2}\right) e^{-t} + t . t e^{-t}$

$$y_G = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + \frac{t^2}{2} e^{-t}$$

5) Segue um resumo do método dos coeficientes indeterminados para o caso em questão.

Para encontrar uma solução particular para a equação diferencial de coeficientes constantes $L[y] = Cx^m e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $L[y] = Cx^m e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$, em que $\beta \neq 0$, usa-se a forma:

(i) $y_p(x) = x^s \cdot \left[\sum_{i=0}^{m} A_i x^i\right] e^{\alpha x}\cos\beta x + x^s \cdot \left[\sum_{j=0}^{m} B_j x^j\right] e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$

onde $s = 0$ se $\alpha + i\beta$ não for raiz da equação característica associada; caso contrário considere que s seja igual à multiplicidade dessa raiz.

Em nosso caso a eq. característica é

$8r - 2 = 0 \therefore r = 1/4$.

Como claramente se vê, $4 + 25i$ não é raiz. Logo a forma da solução particular é:

$$y_p = \left[\sum_{i=0}^{100} A_i x^i\right] e^{4x}\cos 25x + \left[\sum_{j=0}^{100} B_j x^j\right] e^{4x}\operatorname{sen} 25x$$

A solução geral é

$$y_G = Ce^{x/4} + \left[\sum_{i=0}^{100} A_i x^i\right] e^{4x}\cos 25x + \left[\sum_{j=0}^{100} B_j x^j\right] e^{4x}\operatorname{sen} 25x$$