P2 – CÁLCULO NUMÉRICO

1) [3 pontos] Os painéis laterais para o interior de um avião são formados em uma prensa importada. O custo da unidade de fabricação varia com o tamanho do lote de produção. Os dados mostrados a seguir fornecem o custo médio por unidade (em centenas de reais) para este produto (y) e o tamanho do lote de produção (x).

x	20	30	40	50	60	70
y	1.81	1.65	1.48	140	1.30	1.24

Utilize a técnica de <u>interpolação polinomial</u> OU do <u>polinômio de Lagrange</u> para encontrar interpolador polinomial quadrático e calcule o custo aproximado para a fabricação de 63 painéis laterais.

2) [3 pontos] Considere a função $f(x) = e^x - x^2$ e os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 0.9$, $x_4 = 1$. Determine uma aproximação de $f(0.7)$, utilizando o polinômio de Newton (método das diferenças finitas), de grau três, escolhendo convenientemente pontos consecutivos do conjunto acima.

3) Dê um exemplo de uma função onde:
   a) [0,5 ponto] O método dos Trapézios calcula o valor exato da integral
   b) [0,5 ponto] O método de Simpson calcula o valor exato da integral

4) Um terreno está limitado por uma cerca reta e um rio. Ao longo da cerca foram marcados pontos (X, em metros) e medida a distância de cada um destes pontos ao rio (Y, em metros). Os dados obtidos são apresentados na tabela abaixo:

x	0	20	40	60	80	100	120
y	0	22	41	53	38	17	0

Determine a área aproximada do terreno utilizando:
   a) [1,5 ponto] O método de Trapézio
   b) [1,5 ponto] O método de Simpson

CEFET/RJ - P2 de Cálculo Numérico - 2014/1 - Gabarito

1

x	y
50	1,40
60	1,30
70	1,24

Polinômio de Lagrange:

$$P_2(x) = L_0(x)\, f_0 + L_1(x)\, f_1 + L_2(x)\, f_2$$

$$L_0(x) = \frac{(x-60)(x-70)}{(50-60)(50-70)} = \frac{(x-60)(x-70)}{(-10)(-20)}$$

$$= \frac{x^2-70x-60x+4800}{200} = \frac{x^2-130x+4800}{200}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-50)(x-70)}{(60-50)(60-70)} = \frac{x^2-120x+3500}{-100}$$

$$= -\left(\frac{x^2-120x+3500}{100}\right)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-50)(x-60)}{(70-50)(70-60)} = \frac{x^2-110x+3000}{200}$$

Logo $P_2(x) = \dfrac{x^2-130x+4800}{\cancel{200}\;100}\cdot(\cancel{1,4})^{0,7} - \left(\dfrac{x^2-120x+3500}{100}\right)\cdot 1,30 \; +$

$$\left(\frac{x^2-110x+3000}{\cancel{200}\;100}\right)\cdot \cancel{1,24}^{\,0,62}$$

$$P_2(x) = (x^2-130x+4800)(0,007) - (x^2-120x+3500)\times 0,013 +$$
$$(x^2-110x+3000)\times 0,0062$$

$$P_2(x) = 0,007x^2 - 0,91x + 33,6 - 0,013x^2 + 1,56x - 45,5 + 0,0062x^2 -$$
$$- 0,682x + 18,6 = 0,0002x^2 - 0,032x + 6,7$$

$$P_2(63) = 0,0002(63)^2 - 0,032(63) + 6,7 = 1,4778$$

(2) $f(x) = e^x - x^2$

x	0	0,3	0,6	0,9	1
f(x)	1	1,2598	1,4621	1,6496	1,7182

x	f(x)	$\Delta_h f$	$\Delta_h^2 f$	$\Delta_h^3 f$
0	1	$\frac{0,2598}{0,3} = 0,866$	$\frac{-0,1917}{0,6} = -0,3195$	$\frac{0,2374}{0,9} = 0,2637$
0,3	1,2598	$\frac{0,2023}{0,3} = 0,6743$	$\frac{-0,0493}{0,6} = -0,0821$	
0,6	1,4621	$\frac{0,1875}{0,3} = 0,625$		
0,9	1,6496			

Logo $P_3(x) = 1 + 0,866(x-0) - \frac{0,3195}{2!}(x-0)(x-0,3) + \frac{0,2637}{3!}(x-0)(x-0,3)(x-0,6)$

$P_3(x) = 1 + 0,866x - 0,15975(x^2 - 0,3x) + 0,04395(\underbrace{x^3 - 0,6x^2 - 0,3x^2 + 0,18x}_{x^3 - 0,9x^2 + 0,18x})$

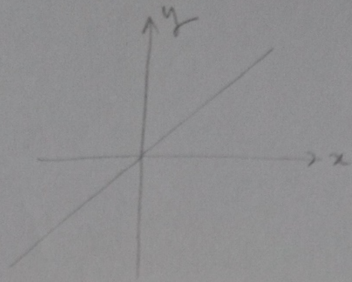
$P_3(x) = 1 + 0,866x - 0,15975x^2 + 0,047925x + 0,04395x^3 - 0,03955x^2 + 0,007911x$

$P_3(x) = 0,04395x^3 - 0,1993x^2 + 0,921836x + 1$

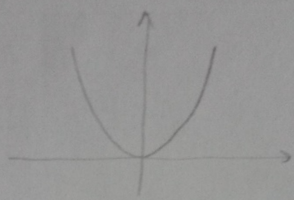
$f(0,7) \approx P_3(0,7) = 0,04395(0,7)^3 - 0,1993(0,7)^2 + 0,921836(0,7) + 1$

$P_3(0,7) = 0,01507 - 0,097657 + 0,6453 + 1 = 1,562713$ //

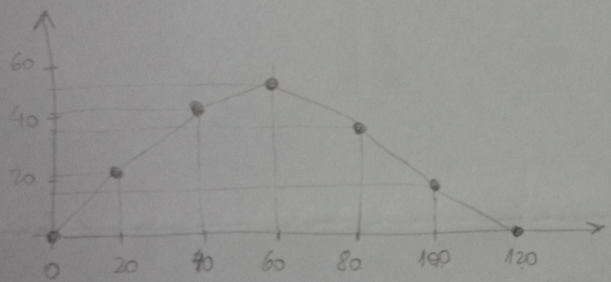
③ a) $f(x) = x$



b) $f(x) = x^2$



④



$h = 20$

a) $n = 7$ (logo varia de 0 a 6).

Trapézios: $I = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_6 + 2(f_1 + \dots + f_5)\right)$

$I = \frac{20}{2}\left(0 + 0 + 2(22 + 41 + 53 + 38 + 17)\right)$

$I = \frac{20}{\cancel{2}}(\cancel{2} \cdot 171) = 3420\ m^2$ //

b) Simpson: $I = \frac{h}{3}\left(f_0 + f_6 + 4(f_1 + f_3 + f_5) + 2(f_2 + f_4)\right)$

$I = \frac{20}{3}\left(0 + 0 + 4(22 + 53 + 17) + 2(41 + 38)\right)$

$I = \frac{20}{3}(368 + 158) = 3506{,}66\ m^2$ //