CEFET/RJ
DEPIN - Matemática Discreta - Prof. Eduardo Bezerra - 1^a avaliação - 07/junho/2013 - Duração: 2 horas

Questão 1 **(2,0 pontos)** - *Seja A = {2, 4} e B = {6, 8, 10} e sejam as relações binárias ρ e σ definidas sobre $A \times B$, conforme a seguir:*

- $\forall(x, y) \in A \times B, x\rho y \leftrightarrow x|y$.
- $\forall(x, y) \in A \times B, x\sigma y \leftrightarrow y - 4 = x$.

Liste os pares ordenados que estão em $A \times B$, ρ, σ, $\rho \cap \sigma$, $\rho \cup \sigma$ e $\rho - \sigma$.

- $A \times B = \{(2, 6), (2, 8), (2, 10), (4, 6), (4, 8), (4, 10)\}$
- $\rho = \{(2, 6), (2, 8), (2, 10)\}$
- $\sigma = \{(2, 6), (4, 8)\}$
- $\rho \cap \sigma = \{(2, 6)\}$
- $\rho \cup \sigma = \{(2, 6), (2, 8), (2, 10), (4, 8)\}$
- $\rho - \sigma = \{(2, 8), (2, 10)\}$

Questão 2 **(2,0 pontos)** - *Considere a relação ρ dada implicitamente a seguir e definida sobre o conjunto das partes de S, em que S = {0, 2, 4}, $\rho \leftrightarrow x \cap y = \emptyset$.*

a) Apresente a relação ρ explicitamente.

b) Informe se ρ possui ou não possui as propriedades de refletividade, simetria, anti-simetria e transitividade.

a) Primeiro, devemos determinar $P(S)$

$$P(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{2\}, \{4\}, \{0, 2\}, \{0, 4\}, \{2, 4\}, \{0, 2, 4\}\}$$

Agora, podemos definir a relação ρ:

$$\begin{aligned}\rho = \{&(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{0\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{4\}), (\emptyset, \{0, 2\}),\\ &(\emptyset, \{0, 4\}), (\emptyset, \{2, 4\}), (\emptyset, \{0, 2, 4\}),\\ &(\{0\}, \emptyset), (\{0\}, \{2\}), (\{0\}, \{4\}),\\ &(\{2\}, \emptyset), (\{2\}, \{0\}), (\{2\}, \{4\}),\\ &(\{4\}, \emptyset), (\{4\}, \{0\}), (\{4\}, \{2\}),\\ &(\{0, 2\}, \emptyset), (\{0, 2\}, \{4\}),\\ &(\{0, 4\}, \emptyset), (\{0, 4\}, \{2\}),\\ &(\{2, 4\}, \emptyset), (\{2, 4\}, \{0\}),\\ &(\{0, 2, 4\}, \emptyset)\}\end{aligned}$$

b) A relação ρ

- não é reflexiva. Como contra-exemplo, repare que $\{0\} \in P(S)$, mas $(\{0\}, \{0\}) \notin \rho$.
- é simétrica.

- não é transisiva. Como contra-exemplo, repare que $(\{0,2\},\{4\}) \in \rho$ e que $(\{4\},\{0\}) \in \rho$, mas $(\{0,2\},\{0\}) \notin \rho$.

Questão 3 (1,5 pontos) - *As funções a seguir são aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Forneça equações que descrevam as funções compostas $g \circ f$ e $f \circ g$ para cada item.*

a) $f(x) = 6x^2$ *e* $g(x) = 2x$

b) $f(x) = (x-1)/2$ *e* $g(x) = 4x^2$

c) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ *e* $g(x) = \lceil x+1 \rceil$

a) $f(x) = 6x^2$ e $g(x) = 2x$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \\ &= g(6x^2) = \\ &= 2(6x^2) = \\ &= 12x^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \\ &= f(2x) = \\ &= 6(2x)^2 = \\ &= 6(4x^2) = \\ &= 24x^2.\end{aligned}$$

b) $f(x) = (x-1)/2$ e $g(x) = 4x^2$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \\ &= g((x-1)/2) = \\ &= 4\left[(x-1)/2\right]^2 = \\ &= 4\left[(x-1)^2/4\right] = \\ &= (x-1)^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \\ &= f(4x^2) = \\ &= (4x^2-1)/2.\end{aligned}$$

c) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e $g(x) = \lceil x+1 \rceil$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \\ &= g(\lfloor x \rfloor) = \\ &= \lceil \lfloor x \rfloor + 1 \rceil = \\ &= \lceil \lfloor x \rfloor \rceil + 1 = \\ &= \lfloor x \rfloor + 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \\ &= f(\lceil x+1 \rceil) = \\ &= \lfloor \lceil x+1 \rceil \rfloor = \\ &= \lceil x+1 \rceil = \\ &= \lceil x \rceil + 1.\end{aligned}$$

Questão 4 **(1,5 pontos)** - *Seja a relação D definida sobre $\mathbb{R}$ como $x, y \in \mathbb{R}, xDy \leftrightarrow xy \geq 0$. Mostre se a relação binária D é reflexiva, simétrica ou transitiva.*

- A relação fornecida é reflexiva pois, para todo $n \in \mathbb{R}$, $(n, n) \in D$. Para todo $n \in \mathbb{R}$, ou $n < 0$, ou $n \geq 0$. Se $n < 0$, então $nn > 0$. Se $n \geq 0$, então $nn \geq 0$. Em ambos os casos, $(n, n) \in D$.
- A relação também é simétrica, visto que, se $(n_1, n_2) \in D$, então $n_1 n_2 \geq 0$. Mas então $n_2 n_1 \geq 0$ (porque a operação de multiplicação é comutativa sobre os reais) e portanto $(n_2, n_1) \in D$.
- Considere $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{R}$. Considere também que $(n_1, n_2) \in D$ e que $(n_2, n_3) \in D$. Então é verdade que $n_1 n_2 \geq 0$ e que $n_2 n_3 \geq 0$. Então $n_1 {n_2}^2 n_3 \geq 0$. Já que $n_2^2 \geq 0$, então $n_1 n_3 \geq 0$ e $(n_1, n_3) \in D$. Portanto a relação D também é transitiva.

Questão 5 **(1,5 pontos)** - *Prove que, para quaisquer x e y pertencentes a $\mathbb{Z}$, se $x^2 - 5xy - 3$ é **par**, então $x + y$ é **ímpar**.*

Devemos rearrumar o polinômio $x^2 - 5xy - 3$ de tal forma a explicitar $x + y$. Ao fazer assim, podemos raciocinar sobre as paridades envolvidas no polinômio refatorado. Sendo assim:

$$\begin{aligned}x^2 - 5xy - 3 &= (x - 6y)(x + y) + 6y^2 - 3 = \\ &= (x - 6y)(x + y) + 3\left[2y^2 - 1\right] = \\ &= (x - 6y)(x + y) - 3\left[2(-y^2) + 1\right]\end{aligned}$$

Repare que a parcela $3\left[2(-y^2) + 1\right]$ é ímpar, por definição (pois corresponde ao produto de dois ímpares). Dessa forma, para que $x^2 - 5xy - 3$ seja par, então a outra parcela, $(x - 6y)(x + y)$, deve ser ímpar, pois:

- ímpar $\pm$ ímpar = par
- par $\pm$ ímpar = ímpar

Mas, para que $(x - 6y)(x + y)$ seja ímpar, é necessário que os dois fatores sejam ímpares. Portanto $x + y$ é ímpar, CQD.

Questão 6 **(1,5 pontos)** - *Prove por contradição que para todos os números primos a, b e c, $a^2 + b^2 \neq c^2$.*

Suponha o contrário, i.e., que existam números primos a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Temos que $a^2 = c^2 - b^2$ = $(c - b)(c + b)$. Mas, já que $c + b > 0$ e $a^2 > 0$, então $c - b$ deve ser positivo. Assim, temos dois casos:

- Caso 1 ($c - b = 1$): Os únicos valores possíveis para b e c são c = 3 e b = 2 para a diferença entre esses números primos ser 1, o que implica que b = 2. Logo, $a^2 = c^2 - b - 2 = (3 - 2)(3 + 2) = 5$, i.e., $a = \sqrt{5}$. Mas isto contradiz a suposição que a seja um número primo.

- Caso 2 ($c - b > 1$): Devemos ter que ambos $(c - b) > 1$ e $(c + b) > 1$. Como a é primo, os únicos fatores positivos de a^2 são 1, a e a^2. Como ambos $(c - b)$ e $(c + b)$ são maiores que 1, a única possibilidade é que ambos sejam iguais a a. Mas isto implica que $c - b = c + b$, i.e., $-b = b$ e assim $b = 0$. Isto contradiz a suposição que b seja um número primo.

Nos dois casos temos uma contradição. Sendo assim, a suposição é falsa e a afirmação original é verdadeira. CQD.