1. Considere um conjunto de 5 cidades. O custo de construção de uma estrada entre cidades i e j é fornecido pelo elemento a_{ij} da matriz abaixo. Encontre a rede rodoviária que liga o custo minimo cidades com uns aos outros de duas maneiras: pelo algoritmo de Kruskal e pelo algoritmo de Prim. Apresente o desenvolvimento de cada passo de cada um dos dois algoritmos.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & \infty & 10 \\ 11 & 9 & \infty & 0 & 7 \\ 9 & 8 & 10 & 7 & 0 \end{array}$$

2. Demonstre as proposições a seguir:
   (a) Seja e uma aresta de peso mínimo em um grafo G. Então, (u, v) está contida em uma árvore geradora mínima do grafo G.
   (b) Seja e uma aresta de peso máximo (do ciclo) num ciclo contido em um grafo $G = (V, E)$. Então, existe uma árvore geradora de peso mínimo do grafo $G' = (V, E - e)$, que também é uma árvore geradora de peso mínimo do grafo G.

3. O algoritmo de Dijkstra presume que as arestas do grafo de entrada têm pesos não-negativo. Mas suponha um grafo com algumas arestas de pesos negativos, e considere que a aresta e seja tal que $custo(e)$ é o menor (mais negativo) de todos. Considere um novo grafo no qual adicionamos $custo(e)$ a todos os pesos das arestas. Essa operação faz com que todos os pesos das arestas do novo grafo sejam não-negativas. Agora, aparentemente, há condições de aplicar o algoritmo de Dijkstra para encontrar os caminhos mais curtos. Essa é uma forma válida de encontrar caminhos mais curtos no caso em que algumas arestas têm pesos negativos? Justifique sua resposta.

4. O algoritmo de Floyd-Warshall é reproduzido abaixo. Esse algoritmo produz a matriz D^n de pesos dos menores caminhos em um grafo ponderado. Altere esse algoritmo de tal forma que, em vez da matriz D^n, a matriz π^n seja produzida, na qual o elemento ij contém o rótulo do vértice predecessor de j no menor caminho, desde i até j.