P2 - Equações Diferenciais Ordinárias

Nome:

Questões

1)[1.5 pontos] Sabendo que a transformada de Laplace da função $\cos at = s/(s^2+a^2)$, mostre que a transformada de Laplace da função $\sin at = a/(s^2+a^2)$, com $s > 0$.

2)[1.5 pontos] Encontre a solução da equação homogênea

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

3)[2 pontos] Resolva através de Transformada de Laplace o problema de valor inicial

$$y'' + 9y = \cos 2t$$

, com $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = -1$.

4)[2 pontos] Resolva pelo método da variação de parâmetros a equação diferencial

$$y'' - 2y' + y = t$$

.

GABARITO

1) Feita em sala.

2) A equação característica da equação diferencial é

$$r^3+3r^2+3r+1=0$$

Trata-se do produto notável

$$(r+1)^3=0$$

e temos 3 raízes repetidas iguais a -1.

Logo

$$y_g = C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3x^2e^{-x}.$$

3) Aplicando a transformada de Laplace e denominando $y'(0)=k$ teremos:

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 9Y(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$Y(s).(s^2+9) - s - k = \frac{s}{s^2+4}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)} + \frac{s+k}{(s^2+9)}$$

$$Y(s) = \frac{s^3+ks^2+5s+4k}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

$$Y(s) = s^3 + Ks^2 + 5s + 4K = As^3 + 9As + Bs^2 + 9B + Cs^3 + 4Cs + Ds^2 + 4D$$

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B + D = K \\ 9A + 4C = 5 \\ 9B + 4D = 4K \end{cases} \xrightarrow{\text{Resolvendo}} \begin{matrix} A = 1/5 \\ B = 0 \\ C = 4/5 \\ D = K \end{matrix}$$

$$Y(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{s^2+9} + \frac{K}{s^2+9}$$

$$Y(s) = \frac{1}{5} \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{s^2+9} + \frac{K}{3} \cdot \frac{3}{s^2+9}$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace e com o auxílio da Tabela temos

$$y(t) = \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{K}{3} \cdot \operatorname{sen} 3t$$

Como $y(\pi/2) = -1$, temos

$$-1 = \frac{1}{5} \cos \pi + \frac{4}{5} \cos \frac{3\pi}{2} + \frac{K}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}$$

$$K = 12/5$$

$$y(t) = \frac{1}{5} \cos 2t + \frac{4}{5} \cos 3t + \frac{4}{5} \operatorname{sen} 3t$$

4) $y'' - 2y' + y = t$

A equação característica da homogênea é

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r = 1$

$y_h = C_1 e^t + C_2 t e^t$

Temos que resolver o sistema:

$$\begin{cases} v_1' e^t + v_2' (t e^t) = 0 \\ v_1' (e^t)' + v_2' (t e^t)' = t/1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1' e^t + v_2' t e^t = 0 & (i) \\ v_1' e^t + v_2' t e^t + v_2' e^t = t & (ii) \end{cases}$$

Subtraindo uma equação da outra

$$v_2' e^t = t$$

$$v_2' = t e^{-t}$$

Integrando

$$v_2 = -\int t (-e^{-t}) dt$$

$u = t \Rightarrow du = dt$

$dv = -e^{-t} \Rightarrow v = e^{-t}$

$$v_2 = -\int t(e^{-t})\,dt$$

$$v_2 = -\left(t e^{-t} - \int e^{-t}\,dt\right)$$

$$v_2 = -t e^{-t} - e^{-t}$$

Substituindo v_2' em (i)

$$v_1' e^{t} + (t e^{-t})(t e^{t}) = 0$$

$$v_1' = -t^2 e^{-t}$$

Integrando

$$v_1 = \int +t^2(e^{-t})\,dt$$

$$dv = -e^{-t}dt \Downarrow v = e^{-t}$$

$$u = t^2 \quad du = 2t\,dt$$

$$v_1 = t^2 e^{-t} - \int e^{-t} \cdot 2t\,dt$$

$$v_1 = t^2 e^{-t} + 2\int t(e^{-t})\,dt$$

$$v_1 = t^2 e^{-t} + 2.(t e^{-t} + e^{-t})$$

$$v_1 = t^2 e^{-t} + 2t e^{-t} + 2e^{-t}$$

$$y_p = v_1 e^{+t} + v_2 t e^{+t}$$

$$y_p = t^2 + 2t + 2 + (-t e^{-t} - e^{-t}) t e^{t}$$

$$y_p = \cancel{t^2} + 2t + 2 - \cancel{t^2} - t.$$

$$y_p = t + 2$$