P1 de Cálculo Numérico

Professora Anna Regina Corbo

4º Período – 2014.1

1) Seja a função $f(x) = \frac{1}{x}$.
   a) Desenvolver a Série de Taylor de f em torno do ponto $a = 2$. (2 pontos)
   b) Encontre o raio de convergência da série obtida no item anterior. (1 ponto)

2) Considere a função $f(x) = e^x - 4x$.
   a) Determine um intervalo em $\mathbb{R}$ que contenha uma raiz de f. (1 ponto)
   b) Encontre uma aproximação da raiz de f utilizando o método da Bisseção tomando o intervalo encontrado anteriormente, com 3 iterações. Qual o erro associado? (1,5 pontos)
   c) A partir de um chute inicial contido no intervalo obtido em a), encontre uma raiz aproximada de f pelo método de Newton-Raphson. Use 3 iterações. Qual o erro associado? (1,5 pontos)

3) Considere o sistema linear:

$$\begin{array}{lllllll} 5x_1 & + & x_3 & = & 1 & & \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

   a) Qual o método iterativo estudado, que converge para a solução mais rapidamente? Justifique. (1 ponto)
   b) Utilize o método do item anterior (com 3 iterações) para dar uma solução aproximada da solução do sistema. Qual o erro associado? (2 pontos)

P1 de Cálculo Numérico - Gabarito - 2019/1

1 $f(x) = \frac{1}{x}$

a) Série de Taylor em torno de $a = 2$.

$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(2) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = (x^{-1})' = \frac{-1}{x^2} \rightarrow f'(2) = \frac{-1}{4}$

$f''(x) = (-x^{-2})' = \frac{2}{x^3} = f''(2) = \frac{2}{8}$

$f'''(x) = (2x^{-3})' = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow f'''(2) = \frac{-6}{16}$

$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}} \rightarrow f^{(n)}(2) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{2^{n+1}}$

$$f(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a).(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \frac{f^{IV}(a).(x-a)^4}{4!} + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{2}{2.8}(x-2)^2 - \frac{6}{16.3!}(x-2)^3 + \frac{4!}{32.4!}(x-2)^4 + \dots$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}}$$

b) $$R = \lim_{n\to\infty} (n+1) \frac{|f^{(n)}(a)|}{|f^{(n+1)}(a)|} = \lim_{n\to\infty} (n+1) \left| \frac{(-1)^n \cdot n! / 2^{n+1}}{(-1)^{n+1} (n+1)! / 2^{n+2}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1) \left| \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}} \times \frac{2^{n+2}}{(-1)^{n+1}(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) \left| \frac{2}{n+1} \right| = 2 \,\#$$

② $f(x) = e^x - 4x$

a) $f(0) = e^0 - 4.0 = 1$

$f(1) = e^1 - 4.1 = -1{,}282$

} sinais diferentes → Existe raiz em $[0,1]$.

b) Método da Bisseção:

(I) $a = 0$ $\quad b = 1$ $\quad c = 0{,}5$

$f(a) = 1$ $\quad f(b) = -1{,}282$ $\quad f(c) = -0{,}351$ } $b \leftarrow 0{,}5$

$\varepsilon = |f(c)| = 0{,}351$

(II) $a = 0$ $\quad b = 0{,}5$ $\quad c = 0{,}25$

$f(a) = 1$ $\quad f(b) = -0{,}351$ $\quad f(c) = 0{,}284$ } $a \leftarrow 0{,}25$

$\varepsilon = |0{,}284| = 0{,}284$

(III) $a = 0{,}25$ $\quad b = 0{,}5$ $\quad c = 0{,}375$

$f(a) = 0{,}284$ $\quad f(b) = -0{,}351$ $\quad f(c) = -0{,}045$ } $b \leftarrow 0{,}375$

$\varepsilon = |-0{,}045| = 0{,}045 = 4{,}5 \times 10^{-2}$

* Raiz aproximada é $c = 0{,}375$
* O erro é da ordem de 10^{-2}

c) Método de Newton-Raphson: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Tome o chute inicial $x_0 = 0{,}5 \in [0,1]$.

$f(x) = e^x - 4x \Rightarrow f'(x) = e^x - 4$

I) $x_0 = 0{,}5 \Rightarrow f(0{,}5) = -0{,}351 \Rightarrow f'(0{,}5) = -2{,}351$

$$x_1 = 0{,}5 - \frac{(-0{,}351)}{(-2{,}351)} = 0{,}5 - 0{,}149 = 0{,}351$$

$\varepsilon = |x_1 - x_0| = |0{,}351 - 0{,}5| = 0{,}149$

II) $x_1 = 0,351 \Rightarrow f(0,351) = 1,420 - 1,404 = 0,016$

$f'(0,351) = 1,42 - 4 = -2,58$

$$x_2 = 0,351 - \frac{(0,016)}{(-2,58)} = 0,351 + 0,0062 = 0,3572$$

$\varepsilon = |x_2 - x_1| = 0,0062$ //

(III) $x_2 = 0,3572 \Rightarrow f(0,3572) = 1,429 - 1,4288 = -0,0002$

$f'(0,3572) = 1,429 - 4 = -2,571$

$$x_3 = 0,3572 - \frac{(-0,0002)}{(-2,571)} = 0,3572 - 0,000078 = 0,357122$$

* Uma aproximação da raiz é $x = 0,357122$ //
* Erro associado é $\varepsilon = |x_3 - x_2| = 0,000078 = 7,8 \times 10^{-5}$ //

3

a) Dentre os métodos iterativos estudados o que converge mais rapidamente é o Gauss-Seidel pois os valores atualizados p/ as aproximações são utilizados automaticamente na mesma iteração.

b)
$$\begin{cases} 5x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Eq. de Iteração:

$$\begin{cases} x_1^k = \frac{1}{5}(1 - x_3^{k-1}) \\ x_2^k = \frac{1}{4}(1 - x_1^k - 3x_3^{k-1}) \\ x_3^k = \frac{1}{3}(1 - x_1^k - x_2^k) \end{cases}$$

chute inicial: $X^0 = (0,0,0)$

(I) $\begin{cases} x_1^1 = \frac{1}{5}(1-0) = 0{,}2 \\ x_2^1 = \frac{1}{4}(1-0{,}2-3.0) = 0{,}2 \\ x_3^1 = \frac{1}{3}(1-0{,}2-0{,}2) = 0{,}2 \end{cases}$ $\quad X^1 = (0{,}2\,, 0.2, 0.2)$

$\varepsilon = \text{máx}\,|(0{,}2-0,\ 0.2-0,\ 0.2-0)| = 0{,}2$

(II) $\begin{cases} x_1^2 = \frac{1}{5}(1-0{,}2) = 0{,}16 \\ x_2^2 = \frac{1}{4}(1-0{,}16-3.0{,}2) = 0{,}06 \\ x_3^2 = \frac{1}{3}(1-0{,}16-0{,}06) = 0{,}26 \end{cases}$ $\quad X^2 = (0.16\,, 0.06, 0.26)$

$\varepsilon = \text{máx}\,|(0.16-0{,}2\,,\ 0.06-0{,}2\,,\ 0{,}26-0{,}2)| = |(-0{,}04, -0.14, 0.06)| = 0.14$

(III) $\begin{cases} x_1^3 = \frac{1}{5}(1-0{,}26) = 0{,}148 \\ x_2^3 = \frac{1}{4}(1-0{,}148-3\times 0{,}26) = 0{,}168 \\ x_3^3 = \frac{1}{3}(1-0{,}148-0{,}168) = 0{,}228 \end{cases}$ $\quad X^3 = (0{,}148,\ 0.168, 0.228)$

$\varepsilon = \text{máx}\,|(0.148-0.16\,,\ 0.168-0.06\,,\ 0.228-0.26)| = |(-0.012, 0.108, -0.032)| = 0.108$

$\therefore$ Uma solução aproximada é $X = (0.148, 0.168, 0.228)$ c/ erro associado de 0.108