Primeira prova de Cálculo a Várias Variáveis - Turma de Ciência da Computação

Nome:

1)[2 pontos]Dada a equação de um cone elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

encontre o a curva interseção com todos os planos xy, yz e xz. Encontre também as seções com os planos $z = k$, $y = k$ e $x = k$ para todo k real.

2)a)[1 ponto] Descreva o domínio da função $f(x,y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$;

b)[1 ponto] Calcule o limite quando $(x,y) \to (0,0)$ da função $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(DICA: O LIMITE EXISTE!)

3)Dado $z = (x+y)\ln\sqrt{x^2+y^2}$ e $x = e^t$ e $y = e^{-t}$, calcule $\dfrac{dz}{dt}$ de duas formas:

a)[1 ponto] Usando a regra da cadeia;

b)[1 ponto] determinando a função composta $z(t)$ e derivando em relação à t.

4)[2 pontos] Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ onde f é a função $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, e as derivadas parciais NÃO estão sendo calculadas no ponto $(0,0)$.

(DICA: A RESPOSTA É IGUAL A 0!).

BOA PROVA!!!!

COMPUTAÇÃO

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0,$

- O traço xz é a origem. $(y=0)$
- Os traços $\overset{(z=0)}{xy}$ e $\overset{(x=0)}{yz}$ são os pares de retas concorrentes

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad e \quad y = \pm \frac{b}{a} z,$$

respectivamente.

A seção da superfície no plano $y=k, k\neq 0$ é uma elipse de equação

$$\frac{x^2}{\frac{a^2 k^2}{b^2}} + \frac{z^2}{\frac{c^2 k^2}{b^2}} = 1.$$

As seções nos planos $x=k$ e $z=k$, $k \neq 0$ são as hipérboles $-\dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{a^2}$

e $\frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$ respectivamente.

2| a) $2y - x^2 - y^2 \geq 0$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2y \leq 0$$

$$x^2 + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{} \leq 1$$

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

Domínio $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{(x-0)^2 + (y-1)^2 \leq 1}_{\downarrow}$

Disco de centro (0, 1) e raio 1.

b) Feito em sala!

3) a) $z=\frac{1}{2}(x+y)\cdot\ln(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x+y)\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}+\frac{x\cdot(x+y)}{x^2+y^2}$$

Analogamente

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}+\frac{y(x+y)}{x^2+y^2}$$

$\frac{dx}{dt}=e^{t}$ e $\frac{dy}{dt}=-e^{-t}$

Regra da Cadeia

$$\frac{dz}{dt}=\left(\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}+\frac{x(x+y)}{x^2+y^2}\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}+\frac{y(x+y)}{x^2+y^2}\right)\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=\left(\frac{\ln(e^{2t}+e^{-2t})}{2}+\frac{e^{t}(e^{t}+e^{-t})}{e^{2t}+e^{-2t}}\right)e^{t}+\left(\frac{\ln(e^{2t}+e^{-2t})}{2}+\frac{e^{-t}(e^{t}+e^{-t})}{e^{2t}+e^{-2t}}\right)(-e^{-t})$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{e^{t}\ln(e^{2t}+e^{-2t})}{2} + \frac{e^{3t}+e^{t}}{e^{2t}+e^{-2t}}$$

$$- \frac{e^{-t}\ln(e^{2t}+e^{-2t})}{2} - \frac{(e^{-3t}+e^{-t})}{e^{2t}+e^{-2t}}$$

$$\frac{\ln(e^{2t}+e^{-2t}).(e^{t}-e^{-t})}{2} + \frac{(e^{3t}-e^{-3t}+e^{t}-e^{-t})}{e^{2t}+e^{-2t}}$$

$//$

e)

$$z=\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})\ln(e^{2t}+e^{-2t})$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\ln(e^{2t}+e^{-2t})+$$

$$+\frac{1}{\cancel{2}}(e^{t}+e^{-t})\cdot\frac{(\cancel{2}e^{2t}-\cancel{2}e^{-2t})}{e^{2t}+e^{-2t}}$$

$$=\frac{e^{t}\ln(e^{2t}+e^{-2t})}{2}-\frac{e^{-t}\ln(e^{2t}+e^{-2t})}{2}$$

$$+\frac{e^{3t}-e^{-t}+e^{t}-e^{-3t}}{e^{2t}+e^{-2t}}$$

$$=\frac{\ln(e^{2t}+e^{-2t})\cdot(e^{t}-e^{-t})}{2}+\frac{e^{3t}-e^{-3t}+e^{t}-e^{-t}}{e^{2t}+e^{-2t}}$$

4) $f(x,y) = f(y,x)$.

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2 \cdot (x^2+y^2) - 2x \cdot (2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2+2y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Analogamente

$$f_{yy} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)}$$

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

//