CEFET/RJ - DEPIN - Matemática Discreta - Prof. Eduardo Bezerra
P1 - 08/novembro/2013 - Duração: 2 horas

IMPORTANTE: Em cada questão desta prova, você deve fornecer justificativas para os passos do desenvolvimento. A correção de sua prova será feita levando isso em consideração. Boa sorte!

Questão 1 ***(1,0 ponto)*** - *Prove a identidade $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, em que A, B e C são conjuntos quaisquer.*

Para realizar essa prova, precisamos provar a inclusão em ambas as direções. Isto é, devemos provar que as duas relações a seguir são verdadeiras.

(a) $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(b) $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$

Vamos primeiro provar (a). Considere que x é um elemento arbitrário de $(A \cup B) \cap C$. Sendo assim:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C &\rightarrow (x \in A \cup B) \vee (x \in C) \\ &\rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in C) \\ &\rightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\rightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\ &\rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

Vamos agora provar (b). Considere que x é um elemento arbitrário de $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. Sendo assim:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) &\rightarrow x \in (A \cap C) \vee x \in (B \cap C) \\ &\rightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\rightarrow x \in C \wedge (x \in A \vee x \in B) \\ &\rightarrow (x \in C) \wedge (x \in A \cup B) \\ &\rightarrow x \in C \cap (A \cup B) \end{aligned}$$

Por (a) e (b), segue que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. CQD.

Questão 2 ***(2,0 pontos)*** - *Considere a relação ρ dada implicitamente a seguir e definida sobre o conjunto das partes de S, em que S = $\{0, 1, 2\}$, $x \rho y \leftrightarrow x - y = \emptyset$. Repare que x e y são conjuntos.*

a) Apresente a relação ρ explicitamente.

b) Informe se ρ possui ou não possui as propriedades de refletividade, simetria, anti-simetria e transitividade.

a) Primeiro vamos determinar o conjunto das partes de S.

$$\mathcal{P}(S) = \{\{\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

Agora, os elementos de ρ são pares ordenados retirados de $\mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$ tais que o primeiro componente está contido no segundo. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\rho = \{&(\{\},\{\}),(\{\},\{0\}),(\{\},\{1\}),(\{\},\{2\}),(\{\},\{0,1\}),(\{\},\{0,2\}),(\{\},\{1,2\}),(\{\},\{0,1,2\}),\\ &(\{0\},\{0\}),(\{0\},\{0,1\}),(\{0\},\{0,2\}),(\{0\},\{0,1,2\}),\\ &(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{0,1\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{1\},\{0,1,2\}),\\ &(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{0,2\}),(\{2\},\{1,2\}),(\{2\},\{0,1,2\}),\\ &(\{0,1\},\{0,1\}),(\{0,1\},\{0,1,2\}),\\ &(\{0,2\},\{0,2\}),(\{0,2\},\{0,1,2\}),\\ &(\{1,2\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{0,1,2\})\}.\end{aligned}$$

b) Informe se ρ possui ou não possui as propriedades de refletividade, simetria, anti-simetria e transitividade.

- ρ é reflexiva, pois todo conjunto é subconjunto de si próprio.
- ρ é não simétrica, pois, por exemplo, $(\{0\},\{0,1\}) \in \rho$, mas $(\{0,1\},\{0\}) \notin \rho$.
- ρ é anti-simétrica, pois, dados dois conjuntos A e B, se $A \subseteq B$ e se $B \subseteq A$, então $A = B$.
- ρ é transitiva, pois, dados três conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$ e se $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Questão 3 **(2,0 pontos)** - *Prove por indução que, para todo número natural $n > 0$, vale a seguinte expressão:*

a)

$$4 + 10 + 16 + \ldots + (6n - 2) = n(3n + 1)$$

b)

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n+1}n^2 = \frac{(-1)^{n+1}(n)(n+1)}{2}$$

a) Vamos começar pela base da indução, isto é, vamos verificar se $P(1)$ é verdadeira:

$$6(1) - 2 = (1)(3(1) + 1)$$

Sendo assim, $P(1)$ é verdadeira. Como hipótese de indução, vamos considerar que, para algum $k \geq 1$, é verdade que:

$$4 + 10 + 16 + \ldots + (6k - 2) = k(3k + 1)$$

Dada a hipótese, queremos provar $P(k + 1)$:

$$4 + 10 + 16 + \ldots + [6(k + 1) - 2] = (k + 1)[3(k + 1) + 1]$$

Vamos então somar a quantidade $[6(k + 1) - 2]$ a ambos os lados da equação que representa $P(k)$:

$$\begin{aligned}4 + 10 + 16 + \ldots + (6k - 2) + [6(k + 1) - 2] &= k(3k + 1) + [6(k + 1) - 2]\\ &= 3k^2 + k + 6(k + 1) - 2\\ &= 3k^2 + k + 6k + 6 - 2\\ &= 3k^2 + 7k + 4\\ &= (k + 1)(3k + 4)\\ &= (k + 1)[3(k + 1) + 1].\end{aligned}$$

Sendo assim, a partir de $P(k)$, conseguimos provar que $P(k+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, $P(n)$ é verdadeira $\forall n > 0$. CQD.

b) *Vamos começar pela base da indução, isto é, vamos verificar se $P(1)$ é verdadeira:*

$$\begin{aligned} (-1)^{1+1}(1)^2 &= \frac{(-1)^{1+1}(1)(1+1)}{2} \\ (-1)^2(1)^2 &= \frac{(-1)^2(1)(2)}{2} \\ 1 &= \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Sendo assim, $P(1)$ é verdadeira. Como hipótese de indução, vamos considerar que, para algum $k \geq 1$, é verdade que:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k+1}k^2 = \frac{(-1)^{k+1}(k)(k+1)}{2}$$

Dada a hipótese, queremos provar $P(k+1)$:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k+1}k^2 + (-1)^{(k+1)+1}(k+1)^2 = \frac{(-1)^{(k+1)+1}(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Vamos então somar a quantidade $(-1)^{(k+1)+1}(k+1)^2$ a ambos os lados da equação que representa $P(k)$ e manipular o lado direito identidade:

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{k+1}(k)(k+1)}{2} + (-1)^{(k+1)+1}(k+1)^2 &= \frac{(-1)^{k+1}(k)(k+1) + 2(-1)^{(k+1)+1}(k+1)^2}{2} \\ &= \frac{-(-1)^{(k+1)+1}(k)(k+1) + 2(-1)^{(k+1)+1}(k+1)^2}{2} \\ &= \frac{(-1)^{(k+1)+1}(k+1)(-k+2(k+1))}{2} \\ &= \frac{(-1)^{(k+1)+1}(k+1)(-k+2k+2)}{2} \\ &= \frac{(-1)^{(k+1)+1}(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(-1)^{(k+1)+1}(k+1)((k+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Sendo assim, a partir de $P(k)$, conseguimos provar que $P(k+1)$ é verdadeira. Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, $P(n)$ é verdadeira $\forall n > 0$. CQD.

Questão 4 ***(2,0 pontos)*** - *Prove que*

a) *o produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é um número par.*

b) *a soma de um inteiro e de seu cubo é um número par.*

a) Sejam $x \in \mathbb{Z}$ e seu consecutivo $x+1$, também inteiro (porque o conjunto dos inteiros é fechado sobre a operação de adição). Agora, vamos considerar o número $x(x+1)$. Temos dois casos:

- x **é par**. Se x é par, pode ser escrito da forma $2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Então $x(x+1) = (2k)(2k+1) = 2(2k^2+k)$ é também um número par.
- x **é ímpar**. Se x é ímpar, pode ser escrito da forma $2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. então $x(x+1) = (2k+1)(2k+1+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$ é também um número par.

Em ambos os casos, o produto de x com seu sucessor é par. CQD.

b) Sejam $x \in \mathbb{Z}$ e seu cubo x^3, também inteiro (porque o conjunto dos inteiros é fechado sobre a operação de multiplicação). Agora, vamos considerar o número $x + x^3 = x(x^2+1)$. Temos dois casos:

- x **é par**. Se x é par, pode ser escrito da forma $2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Então $x(x^2+1) = (2k)((2k)^2+1) = 2(2k^3+k)$ é também um número par.
- x **é ímpar**. Se x é ímpar, pode ser escrito da forma $2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Então $x(x^2+1) = (2k+1)((2k+1)^2+1) = (2k+1)(4k^2+4k+2) = 2(2k+1)(2k^2+2k+1)$ é também um número par.

Em ambos os casos, a soma x com seu cubo é par. CQD.

Questão 5 ***(2,0 pontos)*** - *Calcule os valores das expressões a seguir.*

a) $\sum_{j=0}^{100}(2^{j+1} - 2^j)$

b) $\prod_{i=1}^{100}(-1)^i$

a) **Solução 1**

$$\sum_{j=0}^{100}(2^{j+1} - 2^j) = (2^1 - 2^0) + (2^2 - 2^1) + (2^3 - 2^2) + \ldots + (2^{101} - 2^{100})$$

Repare que diversas parcelas da soma expandida acima se cancelam, de tal forma que

$$\sum_{j=0}^{100}(2^{j+1} - 2^j) = -2^0 + 2^{101} = 2^{101} - 1.$$

Solução 2

$$\sum_{j=0}^{100}(2^{j+1} - 2^j) = \sum_{j=0}^{100}(2^j(2) - 2^j) = \sum_{j=0}^{100}(2^j(2-1)) = \sum_{j=0}^{100} 2^j.$$

Sendo assim, estamos diante da soma dos 101 primeiros termos de um progressão geométrica finita de razão igual a 2. A fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PG de razão q é dada a seguir:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Sendo assim,

$$S_{101} = \frac{(1)(2^{101} - 1)}{2 - 1} = 2^{101} - 1.$$

b) **Solução 1**
Repare que

$$\prod_{i=1}^{100} (-1)^i = (-1)^1 \times (-1)^2 \times \ldots \times (-1)^{99} \times (-1)^{100} = \underbrace{\prod_{k=1}^{50} (-1)^{2k}}_{1^o \text{ produtório}} \times \underbrace{\prod_{k=1}^{50} (-1)^{2k-1}}_{2^o \text{ produtório}}$$

O primeiro produtório acima é igual a 1, pois o expoente em cada fator é par. Sendo assim, o valor do produtório original depende apenas do valor do segundo produtório:

$$\prod_{k=1}^{50} (-1)^{2k-1} = \underbrace{(-1)^1 \times (-1)^3 \times \ldots \times (-1)^{97} \times (-1)^{99}}_{50 \text{ fatores}} =$$

$$= \underbrace{(-1)^{1+99} \times (-1)^{3+97} \times \ldots \times (-1)^{49+51}}_{25 \text{ fatores}} = \underbrace{(-1)^{100} \times (-1)^{100} \times \ldots \times (-1)^{100}}_{25 \text{ fatores}}.$$

Repare que -1 multiplicado um número par de vezes é igual a 1. Sendo assim, já que 100 é um número par, o valor do produtório é 1.

Solução 2

$$\prod_{i=1}^{100} (-1)^i = (-1)^{1+2+3+\ldots+100} = (-1)^{100(100+1)/2} = (-1)^{50 \times 101}$$

Repare que -1 multiplicado um número par de vezes é igual a 1. Sendo assim, já que 50×101 é um número par, o valor do produtório é 1

Questão 6 ***(1,0 ponto)*** - *Encontre a solução da relação de recorrência e correspondente condição inicial a seguir.*

$$T_n = 2 \times T_{n-1} + 1$$
$$T_0 = 0$$

Solução 1

$$\begin{aligned}
T_n &= 2 \times T_{n-1} + 1 \\
&= 2 \times (2 \times T_{n-2} + 1) + 1 = (2^2 \times T_{n-2} + 2) + 1 \\
&= (2^2 \times (2 \times T_{n-3} + 1) + 2) + 1 = ((2^3 \times T_{n-3} + 2^2) + 2) + 1 = \\
&= \ldots \\
&= 2^n \times T_0 + (2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^1 + \ldots + 2^0) \\
&= 2^n \times 0 + (2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^1 + \ldots + 2^0) \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^1 + \ldots + 2^0
\end{aligned}$$

Sendo assim, T_n é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão igual a 2 e primeiro termo igual a 1.

$$T_n = \frac{(1)(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Solução 2

Repare que T_n pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$T_n = 2 \times (T_{n-1} + 1) - 1$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
T_n &= 2 \times (T_{n-1} + 1) - 1 \\
&= 2 \times ((2 \times (T_{n-2} + 1) - 1) + 1) - 1 \\
&= 2 \times (2 \times (T_{n-2} + 1 - 1) + 1) - 1 \\
&= 2 \times (2 \times T_{n-2} + 1) - 1 \\
&= 2 \times (2 \times (2 \times (T_{n-3} + 1) - 1) + 1) - 1 \\
&= 2 \times (2 \times (2 \times (T_{n-3} + 1)) - 1
\end{aligned}$$