

P1 - Equações Diferenciais Ordinárias

Nome:

Questões

1)[1.5 pontos] Resolva pelo método dos fatores integrantes a equação diferencial

$$xy' + (x + 1)y = x,$$

para $x > 0$.

2)[1.5 pontos] Resolva o problema de valor inicial

$$y' + \frac{2y}{x} = x^6 y^3,$$

para $x > 0$ e $y(1) = -1$.

3)[1.5 pontos] a) Resolva a equação diferencial $y' = y^2 - 4$. b) O Problema de valor inicial $y' = y^2 - 4$, $y(0) = -2$ tem solução? Em caso afirmativo, exiba a solução.

4)[2.0 pontos] Encontre os valores das constantes a e b para que a equação diferencial

$$(ye^{2xy} + ax)dx + bxe^{2xy}dy = 0$$

seja exata e resolva-a.¹

5)[1.5 pontos] Use uma substituição apropriada para resolver a equação diferencial

$$y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

.

6)[2.0 pontos] Sabendo que $y_1 = \sin t$ é uma solução de

$$y' = \frac{2\cos^2 t - \sin^2 t + y^2}{2\cos t},$$

encontre todas as soluções da mesma equação diferencial.

¹Se o valor de a ou de b puder ser arbitrário, explique o motivo.

$$1) y' + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = 1$$

$$\mu = e^{\int (1 + \frac{1}{x}) dx} = e^{x + \ln x} = e^x \cdot e^{\ln x} = x e^x$$

$$x e^x y' + (x e^x + e^x) y = x e^x$$

$$(x e^x y)' = x e^x$$

Integrando

$$x e^x y = \int \frac{x e^x}{x+1} dx + C$$

$$x e^x y = \left(e^x \cdot x - \int e^x dx \right) + C$$

$$x e^x y = e^x \cdot x - e^x + C$$

$$y = 1 - \frac{1}{x} + \frac{C}{x e^x}$$

2)

$$y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} = x^6, \quad x > 0, \quad y(1) = -1.$$

$$v = y^{-2} \Rightarrow v' = (-2)y^{-3}y' \quad \therefore \quad \frac{-1}{2}v' = y^{-3}y'$$

$$\frac{-1}{2}v' + \frac{2}{x}v = x^6$$

$$v' - \frac{4}{x}v = -2x^6$$

$$v'x^{-4} - 4x^{-5}v = -2x^2$$

$$(x^{-4}v)' = -2x^2$$

$$x^{-4}v = \frac{-2x^3}{3} + C$$

$$v = \frac{-2x^7}{3} + Cx^4$$

$$y^{-2} = \frac{-2x^7 + Cx^4}{3}$$

$$\mu = e^{\int \frac{-4}{x} dx}$$

$$\mu = e^{-4 \ln x}$$

$$\mu = e^{\ln x^{-4}}$$

$$\mu = x^{-4}$$

~~$$y^2 = \frac{-2x^7 + Cx^4}{3}$$~~

$$\frac{1}{y^3} = \frac{-2x^7 + cx^4}{3}$$

$$y^3 = \frac{3}{(-2x^7 + cx^4)}$$

~~$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{(-2x^7 + cx^4)}}$$~~

~~$$\downarrow \text{Como } y(1) = -1$$~~

$$y = -\sqrt[3]{\frac{3}{(-2x^7 + cx^4)}}$$

~~$$\downarrow$$~~

$$y(1) = -1 = -\sqrt[3]{\frac{3}{(-2 + c)}}$$

$$1 = \sqrt[3]{\frac{3}{(c-2)}}$$

$$1 \cdot (c-2) = 3$$

$$c = 5$$

$$y = -\sqrt[3]{\frac{3}{(-2x^7 + 5x^4)}}$$

4) ~~Exercice~~

$$(y e^{2xy} + ax) dx + b x e^{2xy} dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

~~Exercice~~

$$e^{2xy} + y \cdot 2x e^{2xy} = b e^{2xy} + b x \cdot 2y e^{2xy}$$

$$e^{2xy} (1 + 2xy) = b e^{2xy} (1 + 2xy)$$

$$b = 1$$

a - peut être quelconque réel.

$$u = \int x e^{2xy} dy + C(x)$$

$$u = \frac{1}{2} \int 2x e^{2xy} dy + C(x)$$

$$U(x, y) = \frac{e^{2xy}}{2} + c(x)$$

Derivando em rel. a x

$$U_x = \frac{2y e^{2xy}}{2} + c'(x)$$

$$U_x = y e^{2xy} + c'(x)$$

$$y e^{2xy} + c'(x) = y e^{2xy} + ax$$

$$c'(x) = ax$$

$$c(x) = \frac{ax^2}{2} + C_1$$

$$U = \frac{ax^2}{2} + C + \frac{e^{2xy}}{2}$$

$$\frac{ax^2}{2} + \frac{e^{2xy}}{2} + C = 0$$

$$ax^2 + e^{2xy} = C$$

$$3) \frac{dy}{dx} = dx$$

$$a) y^3 - 4$$

$$\frac{1}{y^3 - 4} = \frac{A}{y - 2} + \frac{B}{y + 2}$$

$$1 = A(y + 2) + B(y - 2)$$

$$(A + B)y + (2A - 2B) = 0y + 1$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 2B = 1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1/2 \end{cases}$$

$$A = 1/4$$

$$B = -1/4$$

$$\int \frac{dy}{y^3 - 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dy}{y - 2} - \frac{1}{4} \int \frac{dy}{y + 2} = \int dx$$

$$\frac{1}{4} \ln|y - 2| - \frac{1}{4} \ln|y + 2| = x + C$$

$$\frac{1}{4} \ln|y-2| - \frac{1}{4} \ln|y+2| = x + c$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{y-2}{y+2} \right| = x + c$$

$$\ln \left| \frac{y-2}{y+2} \right| = 4x + c$$

$$\frac{y-2}{y+2} = ce^{4x}$$

$$y-2 = yce^{4x} + 2ce^{4x}$$

$$y(1 - ce^{4x}) = 2 + 2ce^{4x}$$

$$y = \frac{2 + 2ce^{4x}}{1 - ce^{4x}}$$

b) ~~is there a relation~~

$$y(0) = -2 = \frac{2 + 2c \cdot e^{4 \cdot 0}}{1 - c \cdot e^{4 \cdot 0}} = \frac{2 + 2c}{1 - c}$$

$$-2(1 - c) = 2 + 2c$$

$$-2 + 2c = 2 + 2c$$

$$-2 = 2$$

→ 4=0. Alkuperä

$$y' = \frac{2x+y-1}{2(2x+y)+5}$$

$$y' = \frac{z-1}{2z+5}$$

$$z'-2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

$$z' = \frac{z-1+4z+10}{2z+5}$$

$$z' = \frac{5z+9}{2z+5}$$

$$\frac{(2z+5) dz}{5z+9} = dx$$

$$u = 5z+9$$

$$z = \frac{u-9}{5} \therefore dz = \frac{du}{5}$$

$$z = 2x+y$$

$$z' = 2+y'$$

$$y' = z'-2$$

$$2z+5 = \frac{2u-18+5}{5} = \frac{2u-13}{5}$$

$$\frac{2u+7}{5u} du = dx$$

•

$$\left(\frac{2u+7}{u} \right) du = 25dx$$

$$\left(2 + \frac{7}{u} \right) du = 25dx$$

Int.

$$2u + 7 \ln|u| = 25x + C$$

$$2(5z+9) + 7 \ln|5z+9| = 25x + C$$

$$2(10x+5y+9) + 7 \ln|10x+5y+9| = 25x + C$$

$$20x + 10y + 18 + 7 \ln|10x+5y+9| = 25x + C$$

$$10y - 5x + 7 \ln|10x+5y+9| = C //$$

6) Certo em sala //