P1 - Equações Diferenciais Ordinárias

Nome:

Questões

1)[1.5 pontos] Resolva pelo método dos fatores integrantes a equação diferencial

$$xy' + (x+1)y = x,$$

para $x > 0$.

2)[1.5 pontos] Encontre a solução geral de $y' = 1 + x + y + xy$.

3)[1.5 pontos] Foi dada em sala de aula a equação diferencial que modela a decomposição de uma substância radioativa. Sabe-se que uma determinada substância radioativa decompõem-se a uma razão proporcional à quantidade presente e, no fim de 1500 anos, reduz-se à metade da quantidade original. Em quantos anos a quantidade original se reduz a um quarto? Qual a quantidade de substância encontrada ao fim de 6000 anos?

4)[1.5 pontos] Resolva o problema de valor inicial

$$(e^t y + te^t y)dt + (te^t + 2)dy; y(0) = -1$$

.

5)[1.5 pontos] Resolva $y' - 5y = -\dfrac{5xy^3}{2}$.

6)[1.5 pontos] Encontre uma solução particular para

$$y'' - y = 8te^t + 2e^t.$$

7)[1.0 ponto] Encontre uma solução particular para $yy'' - y'^2 = y^4$, $y' = 0$, $y = 1$ para $x = 0$. DICA: Use a substituição $y' = p$ e transforme em uma equação de primeira ordem de algum tipo que foi estudado em sala de aula.

4) $M = e^t y + t e^t y$; $N = t e^t + 2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^t + t e^t = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Exata!

$$u = \int (t e^t + 2)\, dy + \phi(t)$$

$$u = t e^t y + 2y + \phi(t)$$

$$u_t = \cancel{e^t y} + \cancel{t e^t y} + \phi'(t) = \cancel{t e^t y} + \cancel{e^t y}$$

$$\phi'(t) = 0 \Longrightarrow \phi(t) = c$$

Logo $t e^t y + 2y + c = 0$

Aplicando $y(0) = -1$.

$$0 \cdot e^0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + c = 0 \Longrightarrow c = 2$$

$$te^{t}y+2y+2=0$$

5) $y' - 5y = -\frac{5}{2} x y^3$

Mult. por y^{-3}

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - 5y^{-2} = -\frac{5}{2}x$$

$$v = y^{-2} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = (-2)y^{-3}\frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$$

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - 5y^{-2} = -\frac{5}{2}x$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - 5v = -\frac{5}{2}x$$

$$v' + 10v = 5x$$

$$\mu = e^{\int 10\,dx} = e^{10x}$$

Mult. por μ

$$e^{10x}v' + 10e^{10x}v = 5xe^{10x}$$

$$(e^{10x}v)' = 5xe^{10x}$$

Integrando

$$e^{10x} v = \frac{1}{2} \int 10 e^{10x} \cdot x \, dx$$

$$e^{10x} v = \frac{1}{2} \left(e^{10x} \cdot x - \int e^{10x} dx \right) + K$$

$$e^{10x} v = \frac{1}{2} \left(e^{10} x - \frac{1}{10} e^{10x} \right) + K$$

$$v = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{10} + K e^{-10x} \right)$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{10} + K e^{-10x} \right)$$

6) A eq. característica da homogênea é

$r^2 - 1 = 0$ e suas raízes são

$r_1 = 1$ e $r_2 = -1$.

Logo, uma sol. particular para a não homogeneidade $8te^t$ tem a forma $t(A_1t + A_0)e^t$ e para $2e^t$ a forma B_0te^t.

Então podemos resumir ambos no único formato $y_p = t(A_1t + A_0)e^t = (A_1t^2 + A_0t)e^t$

$$y_p' = (A_1t^2 + A_0t)e^t + (2A_1t + A_0)e^t$$
$$= [A_1t^2 + (2A_1 + A_0)t + A_0]e^t,$$

$$y_p'' = [2A_1t + (2A_1 + A_0)]e^t + [A_1t^2 + (2A_1 + A_0)t + A_0]e^t$$
$$= [A_1t^2 + (4A_1 + A_0)t + (2A_1 + 2A_0)]e^t.$$

$$y_p'' - y_p = [4A_1t + (2A_1 + 2A_0)]e^t = 8te^t + 2e^t$$

$$4A_1te^t + (2A_1+2A_0)e^t = 8te^t + 2e^t$$

$$\begin{cases} 4A_1 = 8 \longrightarrow A_1 = 2 \\ 2A_1 + 2A_0 = 2 \quad\quad A_0 = -1 \end{cases}$$

$$y_p = (2t^2 - t)e^t$$

7) $yy'' - y'^2 = y^4$; $y(0)=1$ e $y'(0)=0$

SOL:

$p = y'$ e pela Regra da Cadeia

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

E a equação fica

Bernoulli

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^4$$

$$p\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}p^2 = y^3$$

$$v = p^2 \Rightarrow \frac{dv}{dy} = 2p\frac{dp}{dy}$$

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{2}\frac{dv}{dy}$$

Logo

$$p\frac{dp}{dy} - \frac{1}{y}p^2 = y^3$$

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dy} - \frac{1}{y}v = y^3$$

$$\frac{dv}{dy} - \frac{2}{y}v = y^3$$

$$\mu = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln|y|} = e^{\ln|y|^{-2}} = \frac{1}{y^2}$$

Mult. por μ

$$\frac{1}{y^2}\frac{dv}{dy} - \frac{2}{y}\cdot\frac{1}{y^2}v = y$$

$$\left(\frac{1}{y^2}\cdot v\right)' = y$$

Integrando

$$\frac{1}{y^2} \cdot v = \frac{y^2}{2} + k$$

$$v = \frac{y^4}{2} + y^2 k$$

$$p^2 = \frac{y^4}{2} + y^2 k$$

$$p = \pm y \sqrt{c + y^2}$$

$y' = p = 0$ para $y = 1 \Longrightarrow c = -1.$

$$p = \pm y \sqrt{y^2 - 1}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \pm y \sqrt{y^2 - 1}.$$

Integrando

$$\arccos\frac{1}{y} \pm x = C_2$$

Sendo $y=1$ e $x=0$, obtemos $C_2=0$

e assim

$$\frac{1}{y} = \cos x$$

ou

$$y = \sec x$$