CEFET/RJ - DEPIN - Matemática Discreta - Prof. Eduardo Bezerra
P2 - 17/janeiro/2014 - Duração: 2 horas

IMPORTANTE: Em cada questão desta prova, você deve obrigatoriamente fornecer justificativas para os passos do desenvolvimento da solução fornecida. A correção de sua prova será feita levando isso em consideração. Boa sorte!

Questão 1 (1,0 ponto) - *Quantas soluções inteiras não negativas tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$?*

Para codificar uma solução desta equação, utilizamos os símbolos * e |. Os * são utilizados para representar a soma total que deve ser obtida, enquanto que os |'s são utilizados para representar o valor das variáveis x_i. Para a equação considerada, utilizamos 3 * e 3 |. O número de *'s à esquerda do primeiro palito corresponde ao valor de x_1, o número de * entre o primeiro e o segundo palitos corresponde ao valor de x_2, o número de * entre o terceiro e o quarto palitos corresponde ao valor de x_3, enquanto que o número de * à direita do terceiro palito corresponde ao valor de x_4. Como exemplo, considere as codificações abaixo:

a) ** | | | *

b) * | * | * |

A primeira codificação corresponde à solução $(2, 0, 0, 1)$, enquanto que a segunda corresponde à solução $(1, 1, 1, 0)$. Podemos observar que cada permutação distinta dos * e | corresponde a uma solução distinta da equação. Portanto, o número de soluções da equação é igual ao número de permutações de 3 * e 3 |. Então, temos que o número de soluções é

$$\frac{6!}{(3!3!)} = 20.$$

Outra solução possível é descrita a seguir.

- Se uma variável vale 3, as demais devem obrigatoriamente valer 0; aqui temos 4 soluções.
- Se uma variável vale 2 e outra vale 1, as demais devem obrigatoriamente valer 0; aqui temos 12 soluções.
- Se uma variável vale 1, outra vale 1 e uma terceira vale 1, a variável restante deve obrigatoriamente valer 0; aqui temos 4 soluções.

Se aplicarmos o princípio da adição, então chegamos ao valor $4 + 12 + 4 = 20$ soluções possíveis.

Questão 2 (2,0 pontos) - *Um titular e um suplente precisam ser escolhidos entres os discentes para compor o colegiado do Departamento de Informática do CEFET-RJ. Existem 17 candidatos do Curso Superior de Tecnologia em Sistemas para Internet (CST-SI) e 24 candidatos do Bacharelado em Ciência da Computação (BCC). Se ambos (titular e suplente) não devem pertencer ao mesmo curso, de quantas maneiras diferentes esses discentes podem ser selecionados?*

Há duas formas alternativas para escolha dos discentes:

- o titular é do BCC e o suplente é do CST-SI; Pelo princípio da multiplicação, temos $24 \times 17 = 408$ maneiras.

- o titular é do CST-SI e o suplente é do BCC; Pelo princípio da multiplicação, temos $17 \times 24 = 408$ maneiras.

Os dois conjuntos acima são disjuntos. Além disso, existem apenas esses dois casos. Logo, pelo princípio da adição, há é $2 \times 408 = 816$ maneiras diferentes de realizar a seleção indicada.

Outra solução possível é descrita a seguir. Pelo princípio da multiplicação, a quantidade de maneiras de selecionar dois discentes do BCC é 24×23. Também pelo princípio da multiplicação, a quantidade de maneiras de selecionar dois discentes do CST-SI é 17×16. A quantidade de maneiras de selecionar dois discentes (independentemente do curso) é $(24 + 17) \times (24 + 17 - 1) = 41 \times 40$. Se quisermos computar a quantidade de maneiras de selecionar discentes de tal forma que ambos não pertençam ao mesmo curso, então obtemos $41 \times 40 - (24 \times 23 + 17 \times 16) = 816$.

Questão 3 (2,0 pontos) - *Quantas cadeias de bits de tamanho 16 existem que ou começam com um 1 ou terminam com dois bits 00?*

Seja A o conjunto de cadeias de bits de tamanho 16 que começam com 1. Seja B o conjunto de cadeias de bits de tamanho 16 que terminam com 00. Sendo assim, temos que:

- $|A| = 2^{15}$, porque a posição 1 está fixa, restando 15 outras posições, cada uma das quais pode ser preenchida com dois valores (0 ou 1);
- $|B| = 2^{14}$, porque as posições 15 e 16 estão fixas, restando 14 outras posições, cada uma das quais pode ser preenchida com dois valores (0 ou 1);
- $|A \cap B| = 2^{13}$, porque as posições 1, 15 e 16 estão fixas, restando 13 outras posições, cada uma das quais pode ser preenchida com dois valores (0 ou 1).

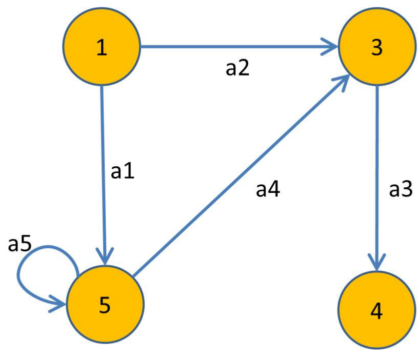
O que queremos é a cardinalidade de $A \cup B$:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 2^{15} + 2^{14} - 2^{13} \end{aligned}$$

Questão 4 (1,0 ponto) - *Quantas vezes é preciso jogar um dado de tal modo a garantir que um mesmo valor apareça duas vezes?*

Podemos modelar o problema da seguinte forma. Cada casa representa o número gravado em uma face do dado, de tal forma que há 6 casas, rotuladas de 1 até 6. Cada item (pombo) representa o valor obtido em uma jogada do dado. Ao jogar o dado 6 vezes, pode ocorrer de resultar em 6 números diferentes. No entanto, ao jogar o dado pela sétima vez, não importa qual o valor resultante, podemos garantir que algum dos valores terá aparecido duas vezes. Portanto, é preciso jogar o dado 7 vezes.

Questão 5 (1,0 ponto) - *Apresente a função g componente da definição formal do grafo direcionado ilustrado a seguir.*



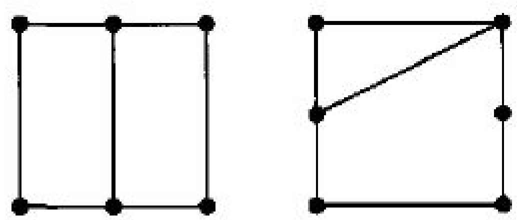
A função g pode ser representada pelo conjunto a seguir:

$$(a_1,(1,5)),(a_2,(1,3)),(a_3,(3,4)),(a_4,(5,3)),(a_5,(5,5))$$

Outra forma de apresentar g é a seguinte:

$$\begin{aligned} g(a_1) &= (1,5) \\ g(a_2) &= (1,3) \\ g(a_3) &= (3,4) \\ g(a_4) &= (5,3) \\ g(a_5) &= (5,5) \end{aligned}$$

Questão 6 (1,0 ponto) - *Prove que os dois grafos da figura a seguir* ***não*** *são isomorfos.*



Considere que G_1 e G_2 são os grafos da esquerda e da direita da figura, respectivamente. Repare que em G_1 todo vértice de grau 2 é adjacente a ou vértice de grau 2 e a outro de grau 3. Entretanto, em G_2, há um vértice de grau 2 que é adjacente a dois outrs vértices de grau 2. Portanto, G_1 e G_2 não são isomorfos.

Outra forma de resolver o problema é observar que G_1 e G_2 possuem conjuntos de ciclos cujos comprimentos não são correspondentes. Em G_1, os ciclos são de tamanhos 6, 4 e 4. Já em G_2, os ciclos são de tamanhos 6, 3 e 5.

Questão 7 (2,0 pontos) - *Considere o grafo completo de 1000 vértices, denotado por K_{1000}.*

a) *Quantas arestas possui K_{1000}? O grafo K_{1000} possui 1000 vértices e, porque é completo, possui uma e apenas uma aresta ligando cada par de vértices. Logo, o resultado desejado é igual a*

$1000 \times 999/2$. *Nessa expressão, devemos dividir por 2 porque, em caso contrário, cada aresta seria contada duas vezes.*

$$\frac{1000 \times 999}{2} = 499500$$

b) *Qual o somatório de todas as células (elementos) da matriz de adjacências correspondente a K_{1000}? Para todo grada completo, sua matriz de adjacências contém valores iguais a 1 em todas as células, com exceção da diagonal principal que contém valores iguais a zero. Esses valores seguem da definição de um grafo completo, que não possui laços e que para o qual cada vértice é adjacente a todos os demais. Sendo assim, o somatório de todas as células da matriz de adjacências correspondente a K_{1000} é:*

$$1000 \times 1000 - 1000 = 999000$$