Élève 1

Question de cours

Donner la preuve du *théorème de Bézout*.

Exercice 1

Soient $(\lambda, a, b) \in \mathbb{Z}^3$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose λ et m premiers entre eux, montrer

$$a \equiv b \ [m] \Longleftrightarrow \lambda a \equiv \lambda b \ [m].$$

Exercice 2

Soit A un ensemble à $n+1$ éléments pour $n \in \mathbb{N}^*$ constitué d'entiers tous inférieurs ou égaux à $2n$.
Montrer qu'il existe deux éléments de A tels que l'un divise l'autre.

Exercice 3

On note $\mathcal{D}_+(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs d'un entier $n \in \mathbb{Z}$.
Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Établir la bijectivité de l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_+(a) \times \mathcal{D}_+(b) & \longrightarrow & \mathcal{D}_+(ab) \\ (k,l) & \longmapsto & kl \end{array} \right. .$$

Élève 2

Question de cours

Donner la preuve du *lemme de Gauß*.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par N le nombre de diviseurs positifs de n et par P leur produit.
Quelle relation existe-t-il entre n, N et P ?

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation

$$(n \wedge m) + (n \vee m) = n + m.$$

Exercice 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $q \in \mathbb{Z}$, on considère l'application

$$\varphi_q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ z & \longmapsto & z^q \end{array} \right. .$$

1. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. Calculer $\varphi_p \circ \varphi_q$.
2. On suppose que n et q sont premiers entre eux. Vérifier que l'application φ_q est bijective.
3. Inversement, on suppose l'application φ_q bijective, montrer que n et q sont premiers entre eux.

Élève 3

Question de cours

Montrer que si p est premier, p divise $\binom{p}{k}$ pour tout k entre 1 et $p-1$.
En déduire le *petit théorème de Fermat*.

Exercice 1

Soient a, b et k des entiers. Établir

$$a \wedge b = (a + kb) \wedge b.$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les entiers

$$a_i := i \cdot n! + 1$$

pour $i \in \{1, ..., n+1\}$ sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice 3 - Suite de Fibonacci

On considère la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par

$$\begin{cases} \varphi_0 := 0 \\ \varphi_1 := 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_{n+2} := \varphi_{n+1} + \varphi_n \end{cases}.$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n et φ_{n+1} sont des entiers premiers entre eux.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_{k+n} = \varphi_k \varphi_{n+1} + \varphi_{k-1}\varphi_n.$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

3. Établir

$$\varphi_{a+b} \wedge \varphi_b = \varphi_a \wedge \varphi_b \;\text{ puis }\; \varphi_a \wedge \varphi_b = \varphi_b \wedge \varphi_r$$

   où r est le reste de la division euclidienne de a par b.
4. Conclure

$$\varphi_a \wedge \varphi_b = \varphi_{a\wedge b}.$$

Exercice bonus

Développement factoriel d'un entier

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que

$$n = \sum_{k=1}^{p} a_k k! \quad \text{avec } 0 \le a_k \le k \text{ et } a_p \ne 0.$$

2. Vérifier l'unicité de cette écriture.