Élève 1

Question de cours

Formules trigonométrique : pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\cos(\frac{\pi}{2}+x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2}+x)$.
Discuter de la dérivabilité et donner la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto x^a$, où $a \in \mathbb{R}$.
Dessiner la courbe représentative dans les cas $a > 1$, $a \in]0;1[$ et $a < 0$.

Exercice 1

Étudier la fonction $x \mapsto x^x$.

Exercice 2

Montrer que, pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\frac{1}{2}\left(\ln(a)+\ln(b)\right) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Exercice 3

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Élève 2

Question de cours

Produit de deux cosinus/sinus : pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\cos(a)\cos(b)$ et $\sin(a)\sin(b)$.
Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, montrer que $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ et $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.

Exercice 1

Déterminer tous les triplets $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3$ qui vérifient

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ xyz=1 \end{cases}.$$

Exercice 2 - Lemme de Gibbs

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x-1$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(p_1,...,p_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(q_1,...,q_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1.$$

Établir

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(q_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i).$$

Dans quel(s) cas y a-t-il égalité ?

Exercice 3

Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation $\cos(2x)+\cos(x)=0$.

Élève 3

Question de cours

Formules d'addition : pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\cos(a+b)$ et $\sin(a-b)$.
Donner la preuve de l'inégalité triangulaire *(sans le cas d'égalité)*.

Exercice 1

Déterminer tous les triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ e^a+e^b+e^c=3 \end{cases}.$$

Exercice 2

Déterminer les entiers naturels n vérifiant $2^n \geq n^2$.

Exercice 3

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)$.
On veut démontrer que f est périodique si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

1. On suppose que $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$. Démontrer que f est périodique.
2. On suppose que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Résoudre l'équation $f(x) = 2$.
   En déduire que f n'est pas périodique.

Exercices bonus

Domaine, parité et périodicité

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right)$.
Quel est le domaine de définition de f ?
La fonction f est-elle paire ? impaire ? périodique ?

Un produit

Soient $\theta \in]0;\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$.
Exprimer à l'aide de la fonction sinus le produit

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$