Élève 1

Question de cours

Donner la démonstration du *théorème de convergence des suites adjacentes.*

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.
On suppose que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que si $l<1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que si $l>1$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Observer que dans le cas $l=1$ on ne peut rien conclure.

Exercice 2 - Critère spécial des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante et de limite nulle. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose
$$S_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} u_k.$$

Montrer la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 - Somme harmonique

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Vérifier que
$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$
2. En déduire que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Élève 2

Question de cours

Donner la preuve du *théorème des gendarmes.*

Exercice 1

Déterminer la limite de
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exercice 2 - Moyenne arithmético-géométrique

1. Pour $(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$, établir
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$
On fixe $(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2$ pour la suite de l'exercice.
2. On considère les suites de réels positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par
$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1} := \sqrt{u_n v_n} \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad v_{n+1} := \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}.$$
Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1}\leq v_n$.
3. Établir que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.
Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.
4. Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$.
5. Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a,b)$ pour $\lambda\in\mathbb{R}_+$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes sont deux à deux distincts et appartiennent à $\mathbb{N}$. Étudier sont éventuelle limite.

Élève 3

Question de cours

Donner la preuve du *théorème de la limite monotone*.

Exercice 1

Soit $\theta \in]0;\pi[$. Déterminer le terme général de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0 \end{cases}.$$

Exercice 2 - Irrationalité du nombre de Neper

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\cdot n!} = a_n + \frac{1}{n\cdot n!}.$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement [1] adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est un nombre irrationnel.

Exercice 3 - Lemme de Cesàro

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des moyennes

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n := \frac{u_1 + u_2 + \cdots u_n}{n}.$$

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l, montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers l.

1. adjacentes et strictement monotones

Exercice bonus

CENTRALE (PC)

Soient K un réel strictement supérieur à 1 et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs convergent vers 0. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels de $[0;1]$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 0 ?