

Élève 1

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ pour la khôle.

Question de cours

Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ de Gauß est un anneau, puis donner ses inversibles.

Exercice 1

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes.

On suppose que A et B commutent, montrer que $A + B$ est nilpotente.

Exercice 2

Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices symétriques.

Exercice 3

Soit E un ensemble. On définit la différence symétrique $A \Delta B$ de deux parties A et B de E par la relation

$$A \Delta B := (A \cup B) \cap (A \cap B)^c.$$

Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.

Élève 2

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ pour la khôle.

Question de cours

Soit $(A, +, \times)$ un anneau, démontrer que (A^\times, \times) est un groupe, puis démontrer que si $a \in A$ est nilpotent, $1_A - a$ est inversible.

Exercice 1

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 2

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que la matrice $I_n - N$ est inversible et exprimer son inverse.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AN = NA$. Montrer que les matrices A et $A + N$ sont simultanément inversibles¹.

Exercice 3

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre commutatif fini. Démontrer que c'est un corps.

¹. Autrement dit, lorsque l'une des deux matrices est inversible, l'autre l'est aussi.

Élève 3

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ pour la khôle.

Question de cours

Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$, démontrer que $A^\top \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est antisymétrique si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^\top A X = 0.$$

Exercice 2 - Matrice à diagonale strictement dominante

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|.$$

On considère $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifiant $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

En introduisant une coordonnée de X de module maximal, établir que $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

Exercice 3

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A + A^{-1} = I_n.$$

Exprimer $A^k + A^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercices bonus

Une matrice nulle

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ deux matrices. On suppose

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \quad AMB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Montrer qu'au moins l'une des deux matrices A ou B est nulle.

Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Déterminer le centre¹ de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$.

1. Le centre de $(A, +, \times)$ est le sous-ensemble de A formé par tous les éléments x de A tels que $x \times y = y \times x$ pour tout y de A .