Élève 1

Question de cours

Donner l'énoncé complet du théorème caractérisant l'inversibilité d'une matrice par les systèmes linéaires, et la preuve de l'implication facile $(1) \Longrightarrow (2)$.

Si la matrice A est inversible, alors $AX = 0$ n'a que la solution triviale.

Exercice 1

Pour quelles valeurs du paramètre m la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet-elle un inverse ?
On ne demande pas de calculer l'inverse.

Exercice 2

Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments.

1. Soit X une partie à $p \in \mathbb{N}$ éléments de E.
   Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?
2. Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?

Exercice 3 - Formule de Chu-Vandermonde

Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $n \in [\![0; p+q]\!]$. Proposer une démonstration par dénombrement de l'égalité

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.$$

Élève 2

Question de cours

Donner le cardinal de F^E lorsque E et F sont deux ensembles finis et une preuve.

Exercice 1

Pour quelles valeurs du paramètre t la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet-elle un inverse ?
Dans ce cas, déterminer son inverse.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
De combien de façons peut-on grouper $2n$ individus par paires ?

Exercice 3

Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments.
Combien existe-t-il de couples (X, Y) constitués de parties de E vérifiant $X \subset Y$?

Élève 3

Question de cours

Donner le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ pour E un ensemble fini et une preuve.

Exercice 1

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $A(a,b) := \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. Soit $c \in \mathbb{R}$. Calculer $A(ac, -bc)A(a, b)$.
2. Pour quels couples (a, b) la matrice A est-elle inversible ?
   Si elle l'est, donner son inverse.

Exercice 2

Soient n et $p \in \mathbb{N}$. Proposer des preuves combinatoires [1] des formules :

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$;
2. $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$;
3. $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 3

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.
Combien y a-t-il d'injections de E dans F ?

1. Une preuve combinatoire est une justification réalisée par dénombrement. Par exemple, en calculant de deux façons différentes le cardinal d'un même ensemble.

Exercices bonus

Matrice à diagonale strictement dominante

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1; n]\!] \quad \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|.$$

On considère $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vérifiant $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.
En introduisant une coordonnée de X de module maximal, établir que $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.