Élève 1

Question de cours

Linéariser l'expression $\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)$ à l'aide de la formule d'Euler.

Exercice 1

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$z + \overline{z} = |z|.$$

Exercice 2

Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta).$$

Exercice 3

Soient $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $f : P \to \mathbb{C}$ l'application définie par

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

1. Montrer que f prend ses valeurs dans $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
2. Vérifier que tout élément de D possède un unique antécédent par f.

Élève 2

Question de cours

Factoriser $\cos(4t)$ à l'aide de la formule de Moivre.

Exercice 1

Simplifier, avec $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$,

1. $j(j+1)$
2. $\frac{j}{j^2+1}$
3. $\frac{j+1}{j-1}$

Penser au fait que $\overline{j} = j^2$.

Exercice 2 - Transformation de Cayley

Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$.
Démontrer que $\frac{z+z'}{1+zz'}$ est réel et préciser son module.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n.$$

Combien y a-t-il de solutions ?

Élève 3

Question de cours

Prouver l'égalité $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1\}$.

Exercice 1

Calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 2

Soit z un nombre complexe différent de 1. Démontrer que

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
Calculer

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|.$$

Exercice bonus

Noyaux de Dirichlet et de Fejér

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer simplement

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx} \quad \text{et} \quad F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) \qquad \text{(pour } n \neq 0\text{)}.$$

2. Vérifier

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \mathrm{e}^{ikx}.$$