

Élève 1**Question de cours**

Si f est continue sur $[a; b]$ et F est une primitive de f sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Exercice 1

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle bien choisi :

1. $f_1 : x \mapsto 5x^3 - 3x + 7$;
2. $f_2 : x \mapsto 2 \cos x - 3 \sin x$;
3. $f_3 : x \mapsto 10 - 3e^x + x$;
4. $f_4 : x \mapsto \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$;
5. $f_5 : x \mapsto \frac{x+5}{x^2}$;
6. $f_6 : x \mapsto \frac{x^2}{5} + \frac{1}{6}$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une primitive de $x \mapsto \ln^n(x)$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\int_0^{n\pi} t |\sin t| dt.$$

Élève 2**Question de cours**

Théorème d'intégration par parties.

Exercice 1

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle bien choisi :

1. $f_1 : x \mapsto e^{4x}$;
2. $f_2 : x \mapsto e^{4x+3}$;
3. $f_3 : x \mapsto \sin(2x)$;
4. $f_4 : x \mapsto \cos(3x + \frac{\pi}{3})$;
5. $f_5 : x \mapsto (2x+1)^2$;
6. $f_6 : x \mapsto \frac{3}{\sqrt{5x+1}}$.

Exercice 2

En effectuant un changement de variables, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$;
2. $x \mapsto \frac{1}{x+x(\ln x)^2}$;
3. $x \mapsto \cos(2 \ln x)$.

Exercice 3

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose

$$I_{n,p} := \int_0^1 x^n \ln^p(x) dx.$$

Calculer $I_{n,p}$.

Élève 3

Question de cours

Théorème de changement de variables.

Exercice 1

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle bien choisi :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$;
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$;
3. $f_3 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$;
4. $f_4 : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$;
5. $f_5 : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$;
6. $f_6 : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$.

Exercice 2

En effectuant un changement de variables, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x}}$;
2. $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$;
3. $x \mapsto \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}$.

Exercice 3

Soient α, β des réels et n un entier naturel. Calculer

$$\int_{\alpha}^{\beta} (t-\alpha)^n (t-\beta)^n dt.$$

Exercice bonus

X (MP)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C^2([a; b], \mathbb{R})$ tels que f' monotone et

$$\forall x \in [a; b] \quad |f'(x)| \geq \mu.$$

Montrer que

$$\left| \int_a^b e^{2i\pi f(t)} dt \right| \leq \frac{1}{\mu\pi}.$$

$$\text{Écrire } \int_a^b e^{2i\pi f(t)} dt = \int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)} e^{2i\pi f(t)} dt.$$