Élève 1

Question de cours

Énoncer et prouver la caractérisation séquentielle de la borne supérieur.

Exercice 1 - Critère de Cauchy

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait le critère de Cauchy lorsqu'elle vérifie

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \;\; \begin{cases} p \geq n_\varepsilon \\ q \geq n_\varepsilon \end{cases} \implies |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une suite convergente satisfait le critère de Cauchy.
2. Inversement, montrer qu'une suite vérifiant le critère de Cauchy est convergente.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes sont deux à deux distincts et appartiennent à $\mathbb{N}$. Étudier sont éventuelle limite.

Élève 2

Question de cours

En admettant le théorème de Bolzano -Weierstraß dans le cas réel, prouver le théorème dans le cas complexe.

Exercice 1 - Valeur d'adhérence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que le réel l est *valeur d'adhérence* de la suite s'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l.

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence d'une suite convergente ?
2. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$? de la suite $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donner un exemple de suite qui ne converge pas et qui possède une unique valeur d'adhérence.
4. Prouver que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et est divergente, elle admet toujours (au moins) deux valeurs d'adhérence distinctes.

Exercice 2 - NAVALE (MP)

Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels strictement positifs que l'on écrit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r_n := \frac{p_n}{q_n} \quad ((p_n, q_n) \in (\mathbb{N}^*)^2).$$

On suppose que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnelle r.
Montrer que les deux suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$.

Élève 3

Question de cours

Donner la preuve du théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 1 - MINES (MP)

Étudier les limites des suites de terme général, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 3 - Lemme de Cesàro

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des moyennes

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n := \frac{u_1 + u_2 + \cdots u_n}{n}.$$

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l, montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers l.

Exercice bonus

Hors programme

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a;b],\mathbb{R})$ s'annulant une infinité de fois.
Montrer qu'il existe $\alpha \in [a;b]$ tel que $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

Caractérisation séquentielle de la continuité :
$f : I \to \mathbb{R}$ est continue en un point a de l'intervalle I ssi pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a, $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Théorème de Rolle :
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

ENS (MP)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(f(x)) = 6x - f(x).$$