Élève 1

Question de cours

Énoncer le *théorème de dérivation* : somme, produit, quotient et **composée**.

Qu'est-ce qu'une fonction *paire* ? *impaire* ?

Donner la description de la fonction tangente (intervalles de définition, dérivabilité, courbe et valeurs notables).

Exercice 1

Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto e^x - e^{-x}$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
3. $f_3 : x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Exercice 2

Monter que, pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx) = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Exercice 3

Établir que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))| = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right).$$

Élève 2

Question de cours

Lien entre *monotonie* et *dérivation*.

Qu'est-ce qu'une fonction *T-périodique* ?

Donner la description de la fonction th (intervalles de définition, dérivabilité, courbe et valeurs notables).

Exercice 1

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 2

Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $\operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan}(p) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.
2. Déterminer la limite de $S_n := \sum_{p=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.

Exercice 3

Simplifier, pour x un réel convenable,

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Élève 3

Question de cours

Énoncer le *TVI* et ses *corollaires* (dont le *théorème de la bijection continue*).

Qu'est-ce qu'une fonction *bornée*

Donner la description de la fonction Arctan (intervalles de définition, dérivabilité, courbe et valeurs notables).

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions impaires.
Que dire de la parité de $f + g$, $f \times g$ et $f \circ g$?

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Étudier la parité de f.
2. Étudier le comportement de f en $\pm\infty$ et en 0.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
4. Justifier que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{th}(y) \leq y$.
   En déduire le tableau de variations de f, puis tracer la courbe représentative de f.

Exercice 3

1. Vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(2a) = 2\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(a)$.
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de la fonction sinus hyperbolique le produit
$$\prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Exercice bonus

Lemme de Gibbs

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $(p_1, ..., p_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(q_1, ..., q_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ des n-uplets vérifiants
$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} q_k = 1.$$
   Établir
$$\sum_{k=1}^{n} p_k \ln(q_k) \leq \sum_{k=1}^{n} p_k \ln(p_k).$$
   Dans quel(s) cas y a-t-il égalité ?