Élève 1

Question de cours

Montrer que les relations de congruence sont des relations d'équivalence.

Exercice 1

Soient E un ensemble non vide et $\alpha \subset \mathcal{P}(E)$ non vide vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (X,Y) \in \alpha^2 \ \exists Z \in \alpha \mid Z \subset (X \cap Y).$$

On définie sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\sim$ par

$$A \sim B \iff \exists X \in \alpha \mid X \cap A = X \cap B.$$

1. Prouver que ceci définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Quelles sont les classes d'équivalence de $\emptyset$ et de E ?

Exercice 2

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On forme

$$A + B := \{a + b \mid (a,b) \in A \times B\}.$$

Montrer que

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Exercice 3

On définit la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{N}^*$ par

$$p \mathscr{R} q \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \mid q = p^k.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
2. Déterminer les majorants de $\{2,3\}$ pour cet ordre.

Élève 2

Question de cours

Donner la caractérisation epsilonesque de la borne supérieure (preuve de $\Rightarrow$).

Exercice 1

Soient E un ensemble et A une partie de E.
On définit une relation $\mathscr{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$X \mathscr{R} Y \iff X \cup A = Y \cap A.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Décrire la classe d'équivalence de $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x^n(1-x)$.
Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0;1]} f_n(x).$$

Exercice 3 - Deux frè... relations

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E à la fois réflexive et transitive.
On définit les nouvelles relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sur E par

$$x \mathcal{S} y \iff (x \mathscr{R} y \wedge y \mathscr{R} x)$$
$$x \mathcal{T} y \iff (x \mathscr{R} y \vee y \mathscr{R} x)$$

1. Les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont-elles des relations d'équivalences ?
2. Montrer que $\mathscr{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalence de $\mathcal{S}$.

Élève 3

Question de cours

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\lambda A := \{\lambda a \mid a \in A\}$. Montrer que $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

Exercice 1

On considère la relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathcal{F}(E,E)$ définie par

$$f \mathscr{R} g \iff \exists \varphi \in \mathcal{S}(E) \mid f \circ \varphi = \varphi \circ g.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(E,E)$.
2. Décrire la classe d'équivalence d'une fonction donnée $f \in \mathcal{F}(E,E)$.

Exercice 2

Soit

$$A := \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Montrer que A est bornée et déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 3

On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{R}_+$ en posant

$$x \mathscr{R} y \iff \exists (k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid kx = ly.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Décrire la classe d'équivalence de x.

Exercices bonus

Un ensemble fini

Soit $(E, \prec)$ un ensemble ordonné tel que toute partie non vide admet un plus petit élément et un plus grand élément. Montrer que E est fini.

$(\mathbb{N}, \leq)$ est bien fondé

Montrer qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels.