Élève 1

Question de cours

Démontrer que la composée de deux applications injectives est injective.

Exercice 1 - Devinettes...

1. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une bijection de $\{1/n \mid n \geq 1\}$ dans $\{1/n \mid n \geq 2\}$.
3. Déduire de la question précédente une bijection de $[0;1]$ dans $[0;1[$.
4. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g = f_{|[-1;1]}$ est une bijection.

Exercice 3

Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Donner une CNS sur A et B pour que f soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.

Élève 2

Question de cours

Démontrer que la composée de deux applications surjectives est surjective.

Exercice 1

Soient $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x+1} \end{array} \right.$.

Déterminer $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ termes}})(x)$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ telle que $f : (p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$. f est elle injective ? surjective ?

Exercice 3

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour tout A de $\mathcal{P}(E)$, on a $f(A^c) = (f(A))^c$.

Élève 3

Question de cours

Montrer que l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \right.$ est surjective et non injective.

Exercice 1

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. Pour toutes parties A et B de X, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ telle que $f : (n,p) \mapsto 2^n(2p+1)$. Démontrer que f est une bijection.
En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 3

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout ensemble Z, pour tout $g : Z \to X$ et tout $h : Z \to X$, on a
$$f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h.$$
2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout ensemble Z, pour tout $g : Y \to Z$ et tout $h : Y \to Z$, on a
$$g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h.$$

Exercices bonus

Fonctions et fonctions d'ensemble

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. On définit deux applications $f^{\#}$ et $f_{\#}$ par :

$$f^{\#} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right. \qquad f_{\#} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & f^{-1}(A) \end{array} \right.$$

Démonter que

1. $f^{\#}$ est injective si et seulement si f est injective.
2. $f_{\#}$ est injective si et seulement si f est surjective.

Une CNS

Soient E et F des ensembles non vides. Montrer qu'il existe une injection de E dans F si et seulement si il existe une surjection de F sur E.

Théorème de Cantor

Soit E un ensemble.
Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective de E vers $\mathcal{P}(E)$.