Élève 1

Question de cours

Démontrer que le centre d'un groupe en est un sous-groupe.

Exercice 1

Soient $G := \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $\star$ la loi de composition interne définit sur G par

$$(x, y) \star (x', y') := (xx', xy' + y).$$

1. Observer que la loi $\star$ n'est pas commutative.
2. Montrer que $(G, \star)$ est un groupe dont on précisera l'élément neutre.
3. Vérifier que $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \star)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

Exercice 2 - Théorème de Lagrange

Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini et $(H, \cdot)$ un sous-groupe de $(G, \cdot)$.

1. Montrer que pour tout $a \in G$, H et $aH := \{ah \mid h \in H\}$ ont le même nombre d'éléments.
2. Soient a et b deux éléments de G. Démontrer que $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \emptyset$.
3. En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G.

Exercice 3

Soit $(G, \cdot)$ un groupe possédant un nombre pair d'éléments.
Montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $x^2 = 1_G$ et $x \neq 1_G$.

Élève 2

Question de cours

Démontrer que l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe est un sous-groupe.

Exercice 1 - Addition des vitesses en théorie de la relativité

Soient $c \in \mathbb{R}_+^*$ [1] et $I =]-c; c[$.

1. Montrer que
$$\forall (x, y) \in I^2 \quad x \star y := \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{c^2}} \in I.$$
2. Montrer que la loi $\star$ munit I d'une structure de groupe abélien.

Cette loi $\star$ correspond à l'addition des vitesses portées par un même axe en théorie de la relativité.

Exercice 2 - Somme des valeurs

Soit φ un morphise non constant d'un groupe fini $(G, \cdot)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
Calculer $\sum_{x \in G} \varphi(x)$.

Exercice 3 - Conjugaison dans un groupe

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini noté multiplicativement.

1. On appelle *normalisateur* de $x \in G$ l'ensemble $N(x) := \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$.
   Montrer que $(N(x), \cdot)$ est un sous-groupe de $(G, \cdot)$.
2. Montrer que l'on définit une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur G en posant
$$\forall (x, y) \in G^2 \quad x \mathscr{R} y \iff \exists g \in G \mid y = gxg^{-1}.$$
3. On note $\mathrm{Cl}(x)$ la classe d'équivalence d'un élément $x \in G$ pour la relation $\mathscr{R}$. Montrer
$$|G| = |\mathrm{Cl}(x)| \times |N(x)|.$$
4. *Application :* on suppose que G est de cardinal p^α avec p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Montrer que son centre $Z(G)$ n'est pas réduit à 1_G.

1. c correspond à la vitesse de la lumière, ou célérité.

Élève 3

Question de cours

Énoncer et démontrer la caractérisation de l'injectivité d'un morphisme de groupes.

Exercice 1

Soient $(G, \star)$ un groupe et $a \in G$.
On définit une loi de composition interne $\top$ sur G par

$$x \top y := x \star a \star y.$$

1. Montrer que $(G, \top)$ est un groupe.
2. Soient $(H, \star)$ un sous-groupe de $(G, \star)$ et $K := a^{-1} \star H = \{a^{-1} \star x \mid x \in H\}$.
   Montrer que $(K, \top)$ est un sous-groupe de $(G, \top)$.
3. Montrer que $f : x \mapsto x \star a^{-1}$ est un isomorphisme de $(G, \star)$ vers $(G, \top)$.

Exercice 2

On considère $n \in \mathbb{N}$ et on pose $n\mathbb{Z} := \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

On se propose de montrer que, réciproquement, tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de cette forme. Il est clair que $\{0\}$ l'est.
Soit $(H, +)$ un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ non trivial.

2. Montrer que H possède un plus petit élément strictement positif que l'on notera n_0.
3. Conclure que pour tout sous-groupe $(H', +)$ de $(\mathbb{Z}, +)$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$ en étudiant le reste de la division euclidienne d'un élément de H par n_0.

Exercice 3 - Sous-groupe engendré par une partie

Dans cet exercice, $(G, \cdot)$ désigne un groupe.

1. Soit $((H_i, \cdot))_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-groupes de $(G, \cdot)$.
   Démontrer que $(\bigcap\limits_{i \in I} H_i, \cdot)$ est un sous-groupe de $(G, \cdot)$.
2. Soit X une partie de G. On note $\langle X \rangle$ l'intersection de tout sous-groupes de $(G, \cdot)$ contenant X. Démontrer que $(\langle X \rangle, \cdot)$ est le plus petit sous-groupe de $(G, \cdot)$ contenant X.
3. Démontrer que

$$\langle X \rangle = \{x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![1, n]\!]\ x_i \in X,\ \forall i \in [\![1, n]\!]\ \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\}.$$

   Avec la convention qu'un produit vide vaut 1_G.

Exercice bonus

X (MP)

Soit E un ensemble fini non vide muni d'une loi de composition interne et associative $\star$.
Montrer qu'il existe un élément e dans E vérifiant $e \star e = e$.