

## Élève 1

### Question de cours

Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$  et  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$ , alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

### Exercice 1

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle bien choisi :

1.  $f_1 : x \mapsto 5x^3 - 3x + 7$  ;
2.  $f_2 : x \mapsto 2 \cos x - 3 \sin x$  ;
3.  $f_3 : x \mapsto 10 - 3e^x + x$  ;
4.  $f_4 : x \mapsto \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$  ;
5.  $f_5 : x \mapsto \frac{x+5}{x^2}$  ;
6.  $f_6 : x \mapsto \frac{x^2}{5} + \frac{1}{6}$  .

### Exercice 2

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , donner une primitive de  $x \mapsto \ln^n(x)$ .

### Exercice 3

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer

$$\int_0^{n\pi} t |\sin t| dt.$$

## Élève 2

### Question de cours

Théorème d'intégration par parties.

### Exercice 1

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle bien choisi :

1.  $f_1 : x \mapsto e^{4x}$  ;
2.  $f_2 : x \mapsto e^{4x+3}$  ;
3.  $f_3 : x \mapsto \sin(2x)$  ;
4.  $f_4 : x \mapsto \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$  ;
5.  $f_5 : x \mapsto (2x+1)^2$  ;
6.  $f_6 : x \mapsto \frac{3}{\sqrt{5x+1}}$  .

### Exercice 2

En effectuant un changement de variables, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$  ;
2.  $x \mapsto \frac{1}{x+x(\ln x)^2}$  ;
3.  $x \mapsto \cos(2 \ln x)$ .

### Exercice 3

Pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ , on pose

$$I_{n,p} := \int_0^1 x^n \ln^p(x) dx.$$

Calculer  $I_{n,p}$ .

## Élève 3

### Question de cours

Théorème de changement de variables.

### Exercice 1

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes, sur un intervalle bien choisi :

1.  $f_1 : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$  ;
2.  $f_2 : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$  ;
3.  $f_3 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$  ;
4.  $f_4 : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$  ;
5.  $f_5 : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  ;
6.  $f_6 : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$  .

### Exercice 2

En effectuant un changement de variables, déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x}}$  ;
2.  $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$  ;
3.  $x \mapsto \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}$ .

### Exercice 3

Soient  $\alpha, \beta$  des réels et  $n$  un entier naturel. Calculer

$$\int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^n (t - \beta)^n dt.$$

## Exercice bonus

### X (MP)

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mu \in \mathbb{R}_+^*$  et  $f \in C^2([a; b], \mathbb{R})$  tels que  $f'$  monotone et

$$\forall x \in [a; b] \quad |f'(x)| \geq \mu.$$

Montrer que

$$\left| \int_a^b e^{2i\pi f(t)} dt \right| \leq \frac{1}{\mu\pi}.$$

$$\text{Écrire } \int_a^b e^{2i\pi f(t)} dt = \int_a^b \frac{f'(t)}{f'(t)} e^{2i\pi f(t)} dt.$$