

Федеральное агентство по образованию  
ГОУ ВПО «ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

кафедра *Информационных систем и компьютерного моделирования*

**А.В. Хоперсков, С.С. Хохлова**

**М.А. Бутенко, Н.Н. Янюшкина**

Учебное пособие

**Компьютерный практикум.**

**Вычислительная математика и программирование.**

Волгоград – 2010

УДК 519.6

ББК 22.19

Рекомендовано к печати ученым советом факультета  
Математики и информационных технологий ВолГУ  
(протокол №6 от 25.01.2009 г.)  
и учебно-методической комиссией

по блоку образовательных программ «Информационные технологии».

**А.В. Хоперсов, С.С. Хохлова, М.А. Бутенко, Н.Н. Янюшкина**

Компьютерный практикум. Вычислительная математика и программирование:  
Учебное пособие. – Волгоград: Волгоградское научное издательство. 2009, – 90 с.

ISBN

В данном методическом пособии описан лабораторный практикум по курсам «Вычислительная математика» и «Программирование математическое моделирование и автоматизация эксперимента» для студентов направления подготовки бакалавров 230100 – «Информатика и вычислительная техника», специальностей 230200 – «Информационные системы и технологии», 220200 – «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и других математических и физических специальностей и направлений. Лабораторный практикум составлен в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

ББК 22.19

ISBN

## Содержание

<b>1 Численное дифференцирование. Нахождение корня нелинейного уравнения</b>	<b>5</b>
1.1 Численное дифференцирование . . . . .	5
1.2 Нахождение корня нелинейного уравнения. Метод Ньютона . . . . .	6
1.3 Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе . . . . .	8
<b>2 Решение системы линейных алгебраических уравнений</b>	<b>9</b>
2.1 Метод Гаусса . . . . .	9
2.2 Метод прогонки . . . . .	10
2.3 Задания к лабораторной работе . . . . .	12
<b>3 Методы решения системы нелинейных уравнений</b>	<b>13</b>
3.1 Метод простой итерации . . . . .	14
3.2 Метод Ньютона . . . . .	15
3.3 Задания к лабораторной работе . . . . .	16
<b>4 Аппроксимация функций ортогональными многочленами</b>	<b>17</b>
4.1 Аппроксимация функций, заданных на множестве точек . . . . .	17
4.2 Аппроксимация функций, заданных на отрезке . . . . .	19
4.3 Задания к лабораторной работе . . . . .	22
<b>5 Интерполяция функций сплайнами</b>	<b>23</b>
5.1 Построение интерполяционного сплайна 3-го порядка . . . . .	23
5.2 Задания к лабораторной работе . . . . .	25
<b>6 Метод наименьших квадратов</b>	<b>26</b>
6.1 Введение . . . . .	26
6.2 Описание метода . . . . .	27
6.3 Задания к лабораторной работе . . . . .	31
<b>7 Метод Рунге-Кутта для решения системы дифференциальных уравнений</b>	<b>33</b>
7.1 Постановка задачи . . . . .	33
7.2 Решение задачи Коши методом Рунге-Кутта . . . . .	35
7.3 Задания к лабораторной работе . . . . .	38
<b>8 Краевая задача. Метод стрельбы</b>	<b>39</b>
8.1 Сведение решения краевой задачи к задаче Коши . . . . .	39
8.2 Задания к лабораторной работе . . . . .	42
<b>9 Численное интегрирование</b>	<b>42</b>
9.1 Метод прямоугольников . . . . .	43
9.2 Формула трапеций . . . . .	44
9.3 Формула Симпсона . . . . .	45
9.4 Задания к лабораторной работе . . . . .	46

<b>10 Методы Монте-Карло</b>	<b>46</b>
10.1 Вычисление интегралов . . . . .	47
10.2 Многомерные интегралы . . . . .	50
10.3 Генерация случайных чисел с заданным распределением вероятности . . . . .	51
10.4 Задания к лабораторной работе . . . . .	54
<b>11 Нахождение экстремума функции методом золотого сечения</b>	<b>55</b>
11.1 Алгоритм определения экстремума функции . . . . .	55
11.2 Задания к лабораторной работе . . . . .	57
<b>12 Метод наискорейшего спуска</b>	<b>57</b>
12.1 Введение . . . . .	57
12.2 Описание метода . . . . .	58
12.3 Задания к лабораторной работе . . . . .	60
<b>13 Аппроксимация функций рядами Фурье</b>	<b>61</b>
13.1 Периодические сигналы и ряды Фурье . . . . .	61
13.2 Интегральное и дискретное преобразование Фурье . . . . .	63
13.3 Контрольные вопросы и задания . . . . .	66
<b>14 Линейное уравнение теплопроводности</b>	<b>66</b>
14.1 Явная схема . . . . .	67
14.2 Неявная схема . . . . .	68
14.3 Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе . . . . .	69
<b>15 Эволюционный метод решения уравнений Пуассона и Лапласа</b>	<b>70</b>
15.1 Метод установления для уравнения эллиптического типа. Единственность решения. . . . .	70
15.2 Численная реализация метода установления для уравнения Пуассона. Устойчивость и скорость сходимости. . . . .	72
15.3 Задания к лабораторной работе . . . . .	74
<b>16 Волновое уравнение</b>	<b>75</b>
16.1 Численная схема решения уравнения гиперболического типа . . . . .	75
16.2 Контрольные вопросы и задания . . . . .	77
<b>17 Численная реализация модели «хищник-жертва»</b>	<b>78</b>
17.1 Пространственно распределенная модель хищник-жертва . . . . .	78
17.2 Эволюция популяций . . . . .	80
17.3 Задания к лабораторной работе . . . . .	81
<b>18 Движение заряженных частиц в электромагнитном поле</b>	<b>82</b>
18.1 Движение в однородном магнитном поле . . . . .	83
18.2 Движение заряженных частиц в комбинированных полях . . . . .	84
18.3 Задания к лабораторной работе . . . . .	86
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>88</b>

# 1 Численное дифференцирование. Нахождение корня нелинейного уравнения

## 1.1 Численное дифференцирование

По определению, производной функции  $f$  независимой переменной  $x$  называется предел отношения:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1.1)$$

Поскольку любая переменная в памяти компьютера может быть представлена только конечным набором значений, разобьем интересующий нас отрезок  $[a, b]$  на оси  $x$  на промежутки размером  $h$  так, что  $(b - a) = Nh$ , где  $N$  - число таких промежутков. Пронумеруем концы промежутков:  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + h$ ,  $x_2 = a + 2h$ , …,  $x_N = b$ . Ясно, что при достаточно малом  $h$  согласно (1.1).

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}. \quad (1.2)$$

Определим погрешность формулы (1.2) исходя из разложения функции  $f(x)$  в ряд Тейлора:

$$f(x \pm h) = f(x) + f'(x)(\pm h) + \frac{1}{2!}f''(x)(\pm h)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)(\pm h)^3 + \dots \quad (1.3)$$

Подставим (1.3) в (1.2)

$$\frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} = f'(x_n) + \frac{1}{2}f'(x_n)h + \dots = f'(x_n) + O(h). \quad (1.4)$$

Как видим, погрешность формулы (1.2) пропорциональна первой степени  $h$  — формула (1.2) обладает первым порядком точности. Входящая в ее правую часть разность не симметрична относительно точки  $x$ , в которой вычисляется производная.

Запишем формулу для первой производной, основанную на симметричной разности:

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n + h) - f(x_n - h)}{2h}. \quad (1.5)$$

Определим погрешность формулы (1.5). Подставим разложения

$$\frac{f(x_n + h) - f(x_n - h)}{2h} = f'(x_n) + \frac{1}{6}f'''(x_n)h^2 + \dots = f'(x_n) + O(h^2). \quad (1.6)$$

Это означает, что при уменьшении величины  $h$  в  $n$  раз погрешность (1.5) убывает примерно в  $n^2$  раз (говорят, что формула (1.5) обладает вторым порядком точности).

Согласно (1.1)

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x - \Delta x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f'(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Отсюда видно, что для вычисления второй производной разностным методом необходимо знать значение функции  $f(x)$  как минимум в трех точках промежутка  $[a, b]$ . Для равномерной сетки получим центрированную аппроксимирующую формулу для  $y''(x)$  методом неопределенных коэффициентов:

$$f''(x_n) \simeq Af(x_n - h) + Bf(x_n) + Cf(x_n + h). \tag{1.8}$$

Подставляя в (1.8) разложение (1.3), определим коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . В результате получим

$$f''(x_n) = \frac{f(x_n + h) - 2f(x_n) + f(x_n - h)}{h^2} + O(h^2). \tag{1.9}$$

## 1.2 Нахождение корня нелинейного уравнения. Метод Ньютона

Пусть задана непрерывная функция  $f(x)$  и требуется найти все или некоторые корни уравнения

$$f(x) = 0. \tag{1.10}$$

Эта задача распадается на несколько задач:

1. необходимо исследовать количество, характер и расположение корней;
2. найти приближенные значения корней;
3. и вычислить их с требуемой точностью.

Первая и вторая задачи решаются аналитическими и графическими методами. Когда ищутся только действительные корни уравнения, то полезно составить таблицу значений  $f(x)$ . Если в двух соседних узлах таблицы функция имеет разные знаки, то между этими узлами лежит нечетное

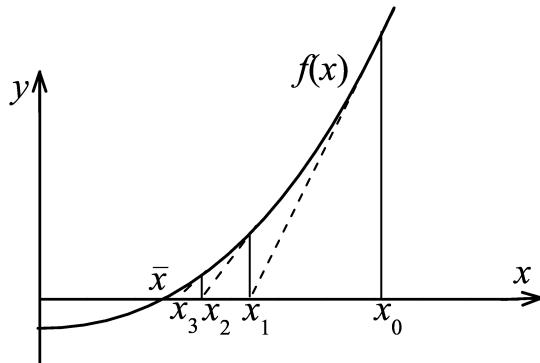


Рис. 1. Графическая интерпретация метода Ньютона.

число корней уравнения (по меньшей мере, один). Если эти узлы близки, то, скорее всего, корень между ними только один. Но выявить по таблице корни четной кратности сложно.

По таблице можно построить график функции  $y = f(x)$  и графически найти точки его пересечения с осью абсцисс. Этот способ более нагляден и дает неплохие приближенные значения корней. Во многих задачах техники такая точность уже достаточна. В технике еще популярны графические методы решения уравнений (номография). Построение графика зачастую позволяет выявить даже корни четной кратности. Приближенные значения корней уточняют различными итерационными методами. Рассмотрим один из них.

### Метод Ньютона

В литературе этот метод часто называют *методом касательных* или *методом линеаризации*. Если  $x_n$  есть некоторое приближение к корню  $\bar{x}$ , а  $f(x)$  имеет непрерывную производную, то (1.10) можно преобразовать следующим образом:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_n + (\bar{x} - x_n)) = f(x_n) + (\bar{x} - x_n)f'(\xi). \quad (1.11)$$

Приближенно заменяя  $f'(\xi)$  на значение известное в точке  $x_n$ , получим такой итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1.12)$$

Геометрически этот процесс означает замену на каждой итерации графика  $y = f(x)$  касательной к нему (см. рисунок 1). Для окончания итера-

ционного процесса можно использовать одно из двух условий

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_{n+1})| < \varepsilon. \quad (1.13)$$

Если нулевое приближение выбрано достаточно близко к корню, ньютоновские итерации сходятся, причем скорость сходимости велика для простого корня и соответствует скорости геометрической прогрессии для кратного корня. При произвольном нулевом приближении итерации сходятся, если всюду  $|ff''| < (f')^2$ , в противном случае сходимость будет не при любом нулевом приближении, а только в некоторой окрестности корня.

### 1.3 Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе

1. Для заданного отрезка  $[a, b]$  и на сетке с числом узлов  $N, 2N, 4N$ : вычислить (привести в отчете соответствующие таблицы значений);
  - a)  $f(x_n)$ ;
  - б)  $f'(x_n), f''(x_n), f'''(x_n)$  по аналитической формуле;
  - в)  $f'(x_n)$  по формуле (1.2);
  - г)  $f'(x_n)$  по формуле второго порядка точности (1.5);
  - д)  $f''(x_n)$  по формуле (1.9);

Для каждого пункта построить график соответствующей функции в узлах сетки. Оценить погрешность вычислений в зависимости от числа узлов сетки  $N$  и выбора формулы для аппроксимации.

2. Для заданной функции  $f(x)$  определите число вещественных корней уравнения  $f(x) = 0$ , место их расположения и приближенные значения (постройте график функции и распечатайте таблицу значений функции). С помощью метода Ньютона вычислите один из найденных корней (указанный преподавателем) с заданной точностью  $\varepsilon$ .
3. Определите погрешность формулы

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_n - h)}{h}.$$

4. Как зависит погрешность вычислений от величины шага  $h$ ? Постройте эту зависимость экспериментально?

5. Что называется левой, правой и центральной разностными производными? Какой порядок аппроксимации обеспечивают разностные производные?
6. Предложите свою формулу для вычисления третьей производной. Какой порядок аппроксимации обеспечивает Ваша схема?

## 2 Решение системы линейных алгебраических уравнений

### 2.1 Метод Гаусса

Систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1N}x_N = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2N}x_N = b_2, \\ \dots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + a_{N3}x_3 + \cdots + a_{NN}x_N = b_N, \end{cases} \quad (2.1)$$

можно записать в векторной форме

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица коэффициентов,  $\vec{x}$  и  $\vec{b}$  – соответственно вектор-столбец неизвестных и вектор-столбец правых частей. Если предположить существование матрицы обратной к  $\mathbf{A}$  –  $\mathbf{A}^{-1}$ , то можно записать

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}. \quad (2.3)$$

Известно, что если

$$\det||\mathbf{A}|| \neq 0, \quad (2.4)$$

то для матрицы  $\mathbf{A}$  существует обратная матрица и система алгебраических уравнений будет иметь единственное решение. Если же  $\det||\mathbf{A}|| = 0$ , то решение либо не существует, либо существует бесконечное множество решений.

Методы решения систем типа (2.1) разбиваются на две группы: прямые (точные) методы, позволяющие получить решение за конечное число шагов, и приближенные методы, в которых поиск точного решения имеет вид бесконечного итерационного процесса.

В основе прямых методов лежит *метод исключения Гаусса*, имеющий несколько модификаций. Приведем алгоритм, реализующий простой метод

Гаусса. Этот алгоритм состоит в последовательном выполнении двух процедур: получение из квадратной матрицы  $\mathbf{A}$  верхней треугольной матрицы  $\mathbf{A}'$  (прямой ход) и вычисление вектор-решений (обратный ход).

*Прямой ход:*

1. Произвести следующие вычисления, изменяя  $k$  от 1 до  $n - 1$ .
  - 1.1 Если  $a_{kk} \neq 0$ , перейти к 1.2, в противном случае найти такую  $i$ -ю строку, что  $i > k$  и  $a_{ik} \neq 0$ , поменять ее местами с  $k$ -й строкой.
  - 1.2 Произвести следующие вычисления, изменяя  $i$  от  $k + 1$  до  $n$ .
    - 1.2.1 Вычислить  $\xi_i = -a_{ik}/a_{kk}$ .
    - 1.2.2 Вычислить  $b'_i = b_i + \xi_i b_k$ .
    - 1.2.3 Вычислить, изменяя  $j$  от  $k + 1$  до  $n$ :

$$a'_{ij} = a_{ij} + \xi_i a_{kj};$$

(остальные элементы  $i$ -той строки положить равными нулю). В результате прямого хода получим верхнюю треугольную матрицу:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

*Обратный ход:*

1. Вычислить  $x_n = b'_n/a'_{nn}$ ;
2. Вычислить, изменяя  $i$  от  $n - 1$  до 1:

$$x_i = \frac{1}{a'_{ii}} \left( b'_i - \sum_{j=1}^{n-1} a'_{i,i+j} x_{i+j} \right). \quad (2.6)$$

Метод Гаусса требует примерно  $(2/3)n^3$  арифметических действий.

## 2.2 Метод прогонки

Одним из способов решения системы линейных уравнений является метод прогонки. Это модификация метода Гаусса для частного случая разреженных систем – системы уравнений с трехдиагональной матрицей. Такие системы получаются при моделировании некоторых инженерных задач, а также при численном решении краевых задач для дифференциальных уравнений.

Запишем систему алгебраических уравнений в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ \dots \\ a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1} \\ a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n \end{array} \right. \quad (2.7)$$

На главной диагонали матрицы этой системы стоят элементы  $b_1, b_2, \dots, b_n$ ; над ней – элементы  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ , под ней – элементы  $a_2, a_3, \dots, a_n$ . При этом обычно все коэффициенты  $b_j$  не равны нулю.

Метод прогонки состоит из двух этапов – прямой прогонки (аналога прямого хода метода Гаусса) и обратной прогонки (аналога обратного хода метода Гаусса). Прямая прогонка состоит в том, что каждое неизвестное  $x_i$  выражается через  $x_{i+1}$  с помощью прогоночных коэффициентов  $A_i, B_i$ :

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.8)$$

Из первого уравнения системы (2.7) выразим  $x_1$  через  $x_2$ :  
 $x_1 = -(c_1/b_1)x_2 + d_1/b_1$ .

С другой стороны, по формуле (2.8)  $x_1 = A_1 x_2 + B_1$ . Сравнивая эти соотношения, получаем выражения для прогоночных коэффициентов:

$$A_1 = -c_1/b_1; \quad B_1 = d_1/b_1. \quad (2.9)$$

Используя формулу (2.8) для  $x$ .

$$a_2(A_1 x_2 + B_1) + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2.$$

Отсюда находим

$$x_2 = \frac{-c_2 x_3 + d_2 - a_2 B_1}{a_2 A_1 + b_2};$$

или

$$x_2 = A_2 x_3 + B_2, \\ A_2 = -c_2/e_2; \quad B_2 = (d_2 - a_2 B_1)/e_2; \quad e_2 = a_2 A_1 + b_2.$$

Аналогично можно вычислить прогоночные коэффициенты для любого индекса  $i$ :

$$\begin{aligned} A_i &= -c_i/e_i; \quad B_i = (d_i - a_i B_{i-1})/e_i; \\ e_i &= a_i A_{i-1} + b_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Обратная прогонка состоит в последовательном вычислении неизвестных  $x_i$ . Сначала нужно найти  $x_n$ . Для этого воспользуемся выражением (2.8) при  $i = n - 1$  и последним уравнением системы (2.7):

$$\begin{aligned}x_{n-1} &= A_{n-1}x_n + B_{n-1}, \\a_nx_{n-1} + b_nx_n &= d_n.\end{aligned}$$

Исключая  $x_{n-1}$  из этих выражений, находим

$$x_n = \frac{d_n - a_nB_{n-1}}{b_n + a_nA_{n-1}}. \quad (2.11)$$

Далее, используя формулы (2.8) и выражения для прогоночных коэффициентов (2.9), (2.10), последовательно вычисляем все неизвестные  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ .

При анализе алгоритма метода прогонки надо учитывать возможность деления на нуль в формулах (2.10). Можно показать, что при выполнении условия преобладания диагональных элементов, т.е. если

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|. \quad (2.12)$$

(хотя бы для одного значения  $i$  должно иметь место строгое неравенство), деление на нуль не возникает, и система (2.7) имеет единственное решение. Приведенное условие преобладания диагональных элементов (2.9) обеспечивает также устойчивость метода прогонки относительно погрешностей округления. Последнее обстоятельство позволяет использовать метод прогонки для решения больших систем уравнений. Заметим, что данное условие устойчивости прогонки (2.10) является достаточным, но не необходимым. В ряде случаев для хорошо обусловленных систем вида (2.7) метод прогонки оказывается устойчивым даже при нарушении условия преобладания диагональных элементов.

### 2.3 Задания к лабораторной работе

1. Напишите программу, которая находит решение заданной системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Предусмотрите проверку полученного решения.
2. Составить программу, реализующую метод прогонки. Найдите реше-

ние системы уравнений  $ABC\vec{X} = \vec{D}$

$$ABC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ & 2 & 5 & 2 \\ & 3 & 7 & 3 \\ & 2 & 5 & 2 \\ & 1 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{D} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 27 \\ 46 \\ 27 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Измените в матрице  $ABC$  любую строку так, чтобы условие (2.12) нарушалось (но не сильно). Проанализируйте неустойчивость прогонки с помощью Вашей программы.

### 3 Методы решения системы нелинейных уравнений

Пусть требуется решить систему  $n$  нелинейных уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Прямых методов решения системы (3.1) не существует. Лишь в отдельных случаях эту систему можно решить непосредственно. Например, для случая двух уравнений иногда удается выразить одно неизвестное через другое и таким образом свести задачу к решению одного нелинейного уравнения относительно одного неизвестного.

Систему уравнений (3.1) можно кратко записать в векторном виде

$$\vec{F}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in D, \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) может иметь один или несколько корней в области  $D$ . Требуется установить существование корней уравнения и найти приближенные значения этих корней. Для нахождения корней обычно применяют итерационные методы, в которых принципиальное значение имеет выбор начального приближения. Начальное приближение иногда известно из физических соображений. В случае двух неизвестных начальное приближение можно найти графически: построить на плоскости  $(x_1, x_2)$  кривые

$f_1(x_1, x_2) = 0$  и  $f_2(x_1, x_2) = 0$  и найти точки их пересечения. Для трех и более переменных (а также для комплексных корней) удовлетворительных способов подбора начального приближения нет.

Рассмотрим два основных итерационных метода решения системы уравнений (3.1), (3.2) – метод простой итерации и метод Ньютона.

### 3.1 Метод простой итерации

Представим систему (3.1) в виде

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (3.3)$$

или в векторной форме

$$\vec{x} = \vec{f}(\vec{x}). \quad (3.4)$$

Алгоритм метода простой итерации состоит в следующем. Выберем некоторое нулевое приближение

$$\vec{x}^{(0)} = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

Следующее приближение находим по формулам

$$\vec{x}^{(s+1)} = \vec{f}(\vec{x}^{(s)}), \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

или более подробно:

$$\begin{cases} x_1^{(s+1)} = f_1(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_n^{(s)}) \\ x_2^{(s+1)} = f_2(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_n^{(s)}) \\ \dots \\ x_n^{(s+1)} = f_n(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_n^{(s)}). \end{cases} \quad (3.5)$$

Итерационный процесс (3.5) продолжается до тех пор, пока изменения всех неизвестных в двух последовательных итерациях не станут малыми, т.е.

$$|\vec{x}^{(s+1)} - \vec{x}^{(s)}| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

На практике часто вместо последнего условия используют неравенство

$$\|\vec{x}^{(s+1)} - \vec{x}^{(s)}\| < \varepsilon, \quad (3.6)$$

где  $\|\vec{A}\|$  – среднеквадратичная норма  $n$ -мерного вектора,  $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , т.е.  $\|\vec{A}\| = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}$ . При использовании данного метода успех во многом определяется удачным выбором начального приближения  $\vec{x}^{(0)}$ : оно должно быть достаточно близким к истинному решению. В противном случае итерационный процесс может не сойтись. Если процесс сходится, то его скорость сходимости является линейной.

### 3.2 Метод Ньютона

Метод Ньютона (в переводной литературе можно встретить название метод Ньютона-Рафсона) обладает гораздо более быстрой сходимостью, чем метод простой итерации. Пусть известно некоторое приближение  $\vec{x}^{(0)}$  к корню  $\vec{a}$ , так что  $\vec{x}^{(0)} = \vec{a} - \Delta\vec{x}^{(1)}$ . Тогда исходную систему (3.2) можно записать следующим образом

$$\vec{F}(\vec{x}^{(0)} + \Delta\vec{x}^{(1)}) = 0. \quad (3.7)$$

Разлагая уравнение (3.7) в ряд Тейлора в окрестности точки  $\vec{x}^{(0)}$  и ограничиваясь линейными членами по отклонению  $\Delta\vec{x}^{(1)}$ , получим

$$\vec{F}(\vec{x}^{(0)}) + \Delta \vec{x}^{(1)} \partial \vec{F}(\vec{x}^{(0)}) / \partial \vec{x} = 0,$$

или в координатной форме:

Систему (3.8) можно переписать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1^{(1)} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Delta x_2^{(1)} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \Delta x_n^{(1)} = -F_1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Delta x_1^{(1)} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Delta x_2^{(1)} + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \Delta x_n^{(1)} = -F_2 \\ \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \Delta x_1^{(1)} + \frac{\partial F_n}{\partial x_2} \Delta x_2^{(1)} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \Delta x_n^{(1)} = -F_n. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Полученная система (3.9) является системой линейных алгебраических уравнений относительно приращений  $\Delta \vec{x}^{(1)} = (\Delta x_1^{(1)}, \Delta x_2^{(1)}, \dots, \Delta x_n^{(1)})$ . Значение функций  $F_1, F_2, \dots, F_n$  и их производные в (3.9) вычисляются при  $\vec{x} = \vec{x}^{(s)}$ ,  $s = 0$ . Определителем системы (3.9) является якобиан  $J$ .

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

Для существования единственного решения системы уравнений (3.9) он должен быть отличен от нуля. Решив систему (3.9), например, методом Гаусса, найдем новое приближение:

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} + \Delta \vec{x}^{(1)}.$$

Проверяем условие (3.6). Если оно не удовлетворяется, находим  $F_1(\vec{x}^{(1)}), F_2(\vec{x}^{(1)}), \dots, F_n(\vec{x}^{(1)})$  и якобиан (3.10) с новым приближением и опять решаем (3.9), таким образом, находим 2-е приближение.

$$\vec{x}^{(s)} = \vec{x}^{(s-1)} + \Delta \vec{x}^{(s)}, \quad s = 2, \dots$$

Итерации прекращаются, как только выполняется условие (3.6).

### 3.3 Задания к лабораторной работе

Используя метод Ньютона, найдите решения системы нелинейных уравнений с заданной точностью  $\varepsilon$ .

1.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, & \varepsilon = 10^{-4} \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

7.

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x+y) + 0.1 = x^2, & \varepsilon = 10^{-3}, \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1, \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(y-x) + xy = 0.3, \\ x^2 + y^2 = 1.5, & \varepsilon = 10^{-5} \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases} 6x - 5y - 30\lg(x) - 12 = 0, \\ 3x - 3y + 30\lg(x) + 10 = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \sin(x - 2.3y) - xy + 1 = 0, \\ \frac{x^2}{1.75} - y^2 - 0.75 = 0, & \varepsilon = 10^{-3} \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1.5x, & \varepsilon = 10^{-3}, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} x + 3\lg(x) - y^2 = 0, & \varepsilon = 10^{-4}, 10. \\ 2x^2 - xy + -5x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x-y) - xy = -1, & \varepsilon = 10^{-5}, \\ x^2 - y^2 = 3/4 \end{cases}$$

5.

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x^3 - 5y^3 + 10 = 0, \\ x^4 - 8y + 1 = 0, & \varepsilon = 10^{-4} \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} \cos(0.4y + x^2) + x^2 + y^2 - 1.6 = 0, \\ 1.5x^2 - 2y^2 - 1 = 0, & \varepsilon = 10^{-4} \end{cases}$$

6.

$$\begin{cases} (x+y)^2 + y^2 = 2, & \varepsilon = 10^{-3}, \\ e^{xy} - x + y = 1.5, \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$$

12.

$$\begin{cases} x^2 - y + 2 = e^{xy}, & \varepsilon = 10^{-3}, \\ (x+0.5)^2 + y^2 = 0.1 \end{cases}$$

## 4 Аппроксимация функций ортогональными многочленами

### 4.1 Аппроксимация функций, заданных на множестве точек

Предположим, что функцию  $y = f(x)$ , заданную на множестве  $X = \{x_i, i = 0, 1, 2, \dots, N\}$ , необходимо аппроксимировать общенным многочленом степени  $M (M \leq N)$

$$Q_M(x) = \sum_{k=0}^M a_k P_k(x). \quad (4.1)$$

Если  $\{P_k(x), k = 0, 1, 2, \dots, M\}$  – система ортогональных на множе-

стве  $X$  полиномов, т.е.

$$\sum_{i=0}^N P_k(x_i)P_l(x_i) = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ > 0, & k = l, \end{cases}$$

то приближение функций  $f(x)$  с помощью многочлена (4.1) с коэффициентами

$$a_k = c_k/s_k, \quad \text{где} \quad c_k = \sum_{i=0}^N P_k(x_i)y_i, \quad s_k = \sum_{i=0}^N P_k^2(x_i), \quad (4.2)$$

обеспечивает наименьшее среднеквадратичное отклонение  $Q_M$  от  $f(x)$

$$S = \sum_{i=0}^N (Q_M(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^N y_i^2 - \sum_{k=0}^M c_k^2/s_k \quad (4.3)$$

по сравнению с другими обобщенными полиномами того же порядка  $M$ .

Таким образом, задача сводится к построению полиномов  $P_k$  ортогональных на множестве  $X$ . Рассмотрим метод построения ортогональных полиномов на множестве равнодistantных точек  $X = \{x_i, i = 0, 1, 2, \dots, N\}$ ,  $h = x_i - x_{i-1}$  [4, 7]. С помощью линейного преобразования  $t = (x - x_0)/h$  преобразуем множество  $X$  в множество  $t = 0, 1, 2, \dots, N$ . Многочлены  $P_{k,n}(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, M \leq N$  удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^N P_{k,n}(i)P_{l,n}(i) = 0, \quad k \neq l,$$

представить в виде линейной комбинации факториальных многочленов  $t^{[k]}$ :

$$P_{k,n}(t) = 1 + b_1 t^{[1]} + b_2 t^{[2]} + \dots + b_k t^{[k]}. \quad (4.4)$$

Факториальным многочленом  $t^{[k]}$  порядка  $k$  называют многочлен степени  $k$  с коэффициентом при старшей степени, равным единице, обращающийся в нуль в точках  $0, 1, 2, \dots, k-1$ , т.е.

$$t^{[k]} = t(t-1)(t-2)\dots(t-k+1), \quad t^{[0]} = 1, \quad 0^{[k]} = 0.$$

Требуя ортогональности многочленов (4.4) и используя тождества

$$(t+1)^{[k]} - t^{[k]} = kt^{[k-1]},$$

$$(t+N)^{[k]} = (t+N+1)^{[k+1]} - t^{[k+1]})/(k+1),$$

получаем систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $b_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M$ ,

$$\begin{aligned} 1/(k+1) + Nb_1/(k+1) + N^{[2]}b_2/(k+3) + \cdots + N^{[M]}b_M/(k+M+1) &= 0, \\ k = 0, 1, 2, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим

$$b_k = (-1)^k c_M^k c_{M+k}^k / N^{[k]}, \quad c_M^k = M! / k!(M-k)!.$$

Окончательно имеем систему полиномов степени  $M$

$$P_{M,N}(t) = \sum_{k=0}^M (-1)^k c_M^k c_{M+k}^k t^{[k]} / N^{[k]},$$

ортогональных на множестве точек  $t = 0, 1, 2, \dots, N$ . Их называют полиномами Чебышева. Причем

$$\sum_{i=0}^N P_{k,M}^2(i) = (M+N+1)^{[M+1]} / (2M+1)N^{[M]}.$$

Многочлены  $P_{N,M}(t)$  связаны следующим рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} (t - N/2)P_{M,N}(t) + P_{M+1,N}(t)(M+1)(N-M)/(2(2M+1)) + \\ + P_{M-1,N}(t)M(N+M+1)/(2(2M+1)) = 0 \quad (4.5) \end{aligned}$$

Поэтому, зная, что

$$P_{0,N}(t) = 1; \quad P_{1,N}(t) = 1 - 2t/N,$$

по формуле (4.5) легко можно найти  $P_{M,N}(t)$  при  $M > 1$ .

Совершая теперь обратное преобразование  $x = x_0 + th$ , находим многочлены, ортогональные на множестве  $X$ . По формулам (4.2), (4.1) определяем аппроксимирующй многочлен.

## 4.2 Аппроксимация функций, заданных на отрезке

Если система функций  $\{g_k(x), k = 0, 1, \dots, M\}$  ортогональна с весом  $\rho(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , т.е.

$$\int_a^b dx g_k(x) g_l(x) \rho(x) = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ > 0, & k = l, \end{cases}.$$

то задача о квадратичной аппроксимации направленной функции  $y = f(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , с помощью обобщенного полинома

$$Q_M(x) = \sum_{k=0}^M a_k g_k(x)$$

имеет следующее решение. Коэффициенты  $a_k$  определяются по формуле:

$$a_k = \int_a^b \rho(x) f(x) g_k(x) dx / \int_a^b \rho(x) g_k^2(x) dx \quad (4.6)$$

и называют коэффициентами Фурье функции  $f(x)$  относительно заданной ортогональной системы функций  $\{g_k(x)\}$ . Обобщенный полином  $Q_M$  с коэффициентами (4.6) обладает наименьшим квадратичным отклонением того же порядка. Это отклонение определяется по формуле

$$I_M = \int_a^b \rho(x) (f(x) - Q_M(x))^2 dx = \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx - \sum_{k=0}^M a_k^2 \int_a^b \rho(x) g_k^2(x) dx$$

Примеры систем ортогональных функций (см. [4,7,17])

1) Тригонометрическая система:

$$\{g_k(x), k = 0, 1, \dots\} = 1; \sin(x); \cos(x); \sin 2x; \cos(2x); \dots; \sin(nx); \cos(nx); \dots$$

Данная система функций ортогональна с весом  $\rho(x) = 1$  на любом отрезке длины  $2\pi$ . Причем

$$\int_0^{2\pi} g_k^2(x) dx = \begin{cases} 2\pi & , k = 0 \\ \pi & , k \neq 0 \end{cases}.$$

2) Полиномы Лежандра, определяемые формулой Родрига:

$$P_n(x) = (1/2^n n!) d^n (x^2 - 1)^n / dx^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

образуют систему ортогональных функций с весом  $\rho(x) = 1$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Многочлены  $P_n(x)$   $n \geq 2$  можно определять с помощью рекуррентного соотношения

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

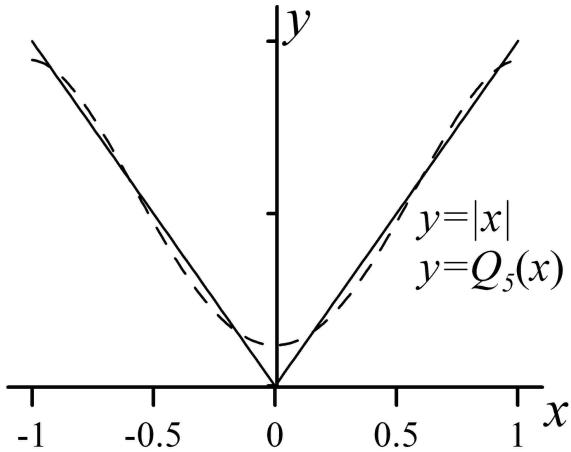


Рис. 2.

используя

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$\int_{-1}^1 P_k^2(x) dx = 2(2k + 1).$$

3) Полиномы Чебышева 1 рода

$$T_n(x) = \cos[n \arccos(x)]/2^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$T_0(x) = 1, \quad |x| < 1,$$

ортогональны с весом  $\rho(x) = 1/(1 - x^2)^{1/2}$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Рекуррентная формула для  $T_n(x)$  имеет вид

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

с ее помощью можно найти все полином степени  $n \geq 2$ , учитывая что

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$\int_{-1}^1 (1 + x^2)^{-1/2} T_k^2(x) dx = \begin{cases} \pi & , k = 0 \\ \pi/2 & , k \neq 0 \end{cases} .$$

Примеры других ортогональных полиномов можно найти в справочной литературе (например, [17]).

### Замечание

С помощью линейного преобразования  $z = (b - a)x/2 + (b + a)/2$  где  $|x| < 1$ , можно получить полиномы, ортогональные с весом  $p(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

Рассмотрим пример. Аппроксимируем функцию  $f(x) = |x|$  на отрезке  $[-1, 1]$  полиномом 5-ой степени  $Q_5$ . Полином  $Q_5$  ищем в виде

$$Q_5(x) = \sum_{k=0}^5 a_k P_k(x),$$

где  $P_k(x)$  – полиномы Лежандра. Заметим, что  $P_k(x)$  четны при  $k$  четном и нечетны при  $k$  нечетном. Следовательно, в силу четности  $P_k(x)$ , имеем

$$a_{2k} = (4k + 1) \int_0^1 x P_{2k}(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, a_{2k-1} = 0.$$

Отсюда, используя формулы (4.7), (4.8), находим

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 x dx = 1/2; \quad a_2 = 5 \int_0^1 x(3x^2 - 1)/2 dx = 5/8; \\ a_4 &= 9 \int_0^1 x(35x^4 - 30x^2 + 3)/8 dx = -3/16; \\ a_1 &= a_3 = a_5 = 0 \end{aligned}$$

Следовательно,  $|x| \approx 15(1 + 14x^2 - 7x^4)/128$  при  $|x| \leq 1$  (см. рисунок 2)

### 4.3 Задания к лабораторной работе

- 1) Функцию  $y = f(x)$ , заданную в виде таблицы  $\{x_i, y_i, i = 0, 1, 2, \dots, N\}$ , аппроксимируйте полиномом  $Q_M(x)$ ,  $M > 3$ . Найдите квадратичное отклонение  $f(x)$  от  $Q_M(x)$  и значение функции в точке  $x^*$ . Постройте графики функций  $y = f(x)$  и  $Q_M(x)$ .
- 2) Функцию  $y = f(x)$  аппроксимируйте на отрезке  $[a, b]$  ортогональными полиномами. Постройте графики  $y = f(x)$  и аппроксимирующей функции. Найдите среднеквадратичное отклонение.

Значение  $N$  выберите самостоятельно ( $N > 10$ ).

- |     |   |                   |
|-----|---|-------------------|
| 1.  | $y = f(x) = \operatorname{ch}(x)$           | $[-1, 1]$         |
| 2.  | $y = f(x) = x^3 - 3x + 2 + 10x^{10}$        | $[-0.5, 0.5]$     |
| 3.  | $y = f(x) = \operatorname{sh}(3x)$          | $[-1, 1]$         |
| 4.  | $y = f(x) = \sin(x)/(1 + x^2)$              | $[-1, 1]$         |
| 5.  | $y = f(x) = \operatorname{tg}(x)/x$         | $[0, 1]$          |
| 6.  | $y = f(x) = 10x^9 + x^8 - 5x^7 + 4x^3 + 11$ | $[-1, 1]$         |
| 7.  | $y = f(x) = \exp(-x^2 + 4x)$                | $[-1, 1]$         |
| 8.  | $y = f(x) = \sin(2x + x^2)$                 | $[0, \pi/3]$      |
| 9.  | $y = f(x) = \sin(x) \cos(x/2)$              | $[-\pi/2, \pi/2]$ |
| 10. | $y = f(x) = x + \operatorname{arctg}(x)$    | $[-1, 1]$         |
| 11. | $y = f(x) = \cos(x) \exp(x)$                | $[0, \pi]$        |
| 12. | $y = f(x) = \ln(\cos(x))$                   | $[0, 1]$          |
| 13. | $y = f(x) = \sin(x)/x$                      | $[0, 1]$          |
| 14. | $y = f(x) = 5x^5 + 3x^3 - 4x^2 - 9x + 100$  | $[-2, 2]$         |
| 15. | $y = f(x) = \exp(-x^2 + 10x - 4.2)$         | $[-1, 1]$ .       |

## 5 Интерполяция функций сплайнами

### 5.1 Построение интерполяционного сплайна 3-го порядка

При интерполяции функции  $y = f(x)$  алгебраическим многочленом с увеличением числа узлов, как правило, увеличивается степень многочлена. Однако, если функция  $y = f(x)$  не является достаточно гладкой, интерполяирование высокого порядка нецелесообразно. В этих случаях лучший результат может дать интерполяция сплайнами.

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$  и известны ее значения в узлах  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ . Назовем функцию  $S_m(x)$  интерполяционным сплайном порядка  $m$  для функции  $f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), если выполнены следующие условия:

- 1) на каждом из отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $S_m(x_i)$  является многочленом степени  $m$ ;
- 2) на всем отрезке  $[a, b]$  многочлен  $S_m(x)$  непрерывен вместе со своими  $(m-1)$  производными;
- 3) в узлах интерполяции  $S_m(x)$  принимает заданные значения

$$S_m(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Если  $m \geq 2$ , то для единственности  $S_m(x)$  следует задавать дополнительно еще  $(m - 1)$  условий, которые обычно задаются на концах отрезка  $[a, b]$  либо произвольно, либо из дополнительной информации о поведении  $f(x)$ .

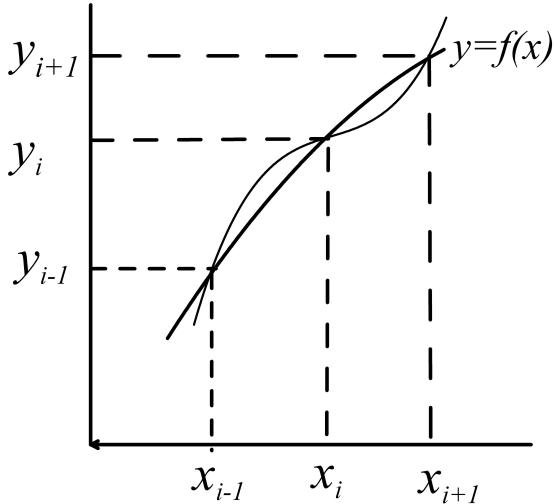


Рис. 3. Метод ломанных

численного анализа.

Рассмотрим подробнее интерполяцию кубическим сплайном  $S_3(x)$ . Запишем его в следующем виде

$$S_m(x) = \varphi(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad (5.1)$$

где  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Коэффициенты многочлена (5.1) на каждом интервале  $[x_{i-1}, x_i]$  определим, требуя выполнения условий 1)–3). Так, условие 3) дает  $2N$  уравнений с  $4N$  неизвестными:

$$y_{i-1} = \varphi(x_{i-1}) = a_i,$$

$$y_i = \varphi(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3,$$

где  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Вычислим теперь первую  $\varphi'$  и вторую  $\varphi''$  производные и потребуем их непрерывности во всех точках отрезка  $[a, b]$ , включая узлы

$$\lim_{x \rightarrow x_i - 0} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} \varphi'(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i - 0} \varphi''(x) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} \varphi''(x).$$

Это дает еще  $2(N - 1)$  уравнений

Метод ломанных (см. рис. 3). Очевидно, что  $S_1(x)$  равномерно сходится к непрерывной на  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , если при  $N \rightarrow \infty$   $\max |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ). Равномерная сходимость имеет место для квадратичного  $S_2(x)$  и кубического  $S_3(x)$  сплайнов, причем скорость сходимости повышается вместе с порядком сплайна и гладкостью  $f(x)$ . Этими замечательными свойствами сплайн-интерполяции отчасти объясняется ее широкое применение в различных задачах численного анализа.

$$\begin{aligned} b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 &= b_{i+1}, \\ c_i + 3d_i h_i &= c_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Недостающие два уравнения получим из известного предположения о нулевой кривизне  $S_3(x)$  на концах отрезка  $[a, b]$ , т.е. полагая  $\varphi''(x_0) = \varphi''(x_N) = 0$ .

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_N + 3d_N h_N &= 0. \end{aligned}$$

Окончательно имеем следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i = y_{i-1}, \\ a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, \\ b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \\ c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i, \\ c_1 = 0, \\ c_N + 3d_N h_N = 0. \end{array} \right. \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.2)$$

Исключая  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $d_i$ , систему (5.2) можно свести к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0, \\ h_{i-1} c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) c_i + h_i c_{i+1} = \\ = 3\{(y_i - y_{i-1})/h_i - (y_{i-1} - y_{i-2})/h_{i-1}\} \quad i = 2, \dots, N-1, \\ 2(h_{N-1} + h_N) c_N + h_{N-1} c_{N-1} = \\ = 3\{(y_N - y_{N-1})/h_N - (y_{N-1} - y_{N-2})/h_{N-1}\}. \end{array} \right.$$

Матрица этой системы трехдиагональна, т.е. ненулевыми в ней являются только элементы главной диагонали и двух соседних. Такие системы экономно решать методом прогонки (см. лаб. работу 2).

## 5.2 Задания к лабораторной работе

Значения функции  $y = f(x)$  известны в точках  $\{x_i, i = 0, 1, 2, \dots, N\}$ . Постройте сплайн третьего порядка  $S_3(x)$ . Вычислите значения функции в точке  $x^* \in [a, b]$ . Постройте графики.

Значения  $N$  и  $x^*$  выберите самостоятельно ( $N < 20$ ).

1)	$y = f(x) = \operatorname{ch}(x)$	$[-1, 1]$
2)	$y = f(x) = x^3 - 3x + 2 + 10x^{10}$	$[-0.5, 0.5]$
3)	$y = f(x) = \operatorname{sh}(3x)$	$[-1, 1]$
4)	$y = f(x) = \sin(x)/(1 + x^2)$	$[-1, 1]$
5)	$y = f(x) = \operatorname{tg}(x)/x$	$[0, 1]$
6)	$y = f(x) = 10x^9 + x^8 - 5x^7 + 4x^3 + 11$	$[-1, 1]$
7)	$y = f(x) = \exp(-x^2 + 4x)$	$[-1, 1]$
8)	$y = f(x) = \sin(2x + x^2)$	$[0, \pi/3]$
9)	$y = f(x) = \sin(x) \cos(x/2)$	$[-\pi/2, \pi/2]$
10)	$y = f(x) = x + \operatorname{arctg}(x)$	$[-1, 1]$
11)	$y = f(x) = \exp(x) \cos(x)$	$[0, \pi]$
12)	$y = f(x) = \ln(\cos(x))$	$[0, 1]$
13)	$y = f(x) = \sin(x)/x$	$[0, 1]$
14)	$y = f(x) = 5x^5 + 3x^3 - 4x^2 - 9x + 100$	$[-1, 0]$
15)	$y = f(x) = \exp(-x^2 + 10x - 4.2)$	$[-1, 1]$

## 6 Метод наименьших квадратов

### 6.1 Введение

Пусть физические величины  $x$  и  $y$  связаны закономерностью вида

$$y = f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_p f_p(x) = \sum_{k=1}^p a_k f_k(x), \quad (6.1)$$

где  $f_k(x)$  – известные линейно независимые функции,  $a_k$  – неизвестные постоянные коэффициенты. Пусть имеется возможность непосредственно измерять прибором величину  $y$  при любом  $x$ . Задача заключается в определении неизвестных постоянных  $a_1, a_2, \dots, a_p$ . Подобная ситуация часто возникает при косвенных измерениях, когда искомые величины не могут быть измерены прибором непосредственно. Тогда результаты измерений приходится подвергать математической обработке. Один из методов такой обработки – метод наименьших квадратов (МНК). Этот метод позволяет найти не только косвенно измеряемые параметры  $a_k$ , но и погрешности  $\Delta a_k$ , как если бы  $a_k$  измерялись непосредственно. Кроме того, можно строго доказать, что МНК является «лучшим» методом обработки для зависимостей вида (6.1). Точнее, оценка по МНК оказывается несмешённой и обладает наименьшей дисперсией в классе линейных оценок. Ограничение

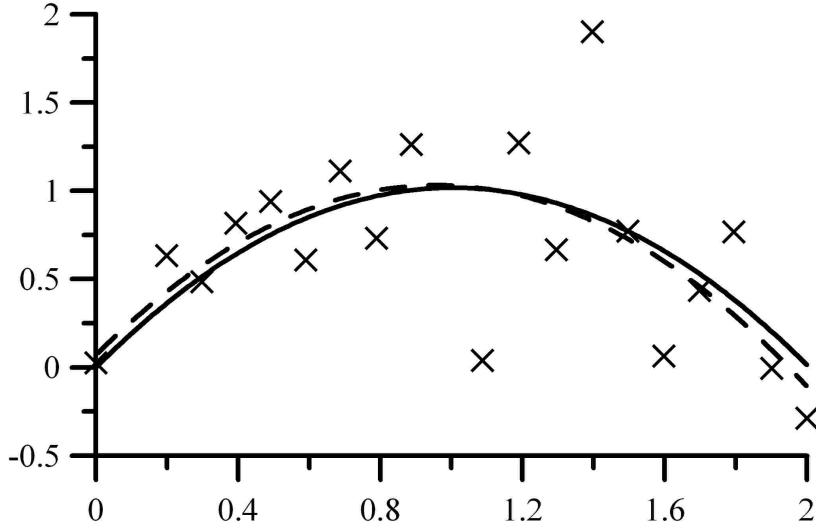


Рис. 4. Результат обработки экспериментальных данных методом МНК. Сплошная линия — точная зависимость  $f(x)$ , крестики — экспериментальные точки, пунктируная линия — восстановленная зависимость  $\hat{f}(x)$ .

нием на применимость МНК является линейность зависимости  $y$  от неизвестных коэффициентов  $a_k$ , при этом зависимость от  $x$  может быть нелинейной. Тем не менее, даже при нелинейной зависимости  $y$  от  $a_k$  МНК применяется. В этом случае можно попытаться найти линеаризующее преобразование. Например, зависимость  $y = A \exp(bx + cx^2)$  приводится к виду (6.1), если вместо  $y$  рассматривать величину  $Y = \ln y = \ln A + bx + cx^2$ . Если же подходящее преобразование найти не удаётся, то задача сводится к нелинейной системе уравнений, которую в принципе можно решить. Однако существование и единственность решения не гарантированы заранее. Кроме того, теряют силу результаты линейного МНК об оценке погрешностей.

## 6.2 Описание метода

Рассмотрим сначала простой случай, когда величина  $y$  измеряется абсолютно точно, и каждое измерение даёт одну точку на плоскости  $(x, y)$ , принадлежащую кривой (6.1). Тогда достаточно проделать  $r$  измерений при различных значениях  $x$ . Подставляя результаты измерений в (6.1), получим систему линейных уравнений для  $a_k$ , решая которую мы определим коэффициенты  $a_k$  абсолютно точно.

Однако в большинстве случаев измерения не точны, и точки плоскости  $(x, y)$ , соответствующие отдельным измерениям, отклоняются от кривой

(6.1) (см. рисунок 4). Очевидно, что  $p$  измерений здесь будет недостаточно, поскольку через  $p$  различных точек на плоскости проходит только одна кривая вида (6.1), и ее коэффициенты будут отличаться от истинных. Ясно, что увеличивая количество измерений  $n$  ( $n > p$ ), мы можем получить более точные результаты. Идея МНК принадлежит, вероятно, Гауссу и заключается в минимизации суммы квадратов отклонений экспериментальных точек от предполагаемой кривой. Пусть при  $n$  различных аргументах  $x_1, x_2, \dots, x_n$  измерения дали значения  $y_1, y_2, \dots, y_n$  соответственно. Рассмотрим функцию

$$R(z_1, z_2, \dots, z_p) = \sum_{i=1}^n w_i \left( y_i - \sum_{k=1}^P z_k f_k(x_i) \right)^2, \quad (6.2)$$

где  $w_i > 0$  – вес  $i$ -го измерения. Веса необходимо использовать в том случае, когда заранее известно, что случайные отклонения  $\varepsilon_i = y_i - f(x_i)$  в среднем различны для разных  $x_i$ . Такая ситуация возникает, когда объединяются измерения, выполненные приборами разного класса точности. Более точному измерению  $y_i$  следует приписать больший вес, а именно:  $w_i \sim 1/\varepsilon_i^2$ . Знак  $\sim$  указывает, что конкретное значение веса произвольно, существенно лишь соотношение между весами. Действительно, одновременное умножение всех весов на любое число приведет к умножению функции  $R$  на то же число, при этом положение минимума  $R$  не изменится. Поскольку отклонения  $\varepsilon_i$  неизвестны, выбор весов  $w_i$  не может зависеть от  $y_i$ , и должен быть сделан на основе априорной информации о точности измерений. При отсутствии априорной информации полагают все  $w_i = 1$ .

Положение минимума функции  $R$  определяет искомые коэффициенты зависимости (6.1). Обозначим через  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p$  значения переменных  $\{z_k\}$ , при которых  $R$  минимальна. В точке минимума выполняются условия:

$$\frac{\partial R}{\partial z_m}(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, p.$$

Дифференцируя (6.2), получаем для  $\hat{a}_k$  систему линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^p C_{mk} \hat{a}_k = F_m, \quad m, k = 1, 2, \dots, p, \quad (6.3)$$

где

$$C_{mk} = \sum_{i=1}^n w_i f_m(x_i) f_k(x_i), \quad F_m = \sum_{i=1}^n w_i f_m(x_i) y_i, \quad m = 1, 2, \dots, p. \quad (6.4)$$

Решение системы (6.3) всегда существует и единственno, поскольку ее детерминант отличен от нуля в силу линейной независимости  $f_k(x)$ .

Если измерения точны, то  $\varepsilon_i = 0$ ,  $\hat{a}_k = a_k$  и  $R_{min} = 0$ . В общем случае  $\hat{a}_k \neq a_k$ , и можно сказать, что оценка  $\hat{a}_k = a_k + D_k$  состоит из «плавной» составляющей  $a_k$  и случайной ошибки  $D_k$  (сравните:  $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i$ ). Средние величины погрешностей  $D_k$  и  $\varepsilon_i$  неизвестны, но их также можно оценить через  $R_{min}$  – остаточную сумму квадратов. Важно понять, что речь идет не о конкретных случайных отклонениях  $D_k$  и а о средних, наиболее вероятных значениях этих ошибок (строго говоря – о дисперсиях отклонений), которые мы обозначим через  $\hat{D}_k$  и  $\hat{\varepsilon}_i$ . Можно показать, что в пределе  $n \gg 1$

$$\hat{D}_k^2 = \frac{R_{min}}{n-p} (C^{-1})_{kk}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (6.5)$$

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \frac{R_{min}}{n-p} \frac{1}{w_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.6)$$

где  $(C^{-1})_{kk}$  – диагональные элементы матрицы  $C^{-1}$ , обратной к матрице  $C_{mk}$ , определенной в (6.4), и

$$R_{min} = R(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p) = \sum_{i=1}^n w_i \left( y_i - \sum_{k=1}^p \hat{a}_k f_k(x_i) \right)^2.$$

Выражения (6.5)–(6.6) определяют 68% доверительных интервалов для  $a_k$  и  $f(x_i)$  соответственно. Умножением  $\hat{D}_k$  и  $\varepsilon_i$  на коэффициент  $t_\alpha$  из таблицы 1 можно получить доверительные интервалы с вероятностью  $\alpha$ :

$$a_k = \hat{a}_k \pm t_\alpha \hat{D}_k, \quad f(x_i) = \hat{f}(x_i) \pm t_\alpha \hat{\varepsilon}_i, \quad (6.7)$$

а для произвольного значения  $x$  имеем:

$$f(x) = \hat{f}(x) \pm t_\alpha \hat{\varepsilon}(x),$$

где

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=1}^p \hat{a}_k f_k(x), \quad \hat{\varepsilon}^2(x) = \frac{R_{min}}{n-p} \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^p (C^{-1})_{km} f_k(x) f_m(x).$$

Таблица 1.

$\alpha$	$t_\alpha$
0.500	0.67
0.680	1.00
0.900	1.64
0.950	1.96
0.990	2.56
0.999	3.39

Таблица 2.

$x_i$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$y_i$	0.025	0.184	0.623	0.476	0.817	0.933	0.597	1.113	0.728	1.245
$w_i$	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

$x_i$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$y_i$	0.019	1.245	0.647	1.881	0.742	0.048	0.418	0.734	-0.026	-0.312
$w_i$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Строго говоря, при малом числе измерений  $n$  надежность приведенных выше оценок уменьшается. В таких ситуациях вместо таблицы 1, отвечающей предельному гауссовскому распределению  $n = \infty$ , следует пользоваться таблицами распределения Стьюдента, в которых коэффициенты  $t_\alpha$  зависят также от  $n$  (точнее, от  $n - p$ ) и отличаются от приведенных в таблице 1 в большую сторону. Это значит, что формулы (6.5)–(6.7) дают при малых  $n$  заниженную погрешность (или завышенную точность). Однако уже при значениях  $n > 20 \div 30$  различие становится малым, поэтому в дальнейшем будем пользоваться таблицей 1.

### Пример

В таблице 2 даны «измерения»  $y_i$ , полученные путем добавления к функции  $f(x) = 2x - x^2$  отклонений  $\varepsilon_i$ , взятых из таблиц случайных чисел. При  $x < 1$  выбраны средние отклонения  $\varepsilon_i \sim 0.2$ , при  $x > 1$  выбраны  $\varepsilon_i \sim 0.4$ , моделирующие измерения грубым прибором.

Требуется по этим данным определить параметры зависимости

$$y = a_1 + a_2x + a_3x^2.$$

Поскольку a priori известно, что при  $x < 1$  измерения в среднем вдвое точнее, припишем им веса  $w_i = 4$  (см. таблицу 2). Положим  $f_0(x) = 1$ ,  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2$ ,  $p = 3$ .  $n = 20$ . Выполнив необходимые вычисления на ЭВМ, получим:

$$C_{mk} = \begin{pmatrix} 50.00 & 33.50 & 36.25 \\ 33.50 & 36.25 & 49.18 \\ 36.25 & 49.18 & 75.87 \end{pmatrix}, \quad F_m = \begin{pmatrix} 32.36 \\ 23.21 \\ 21.31 \end{pmatrix},$$

$$C_{mk}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.102 & -0.233 & 0.102 \\ -0.233 & 0.761 & -0.382 \\ 0.102 & -0.382 & 0.212 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= 0.069, & \hat{D}_1 &= 0.16, \\ \hat{a}_2 &= 1.991, & \hat{D}_2 &= 0.43, \\ \hat{a}_3 &= -1.043, & \hat{D}_3 &= 0.23,\end{aligned}$$

$$R_{min} = 4.08, \quad \hat{\varepsilon}_1 = \dots = \hat{\varepsilon}_{10} = 0.24, \quad \hat{\varepsilon}_{11} = \dots = \hat{\varepsilon}_{20} = 0.48.$$

На рисунке 4 представлены результаты нашей работы. Видно, что первоначальная зависимость восстановлена практически точно, несмотря на значительные отклонения отдельных измерений и малое число экспериментальных точек. Отклонения найденных коэффициентов  $\hat{a}_k$ , от их точных значений оказались существенно меньше, чем вычисленные погрешности  $\hat{D}_k$ . Можно утверждать, что из имеющихся экспериментальных данных нельзя получить более точные оценки для  $a_k$ , чем найденные выше методом МНК. Для уточнения коэффициентов необходимо провести более точные измерения (уменьшить  $\varepsilon_i$ ), или увеличить количество измерений  $n$ . Заметим, что неизвестные заранее отклонения  $\varepsilon_i$  нам удалось оценить с погрешностью всего 20%.

### 6.3 Задания к лабораторной работе

1. Напишите программу для обработки указанного преподавателем набора экспериментальных данных. Выберите веса и выполните необходимые вычисления на ЭВМ. Запишите в тетрадь результаты обработки вашего варианта: матрицу  $C$ , вектор  $F_m$ , матрицу  $C^{-1}$ , коэффициенты  $\hat{a}_k$ , остаточную сумму квадратов  $R_{min}$ , погрешности  $\hat{D}_k$  и  $\hat{\varepsilon}_i$ . Выберите доверительную вероятность  $\alpha$  и найдите доверительные интервалы для  $a_k$ . Постройте графики  $f(x)$  и  $\hat{f}(x)$ .
2. Сократите выборку вашего варианта, отбросив около половины экспериментальных точек, по вашему выбору. Взяв оставшиеся экспериментальные точки в качестве исходной информации, проведите обработку на ЭВМ и запишите в тетрадь найденные  $\hat{a}_k$  и  $\hat{D}_k$ . Сравните с результатами предыдущего пункта и с точными значениями. Результаты представьте преподавателю.

Варианты заданий:

1.  $y = a_1\sqrt{x} + a_2x + a_3 \ln(x)$

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_i$	-2.28	-2.83	-1.45	-1.40	-2.33	0.09	-1.96	-2.28	-0.36	0.71
$x_i$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$y_i$	-0.80	0.26	-0.06	-0.29	1.26	0.68	0.19	1.04	0.60	1.94

Точность всех измерений одинакова.

2.  $y = a_1 + a_2 \exp(\sqrt{|x|}) + a_3 \ln(\cos x)$

$x_i$	-1.0	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.0
$y_i$	-1.14	-1.58	-0.66	-0.79	0.07	0.42	0.10	0.37	0.47	0.75	1.07
$x_i$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
$y_i$	0.58	0.46	-0.34	0.26	-0.15	-0.82	-0.52	-0.41	-0.90	-1.59	

Точность всех измерений одинакова.

3.  $y = a_1 + a_2 x + a_3 \operatorname{tg}(x)$

$x_i$	-1.0	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.0
$y_i$	2.64	2.87	2.78	2.56	2.74	2.65	2.33	2.54	2.57	2.39	2.17
$x_i$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
$y_i$	2.29	1.95	1.89	2.10	2.70	3.26	1.94	2.35	1.92	1.94	

При  $x \leq 0$  точность измерений в 6 раз выше, чем при  $x > 0$ .

4.  $y = a_1 + a_2 e^{-x^2} + a_3 \operatorname{arctg}(2x)$

$x_i$	-1.0	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.0
$y_i$	3.45	3.04	2.56	3.45	2.65	2.94	2.36	2.46	2.67	3.68	3.04
$x_i$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
$y_i$	2.96	4.49	3.91	3.88	4.20	4.05	4.22	4.92	4.67	5.16	

Точность всех измерений одинакова.

5.  $y = a_1 + a_2 \sqrt{x} + a_3 \sqrt{5-x}$

$x_i$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$y_i$	5.41	4.56	5.26	5.49	6.34	5.73	6.20	6.46	5.83	5.19	6.49
$x_i$	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	
$y_i$	6.52	5.54	5.08	5.49	5.57	4.67	6.02	4.96	5.53	4.82	

Точность всех измерений одинакова.

Точные решения:

1.  $y = 0.9 \ln(x) - 2.1\sqrt{x} + 0.4x, \quad \varepsilon = 1.0$
2.  $y = 1.88 - 0.9 \exp(\sqrt{|x|}) + 1.09 \ln(\cos x), \quad \varepsilon = 0.33$
3.  $y = 2.36 - 1.24x + 0.57 \operatorname{tg}(x), \quad \varepsilon(x \leq 0) = 0.1, \quad \varepsilon(x > 0) = 0.6$
4.  $y = 4.8 - 1.79e^{-x^2} + 0.81 \operatorname{arctg}(2x), \quad \varepsilon = 0.4$
5.  $y = 2.1\sqrt{x} + 3.2\sqrt{5-x} - 2.8, \quad \varepsilon = 0.5$

## 7 Метод Рунге-Кутта для решения системы дифференциальных уравнений

### 7.1 Постановка задачи

Уравнения, содержащие производные функции, возникают во многих областях прикладной математики. Вообще говоря, любая физическая ситуация, где рассматривается степень изменения одной переменной по отношению к другой переменной, описывается дифференциальным уравнением.

Существует множество приемов для нахождения решений дифференциальных уравнений через элементарные и специальные функции. Но тем не менее очень часто в практических задачах такие методы или вообще не применимы, или приводят к таким сложным решениям, что затраты труда на их получение огромны.

Поэтому мы вынуждены обратиться к методам решения, которые могут пригодиться тогда, когда классические методы не работают.

Конкретная прикладная задача может приводить к дифференциальному уравнению любого порядка или к системе уравнений любого порядка. Но известно, что обыкновенное уравнение  $N$ -го порядка можно свести к эквивалентной системе  $N$  уравнений первого порядка. Поэтому рассмотрим систему  $N$  уравнений первого порядка:

$$\frac{d\vec{Y}}{dX} = \vec{f}(X, \vec{Y}), \quad (7.1)$$

где  $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ ,  $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ .

Система уравнений (7.1) имеет множество решений. Общее решение в общем случае зависит от  $N$  параметров  $\vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_N)$  и может быть записано в форме  $\vec{Y} = \vec{Y}(X, \vec{C})$ . Для определения значений этих параметров, т.е. для выделения нужного решения, надо наложить  $N$  дополнительных условий на функции  $\vec{Y}_k(X)$ .

Различают три основных типа задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: задачи Коши, краевые задачи, задачи на собственные значения.

Задача Коши (задача с начальными условиями) имеет дополнительные условия вида:

$$\vec{Y}(X_0) = \vec{A}, \quad \vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_N), \quad (7.2)$$

т.е. заданы значения всех функций в одной и той же точке. Решение при этом требуется найти на некотором отрезке  $X_0 \leq X \leq T$  (или  $T \leq X \leq X_0$ ).

Следует отметить, что если правые части уравнения (7.1) непрерывны и ограничены в некоторой окрестности начальной точки  $(X_0, A_1, A_2, \dots, A_N)$ , то задача Коши (7.1), (7.2) имеет решение, но, вообще говоря, не единственное. Если правые части не только непрерывны, но и удовлетворяют условию Липшица по переменным  $Y_k$ , то решение задачи Коши единствено и непрерывно зависит от координат начальной точки, т.е. задача корректно поставлена.

Классы уравнений, для которых разработаны аналитические методы получения точных решений, сравнительно узки и охватывают только малую часть возникающих на практике задач. Например, решение несложного уравнения

$$\frac{dX}{dY} = X^2 + Y^2, \quad (7.3)$$

не выражается через элементарные функции. А уравнение

$$\frac{dY}{dX} = (Y - X)/(Y + X), \quad (7.4)$$

можно точно проинтегрировать и найти общее решение

$$0.5 \ln(X^2 + Y^2) + \operatorname{arctg}(Y/X) = \text{const}. \quad (7.5)$$

Однако для того, чтобы составить таблицу значений  $\vec{Y}(X)$ , надо численно решить трансцендентное уравнение (7.5), что ничуть не проще численного интегрирования уравнения (7.4).

Численные методы решения дифференциального уравнения (7.1) – это алгоритмы вычисления приближенных значений искомого решения  $\vec{Y}(X)$  на некоторой выбранной сетке аргумента  $X_k$ . Решение при этом получается в виде таблицы. Численные методы не позволяют найти общего решения уравнения (7.1). Они дают какое-то частное решение. Это основной недостаток численных методов. Зато эти методы применимы к очень широким классам уравнений и всем типам задач для них.

В основном существуют два широких класса численных методов решения (7.1), (7.2) – одноступенчатые и многоступенчатые методы. Одноступенчатые методы используют информацию об искомом решении в одной точке и не производят итераций. К методам этого класса принадлежит и

метод Рунге-Кутта. Эти методы являются прямыми (без итераций), что, казалось бы, должно привести к экономии машинного времени, но в действительности эти методы требуют многократных повторных вычислений функции  $\vec{f}$ . Кроме того, эти методы имеют тот недостаток, что при их использовании трудно оценивать допускаемую ошибку.

Многоступенчатые методы позволяют получить решение дифференциального уравнения в следующей точке, не производя так много вычислений функции  $\vec{f}$  как при использовании одноступенчатых методов. Здесь для достижения достаточной точности требуются итерации. Большинство методов этого класса называются методами прогноза и коррекции. Хотя и имеются некоторые трудности, связанные с использованием итерационной процедуры и с получением нескольких начальных точек решения  $\vec{Y}(X)$ , но они уравновешиваются тем фактом, что оценку ошибки при использовании этого метода легко получить в качестве побочного продукта вычислений.

Численные методы можно применять только к конкретно поставленным задачам. Нужно чтобы малые изменения начальных условий приводили бы к достаточно малому изменению интегральных кривых. Если это условие не выполняется, то небольшие изменения начальных условий или эквивалентные этим изменениям небольшие погрешности численного метода могут сильно исказить решение.

## 7.2 Решение задачи Коши методом Рунге-Кутта

Рассмотрим теперь, как решается методом Рунге-Кутта задача Коши (7.2). Построим семейство схем второго порядка точности и на его примере разберем основные идеи метода. Выберем на отрезке  $[X_0, T]$  некоторую сетку:  $\{X_k \mid k = 0, 1, \dots, N\}$  значений аргумента так, чтобы выполнялись соотношения  $X_0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_N = T$  (сетка может быть неоднородной). Разлагая решение системы уравнений (7.2)  $\vec{Y}(X)$  в ряд Тейлора на интервале сетки  $X_k \leq X \leq X_{k+1}$ , получим:

$$\vec{Y}_{k+1} = \vec{Y}_k + h_k \vec{Y}'_k + \frac{h_k^2}{2} \vec{Y}''_k + \frac{h_k^3}{6} \vec{Y}'''_k + o(h_k^4), \quad (7.6)$$

Здесь введены обозначения:  $h_k = X_{k+1} - X_k$ ,

$$\begin{aligned}\vec{Y}(X_k) &= \vec{Y}_k, \\ \vec{Y}'_k &= \vec{f}(X_k, \vec{Y}_k), \\ \vec{Y}''_k &= \left[ \frac{d\vec{f}}{dX} \right]_k = \vec{f}'_X(X_k, \vec{Y}_k) + \vec{f}'_{\vec{Y}}(X_k, \vec{Y}_k)\vec{Y}'_k = \vec{f}'_X(X_k, \vec{Y}_k) + \vec{f}'_{\vec{Y}}(X_k, \vec{Y}_k)\vec{f}_k.\end{aligned}$$

$$\vec{f}'_{\vec{Y}} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dy_1} & \frac{df_1}{dy_2} & \cdots & \frac{df_1}{dy_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{df_N}{dy_1} & \frac{df_N}{dy_2} & \cdots & \frac{df_N}{dy_N} \end{bmatrix}$$

Чтобы избежать дифференцирования функции  $\vec{f}(X, \vec{Y})$ , заменим производную  $\vec{Y}''_k$  разностью:

$$\vec{Y}''_k = \frac{\vec{f}(X_k^*, \vec{Y}_k^*) - \vec{f}(X_k, \vec{Y}_k)}{\Delta X},$$

соответственно выбирая  $X_k^* = X_k + \Delta X$ ;  $\vec{Y}_k^* = \vec{Y}_k + \Delta \vec{Y}$ .

После такой замены, объединяя одинаковые члены, приближенное решение  $\vec{U}_k$  (отбрасываем в (7.6) члены третьего порядка и выше по шагу) можно записать в виде:

$$\vec{U}_{k+1} = \vec{U}_k + h(\beta \vec{f}(X_k, \vec{U}_k) + \alpha \vec{f}(X_k + \gamma h, \vec{U}_k + \gamma h \vec{f}_k)). \quad (7.7)$$

Для простоты в формуле (7.7) полагалось, что сетка является равномерной с шагом  $h$ . Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – параметры, значения которых выбираем таким образом, чтобы минимизировать ошибку метода Рунге-Кутта на каждом шаге  $\vec{R}_k = \vec{U}_k - \vec{Y}_k$ . Рассматривая правую часть соотношения (7.7) как функцию от  $h$ , разложим ее в ряд по степеням шага в окрестности точки  $(X_k, \vec{U}_k)$ :

$$\begin{aligned}\vec{U}_{k+1} &= \vec{U}_k + \alpha h \left\{ \left[ \vec{f}_k + \vec{f}'_{\vec{U}} \vec{f}_k \gamma h + \vec{f}''_{\vec{U} \vec{U}} \vec{f}_k^2 \frac{\gamma^2 h^2}{2} + o(h^3) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \gamma h \left[ \vec{f}'_x + \vec{f}'_{\vec{U}} \vec{f}_k \gamma h + \vec{f}''_{x \vec{U}} \vec{f}_k \gamma h + o(h^2) \right] + \vec{f}''_{xx} \frac{\gamma^2 h^2}{2} + o(h^2) \right\} = \\ &= \vec{U}_k + (\alpha + \beta)h \vec{f}_k + \alpha \gamma h \left[ \vec{f}^2_{\vec{U}} \vec{f}_k' + \vec{f}_x' \right] + \frac{h^3}{2} \alpha \gamma^2 \left[ \vec{f}''_{\vec{U} \vec{U}} \vec{f}_k^2 + 2 \vec{f}''_{x \vec{U}} \vec{f}_k + \vec{f}''_{xx} \right] + o(h^4).\end{aligned} \quad (7.8)$$

С другой стороны, для точного решения дифференциального уравнения

ния  $\vec{Y}_k$  имеем:

$$\begin{aligned}\vec{Y}_{k+1} &= \vec{Y}_k + h\vec{Y}'_{k+1} + \frac{h^2}{2}\vec{Y}''_k + \frac{h^3}{6}\vec{Y}'''_k + o(h^4) = \\ &= \vec{Y}_k + h\vec{f}_k + \frac{h^2}{2}\{\vec{f}'_{\bar{y}}\vec{f}'_k + \vec{f}'_k\} + \frac{h^3}{6}\{\vec{f}''_{\bar{y}\bar{y}}\vec{f}^2_k + 2\vec{f}''_{x\bar{y}}\vec{f}_k\} + o(h^4). \\ &= \vec{Y}_k + h\vec{f}_k + \frac{h^2}{2}\{\vec{f}'_{\bar{y}}\vec{f}'_k + \vec{f}'_k\} + \frac{h^3}{6}\{\vec{f}''_{\bar{y}\bar{y}}\vec{f}^2_k + 2\vec{f}''_{x\bar{y}}\vec{f}_k + \vec{f}''_{xx} + \vec{f}'_{\bar{y}}\vec{f}'_x + \vec{f}^2_{\bar{y}}\vec{f}'_x\} + o(h^4).\end{aligned}\quad (7.9)$$

Оценим погрешность приближенного решения, полученного методом Рунге-Кутта второго порядка точности на одном шаге. Для этого из соотношения (7.9) вычтем соотношение (7.8):

$$\begin{aligned}\vec{R}_{k+1} &= \vec{Y}_{k+1} - \vec{U}_{k+1} \\ \vec{Y}_{k+1} - \vec{U}_{k+1} &= h(1 - \alpha - \beta)\vec{f}_k + h^2\left(\frac{1}{2} - \alpha\gamma\right)\left[\vec{f}'_{\bar{y}}\vec{f}_k + \vec{f}'_x\right] + \\ &\quad + \frac{h^3}{6}\left(\frac{1}{3} - \alpha\gamma^2\right)\left[\vec{f}''_{\bar{y}\bar{y}}\vec{f}_k + 2\vec{f}''_{\bar{y}\bar{y}}\vec{f}^2_k + \vec{f}''_{xx}\right] + \frac{h^3}{2}\left[\vec{f}'_{\bar{y}}\vec{f}'_x + \vec{f}^2_{\bar{y}}\vec{f}'_x\right] + o(h^4).\end{aligned}\quad (7.10)$$

Чтобы получить схему Рунге-Кутта 2-го порядка точности, необходимо обнулить коэффициенты в 1-ом и 2-ом членах соотношения (7.10):

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\gamma = 1/2. \quad (7.11)$$

Выражая через  $\alpha$  остальные параметры и подставляя их в (7.7), получим однопараметрическое семейство схем Рунге-Кутта 2-го порядка точности:

$$\vec{U}_{k+1} = \vec{U}_k + (1 - \alpha)\vec{f}(X_k, \vec{U}_k) + \alpha\vec{f}\left(X_k + \frac{h}{2\alpha}, \vec{U}_k + \frac{h}{2\alpha}\vec{f}(X_k, \vec{U}_k)\right), \quad (7.12)$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Формула (7.12) имеет неплохую точность и нередко используется в численных расчетах. При этом обычно полагают либо  $\alpha = 1$ , либо  $\alpha = 1/2$ . Эти два случая часто называют улучшенными (модифицированными) методами Эйлера.

Методом Рунге-Кутта можно строить схемы различного порядка точности. Например, схема ломаных (метод Эйлера) есть схема Рунге-Кутта первого порядка точности. Наиболее употребительными в вычислительной практике являются схемы четвертого порядка точности. Приведем без вывода одну из них, которая записана в большинстве стандартных программ

ЭВМ:

$$\begin{aligned}\vec{U}_{k+1} &= \vec{U}_k + h(\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4)/6, \\ \vec{K}_1 &= \vec{f}(X_k, \vec{U}_k + \vec{K}_1 h/2), \\ \vec{K}_2 &= \vec{f}(X_k + h/2, \vec{U}_k + \vec{K}_2 h/2), \\ \vec{K}_3 &= \vec{f}(X_k + h/2, \vec{U}_k), \\ \vec{K}_4 &= \vec{f}(X_k + h, \vec{U}_k + \vec{K}_3),\end{aligned}\tag{7.13}$$

Схемы Рунге-Кутта имеют ряд важных достоинств:

- 1) все схемы допускают расчет с переменным шагом, нетрудно уменьшить шаг там, где функция быстро меняется, и увеличить его в обратном случае;
- 2) для начала расчета достаточно выбрать сетку  $X_k$  и задать значение  $\vec{Y}(X_0) = \vec{A}$ ; далее вычисления идут по одним и тем же формулам. Шаг сетки следует выбирать настолько малым, чтобы обеспечить требуемую точность расчета. Других ограничений на шаг в методе Рунге-Кутта нет.

Встречаются задачи, в которых функции являются достаточно гладкими, но настолько быстро меняющимися, что схема Рунге-Кутта как низкого, так и высокого порядка точности требуют неприемлемо малого шага для получения удовлетворительного результата. Такие задачи требуют использования специальных методов, ориентированных на данный узкий класс задач.

### 7.3 Задания к лабораторной работе

Методом Рунге-Кутта (2-го и 4-го порядка точности) найдите решение системы дифференциальных уравнений на отрезке  $[a, b]$  при начальных условиях с шагом  $h$ . Шаг выбрать самостоятельно. Численные решения  $y(x)$ ,  $z(x)$  представьте графически. Сравните с аналитическим решением, если его можно найти.

#### *Варианты*

- 1)  $\begin{cases} y' = -2xy + z - x - 1 & [0; 0.5], \\ z' = -\frac{1}{2} - y - \frac{x}{z}; & y(0) = 1; \quad z(0) = 1; \end{cases}$
- 2)  $\begin{cases} y' = z - \cos x; & [0; 0.5], \\ z' = y + \sin x; & y(0) = 0; \quad z(0) = 0; \end{cases}$

$$3) \begin{cases} y' = \exp(-(y^2 + z^2)) + 2x; & [0; 0.3], \\ z' = 2e^2 + z; & y(0) = 0.5; \quad z(0) = 1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y' = \sin(2y^2) + z + x & [0; 1], \\ z' = x + y - 2z^2 + 1; & y(0) = 1; \quad z(0) = 0.5; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y' = -2.4xy^2 + z^2 - x - 1 & [0; 1], \\ z' = \frac{1}{1.27^2} - y - \frac{x}{z}; & y(0) = 1/1.2; \quad z(0) = 1; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} y' = \ln(2x + \sqrt{(4x^2 + z^2)}) - 2xy + z - x - 1 & [0; 1], \\ z' = -\sqrt{4x^2 + y^2}; & y(0) = 0.5; \quad z(0) = 1; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} y' = \sin^3(3y^2) + x + z & [0; 1], \\ z' = x + y - 4z^2 + 1; & y(0) = 1; \quad z(0) = 0.5; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} y' = -4xy^2 + z^2 - x^2 - 1 & [0; 0.5], \\ z' = \frac{1}{1/2z^2} - y - \frac{x}{z}; & y(0) = 0.5; \quad z(0) = 1; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} y' = \exp(-(y^2 + z^2)) + 2.5x & [0; 0.3], \\ z' = 2.5y^2 + z; & y(0) = 0.5; \quad z(0) = 1; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} y' = \sin(2y^2) + z + x & [0; 1], \\ z' = x + y - 4.5z^2 + 1; & y(0) = 1; \quad z(0) = 0.5; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} y' = \ln(2.5x) + \sqrt{9x^2 + z^2} & [0; 1], \\ z' = \sqrt{9x^2 + y^2}; & y(0) = 0.5; \quad z(0) = 1; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} y' = \exp(-(y^2 + z^2)) + 3.5x & [0; 1], \\ z' = 4.5y^2 + z; & y(0) = 0.5; \quad z(0) = 1; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} y' = \cos(y + 1.1z) + 1 & [0; \pi], \\ z' = (1/(x + 2.1y^2)) + x + 1; & y(0) = \pi; \quad z(0) = 0; \end{cases}$$

## 8 Краевая задача. Метод стрельбы

### 8.1 Сведение решения краевой задачи к задаче Коши

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка разрешенного относительно второй производной

$$Y''(x) = \frac{d^2Y}{dx^2} = f(x, Y, Y'). \quad (8.1)$$

Будем искать решение этого  $Y(x)$  уравнения на отрезке  $[0, 1]$ , учитывая, что любой отрезок  $[a, b]$  с помощью замены переменных  $t = (x - a)/(b - a)$  можно привести к данному. Границные (или краевые) условия на концах рассматриваемого отрезка зададим в виде

$$Y(0) = A, \quad Y(1) = B. \quad (8.2)$$

Сущность метода стрельбы заключается в сведении решения краевой задачи (8.1), (8.2) к решению задач Коши для того же уравнения (8.1) с начальными условиями

$$Y(0) = A, \quad Y'(0) = k = \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.3)$$

Здесь точка  $A$  – точка на оси ординат, в которой помещается начало искомой интегральной кривой  $Y(x)$ ,  $\alpha$  – угол наклона касательной к интегральной кривой в этой точке (рис. 5) ( $\alpha$  – свободный параметр, который в конечном счете необходимо определить).

Если задать параметр  $\alpha$ , то решение задачи Коши (8.1), (8.3) можно найти, используя, например, метод Рунге-Кутта. Очевидно, что для разных значений угла наклона  $\alpha$  получаются разные решения  $Y(x)$ , т.е. интегральную кривую  $Y(x)$  можно считать зависящей от параметра  $Y(x, \alpha)$ . Наша цель варьируя  $\alpha$ , найти такую интегральную кривую  $Y(x, \alpha)$ , которая выходит из точки с координатами  $(0, A)$  и попадает в точку  $(1, B)$  (рис. 5). (Вспомните геометрический смысл краевой задачи и задачи Коши). Таким образом, только при  $\alpha = \alpha^*$  решение задачи Коши (8.1), (8.3) совпадает с искомым решением краевой задачи (8.1), (8.2). Рассмотрим более детально способ подбора  $\alpha$ . Решая задачу (8.1), (8.3), мы находим значение интегральной кривой в точке с координатами  $(1, Y(1, \alpha))$ . Учитывая теперь второе граничное условие (8.2), потребуем, чтобы выполнялось условие

$$Y(1, \alpha) - B = 0, \quad (8.4)$$

т.е. получаем уравнение вида  $F(\alpha) = 0$ , где  $F(\alpha) = Y(1, \alpha) - B$ . Таким образом, задача сводится к поиску корня  $\alpha^*$  функции  $F(\alpha)$ . Уравнение (8.4) отличается от привычной записи тем, что функцию  $F(\alpha)$  нельзя

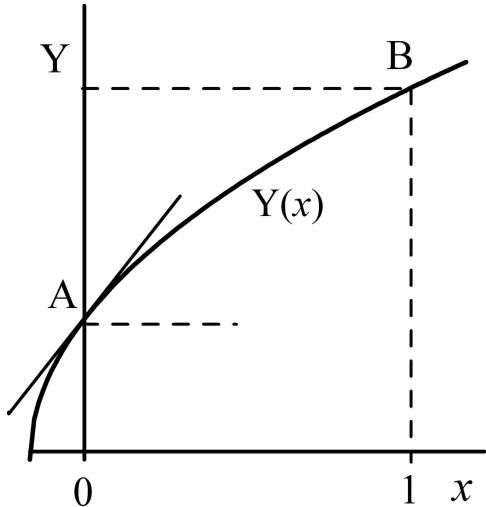


Рис. 5.

представить в виде некоторого аналитического выражения, поскольку она является численным решением задачи Коши. Тем не менее, для решения нелинейного уравнения (8.4) может быть использован любой из рассмотренных ранее методов.

Воспользуемся методом дихотомии. Вначале найдем отрезок  $[\alpha_0, \alpha_1]$ , содержащий  $\alpha^*$ , т.е. решая задачу Коши с  $\alpha = \alpha_0$  и  $\alpha = \alpha_1$  находим значение  $Y(1, \alpha_0)$  и  $Y(1, \alpha_1)$ , которые удовлетворяют условию

$$F(\alpha_0)F(\alpha_1) = (Y(1, \alpha_0) - B)(Y(1, \alpha_1) - B) < 0.$$

Далее, полагая  $\alpha_2 = (\alpha_0 + \alpha_1)/2$ , снова решаем задачу Коши (8.1), (8.3) при  $\alpha = \alpha_2$  и в соответствии с методом деления отрезка попадаем отбрасываем один из отрезков:  $[\alpha_0, \alpha_2]$  или  $[\alpha_2, \alpha_1]$ , в зависимости от того, на каком из них функция  $F(\alpha)$  не меняет знак. Деление оставшегося отрезка продолжается до тех пор, пока не выполнится условие, что при  $k$ -том делении

$$|F(\alpha_k)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |\alpha_k - \alpha_{k-1}| < \varepsilon. \quad (8.5)$$

Здесь  $\varepsilon$  – погрешность решения уравнения (8.4), т.е. погрешность попадания в точку  $(1, B)$ . Полученное решение задачи Коши с  $\alpha = \alpha_k$  и будет искомым решением краевой задачи (8.1), (8.2)  $Y(x, \alpha_k)$ . Описанный алгоритм называется методом стрельбы вполне оправданно, поскольку в нем как бы проводится «пристрелка» по углу наклона интегральной прямой в точке. Следует отметить, что этот алгоритм хорошо работает в том случае, если решение  $Y(x, \alpha)$  не слишком чувствительно к изменению  $\alpha$ . В противном случае мы можем столкнуться с неустойчивостью алгоритма.

Существуют и другие алгоритмы метода стрельбы. В частности, одним из самых надежных является алгоритм, использующий при решении уравнения (8.4) метод Ньютона. Он состоит в следующем. Пусть  $\alpha_0$  – начальное приближение  $\alpha$ , причем искомое значение  $\alpha^* = \alpha_0 + \Delta\alpha$ . Решая задачу Коши при  $\alpha = \alpha_0$  находим значение  $Y(1, \alpha^*)$ . Тогда можно записать разложение  $Y(1, \alpha^*)$  в ряд Тейлора с сохранением только линейных по  $\Delta\alpha$  членов

$$Y(1, \alpha^*) = Y(1, \alpha_0 + \Delta\alpha) \approx Y(1, \alpha_0) + \frac{\partial Y}{\partial \alpha}(1, \alpha_0) \Delta\alpha.$$

Учитывая, что  $Y(1, \alpha^*) = B$  находим

$$\Delta\alpha = \frac{B - Y(1, \alpha_0)}{\frac{\partial Y}{\partial \alpha}(1, \alpha_0)}. \quad (8.6)$$

Производную в знаменателе этого выражения можно найти численно

$$\frac{\partial Y(1, \alpha_0)}{\partial \alpha} \approx \frac{Y(1, \alpha_0 + \delta\alpha) - Y(1, \alpha_0)}{\delta\alpha}. \quad (8.7)$$

Здесь  $\delta\alpha$  – произвольное малое возмущение  $\alpha$ . Для вычисления правой части (8.6) нужно решить задачу Коши при  $\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha$  и найти  $Y(1, \alpha_0 + \delta\alpha)$ . Затем по формуле (8.6) можно найти поправку  $\Delta\alpha$ , а следовательно и следующее приближение  $\alpha$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha \quad (8.8)$$

и т.д. Этот итерационный процесс (8.6)–(8.8) продолжается до тех пор, пока не будут выполняться условия (8.5). Решение задачи Коши с  $\alpha = \alpha_k$  – искомое решение.

## 8.2 Задания к лабораторной работе

Решить краевую задачу методом стрельбы и полученное решение сравнить с аналитическим (если можно найти последнее). Результаты численного интегрирования представьте в виде графиков, которые необходимо строить для всех параметров  $\alpha_k$ .

### Варианты

- 1)  $y'' - y = 2x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = -1$ .
- 2)  $y'' - 2tgxy' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = tg(1)$ .
- 3)  $y'' + y = 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(\pi/2) = 0$ .
- 4)  $y'' + 100y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(5\pi) = 1$ .
- 5)  $y'' + y' + y = -(x^2 + x + 1)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 0$ .
- 6)  $y'' + y' - y/x = \frac{x+1}{x}$ ,  $y(0.5) = -0.5\ln(2)$ ,  $y(1) = 0$ .

## 9 Численное интегрирование

Пусть нам необходимо вычислить интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (9.1)$$

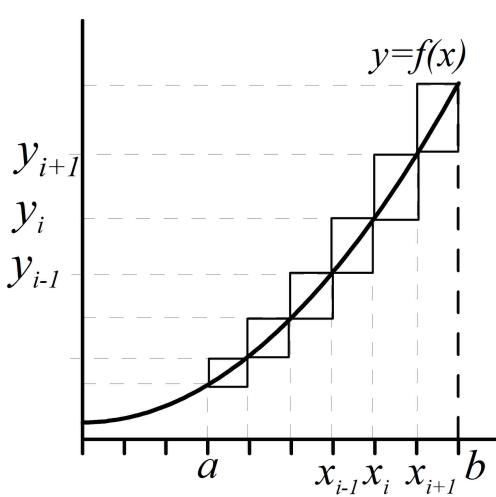


Рис. 6.

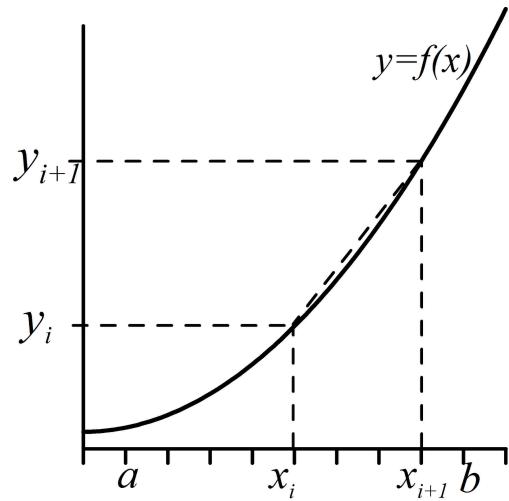


Рис. 7.

По определению

$$\int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (9.2)$$

где  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ;  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ ;  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ .

Многие методы приближенного интегрирования основаны на замене интегрируемой функции  $f(x)$  на всем отрезке  $[a, b]$  или на его частях на более простую функцию  $\varphi(x)$  близкую к  $f(x)$ , легко интегрируемую точно и принимающую в узлах  $x_i$  те же значения, что и  $f$ . Рассмотрим случай равноотстоящих узлов с шагом

$$h = \frac{b - a}{N}. \quad (9.3)$$

### 9.1 Метод прямоугольников

Заменим подынтегральную функцию  $f(x)$  на каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  константой  $f(x_{i-1})$  или  $f(x_i)$  и вместо вычисления площади под криволинейной трапецией ограничимся площадью прямоугольника (см. рис. 6)

$$\Delta s_i^- = f_{i-1} \Delta x_i = f_{i-1} h \quad (9.4)$$

$$\Delta s_i^+ = f_i \Delta x_i = f_i h \quad (9.5)$$

где  $f_i = f(x_i)$ . Поскольку

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx,$$

то для интеграла в пределах от  $a$  до  $b$  запишем

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{i=0}^{N-1} f_i \equiv S^-, \quad (9.6)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{i=1}^N f_i \equiv S^+, \quad (9.7)$$

Оценим погрешность формул (9.6). На каждом из промежутков  $[x_i, x_{i+1}]$  разложим подынтегральную функцию  $f$  в ряд Тейлора

$$f(x) = f_i + f'_i(x)(x - x_i) + \frac{1}{2!} f''_i(x - x_i)^2 + \frac{1}{3!} f'''_i(x - x_i)^3 + \dots,$$

в результате имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{N}(f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1}) + O(h) \quad (9.8)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{N}(f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_N) + O(h). \quad (9.9)$$

Полученные формулы называют формулами прямоугольников и они имеют первый порядок точности.

## 9.2 Формула трапеций

Этот метод основан на линейной аппроксимации интегрируемой функции между каждыми соседними точками  $x_i$  и  $x_{i+1}$  (см. рис. 7). В этом случае имеем

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i). \quad (9.10)$$

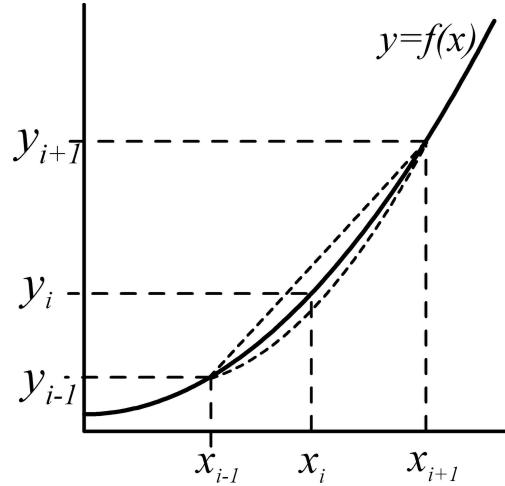


Рис. 8.

Погрешность формулы (9.10) оценим разлагая величину  $f$  в ряд Тейлора в точке  $x_{i-1}$ . После суммирования формул (9.10) по всему отрезку получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2N}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{N-1} + f_N) + O(h^2) \quad (9.11)$$

Как и следовало ожидать формула трапеций (9.11) является более точной по сравнению с формулами прямоугольников.

### 9.3 Формула Симпсона

Представляется совершенно очевидным, что если в качестве аппроксимирующей подынтегральной функции взять кривую более старшего порядка, например, параболу, то при одинаковых значениях  $h$  погрешность вычисления интеграла будет меньше, чем дает формула трапеций. Разумеется, для построения параболы требуется использовать три точки (см. рис. 8). Запишем для отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ .

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{6}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}). \quad (9.12)$$

Для всего отрезка имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3N}(f_0 + f_N + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{N-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{N-1})) + R. \quad (9.13)$$

Погрешность этой формулы, называемой формулой парабол или Симпсона, равна

$$R = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{IV}(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b). \quad (9.14)$$

#### 9.4 Задания к лабораторной работе

Для заданных преподавателем функции и отрезка  $[a, b]$  составить программу, вычисляющую интеграл (9.1) по а) одной из формул прямоугольников; б) формуле трапеций; в) формуле Симпсона. Вычисления провести для  $N$  и  $2N$ . Оценить погрешность вычислений.

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| 1. $\int_0^1 \exp(x^2) dx,$       | 7. $\int_0^\pi \sqrt{3 + \cos(x)} dx,$                   |
| 2. $\int_2^4 \exp(1/x) dx,$       | 8. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2(x)} dx,$             |
| 3. $\int_0^{\pi/4} \sin(x)/x dx$  | 9. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx,$             |
| 4. $\int_0^{\pi/4} \sin(x^2) dx,$ | 10. $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2(x)} dx,$ |
| 5. $\int_0^1 \cos(x^2) dx,$       | 11. $\int_0^1 x \sin(x) dx,$                             |
| 6. $\int_1^2 \sin(x)e^x dx,$      | 12. $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x} dx.$                       |

### 10 Методы Монте-Карло

Под методами Монте-Карло (статистических испытаний) понимаются способы решения задачи, основанные на использовании случайных чисел. Методы Монте-Карло (МК) применяются, в первую очередь, при исследовании сложных случайных процессов и других проблем, имеющих вероятностную природу, где использование случайных чисел естественно вытекает из характера задачи. Но оказывается, что эти методы можно с успехом применять для широкого круга детерминированных задач: вычисление интегралов, отыскание минимумов, решение дифференциальных и интегральных уравнений и т.д. Более того, часто оказывается удобным

преобразовать задачу другого типа к виду, допускающему решение методами МК. Идея метода основана на связи вероятностных характеристик случайного процесса с решениями детерминированной задачи. Кроме того, при большом числе переменных или параметров поведение детерминированной системы становится настолько сложным и труднопредсказуемым, что приобретает черты случайного. Как правило, методы МК оказываются выгоднее обычных «детерминированных» методов именно в многомерных задачах. К недостаткам методов МК можно отнести сравнительно невысокую точность: погрешность уменьшается как  $\sim 1/\sqrt{N}$ , где  $N$  — количество использованных случайных чисел. Однако этот недостаток может стать достоинством метода в случае, если высокая точность не требуется по смыслу задачи и достаточно одной-двух значащих цифр. Тогда метод МК оказывается быстрым и выгодным. С появлением ЭВМ методы МК получили широкое распространение благодаря быстроте и экономичности получения случайных чисел.

### 10.1 Вычисление интегралов

Существует несколько способов вычисления интегралов методом МК. Рассмотрим здесь простейший. Пусть необходимо вычислить интеграл

$$I = \int_a^b f(x)\rho(x) dx, \quad (10.1)$$

где  $a$  и(или)  $b$  могут быть бесконечными. Тогда, если  $\rho(x) > 0$  на  $(a, b)$  и  $\int_a^b \rho(x)dx = 1$ , интеграл (10.1) формально представляет собой среднее значение величины  $f(x)$ , где  $x$  — случайная величина в интервале  $(a, b)$  с плотностью вероятности  $\rho(x)$ . Интуитивно ясно, что искомое среднее можно приближенно найти как

$$I \approx \hat{I} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad (10.2)$$

если числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  «рассыпать» на  $(a, b)$  с вероятностью  $\rho(x)$ . Обратите внимание: вычислять весовую функцию  $\rho(x)$  не нужно, поскольку она не входит явно в формулу (10.2). Её влияние косвенное и сводится к перераспределению случайных точек так, что эти точки «сгущаются»

в окрестности максимумов  $\rho(x)$ . Погрешность формулы (10.2) убывает с ростом  $N$ , причем в пределе  $N \rightarrow \infty$  согласно закону больших чисел величина  $\hat{I}$  имеет гауссово распределение со средним  $I$  и дисперсией

$$\sigma_I^2 = \frac{\sigma_f^2}{N}, \quad \text{где} \quad \sigma_f^2 = \int_a^b (f(x) - I)^2 \rho(x) dx \quad (10.3)$$

— дисперсия функции  $f(x)$ . Это значит, что с доверительной вероятностью  $\alpha$  погрешность формулы (10.2) не превосходит величины  $\varepsilon = t_\alpha \sigma_I$ , где коэффициент  $t_\alpha$  можно взять из таблицы 1, в работе «Метод наименьших квадратов». Подчеркнем, что изложенные утверждения строго справедливы лишь в пределе  $N \rightarrow \infty$ , а при всяком конечном  $N$  верны приближенно. Однако практически уже при  $N > 20 \div 30$  различие между приближенными и точными значениями несущественно.

Из формул (10.3) можно сделать важные выводы. Нашей целью будет определить как можно точнее интеграл (10.1) по формуле (10.2), то есть уменьшить погрешность  $\sigma_I$ . Этого можно добиться либо увеличивая  $N$ , либо уменьшая  $\sigma_f$ . В первом случае предел повышения точности определяется машинными ресурсами. Поскольку  $\varepsilon \sim 1/\sqrt{N}$ , данный способ малоэффективен. Второй путь (уменьшение  $\sigma_f$ ) более интересен и связан с выбором  $\rho(x)$ . Рассмотрим его на примере интеграла  $I = \int_0^1 x^3 dx = 1/4$ .

Если сделать «естественный» выбор  $\rho(x) \equiv 1$  и  $f(x) = x^3$ , то нам потребуется  $N$  случайных чисел, равномерно распределенных на интервале  $(0, 1)$ .

Дисперсия  $\sigma_f^2$  будет равна  $\int_0^1 (x^3 - 1/4)^2 dx = 9/112 \approx 0.08$  и  $\sigma_f \approx 0.28$ .

Если же мы выберем  $\rho(x) = 3x^2$  и  $f(x) = x/3$ , то для  $N$  случайных чисел, распределенных на  $(0, 1)$  не равномерно, а с плотностью вероятности

$3x^2$ , мы получим дисперсию  $\sigma_f^2 = \int_0^1 (x/3 - 1/4)^2 3x^2 dx = 1/240 \approx 0.004$  и  $\sigma_f \approx 0.066$ , то есть погрешность уменьшилась в 4 раза при том же числе точек  $N$ . Наконец, посмотрим что получится, если мы выберем  $\rho(x) = 4x^3$

и  $f(x) = 1/4$ . Здесь будет достаточно одной (!) случайной точки, «распределенной» на единичном отрезке с вероятностью  $4x^3$ . Действительно, независимо от  $x$  мы получим  $I = f(x) = 1/4$ , то есть точный результат,

поскольку дисперсия  $\sigma_f^2 = \int_0^1 (1/4 - 1/4)^2 4x^3 dx = 0$ . Из проведённых рас-

суждений, как и из формул (10.3), следует, что погрешность вычислений уменьшается, если функция  $f(x)$  слабо меняется на интервале интегрирования, то есть приближается к константе. Поэтому при выборе  $\rho(x)$  нужно стремиться к тому, чтобы в неё вошло как можно больше особенностей поведения подынтегрального выражения  $g(x) = f(x)\rho(x)$ . С другой стороны, такой выбор ограничен условиями:

$$(1) \quad \rho(x) > 0;$$

$$(2) \quad \int_a^b \rho(x)dx = 1;$$

(3) Процедура вычисления случайных чисел, распределенных на  $(a, b)$  с плотностью вероятности  $\rho(x)$ , должна быть простой и экономичной.

Необходимая для оценки погрешности интеграла  $I$  величина  $\sigma_f$  обычно неизвестна. Однако ее также можно оценить методом МК. Действительно, величина  $\sigma_f^2$  в (10.3) представляет собой среднее значение от функции  $(f(x) - I)^2$  на интервале  $(a, b)$ . Это среднее можно найти аналогично интегралу (10.2):

$$\sigma_f^2 \approx \hat{\sigma}_f^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left[ (f(x_i) - \hat{I}) \right]^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [f(x_i)]^2 - \frac{N}{N-1} \hat{I}^2, \quad (10.4)$$

причем использовать те же самые случайные точки  $x_i$ , что и для вычисления интеграла по (10.2). (Появление множителя  $l/(N-1)$  объясняется использованием оценочного значения  $\hat{I}$  вместо точного  $I$ . При этом из  $N$  слагаемых только  $N-1$  являются независимыми в силу соотношения  $\sum (f(x_i) - \hat{I}) = 0$ . Впрочем, при больших значениях  $N$  разница несущественна.) Практически для этого каждое найденное значение  $f(x_i)$  используется для накопления двух сумм:  $\sum f(x_i)$  и  $\sum [f(x_i)]^2$ . Такой способ вычисления позволяет избежать использования больших массивов памяти для  $f(x_i)$ . Погрешность найденного значения  $I$  с вероятностью  $\alpha$  не превосходит величины  $\varepsilon = t_\alpha \hat{\sigma}_f / \sqrt{N}$ . Ясно, что эту оценку можно использовать «наоборот» для определения минимального количества случайных чисел  $N_{min}$ , необходимых для достижения заданной точности  $\varepsilon$ .

$$N_{min} = t_\alpha^2 \frac{\hat{\sigma}_f^2}{\varepsilon^2} \quad (10.5)$$

Величину  $N_{min}$  можно применять для автоматического выбора  $N$ . В этом случае программа увеличивает количество случайных точек, вычисляет для данного  $N$  значения  $\hat{\sigma}_f$  и  $N_{min}$  до тех пор, пока не будет выполнено условие  $N > N_{min}$  (и, конечно,  $N \gg 1$ ), после чего расчет завершается.

## 10.2 Многомерные интегралы

Все изложенное выше легко обобщается на случай многомерных (кратных) интегралов. Например, пусть необходимо вычислить двумерный интеграл

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \rho(x, y) dx dy \quad (10.6)$$

где пределы интегрирования могут быть бесконечными,  $\rho(x, y) > 0$  и  $\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \rho(x, y) dx dy = 1$ . Тогда этот интеграл, как и (10.1), представляет собой среднее значение  $f(x, y)$  на прямоугольнике  $a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2$  где вектор с координатами  $(x, y)$  распределен с плотностью вероятности  $\rho(x, y)$ . Поэтому

$$J \approx \hat{J} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i) \quad (10.7)$$

где точки с координатами  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$  нужно распределить в области интегрирования с вероятностью  $\rho(x, y)$ . Заметим, что аналогом случайной точки на прямой здесь оказывается случайная точка на плоскости, определяемая двумя случайными числами. Выражение для погрешности формулы (10.7) выглядит точно так же, как для погрешности одномерного интеграла:  $\varepsilon < t_\alpha \sigma_f / \sqrt{N}$  с вероятностью  $\alpha$ , где

$$\sigma_f^2 \approx \hat{\sigma}_f^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left[ f(x_i, y_i) - \hat{J} \right]^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [f(x_i, y_i)]^2 - \frac{N}{N-1} \hat{J}^2 \quad (10.8)$$

Аналогичным образом можно вычислять интегралы произвольной кратности  $d$ . Отличие состоит в том, что случайная точка на плоскости в формулах (10.7)–(10.8) заменяется случайным  $d$ -мерным вектором  $X_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^d)$ . Погрешность определяется знакомой над формулой  $\varepsilon =$

$t_\alpha \hat{\sigma}_f / \sqrt{N}$  и опять оказывается  $\sim N^{-1/2}$ . Заметим, что погрешность обычной квадратурной формулы порядка пропорциональна  $\Delta x^p \sim N_1^{-p}$ , где  $N_1$  есть количество разбиений вдоль одной координаты. Тогда количество разбиений  $d$ -мерной области интегрирования  $N \sim N_1^d$  и погрешность обычной квадратурной формулы оказывается  $\sim N^{-p/d}$ . Отсюда видно, что в случае  $p/d < 1/2$  (или  $d > 2p$ ) погрешность метода МК оказывается меньше, чем для обычной квадратурной формулы, точнее, погрешность метода МК быстрее убывает с ростом  $N$ . Например, при вычислении интеграла по 6-мерному фазовому объёму для уменьшения погрешности в два раза в методе МК нужно увеличить число случайных точек  $N$  (и количество вычислений  $f(X)$ ) в четыре раза. Если же использовать 6-мерный аналог квадратурной формулы трапеций, то для двукратного уменьшения погрешности требуется сократить вдвое шаг по каждой координате, объём вычислений при этом возрастёт в  $2^6 = 64$  раза. Из этого примера видно, что метод МК особенно эффективен для многомерных задач. Кроме того, в методе МК выигрыш достигается за счет сгущения случайных точек в областях максимумов  $\rho(x)$  и, как мы предполагаем, максимумов подинтегральной функции, дающих основной вклад в интеграл.

### 10.3 Генерация случайных чисел с заданным распределением вероятности

Для вычисления интегралов методом МК по формуле (10.2) необходимы случайные числа с заданным распределением плотности вероятности  $\rho(x)$ , которое может быть произвольным. На большинстве компьютеров имеются встроенные программы для генерации последовательности случайных чисел  $\xi_i$  распределенных на интервале  $(0, 1)$  равномерно, то есть с плотностью вероятности  $\rho(\xi) = 1$ . Если такой встроенной программы нет, ее легко создать, используя методы, описанные в литературе [17, 14, 30].

Один из наиболее распространенных алгоритмов — так называемый «конгруэнтный» метод, используемый, например, в функции RND языка BASIC. Этот метод дает последовательность случайных целых чисел, начинающуюся с произвольного «стартового» целого числа  $X_0$ . Каждое последующее число в этой последовательности получается из предыдущего умножением на некоторое число  $A$ , прибавлением второго числа  $B$  и вычислением остатка от деления полученной суммы на третье число  $C$ , то

есть

$$X_{i+1} = (AX_i + B) \mod C,$$

где  $i$  – номер случайного числа,  $A, B, C$  – «магические» числа. Поскольку остаток от деления на всегда меньше , все  $X_i$  распределены почти равномерно от 0 до  $C - 1$ , и требуемые  $\xi_i \in (0, 1)$  можно найти как  $\xi_i = X_i/C$  или  $\xi_i = (X_i + 1)/(C + 1)$ .

Покажем, как из случайного числа  $\xi_i$  получить случайное число  $x_i$  распределенное на  $(a, b)$  с заданной вероятностью  $\rho(x)$ . Вычислим так называемую функцию распределения  $F(x)$ , определяемую соотношениями

$$\frac{dF(x)}{dx} = \rho(x) > 0, \quad F(a) = 0, \quad F(b) = 1.$$

Согласно определению, функция  $F(x)$  монотонно возрастает от 0 до 1, пока  $x$  пробегает интервал  $(a, b)$ , поэтому решение уравнения  $F(x) = \xi$  всегда существует и единствено. Величины  $x_i = f^{-1}(\xi_i)$  будут распределены с вероятностью  $\rho(x)$  на интервале  $(a, b)$ , если  $\xi_i$  – равномерно распределенные на единичном отрезке случайные числа.

Для двумерных и многомерных распределений вероятности существуют аналогичные методы генерации случайных чисел. Мы рассмотрим здесь только простейший случай, когда многомерную плотность вероятности можно представить в виде произведения одномерных функций

$$\rho(x^1, x^2, \dots, x^d) = \rho_1(x^1)\rho_2(x^2)\dots\rho_d(x^d).$$

Очевидно, что в таком простом случае требуется сгенерировать  $d$  одномерных случайных чисел  $x^k$ , ( $k = 1, 2, \dots, d$ ), каждое из которых распределено по закону  $\rho_k(x)$  (это можно сделать описанным выше способом), затем объединить их в случайную точку  $X$  с координатами  $(x^1, \dots, x^d)$  в  $d$ -мерном пространстве.

Наконец, укажем простой способ получения одномерного гауссовского распределения с нулевым средним и единичной дисперсией, не требующий обращения неполного интеграла. Согласно центральной предельной теореме, сумма  $N$  одинаково распределенных со средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$  случайных чисел имеет в пределе  $N \gg 1$  гауссово распределение со средним  $N\mu$  и дисперсией  $N\sigma^2$ . Равномерное на единичном отрезке распределение имеет среднее  $\mu = 1/2$  и дисперсию  $\sigma^2 = 1/12$ , поэтому суммируя 12 случайных чисел  $\xi_i$  мы получим число, распределенное примерно по

Таблица 3. Точное значение интеграла  $I = 0.785398$ 

$N$	$\rho = 1$ $\hat{I}$	$\rho = 1$ $\hat{\sigma}_I$	$\rho = (4 - 2x)/3$ $\hat{I}$	$\rho = (4 - 2x)/3$ $\hat{\sigma}_I$
10	.826629	.048404	.782219	.006076
100	.775819	.016237	.781498	.002093
1000	.791108	.005044	.784976	.000629
10000	.784244	.001606	.785260	.000199

нормальному закону со средним 6 и дисперсией 1. Вычитая 6, получим требуемую величину

$$x = \left( \sum_{j=1}^{12} \xi_i \right) - 6,$$

где  $\xi_i$  должны быть распределены равномерно на единичном отрезке.

### Пример

Рассмотрим вычисление интеграла

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

методом МК. Выбирая  $\rho(x) = 1$  и выполняя необходимые вычисления на ЭВМ, получим приближенные значения интеграла и его погрешности (дисперсии), приведенные во втором и третьем столбцах таблицы 3 для различных значений  $N$ .

Если выбрать такую весовую функцию, которая отражает поведение подынтегральной, то можно ожидать улучшения результатов. Например, выберем её в виде хорды, соединяющей концевые точки на графике  $1/(1 + x^2)$ , то есть  $\rho(x) \propto 1 - x/2$ . Условие нормировки требует умножить её на константу  $4/3$ , поэтому примем  $\rho(x) = (4 - 2x)/3$ . Интегрируя, находим  $\xi = F(x) = x(4 - x)/3$ , откуда  $x = F^{-1}(\xi) = 2 - \sqrt{4 - 3\xi}$ . В качестве  $f(x)$  будем теперь использовать величину  $\frac{3}{(1+x^2)(4-2x)}$  которая принимает одинаковые значения  $3/4$  на концах интервала интегрирования, то есть близка к постоянной. Результаты вычисления интеграла приведены в четвертом и пятом столбцах таблицы 3. Обратите внимание на уменьшение дисперсии почти на порядок при одинаковом числе точек по сравнению со случаем  $\rho(x) = 1$ .

#### 10.4 Задания к лабораторной работе

Напишите программу для вычисления методом МК интеграла, указанного преподавателем. Выберите самостоятельно несколько различных весовых функций  $\rho(x)$ . Результаты вычислений на ЭВМ интеграла и его дисперсии для различных значений  $N$  запишите в тетрадь. Выберите доверительную вероятность  $\alpha$  и найдите доверительный интервал. Сравните с точным значением интеграла. Результаты представьте преподавателю.

$$1. \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{(x)}} = \frac{\pi}{2}$$

$$5. \int_0^1 \frac{(x^2+1)}{(x^4-x^2+1)} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$2. \int_0^1 x^{-1/4}(1-x)^{-3/4} dx = \frac{\pi}{\sin(3\pi/4)}$$

$$6. \int_1^\infty \frac{(x^2+1)dx}{(x^4+x^2+1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

$$3. \int_0^1 \frac{x^{-1/4} + x^{-3/4}}{(x+1)} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi/4)}$$

$$7. \int_e^\pi \ln\left(\frac{x+\pi}{x+e}\right) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{\pi}{e}\right)$$

$$4. \int_0^1 \frac{(x^2+1)}{(x^4+x^2+1)} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

$$8. \int_0^1 \int_0^1 e^{xy \ln xy} dx dy$$

$$9. \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2x-2y} \sin(x+y) dx dy = 4/25$$

$$10. \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2x-2y} \cos(x+y) dx dy = 3/25$$

$$11. \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{ch}(x+y) e^{-2x-2y} dx dy = 5/9$$

$$12. \int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sh}(x+y) e^{-2x-2y} dx dy = 4/9$$

$$13. \int_V \int \int \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{14}}, V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

## 11 Нахождение экстремума функции методом золотого сечения

### 11.1 Алгоритм определения экстремума функции

Пусть функция одной переменной  $y = f(x)$  может быть вычислена в любой точке отрезка  $[a, b]$  и имеет на нем локальный экстремум. Поскольку задача о нахождении минимума  $f(x)$  сводится к нахождению максимума функции  $-f(x)$ , ограничимся рассмотрением первого случая. Построим алгоритм нахождения сложения минимума с заданной точностью  $\varepsilon$ .

Если искать решение задачи простым перебором внутренних точек отрезка с шагом  $\varepsilon$ , то потребуется большое число вычислений функции  $N \sim 1 + (b - a)/\varepsilon$ . Рассмотрим более эффективный метод золотого сечения.

Золотым сечением отрезка называется деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение всего отрезка к большей части равнялось отношению большей части к меньшей (см. рис. 9).

$$\frac{|ab|}{|x_1b|} = \frac{|x_1b|}{|ax_1|}. \quad (11.1)$$

Соотношение (11.1) перепишем в виде

$$l_1^2 - 3ll_1 + l^2 = 0, \quad (11.2)$$

где  $l_1 = |ax_1|$ ,  $l = |ab|$  и для  $l_1$  получаем

$$l_1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}l \quad (11.3)$$

Поскольку для корня, соответствующего знаку «+», имеем  $l_1 > l$ , то нас устраивает только знак «-» и окончательно имеем

$$l_1 = 0.381966l \quad (11.4)$$

или

$$x_1 = a + 0.381966(b - a). \quad (11.5)$$

Золотое сечение отрезка  $[a, b]$  производится двумя симметрично расположеными точками  $x_1$  и  $x_2$  и совершенно аналогично для точки  $x_2$

можно записать

$$x_2 = a + b - x_i = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a) = a + 0.618034(b - a). \quad (11.6)$$

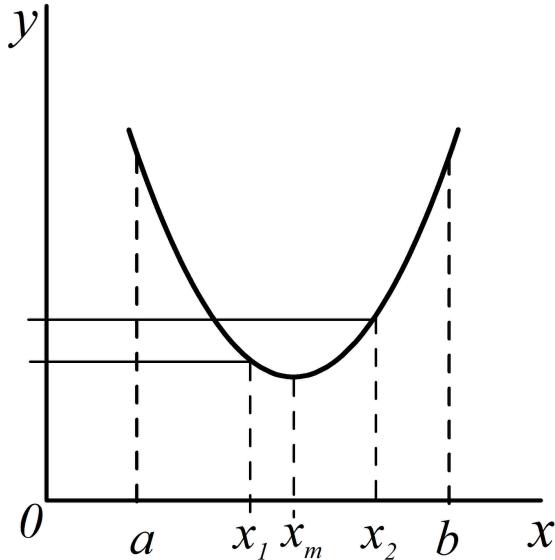


Рис. 9.

Замечательно то, что в свою очередь точка  $x_1$  производит золотое сечение отрезка  $[a, x_2]$ , а  $x_2$  - золотое сечение отрезка  $[x_1, b]$ .

Вычислим функцию  $f(x)$  в точках  $a, b, x_1, x_2$ . Пусть  $f(x_1) < f(x_2)$ , тогда отбрасываем точку  $x = b$ . Если  $f(x_1) > f(x_2)$ , то отбрасываем точку  $x = a$ . Итерация закончена, но длина отрезка, на котором локализован минимум  $[a, x_2]$  или  $[x_1, b]$ , стала в  $l/l_1 \simeq 1.62$  раза короче. Итерационный процесс можно повторять, пока длина полученного отрезка не окажется меньше  $\varepsilon$ . После  $n$  итераций отрезок, содержащий минимум, уменьшается в  $1.62^n$  раза и из условия

$$\frac{b - a}{1.62^n} = \varepsilon \quad (11.7)$$

находим

$$n = \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 1.62} \simeq 2 \ln \frac{b-a}{\varepsilon}. \quad (11.8)$$

Таким образом, в методе золотого сечения функция  $f(x)$  рассчитывается всего

$$N \simeq 3 + 2 \ln \frac{b-a}{\varepsilon} \quad (11.9)$$

раз.

Если начальный отрезок  $[a, b]$  содержит несколько локальных минимумов, то процесс сойдется к одному из них, но необязательно к наименьшему. Немаловажно, что данный метод применим к любым, в том числе разрывным, недифференцируемым функциям.

## 11.2 Задания к лабораторной работе

Составить программу для поиска минимума функции, указанной преподавателем. Начальный отрезок выбрать самостоятельно. Найти все экстремумы заданной функции (если экстремумов много, то найти любые три).

### Варианты

- |  |   |
|--|---|
| 1. $f(x) = \sin^2(x) - 2 \operatorname{tg}(x)$ , $[0, 2]$            | 9. $f(x) = \operatorname{ch}^2(x) + \sin(x)$ , $[-2, 2]$    |
| 2. $f(x) = \cos^3(x) - \operatorname{tg}(x)$ , $[-2, 0]$             | 10. $f(x) = \operatorname{arctg}(x) \cos(x) + 1$ , $[0, 2]$ |
| 3. $f(x) = \cos^2(x)e^{-x}$ , $[-1, 1]$                              | 11. $f(x) = \ln(x)e^{\cos^2(x)}$ , $[2, 4]$                 |
| 4. $f(x) = e^{\cos(x)+1}$ , $[-1, 1]$                                | 12. $f(x) = \arcsin^2(x)$ , $[-1, 1]$                       |
| 5. $f(x) = -\sin(\cos(x)) + 1$ , $[-2, 2]$                           | 13. $f(x) = \cos(x) \arccos(x)$ , $[-1, 1]$                 |
| 6. $f(x) = \cos(e^x) - 2$ , $[0, 2]$                                 | 14. $f(x) = \ln(x) \cos(x)$ , $[1, 2]$                      |
| 7. $f(x) = \operatorname{tg}(e^x)$ , $[0, 1]$                        | 15. $f(x) = \cos(x+1) \operatorname{tg}(x+1)$ , $[0, 1]$    |
| 8. $f(x) = \operatorname{arctg}(x) \sin(x) + \cos(2x)$ , $[-1, 1]$ . |   |

## 12 Метод наискорейшего спуска

### 12.1 Введение

Проблема отыскания минимума (вообще говоря, экстремума) некоторой функции, пожалуй, самая распространенная задача, решаемая численными методами на практике. В данной работе мы рассмотрим случай функции многих переменных, полагая, что способ минимизации одномерной функции известен. Удобно рассмотреть основные черты метода спуска на примере функции двух переменных  $F(x, y)$ . Такую функцию можно наглядно представить как поверхность в трехмерном пространстве, и задача заключается в отыскании наименьшей точки этой поверхности.

Трудность задачи в том, что нельзя предложить единого алгоритма, одинаково пригодного для функций любого типа. Рельеф заданной поверхности  $F(x, y)$ , пользуясь географической терминологией, может быть горным, равнинным, холмистым, овражным и т.д. и содержать такие элементы, как горы, котловины, хребты, отроги, седловины, перевалы, лощины, долины, ущелья, овраги, каньоны, отвесные скалы, террасы и т.п. в произвольных сочетаниях. Алгоритм поиска минимума, эффективный, например, для равнинного рельефа, обычно оказывается совершенно бесполез-

ным на горной местности и наоборот. Каждый элемент рельефа требует, как правило, индивидуального алгоритма поиска минимума. Здесь мы рассмотрим один из алгоритмов – метод наискорейшего спуска.

## 12.2 Описание метода

Как и все алгоритмы поиска минимума, метод наискорейшего спуска заключается в построении траектории, вдоль которой функция  $F(x, y)$  убывает. Начальную точку траектории  $r_0 = (x_0, y_0)$  выберем произвольно. Рассмотрим всевозможные лучи, выходящие из точки  $r_0$ . При малом смещении вдоль каждого луча функция  $F(x, y)$  или возрастает, или убывает, или остается постоянной; последний вариант реализуется тогда, когда луч направлен по касательной к линии уровня  $F(x, y) = F_0 = F(x_0, y_0)$ .

Представляется естественным выбрать луч, вдоль которого функция убывает наиболее быстро. Очевидно, что искомое направление наискорейшего спуска перпендикулярно к линии уровня в точке  $r_0$  и параллельно вектору  $g_0 = -\text{grad}F|_{r=r_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)|_{(x_0, y_0)}$ . Определив направление  $g_0$ , будем двигаться вдоль выбранного луча, пока функция  $F(x, y)$  убывает. Точку  $r_1 = (x_1, y_1)$  на луче, в которой убывание прекращается, будем считать начальной для следующего шага. Таким образом, траектория спуска состоит из отрезков прямых, соединяющих точки  $r_0, r_1, r_2, \dots$ , где каждая точка  $r_{n+1}$  определяется следующим правилом:

- (1) найти  $g_n = -\text{grad}F(r_n)$ ;
- (2) найти минимум  $t_n$  функции одной переменной  $\Phi(t) \equiv F(r_n + t g_n)$ ;
- (3)  $r_{n+1} = r_n + t_n g_n$ ;

Процесс останавливается, когда невозможно определить направление убывания функции, то есть  $\text{grad}F = 0$  (или не существует). Практически вычисления прекращают при достижении условия  $|\text{grad}F| < \varepsilon$ , где малую величину  $\varepsilon$  подбирают исходя из физического смысла задачи. Отметим основные свойства описанного алгоритма:

- алгоритм (1)-(3) легко обобщается на случай функции многих переменных, когда вектор  $r$  составлен из более чем двух компонент;
- метод применим только к дифференцируемым (гладким) функциям, не содержащим особенностей – разрывов или изломов типа  $F = |x| +$

$y$ . Попадание траектории спуска на такую особенность останавливает процесс минимизации, поскольку производные ( $\text{grad}F$ ) не определены в особых точках;

- вычисление производных в аналитическом виде возможно лишь в редких случаях. Обычно приходится определять производные численно. Тогда, очевидно, точность нахождения минимума ограничена величиной шага  $\max\{\Delta x, \Delta y\}$ , используемого в разностной формуле для производных. При уменьшении шага происходит потеря точности производных и, в конечном счете, потеря точности минимизации. Оптимальный шаг приходится подбирать эмпирически для каждой конкретной задачи;
- для гладких функций метод сходится к минимуму, поскольку каждый шаг алгоритма уменьшает  $F(x, y)$ . Теоретически возможна ситуация, когда метод сходится не к минимуму, а к точке перевала или точке перегиба (типа точки  $(0, 0)$  функций  $F = x^2 - y^2$ ,  $F = x^3 - y^2$ ), в которых  $\text{grad}F = 0$ , а минимум не достигнут. В таких случаях изменение начального приближения позволяет провести траекторию спуска мимо опасной точки;
- если функция имеет несколько локальных минимумов, то будет найден один из них, необязательно наименьший. Для отыскания других минимумов следует варьировать начальное приближение;
- скорость сходимости метода зависит от типа рельефа. Для минимума в котловине сходимость быстрая, для минимума на дне длинного извилистого оврага сходимость может быть настолько медленной, что вести расчет практически невозможно.

Указанные недостатки могут быть преодолены введением поправок и модификаций алгоритма наискорейшего спуска, однако рассмотрение таких специальных приемов выходит за рамки данной работы.

### Пример

Рассмотрим геометрическую задачу: найти на эллипсе  $4x^2 + y^2 = 4$  точку, ближайшую к кривой  $y(x^3 + 2) = 6$ . Записывая координаты произвольной точки на эллипсе в виде  $x_e = \cos\varphi$ ,  $y_e = 2\sin\varphi$ , построим функцию

$F$ , представляющую квадрат расстояния между произвольными точками кривой и эллипса:

$$F(x, \varphi) = r^2 = (\cos \varphi - x)^2 + \left( 2 \sin \varphi - \frac{6}{x^3 + 2} \right)^2.$$

Минимум этой функции, очевидно, является искомым решением задачи. Будем вычислять производные  $\partial F / \partial x, \partial F / \partial \varphi$  по симметричным разностным формулам второго порядка с шагом  $h$ . Для отыскания минимумов вдоль направлений  $g_n$  применим простейший шаговый алгоритм: будем вычислять минимизирующую функцию  $\Phi(t)$  последовательно в точках  $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, \dots$  до тех пор, пока она убывает. Наименьшее значение в этой последовательности примем за искомый минимум. Проводя вычисления методом наискорейшего спуска при  $h = 0.001, \tau = 0.001$ , получаем при различных начальных приближениях траектории спуска, приведенные в таблице 4.

Таблица 4.

Начальное приближение $(x_0, \varphi_0)$	$F(x_0, \varphi_0)$	Количество шагов траектории	Конечная точка $F(x_{min}, \varphi_{min})$	$F(x_{min}, \varphi_{min})$
(1, -1)	13.7754	12	(1.1591, 0.8059)	0.2772
(-1, 1)	21.0095	26	(1.1556, 0.8105)	0.2772
(1, 1)	0.3118	31	(1.1556, 0.8104)	0.2772
(-1, -1)	61.4001	40	(1.1597, 0.8051)	0.2772

Интересно отметить, что скорость сходимости метода зависит от начальной точки весьма своеобразно. Так, ближайшая к минимуму точка  $(1, 1)$  дает траекторию из 31 итерации, тогда как из точки  $(1, -1)$  процесс сходится за 12 шагов. Разброс конечных точек разных траекторий на плоскости  $(x, \varphi)$  составляет в нашем примере  $\approx 0.007$ ; эту величину можно принять (ввиду отсутствия более определенных данных) за стандартное отклонение и записать результат в виде  $x_{min} = 1.158 \pm 0.007$ ,  $\varphi_{min} = 0.808 \pm 0.007$ .

### 12.3 Задания к лабораторной работе

Составьте программу для решения предложенной преподавателем задачи методом наискорейшего спуска и решите задачу численно. Найдите решение аналитически, если это возможно. Исследуйте численно зависимость результата от параметров задачи и добейтесь надежного определения минимума.

ния погрешности расчета. Результаты занесите в тетрадь и представьте преподавателю.

Варианты заданий:

- 1) Найти на прямой  $x + 2y - 3 = 0$  точку, ближайшую к параболе  $x + 2y^2 + 1 = 0$ ;
- 2) Найти наименьшее расстояние между кривыми  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$  и  $x = \cos^3\varphi - 1, y = 2 + \sin^3\varphi$ ;
- 3) Найти наименьшее расстояние между кривыми  $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$ ; и  $xy^2 = 4(2 - y)$
- 4) Найти наименьшее расстояние между прямой  $x = y - 1 = z - 2$  и эллипсоидом  $(x + 5)^2 + (y + 4)^2/2 + (z + 3)^2/3 = 1$ ;
- 5) Найти точку, которая делит кратчайшее расстояние между прямыми  $x + 1 = 2y - 1 = z + 2$  и  $2x - 1 = y + 2 = 3z - 1$  в отношении  $1 : 3$  ;
- 6) Электростатическая энергия двух диполей  $p_1$  и  $p_2$ , находящихся на расстоянии  $r$ , дается выражением  $w = 3(p_1 \cdot r)(p_2 \cdot r) - r^2(p_1 \cdot p_2)/r^5$ . Расстояние  $r$  фиксировано, ориентация диполей произвольна. При какой ориентации диполей энергия их взаимодействия будет а) минимальной? б) максимальной?

## 13 Аппроксимация функций рядами Фурье

### 13.1 Периодические сигналы и ряды Фурье

Математической моделью процесса, повторяющегося во времени, является периодический сигнал  $f(t)$  со следующими свойствами:

$$f(t) = f(t \pm kT), \quad k = 1, 2, \dots \quad (13.1)$$

Здесь  $T$  – период сигнала.

Ставится задача найти спектральное разложение такого сигнала.

Ряд вида (13.2), определенный на всей бесконечности оси времени, называется *рядом Фурье* данного сигнала

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m(t), \quad (13.2)$$

здесь  $u_m$  – любая функция из ортогонального базиса, образованного гармоническими функциями с кратными частотами [2],  $c_m$  – коэффициенты ортогонального разложения сигнала  $f(t)$  в этом базисе.

Компоненты ряда Фурье называются гармониками. Любая четная функция может быть разложена в ряд Фурье, состоящий из косинусов, а любая нечетная функция раскладывается в ряд из синусов.

Введем основную частоту  $\omega = 2\pi/T$  последовательности, образующей периодический сигнал. Запишем ряд Фурье для периодического сигнала с периодом  $T$  на отрезке  $[a, b]$

$$f(t) = \left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)], \quad (13.3)$$

с коэффициентами  $A_k$  и  $B_k$ , которые будут определены ниже (13.16), (13.17).

В общем случае периодический сигнал содержит независящую от времени постоянную составляющую и бесконечный набор гармонических колебаний, так называемых гармоник с частотами

$$\omega_k = k\omega, (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (13.4)$$

кратными основной частоте последовательности.

Каждую гармонику можно описать ее амплитудой  $A_k$  и начальной фазой  $\varphi_k$ . Для этого коэффициенты ряда Фурье следует записать в виде

$$a_k = A_k \cos \varphi_k, \quad b_k = B_k \sin \varphi_k, \quad (13.5)$$

так что

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = b_k^2/a_k^2. \quad (13.6)$$

Подставив эти выражения в (13.3), получим другую эквивалентную формулу ряда Фурье:

$$f(t) = \left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t - \varphi_k) \quad (13.7)$$

которая иногда оказывается удобнее.

*Спектральной диаграммой* периодического сигнала называется графическое изображение коэффициентов ряда Фурье для конкретного сигнала. Различают амплитудные и фазовые спектральные диаграммы (рисунок 10).

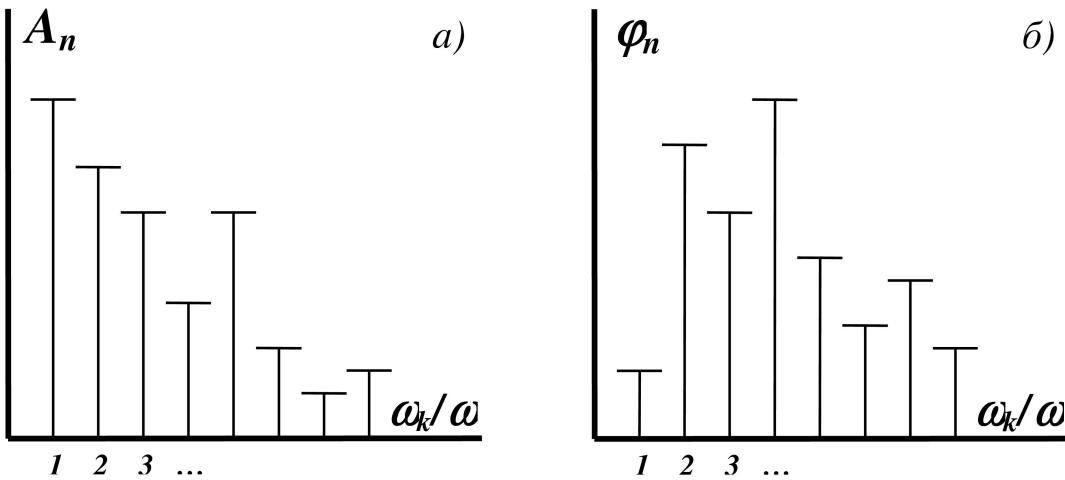


Рис. 10. Спектральные диаграммы некоторого периодического сигнала:  
а) – амплитудная; б) – фазовая

Здесь по горизонтальной оси в некотором масштабе отложены частоты гармоник, а по вертикальной оси представлены их амплитуды и начальные фазы.

Особо интересуются амплитудной диаграмма, которая позволяет судить о процентном содержании тех или иных гармоник в спектре периодического сигнала (примеры см. [2]).

### Энергия сигнала

В нормированном линейном пространстве энергия сигнала определяется следующим образом [2]:

$$E_f = \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt. \quad (13.8)$$

Здесь  $\|f\|^2$  – норма вещественного аналогового сигнала.

### 13.2 Интегральное и дискретное преобразование Фурье

Основная идея этой лабораторной работы состоит в том, что функцию или набор данных можно разложить по определенной системе тригонометрических функций. Центральную роль в этих разложениях играют коэффициенты разложения.

Рассмотрим свойства преобразования Фурье.

Вещественную функцию  $g(x)$  можно представить в виде разности несобственных интегралов:

$$g(x) = \int_0^\infty A(\omega) \cos(2\pi\omega x) d\omega - \int_0^\infty B(\omega) \sin(2\pi\omega x) d\omega \quad (13.9)$$

где функции  $A$  и  $B$  определяются равенствами:

$$A(\omega) = 2 \int_{-\infty}^\infty g(x) \cos(2\pi\omega x) dx \quad (13.10)$$

$$B(\omega) = 2 \int_{-\infty}^\infty g(x) \sin(2\pi\omega x) dx \quad \omega \geq 0. \quad (13.11)$$

Функции  $A$  и  $B$  называются *интегральными косинус-преобразованием* и *синус-преобразованием Фурье* функции  $g(x)$ , а сама функция называется *интегральным обратным преобразованием Фурье* функций  $A$  и  $B$ .

Если  $g_0, g_1, \dots, g_{N-1}$  – произвольные вещественные числа, то их можно представить в виде конечных сумм, используя формальную запись

$$g_i = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2} a_k \cos\left(kj\frac{2\pi}{N}\right) + \sum_{k=1}^{N/2} b_k \sin\left(kj\frac{2\pi}{N}\right) \quad (13.12)$$

Здесь  $j = 0, \dots, N-1$ . Под верхним пределом суммирования  $N/2$  следует понимать  $[N/2]$ , целую часть числа  $N/2$ . Если  $N$  – четное, слагаемое  $b_{N/2}$  нужно опустить! Числа  $a_k$  и  $b_k$  определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} g_j, \quad a_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j \cos(j\pi) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j g_j, \quad (13.13)$$

и

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j \cos\left(kj\frac{2\pi}{N}\right), \quad b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g_j \sin\left(kj\frac{2\pi}{N}\right). \quad (13.14)$$

Последовательность чисел  $a$  и  $b$  называется *конечными* или *дискретными косинус-преобразованием* и *синус-преобразованием Фурье* набора чисел  $g$ , а сам набор  $g$  называют *обратным конечным (дискретным) преобразованием Фурье* наборов  $a$  и  $b$ .

Если  $g(x)$  – периодическая функция, заданная на интервале  $[a, b]$ , то ее можно представить в виде бесконечного ряда по синусам и косинусам:

$$g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n \frac{2\pi x}{b-a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n \frac{2\pi x}{b-a}\right) \quad (13.15)$$

где коэффициенты Фурье  $A_n$  и  $B_n$  задаются выражениями

$$A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(x) \cos\left(n \frac{2\pi x}{b-a}\right) dx, \quad (13.16)$$

$$B_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(x) \sin\left(n \frac{2\pi x}{b-a}\right) dx. \quad (13.17)$$

Рассмотрим последовательность действий при аппроксимации функции  $f(t)$  рядами Фурье.

1. Выбор интересующей нас функции (сигнала).
2. Определение интервала дискретизации  $[a, b]$ , периода функции  $T$  и шага дискретизации  $dt$ .
3. Определение коэффициентов ряда Фурье в дискретной форме

$$a_k = \left(\frac{2}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cos(k\omega t_i), \quad (13.18)$$

$$b_k = \left(\frac{2}{n}\right) \sum_{i=0}^{n-1} y_i \sin(k\omega t_i), \quad (13.19)$$

где  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $n = 2m+1$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ .

4. Запись ряда Фурье для  $m$  гармоник

$$y(t) = \left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{k=1}^m [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]. \quad (13.20)$$

5. Вычисление относительной погрешности аппроксимации

$$\varepsilon(t) = \frac{y(t) - f(t)}{f(t)}. \quad (13.21)$$

6. Вычисление дисперсии  $Q$  по следующей формуле

$$Q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - f(t_i))^2}. \quad (13.22)$$

Выбор оптимального числа гармоник  $m$ .

### 13.3 Контрольные вопросы и задания

1. Для предложенных преподавателем функций и интервалов дискретизации постройте зависимость уменьшения остаточной дисперсии  $Q$  от количества, учитываемых гармоник  $m$ .
2. Сравните аппроксимацию периодической и непериодической функции  $f(t)$ . В каком случае метод работает лучше? Сделайте выводы.
3. Для каждой функции  $f(t)$  выполните расчет энергии сигнала  $E_f$ . Результаты внесите в отчет.
4. Выберете оптимальное число гармоник для аппроксимации функции  $f(t)$ . Выполните аппроксимацию. Рассчитайте для каждой гармоники  $k$  амплитуду  $A_k$  (13.6) и частоту  $\omega_k$  (13.4).

Постройте амплитудную спектральную диаграмму сигнала. Результаты (таблица значений  $k$ ,  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $A_k$ ,  $\omega_k$  и диаграмма) занесите в отчет.

5. \* Покажите, что для оптимальной аппроксимации должно выполняться следующее равенство  $n = 2m + 1$ .
6. Что называется спектральной диаграммой периодического сигнала?

## 14 Линейное уравнение теплопроводности

Типичным представителем уравнений в частных производных параболического типа является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (14.1)$$

где  $T$  — температура,  $D$  — коэффициент теплопроводности,  $t$  и  $x$  — время и пространственная координата соответственно. Уравнение (14.1)

описывает медленное перераспределение температуры в одномерной среде, происходящее неволновым диффузионным образом через хаотическое неупорядоченное движение переносчиков тепла. Отметим, что уравнение (14.1) с аналогичным успехом описывает любой медленный диффузионный процесс и в каждом конкретном случае имеет соответствующее название. Например, уравнение, описывающее перераспределение концентрации примеси в среде, называется уравнением диффузии. Характерная особенность решения уравнения (14.1) заключается в том, что всякое неоднородное начальное распределение  $T(x, t = 0)$ ,  $0 \leq x \leq L$  не переносится вдоль  $x$  в виде волны, а постепенно «размазывается», так что происходит выравнивание распределения  $T(x)$ .

В традиционном конечноразностном подходе переменная  $T$  и ассоциируется с узлами пространственной сетки  $x_i$  и временной сетки  $t_n$ :  $T = T(x_i, t_n) = T_i^n$ . Для аппроксимации первой производной по времени требуется использовать значения  $T$  в двух или более различных моментах времени —  $T^n$  и  $T^{n+1}$ , и как минимум, три значения  $T_{i-1}, T_i, T_{i+1}$  для аппроксимации второй производной по пространственной координате. Соответственно, разностные схемы оказываются двух- (и более) слойными по времени и трех- (и более) слойными по координате. В зависимости от того, на каком временном слое аппроксимируется правая часть уравнения (14.1), различают явные и неявные схемы.

### 14.1 Явная схема

Простейшая явная схема имеет вид

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = D \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2}, \quad (14.2)$$

где  $\tau$  и  $h$  — шаги по времени и координате,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $N = L/h$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Для удобства мы здесь выбрали однородную пространственно-временную сетку:  $\tau = t_{n+1} - t_n = \text{const}$ ,  $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$  для любых  $i$  и  $n$ . Если известно распределение  $T_i$  на  $n$ -м временном слое, то значение  $T^{n+1}$  в каждом  $i$ -ом узле определяется из (14.2) явным образом.

$$T_i^{n+1} = \frac{\tau D}{h^2} T_{i+1}^n + \left(1 - 2 \frac{\tau D}{h^2}\right) T_i^n + \frac{\tau D}{h^2} T_{i-1}^n. \quad (14.3)$$

Значения  $T$  в узлах  $i = 1$  и  $i = N - 1$ , примыкающих к граничным, вычисляются с использованием граничных условий в точках  $i = 0$  и  $i = N$ . Схема

ма (14.2) условно устойчива. Иначе говоря, при достаточно больших шагах интегрирования по времени  $\tau$ , превышающих характерное диффузионное время  $t_{diff} \sim h^2/D$ , за которое возмущение переносится на расстояние  $\sim h$  диффузионным образом, численное решение начинает неограниченно расти, так что спустя конечное число шагов происходит переполнение (overflow) и остановка расчета. Это явление называется численной неустойчивостью и связано с тем, что в схеме учитывается поступление информации в узел  $i$  только от соседних узлов  $i-1$ ,  $i+1$ , в то время как при  $\tau > t_{diff}$  информация должна поступать также и от более удаленных узлов. Анализ устойчивости схемы (14.2) дает точную границу [14,22,26].

$$\tau \leq \frac{h^2}{2D}. \quad (14.4)$$

## 14.2 Неявная схема

В неявной схеме переменные на  $n+1$ -м временном слое задействованы в трех соседних узлах

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = D \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2}, \quad (14.5)$$

поэтому явно выразить  $T^{n+1}$  через известные  $T^n$  нельзя. Система алгебраических уравнений (14.5) относительно неизвестных  $T^{n+1}$  решается методом прогонки. Напомним суть метода. Решение для  $T_i^{n+1}$  ищется в виде

$$T_i^{n+1} = A_{i+1} T_{i+1}^{n+1} + B_{i+1}, \quad (14.6)$$

где  $A_{i+1}$  и  $B_{i+1}$  — прогоночные коэффициенты. Прогонка начинается с узла  $i=0$ . При этом из левого граничного условия определяются коэффициенты  $A_1$  и  $B_1$ . Если граничное условие задано в виде  $T(x=0, t) = \varphi_1(t)$ , то полагаем

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \varphi_1(t_{n+1}) = \varphi_1^{n+1}. \quad (14.7)$$

Если задано граничное условие второго рода

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = f_1(t),$$

то приближенно полагаем

$$A_1 = 1, \quad B_1 = -h f_1(t_{n+1}) = -h f_1^{n+1}. \quad (14.8)$$

Подставляя (14.6) в систему (14.5), получаем рекуррентные уравнения для определения  $A$  и  $B$

$$A_{i+1} = \frac{\tau D}{h^2 + \tau D(2 - A_i)}, \quad B_{i+1} = \frac{h^2 T_i^n + \tau D B_i}{h^2 + \tau D(2 - A_i)}. \quad (14.9)$$

Прогоняя «вперед» по формулам (14.9), начиная с первых  $A_1$  и  $B_1$  из (14.7) или (14.8), находим все  $A$  и  $B$  вплоть до  $A_N$  и  $B_N$ . Правое граничное условие используем для того, чтобы начать прогонку «назад».

Если задано  $T(x = L, t) = \varphi_2(t)$ , то

$$T_N^{n+1} = \varphi_2^{n+1}. \quad (14.10)$$

Если задано  $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = f_2(t)$  то с некоторой погрешностью

$$T_N^{n+1} = \frac{h f_2^{n+1} + B_N}{1 - A_N}. \quad (14.11)$$

Далее по формулам (14.6) прогоняем «назад», от  $i = N - 1$  до  $i = 1$  и находим все  $T_i^{n+1}$ . Схема (14.5) абсолютно устойчива, то есть устойчива при любом шаге  $\tau$ . Это связано с тем фактом, что в уравнениях (14.5) переменные  $T_i^{n+1}$  самозацепляются. Если изменить значение  $T$  в некотором узле  $(i, n)$ , то это приведет к тому, что изменятся значения на всем  $n+1$ -м временном слое, а не только в узлах  $(i-1, n+1)$  и  $(i+1, n+1)$ , как в случае явной схемы. Другими словами, информация в каждый узел сетки попадает не только от смежных узлов, но и от всех узлов в целом вне зависимости от величины шага  $\tau$ , и поэтому ограниченный на шаг интегрирования не возникает.

### 14.3 Контрольные вопросы и задания к лабораторной работе

- 1) Выведите рекуррентные уравнения (14.9);
- 2) Найдите погрешность, с которой аппроксимируются граничные условия второго рода (14.8) и (14.11);
- 3) Найдите порядок аппроксимации схем (14.2) и (14.5) по времени и по пространству;
- 4) Докажите условие устойчивости явной схемы (14.4). Указание: решение (14.2) ищите в виде  $T_i^n \sim q^n \exp(jkih)$  здесь  $j$  – мнимая единица.

Очевидно, схема устойчива, когда  $|q|$  не превышает единицу ни для одного  $k$ .

5) Докажите, что схема (14.5) абсолютно устойчива.

Численно решите уравнение теплопроводности (14.1) с помощью как явной, так и неявной схем. Сравните результаты, полученные при использовании обеих схем. Далее по тексту  $T_\xi = \partial T / \partial \xi$ . Указание: расчетная область  $0 \leq x \leq 1$ ,  $h \leq 0.02$ ,  $t \leq 4$ .

- 1)  $T_t = T_{xx}$ . НУ:  $T(x, 0) = 0$ . ГУ:  $T_x(0, t) = 0, T(1, t) = 0$ .
- 2)  $T_t = T_{xx}$ . НУ:  $T(x, 0) = 100$  при  $x = 0.4$ , в остальных точках  $T(x, 0) = 0$ . ГУ:  $T_x(0, t) = T_x(1, t) = 0$ .
- 3)  $T_t = T_{xx}$ . НУ:  $T(x, 0) = 0$ . ГУ:  $T(0, t) = t/(1+t), T(1, t) = 0$ .
- 4)  $T_t = T_{xx}$ . НУ:  $T(x, 0) = 0$ . ГУ:  $T_x(0, t) = -1, T(1, t) = 0$ .
- 5)  $T_t = T_{xx}$ . НУ:  $T(x, 0) = 0$ . ГУ:  $T_x(0, t) = -2, T(1, t) = 1$ .
- 6)  $T_t = (D(x)T_x)_x$ . НУ:  $T(x, 0) = 1 - x$ . ГУ:  $T_x(0, t) = T_x(1, t) = 0$ .

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x < 0.5 \\ 2, & \text{при } x \geq 0.5. \end{cases}$$

- 7)  $T_t = T_{xx} + f(x)$ . НУ:  $T(x, 0) = 0$ . ГУ:  $T_x(0, t) = T_x(1, t) = 0$ .

$$D(x) = \begin{cases} 100(x - 0.4)(0.6 - x), & \text{при } x \in [0.4, 0.6] \\ 0, & \text{при } x \notin [0.4, 0.6]. \end{cases}$$

## 15 Эволюционный метод решения уравнений Пуассона и Лапласа

### 15.1 Метод установления для уравнения эллиптического типа. Единственность решения.

Пусть в некоторой области необходимо решить первую краевую задачу для уравнения Пуассона.

$$\begin{cases} \Delta U = \rho, \\ U|_l = f, \end{cases} \quad (15.1)$$

Наряду с ней рассмотрим эволюционную задачу

$$\begin{cases} \Delta V - \rho = \frac{\partial V}{\partial t}, \\ V|_l = f, \\ V(M, 0) = g(M), \end{cases} \quad (15.2)$$

где  $g(M)$  – произвольная функция, удовлетворяющая краевым условиям задачи (15.1). Покажем, что при  $t \rightarrow \infty$   $V \rightarrow U$  асимптотически, то есть рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \varphi = V - U, \\ \Delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \varphi|_L = 0, \\ \varphi(M, 0) = g(M) - U(M) = \psi(M), \end{cases} \quad (15.3)$$

где  $\psi(M)$  – произвольная функция, удовлетворяющая задаче Коши. Будет показано, что решение задачи (15.3) представимо в виде

$$\begin{cases} \varphi(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(M) e^{-\lambda_n t}, \\ C_n = \int_S \psi(M) \varphi(M) dS_n, \end{cases}$$

где  $C_n$  – коэффициенты Фурье, а  $\varphi_n$  и  $\lambda_n$  – решение следующей задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta \varphi_n = -\lambda_n \varphi_n, \\ \varphi_n |_L = 0. \end{cases}$$

Причем  $\varphi_n$  образуют полную ортогональную систему функций, которую можно нормировать так, что будет выполняться равенство

$$\int_S \varphi_l \varphi_k dS = \begin{cases} 0, & k = j, \\ 1, & k \neq l. \end{cases}$$

Из свойств собственных функций и собственных чисел можно построить сумму

$$\int_S \varphi^2 dS = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 e^{-2\lambda_n^2 t} \leq e^{-2\lambda_n t} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2.$$

Из теории рядов Фурье известно, что  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 < \infty$ , тогда устремляя в последнем неравенстве  $t \rightarrow \infty$ , получаем

$$\int_s \varphi^2 dS \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow U$$

Стремление быстрое, так как в оценке существует экспонента, поэтому уже при малых временах решение получается с хорошей точностью.

### 15.2 Численная реализация метода установления для уравнения Пуассона. Устойчивость и скорость сходимости.

Рассмотрим особенности численного решения эллиптического уравнения на примере уравнения Пуассона. Для удобства ограничимся двумерной задачей Дирихле в квадратной области  $0 \leq (x, y) \leq 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \rho(x, y), \\ U|_{\Gamma} = \psi(S), \end{cases} \quad (15.4)$$

где  $S$  – длина дуги, отсчитываемая вдоль границы  $\Gamma$ ,  $\rho$  и  $\psi$  – заданные функции. Введем квадратную сетку  $(x_m, y_n) = (mh, nh)$ ,  $h = 1/M$ ,  $M$  – целое число. Запишем конечно-разностный аналог уравнения (15.1), заменяя вторые производные стандартной трёхточечной аппроксимацией

$$\begin{cases} \frac{U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}}{h^2} + \frac{U_{m,n+1} - 2U_{m,n} + U_{m,n-1}}{h^2} = \rho(x_m, y_n), \\ U_{m,n} = \psi(S_{m,n}), \quad S_{m,n} \in \Gamma. \end{cases} \quad (15.5)$$

Схема (15.2) есть СЛАУ относительно  $U_{m,n}$ .

Решить систему (15.2) каким-либо общим методом численной линейной алгебры (метод Гаусса) невыгодно, т.к. такой метод не учитывает сильную разреженность матрицы системы (15.2) (действительно, из общего числа  $(M-1) \times (M-1)$  неизвестных только 5 содержатся в каждом из уравнений (15.2)) и поэтому оказывается чрезвычайно медленным. Вместо этого используются специальные методы: прямые или итерационные. Итерационные методы менее быстрые, чем прямые, но зато более универсальны, т.к. не зависят от геометрии расчетной области и легче программируются. В данном случае рассматривается итерационный подход, эквивалентный

расчету на установление развивающегося во времени процесса. Рассмотрим вспомогательную нестационарную задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \rho(x, y), \\ U|_{\Gamma} = \psi(S), \\ U(x, y, 0) = \varphi(x, y), \end{cases} \quad (15.6)$$

где  $\rho$  и  $\psi$  – те же самые, что и в (15.1), а  $\varphi(x, y)$  – произвольно. Решение задачи (15.3) при  $t \rightarrow \infty$  стремится к равновесному распределению  $U(x, y)$ , описываемому задачей (15.1). В соответствии с этим вместо (15.1) будем решать (15.3), а вместо равновесной схемы введем схему

$$\begin{cases} \frac{U_{m,n}^{p+1} - U_{m,n}^p}{\tau} = \frac{U_{m+1,n}^p - 2U_{m,n}^p + U_{m-1,n}^p}{h^2} + \frac{U_{m,n+1}^p - 2U_{m,n}^p + U_{m,n-1}^p}{h^2} - \\ - \rho(x_m, y_n), \\ U_{m,n}^{p+1}|_{\Gamma} = \psi(S_{m,n}), \\ U_{m,n}^0 = \varphi(x_n, y_m) \end{cases} \quad (15.7)$$

Вычисление  $U^{p+1}$  по уже известным  $U^p$  в данной схеме (15.4) не составляет труда. Можно показать, что наибольшая сходимость достигается в случая

$$\tau = h^2/4\pi \quad (15.8)$$

Схема (15.4) с выбором оптимального «временного шага» согласно (15.5) называется схемой Якоби и является простейшей из итерационных схем. Для квадратной области число итераций, необходимых для достижения заданной точности при  $h \rightarrow 0$  равно

$$n(e) \cong \frac{2\ln(1/e)}{\pi^2 h^2}$$

Сходимость итераций по схеме (15.4)–(15.5) имеет место и в случае расчетной области произвольной сложной формы. Схема (15.4) выдерживает обобщение на случай задачи Дирихле с переменными коэффициентами. Уравнение Лапласа является частным случаем уравнения Пуассона, когда  $\rho = 0$ .

### 15.3 Задания к лабораторной работе

Найти решение краевой задачи Пуассона в области:  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ .

- 1)  $a = 1, b = 1, \rho = \sin^2(\pi xy), u|_{x=0} = \sin(\pi y), u|_{x=a} = \sin(\pi y), u|_{y=0} = x - x^2, u|_{y=b} = x - x^2$ .
- 2)  $a = 2, b = 1, \rho = |x - y|, u|_{x=0} = 2y(1 - y), u|_{x=a} = 2y(1 - y), u|_{y=0} = \sin^2(\pi x), u|_{y=b} = \sin^2(\pi x)$ .
- 3)  $a = 1, b = 1, \rho = \sin^3(\pi xy), u|_{x=0} = y - y^2, u|_{x=a} = y - y^2, u|_{y=0} = \sin(2\pi x), u|_{y=b} = \sin(2\pi x)$ .
- 4)  $a = 1, b = 1, \rho = 20(x^2 + y^2), u|_{x=0} = 3y, u|_{x=a} = 0, u|_{y=0} = 0, u|_{y=b} = 3(1 - x^2)$ .
- 5)  $a = 2, b = 3, \rho = -y^{-xy^2}, u|_{x=0} = y^2 - 3y, u|_{x=a} = y^3 - 9y, u|_{y=0} = x^2 - 2x, u|_{y=b} = x^3 - 4x$ .
- 6)  $a = 1, b = 1, \rho = x^2 - y^2 - x + y, u|_{x=0} = y - y^2, u|_{x=a} = (y - y^2)e^y, u|_{y=0} = x - x^2, u|_{y=b} = x - x^2$ .
- 7)  $a = 1, b = 2, \rho = (x - y)^2, u|_{x=0} = \sin^2(\pi y), u|_{x=a} = e^{\sin(\pi y)-1}, u|_{y=0} = x(1 - x), u|_{y=b} = x(1 - x)e^x$ .
- 8)  $a = 1, b = 1, \rho = 0, u|_{x=0} = 10y, u|_{x=a} = 10 \cos(\frac{\pi y}{2}), u|_{y=0} = 10 \sin(\frac{\pi x}{2}), u|_{y=b} = 10(1 - x)$ .
- 9)  $a = 1, b = 1, \rho = 10x + y, u|_{x=0} = y(1 - y^2), u|_{x=a} = 0, u|_{y=0} = \sin(\pi x), u|_{y=b} = 0$ .
- 10)  $a = 2, b = 1, \rho = x^2 - 2y, u|_{x=0} = \sin^2(\pi y), u|_{x=a} = \sin^2(2\pi y), u|_{y=0} = \sin^2(\pi x), u|_{y=b} = \sin^2(2\pi x)$ .
- 11)  $a = 1, b = 1, \rho = 0, u|_{x=0} = y, u|_{x=a} = y^2, u|_{y=0} = 2x(1 - x), u|_{y=b} = 1$ .
- 12)  $a = 1, b = 1, \rho = 0, u|_{x=0} = 0, u|_{x=a} = y(1 - y^2), u|_{y=0} = x(1 - x), u|_{y=b} = x(1 - x)$ .
- 13)  $a = 1, b = 1, \rho = 4x^2(y - y^2), u|_{x=0} = 3 \sin(\pi y), u|_{x=a} = 2y, u|_{y=0} = 3x(1 - x), u|_{y=b} = 2x$ .

- 14)  $a = 3, b = 1, \rho = ch(x - y), u|_{x=0} = \sin^2(\pi y), u|_{x=a} = 0,$   
 $u|_{y=0} = ch(x^2 - 3x) - 1, u|_{y=b} = 0 .$
- 15)  $a = 1, b = 1, \rho = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{y+1}\right), u|_{x=0} = 0, u|_{x=a} = 0, u|_{y=0} = \sin^2(\pi x),$   
 $u|_{y=b} = \sin(2\pi x) .$

## 16 Волновое уравнение

### 16.1 Численная схема решения уравнения гиперболического типа

Волновое уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (16.1)$$

описывает одномерные линейные волны без дисперсии. Например, колебания струны, звук в жидкости (газе) или электромагнитные волны в вакууме (в последнем случае уравнение (16.1) должно быть записано в векторном виде). Общее решение уравнения (16.1) представимо в виде

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (16.2)$$

где функции  $f$  и  $g$  определяются из начальных и граничных условий

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= p(x). \end{aligned} \quad 0 \leq x \leq a \quad (16.3)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \varphi_1(t), \\ u(a, t) &= \varphi_2(t). \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T \quad (16.4)$$

Решение (16.2) описывает две волны, бегущие в противоположные стороны с постоянной и одинаковой скоростью  $c$  без изменения своей формы. Простейшей разностной схемой, аппроксимирующей уравнение (16.1), является явная пятиточечная схема

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} &= c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}, \\ x_i &= ih, \quad i = 0, \dots, N, \quad N = a/h, \\ t_n &= n\tau, \quad n = 0, \dots, K, \quad K = T/\tau, \end{aligned} \quad (16.5)$$

шаблон которой показан на рис. 11.

Эта схема, получившая название «крест» имеет второй порядок точности по времени и по пространственной координате и является трехслойной по времени. Ее применение предполагает, что при нахождении значений  $u^{n+1}$  на верхнем слое значения  $u^n$  и  $u^{n-1}$  уже известны. Для начала расчетов по этой схеме требуется задать значения  $u^0$  и  $u^1$ . Значения  $u^0$  определяются сразу из первого начального условия (16.3).

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, \dots, N \quad (16.6)$$

Значения  $u^1$  можно определить лишь приближенно из второго начального условия (16.3):

$$u_i^1 = u_0(x_i) + \tau h(x_i) + O(\tau^2), \quad i = 0, \dots, N \quad (16.7)$$

Границные условия (16.4) аппроксимируются без труда

$$\begin{aligned} u_0^n &= \varphi_1(t_n), \\ u_N^n &= \varphi_2(t_n). \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, K, \quad (16.8)$$

Таким образом, задача (16.1), (16.3), (16.4) аппроксимируется уравнениями (16.5)–(16.8).

Область устойчивости схемы «крест» ограничена условием Куранта – Фридрихса – Леви [14, 26].

$$\tau \leq \frac{h}{c} \quad (16.9)$$

*Примечание.* Границные условия II рода

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \psi_1(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) &= \psi_2(t) \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T \quad (16.10)$$

с погрешностью  $O(h^2)$  аппроксимируются уравнениями

$$\begin{aligned} u_0^n &= u_1^n - h\psi_1(t_n), \\ u_N^n &= u_{N-1}^n + h\psi_2(t_n). \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, K \quad (16.11)$$

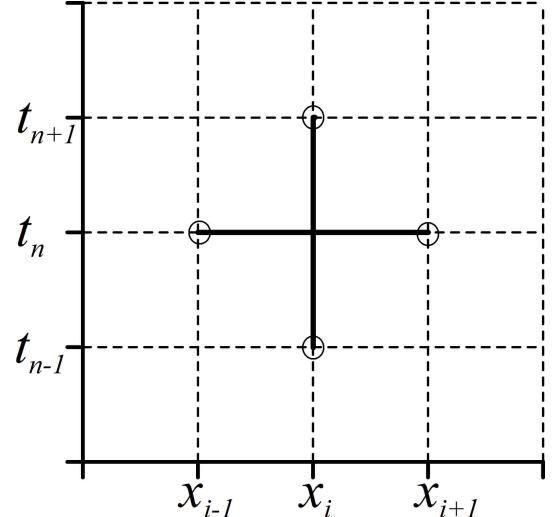


Рис. 11. Шаблон схемы «крест» для волнового уравнения

## 16.2 Контрольные вопросы и задания

- 1) При неоднородном шаге по времени  $\tau = \tau_n \neq const$  схема (16.5) уже не является справедливой. Выведите правильное разностное уравнение.
- 2) Покажите, что схема (16.5) аппроксимирует (16.1) со вторым порядком точности как по времени, так и по пространству.
- 3) Исходное волновое уравнение (16.1) описывает бездисперсионный волновой процесс, или, другими словами, фазовая скорость  $v = \omega(k)/k = c$  одинакова для гармонических волн с произвольным волновым числом  $k$ . Найдите дисперсионное соотношение для схемы (16.5). Решение ищите в виде  $u_i^n \sim \exp(-j\omega n\tau + jkih)$  (здесь  $j$  – мнимая единица).
- 4) Докажите условие устойчивости (16.9). Указание: решение (16.5) ищите в виде  $u_i^n \sim q^n \exp(jkih)$  здесь  $j$  – мнимая единица. Очевидно, схема устойчива, когда  $|q|$  не превышает единицу ни для одного  $k$ .
- 5) Запишите уравнение (16.1) в виде закона сохранения энергии. Докажите, что схема «крест» обладает свойством консервативности по отношению к сохранению энергии.

Численно решите волновое уравнение (16.1), используя схему «крест». Указание: расчетная область  $0 \leq x \leq 1$ ,  $h \leq 0.02$ ,  $t \leq 4$ .

- 1)  $u_{tt} = u_{xx}$ . НУ:  $u(x, 0) = 0.2 \sin^2(\pi x)$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ .  
ГУ:  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .
- 2)  $u_{tt} = u_{xx}$ . НУ:  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 0.2 \sin^2(\pi x)$ . ГУ:  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .
- 3)  $u_{tt} = u_{xx}$ . НУ:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0.2 \sin^2(3\pi x), & \text{если } x \leq 1/3 \\ 0, & \text{если } x > 1/3, \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} -0.6\pi \sin(6\pi x), & \text{если } x \leq 1/3 \\ 0, & \text{если } x > 1/3, \end{cases}$$

$$\text{ГУ: } u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

- 4)  $u_{tt} = (c(x)u_x)_x$ .

$$c(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \leq 1/2 \\ 1/2, & \text{при } x > 1/2. \end{cases}$$

$$\text{НУ: } u(x, 0) = \begin{cases} \sin^2(3\pi x), & \text{если } x \leq 1/3 \\ 0, & \text{если } x > 1/3, \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} -3\pi \sin(3\pi x), & \text{если } x \leq 1/3 \\ 0, & \text{если } x > 1/3. \end{cases}$$

ГУ:  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .

5)  $u_{tt} = u_{xx}$ . НУ:  $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0.2 \sin(2\pi x)$ . ГУ:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

6)  $u_{tt} = u_{xx}$ . НУ:  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ . ГУ:  $u(0, t) = 0, u(1, t) = te^{-t}$ .

7)  $u_{tt} = u_{xx} + xe^{-2x}$ . НУ:  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ . ГУ:  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .

8)  $u_{tt} = (c(x)u_x)_x, c(x) = 3 - 2x$  НУ:  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ .

$$\text{ГУ: } u(1, t) = 0; \quad u(0, t) = \begin{cases} \sin(\pi t), & \text{если } t \leq 1 \\ 0, & \text{если } t > 1. \end{cases}$$

## 17 Численная реализация модели «хищник-жертва»

### 17.1 Пространственно распределенная модель хищник-жертва

Построение пространственно распределенной модели хищник-жертва (Х-Ж) проведем в несколько этапов.

**I. Пространственно однородная модель.** Если жертвы живут одни в идеальных условиях, то их численность описывается уравнением

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \tag{17.1}$$

где  $\alpha = 1/\tau_N > 0$ ,  $\tau_N$  – характерное время жизни поколения. Любая популяция в идеальных условиях увеличивает свою численность в соответствии с (17.1) по экспоненциальному закону  $N(t) = N_0 \exp(t/\tau_N)$ .

Если бы жили одни хищники, то из-за отсутствия пищи они бы вымерли и в этом случае

$$\frac{dM}{dt} = -\beta M, \tag{17.2}$$

где  $\beta = 1/\tau_M > 0$ ,  $\tau_M$  – характерное время жизни хищника без пищи, как правило,  $\tau_M \ll \tau_N$ . При совместном проживании популяций, численность хищников будет увеличиваться тем быстрее, чем больше их частота

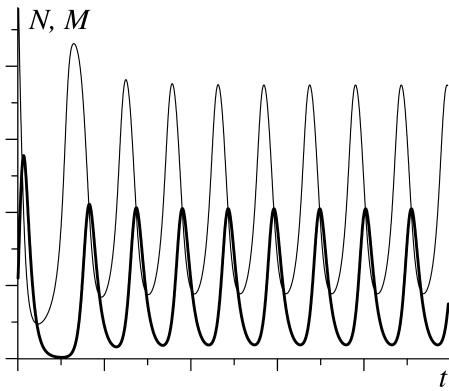


Рис. 12. Периодические решения в модели хищник-жертвы

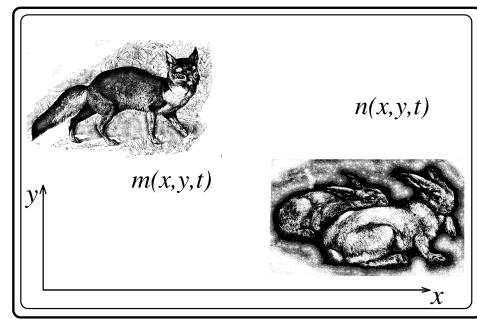


Рис. 13. Внутри заданного ареала две популяции, одна – хищник, другая – жертвы

столкновений с жертвами. Эта частота столкновений  $\propto M \cdot N$ . Для жертв ситуация противоположная и в результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \alpha N - \gamma NM, \\ \frac{dM}{dt} &= -\beta M + \epsilon NM, \end{aligned} \quad (17.3)$$

$\gamma$  – характеризует гибель жертв из-за встречи с хищником, величина  $\epsilon$  определяет эффективность размножения хищников.

При определенных условиях система уравнений (17.3) имеет периодические или квазипериодические решения (рис. 12).

Если даже популяция изолирована и не взаимодействует с другими организмами, то она зависит от внешней среды (пища, вода, территория). Простейшей моделью в этом случае может являться уравнение Ферхольста (1838 г.)

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - bn^2, \quad (17.4)$$

где  $b$  определяет «давление» среды.

**II. Взаимодействие двух популяций на территории.** В этом случае параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\epsilon$  могут зависеть от пространственных координат. Необходимо учесть возможность перемещения хищников и жертв внутри заданного ареала (рис. 13). В качестве простейшей модели примем, что перемещение носит случайный характер. Дополним уравнения (17.4) диф-

фузионными слагаемыми

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= \alpha n - \gamma nm + \vec{\nabla}(\chi_n \vec{\nabla} n), \\ \frac{dm}{dt} &= -\beta m + \epsilon nm + \vec{\nabla}(\chi_m \vec{\nabla} m),\end{aligned}\tag{17.5}$$

где коэффициенты диффузии  $\chi_n$ ,  $\chi_m$  также могут зависеть от пространственных координат,  $n$ ,  $m$  – соответственно поверхностные плотности жертв и хищников.

### Уравнения типа «реакция-диффузия»

Уравнения диффузии описывают многие физические, химические, биологические и другие системы. Обобщением (17.5) может являться система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= \vec{\nabla}(\chi_n \vec{\nabla} n) + q(n, m, x, t), \\ \frac{dm}{dt} &= \vec{\nabla}(\chi_m \vec{\nabla} m) + Q(n, m, x, t),\end{aligned}\tag{17.6}$$

где  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}_{n,m} \vec{\nabla})$  учитывает также скорость движения соответствующей «среды»,  $n$ ,  $m$  – соответственно активатор и ингибитор,  $q$ ,  $Q$  – источники.

## 17.2 Эволюция популяций

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (17.3) легко численно решается, например, методом Рунге-Кутта. При выборе численных методов решения уравнений (17.5) необходимо использовать консервативные схемы интегрирования, чтобы при  $\alpha = \beta = \gamma = \epsilon = 0$  выполнялось

$$\int \int_S n(x, y) dx dy = const, \quad \int \int_S m(x, y) dx dy = const,\tag{17.7}$$

где  $S$  определяет ареал.

Приведем простую и эффективную схему решения уравнений (17.6)

$$\begin{aligned}n_i^{k+1} &= n_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \chi_{i+1/2}^k \frac{n_{i+1}^k - n_i^k}{\Delta x} - \chi_{i-1/2}^k \frac{n_i^k - n_{i-1}^k}{\Delta x} \right] + q(n_i^k, m_i^k, x_i, t^k), \\ m_i^{k+1} &= m_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \chi_{i+1/2}^k \frac{m_{i+1}^k - m_i^k}{\Delta x} - \chi_{i-1/2}^k \frac{m_i^k - m_{i-1}^k}{\Delta x} \right] + Q(n_i^k, m_i^k, x_i, t^k).\end{aligned}\tag{17.8}$$

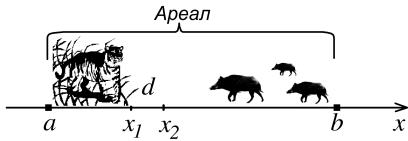


Рис. 14. К задаче 9

### 17.3 Задания к лабораторной работе

- 1) Постройте модель хищник-жертва (17.3) с периодическими внешними условиями  $\alpha = \alpha_0(1 - \cos(\Omega t))$ .
- 2) Ареал размером  $L$  включает две благоприятные для жизни жертв несвязанные области размерами  $L_1$  и  $L_2$ , которые существенно меньше  $L$ . Рассмотрите а) одномерную задачу, б) двумерный ареал.
- 3) Построить модель хищник-жертва при конечном объеме пищи у жертв.
- 4) Для модели (17.3) исследуйте зависимость периода колебаний численности популяций от параметров  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ .
- 5) Опишите алгоритм модели Х-Ж, в которой каждая из популяций описывается соответственно  $N(t)$  и  $M(t)$  частицами. Необходимо создать алгоритмы передвижения, размножения, смерти, питания, наличия благоприятных и неблагоприятных ландшафтов и их влияния на особи популяций. Реализуйте Вашу модель.
- 6) Обобщите модель Х-Ж с учетом ограниченности ресурсов внешней среды для жертв. Найдите решения для различных значений параметров. проанализируйте условия, при которых изменение численности жертв близко к экспоненциальному закону. Через какое характерное время нелинейные эффекты оказываются существенными? Дайте интерпретацию параметру  $b$  в (17.4).
- 7) Предложите и реализуйте численную модель, в которой при описании пространственного движения хищников учитывается, что хищники движутся в места большей концентрации жертв, а жертвы с большей вероятностью перемещаются в области, где хищников мало.
- 8) Проверьте консервативность используемой при решении (17.5) численной схемы.

- 9) Через область  $d$  жертвы беспрепятственно проходят (рис. 14), а для хищников это затруднительно, но возможно (например, между  $x_1$  и  $x_2$  располагается река, а хищники очень плохо плавают). На основании построенной численной модели изучите динамику популяций на такой территории. При каких условиях получаются периодические решения?

## 18 Движение заряженных частиц в электромагнитном поле

Пусть в некоторой области пространства существует электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$  и магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ . В общем случае векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  являются функциями координат и времени. Если в рассматриваемой области находится заряженная частица, то на нее действует сила Лоренца  $\vec{F}_L$ , выражаемая формулой

$$\vec{F}_L = q \left( \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}] \right), \quad (18.1)$$

где  $q$  – заряд частицы,  $\vec{v}$  – ее скорость.

Эта формула справедлива при следующих приложениях: размеры частицы настолько малы, что ее заряд можно считать точечным – только в этом случае можно не учитывать дополнительные силы, связанные с распределением заряда по объему частицы; у частицы отсутствует собственный магнитный момент; пренебрегается силой лучистого трения, которая существенна только при большой величине ускорения, испытываемого частицей в электромагнитном поле.

Уравнение движения частицы в заданном поле может быть написано в обычной форме

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}_L. \quad (18.2)$$

Если считать массу частицы  $m$  постоянной, то есть пренебречь поправками на теорию относительности, что допустимо, когда скорость движения много меньше скорости света, тогда уравнение (18.2) с учетом (18.1) принимает вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (18.3)$$

Анализ движения заряженных частиц в электромагнитных полях не представляет серьезных математических трудностей только для простейшей конфигурации поля. Однако во всех практически интересных случаях

электромагнитные поля оказываются настолько сложными, что решение уравнения движения возможно только численным путем.

### 18.1 Движение в однородном магнитном поле

Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном магнитном поле. Электрическое поле отсутствует, а начальная скорость частицы  $\vec{v}_0$  произвольно ориентирована относительно вектора  $\vec{B}$ .

Разложим вектор начальной скорости на составляющие - параллельную магнитному полю  $v_{\parallel}$  и перпендикулярную к нему  $v_{\perp}$ . Величина  $v_{\parallel}$  в процессе движения остается постоянной по величине и направлению, так как сила Лоренца, действующая на заряженную частицу, не имеет составляющей, направленной вдоль поля  $\vec{B}$ . Поэтому движение частицы складывается из двух простых движений: равномерное перемещение вдоль магнитного поля и движение в перпендикулярной магнитному полю плоскости. Сила Лоренца лежит в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, и равна по величине

$$F = qv_{\perp}B. \quad (18.4)$$

В каждый момент времени эта сила направлена под прямым углом к  $v_{\perp}$ , то есть сила  $\vec{F}$  непрерывно поворачивает составляющую  $v_{\perp}$ , не меняя ее величины. Эта сила является центростремительной, а значит движение в плоскости, перпендикулярной к полю, описывается уравнением

$$mv_{\perp}^2/r = qv_{\perp}B \quad (18.5)$$

и представляет собой равномерное движение по окружности со скоростью  $v_{\perp}$ . Здесь  $r$  – радиус кривизны траектории или радиус окружности. Из уравнения (18.5)

$$r = mv_{\perp}/qB. \quad (18.6)$$

Отсюда получаем следующие выражения для периода обращения и угловой частоты

$$T = 2\pi r/v_{\perp} = 2\pi m/qB, \quad (18.7)$$

$$\omega = 2\pi/T = qB/m. \quad (18.8)$$

Отметим, что в выражении для периода и частоты скорость частицы не входит в явном виде. Окружность, по которой движется заряженная

частица, принято называть *лармовой* окружностью, а величину  $\omega$  – *лармовой* частотой.

Сложение равномерного перемещения вдоль направления магнитного поля с равномерным вращением в перпендикулярной плоскости приводит в результате к движению частицы по винтовой линии. Направление вращения составляет левовинтовую систему с вектором  $\vec{B}$  для положительного заряда и правовинтовую систему для частицы с отрицательным зарядом.

## 18.2 Движение заряженных частиц в комбинированных полях

1) Пусть направление электрического и магнитного полей совпадают. Ориентируем ось  $Z$  вдоль направления полей и примем, что в начальный момент частица находится в точке 0 и обладает скоростью, составляющей угол  $\alpha$  с осью  $Z$ . В перпендикулярной плоскости частица движется по окружности, радиус которой определяется выражением

$$r = mv \sin \alpha / qB. \quad (18.9)$$

Вдоль оси  $Z$  движение будет равномерно ускоренным (или замедленным) с ускорением

$$a = qE/m. \quad (18.10)$$

В результате траектория частицы будет представлять собой винтовую линию с переменным шагом.

2) Несколько более сложная картина возникает, если электрическое поле ориентировано под прямым углом к магнитному. Направим ось  $Y$  вдоль электрического поля, ось  $Z$  – вдоль магнитного поля и предположим для простоты, что начальная скорость частицы лежит в плоскости  $XY$ . В этом случае вся траектория частицы также будет лежать в этой плоскости. Уравнения движения имеют вид:

$$m\ddot{x} = qB\dot{y}, \quad (18.11)$$

$$m\ddot{y} = qE - qB\dot{x}. \quad (18.12)$$

Введем вместо  $x$  новую переменную  $\tilde{x} = x - ut$ , где  $u$  – некоторая постоянная. Физический смысл такого преобразования состоит в переходе к новой системе координат, которая движется относительно исходной со

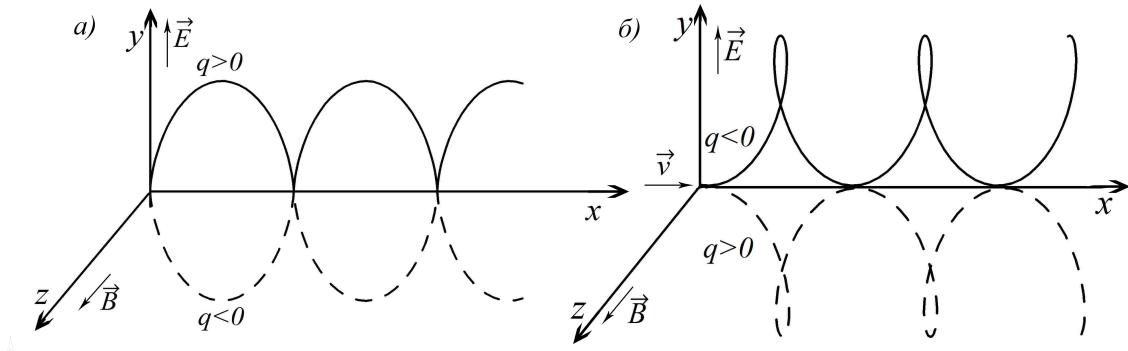


Рис. 15. Траектории движения заряженных частиц ( $q > 0$  и  $q < 0$ ) в скрещенных электрическом и магнитном полях: а) при  $v_0 = 0$ ; б) при  $v_0 > E/B$ ;

скоростью  $u$  в направлении  $X$ :

$$\ddot{x} = qB\dot{y}/m, \quad (18.13)$$

$$\ddot{y} = qE/m - qB\dot{x}/m - qBu/m. \quad (18.14)$$

Если выбрать постоянную  $u$  равной  $E/B$ , то уравнение (18.14) упрощается и система (18.13)-(18.14) принимает вид

$$\ddot{x} = qB\dot{y}/m = \omega\dot{y}, \quad (18.15)$$

$$\ddot{y} = -qB\dot{x}/m = -\omega\dot{x}. \quad (18.16)$$

Здесь и далее  $\omega$  определяется выражением (18.8). Электрическое поле исчезло из последних равенств, и они представляют собой уравнения движения частицы, находящейся под действием однородного магнитного поля. Таким образом, частица в новой системе координат  $(\tilde{x}, y)$  должна двигаться по окружности. Так как эта новая система координат сама перемещается относительно исходной со скоростью  $u = E/B$ , то результирующее движение частицы будет складываться из равномерного движения по оси  $X$  и вращения по окружности в плоскости  $XY$ . Как известно, траектория, возникающая при сложении таких двух движений, в общем случае представляет собой *трохоиду* (рис.1а). В частности, если начальная скорость равна нулю, реализуется простейший случай движения такого рода – по *циклоиде* (рис.1б).

Другой интересный случай получается, если начальная скорость частицы направлена вдоль оси  $X$  и равна  $E/B$ . При этом трохоидальная траектория вырождается в прямую линию, так как в системе координат  $(\tilde{x}, y)$  частица покоятся.

Решение уравнений (18.15) и (18.16) с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= v_0, \\ y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (18.17)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= ut + (v_0 - u) \sin(\omega t)/\omega, \\ y(t) &= (v_0 - u)(\cos(\omega t) - 1)/\omega. \end{aligned} \quad (18.18)$$

Отметим, что движение заряженных частиц под действием скрещенных электрических и магнитных полей имеет общие черты с движением в неоднородном магнитном поле. В обоих случаях результирующее движение складывается из движения по окружности и поступательного перемещения центра окружности – так называемого дрейфа. Следует, однако, иметь в виду, что в отличие от дрейфа в неоднородном магнитном поле, где скорость дрейфа имеет противоположное направление для различно заряженных частиц, в скрещенных полях направление дрейфа не зависит от знака заряда.

### 18.3 Задания к лабораторной работе

Исследуйте движение заряженной частицы массы  $m$  и заряда  $q$  (электрона) в однородных скрещенных полях: магнитном и электрическом. Магнитное поле  $B$  направлено по оси  $Z$ :  $\vec{B} = (0, 0, B)$ . Электрическое поле  $E$  – по оси  $Y$ :  $\vec{E} = (0, E, 0)$ . Частица влетает, имея начальную скорость  $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$  и  $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$ .

Запишите уравнение движения заряженной частицы в обезразмеренной форме, характерное время движения –  $1/\omega$ . Найдите аналитическое решение. Численно решите систему обезразмеренных уравнений, используя метод Рунге-Кутта.

Рассмотрите случаи:

- 1)  $E = 0$ ; изменяя магнитное поле  $B$ , выясните, как изменяется траектория частицы.
- 2)  $B = 0$ ; изменяя электрическое поле  $E$ , выясните, как изменяется траектория частицы.
- 3)  $E \neq 0$ ;  $B \neq 0$ . Нарисуйте траекторию частицы.

- 4) Варьируя величину начальной скорости  $v_0$ , выясните, как изменяется траектория движения частицы.
- 5) Определите скорость дрейфа частицы. Сравните численные решения с аналитическими. Качественно объясните результаты. Нарисуйте траектории частицы  $y(x)$ .

*Рекомендации.* При решении задачи сначала используйте следующие значения полей и начальной скорости электрона:  $B = 2 \text{ Тл}$  (в дальнейшем исследовании характера движения электрона эта величина не должна превышать  $3 \text{ Тл}$ ),  $E = 5 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ ,  $v_0 = 7 \cdot 10^4 \text{ м/с}$ .

## Список литературы

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994, 544 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1988, 446 с.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Наука, 1975, 631 с.
4. Березин И.С., Жидов Н.П. Методы вычислений. Т.1., М.: Физматгиз, 1959, 464 с.
5. Васюков В.Н., Новиков К.В. Теория электрической связи: Сборник задач и упражнений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006, 42 с.
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1977, 608 с.
7. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалов Э.Э. Численные методы анализа. М.: Наука, 1963, 368 с.
8. Дробышевич В.И., Дымников В.П., Ривин Г.С. Задачи по вычислительной математике. М.: Наука, 1980, 142 с.
9. Еремин М.А., Храпов С.С. Компьютерное моделирование физических процессов: лабораторный практикум. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005, 40 с.
10. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. М.: Просвещение, 1991, 175 с.
11. Иванов В.В. Методы вычисления на ЭВМ: Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986, 584 с.
12. Ильина В.А., Силаев П.К. Численные методы для физиков-теоретиков. Т.1., Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 132 с.
13. Ильина В.А., Силаев П.К. Численные методы для физиков-теоретиков. Т.2., Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 118 с.
14. Калиткин, Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1987, 286 с.
15. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971, 576 с.

16. Каханер Д., Моулер М., Неш С. Численные методы и программное обеспечение. М: Мир, 2001, 575 с.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1984, 832 с.
18. Крылов В.Л., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы, Т.1., М.: Наука, 1976, 304 с.
19. Куин С. Вычислительная физика. М.: Мир, 1992, 518 с.
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988, 215 с.
21. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980, 536 с.
22. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975, 392 с.
23. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров: Учеб. пособие. М.:Высш. шк., 1998, 383 с.
24. Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику: Учеб.пособие. М.: Физматлит, 2000, 296 с.
25. Самарский А.А. Введение в численные методы. М: Наука, 1987, 271 с.
26. Самарский А.А. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1989
27. Самарский А.А. Гулин А.В. Численные методы. М.:Наука, 1989, 432 с.
28. Сборник задач по методам вычислений. / Под ред. П.И. Монастырского. М.: Физматлит, 1994, 320 с.
29. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987, 368 с.
30. Справочник по специальным функциям / под редакцией Абрамович М., Стиган И. М.: Наука, 1979, 832 с.
31. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. М.:Физматлит, 2003, 304 с.
32. Хоперсов А.В. Компьютерное моделирование нелинейных волн. Учебн.пособие. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2007, 60 с.
33. Щуп Т. Прикладные численные методы в физике и технике. М.: Высшая школа, 1990, 251 с.
34. Юдович В.И. Математическое моделирование в естественных науках, 2005, 199 с. (электронный ресурс)