

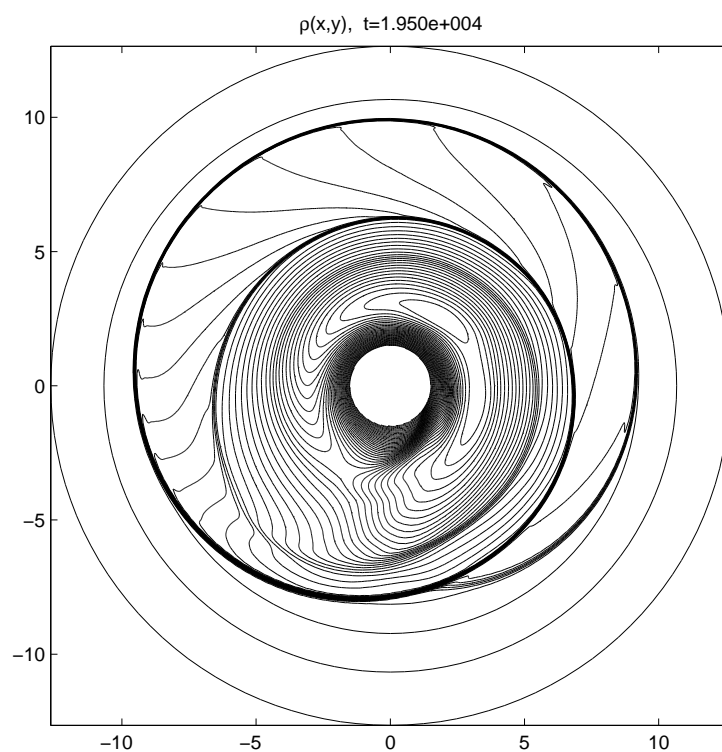
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра теоретической физики и волновых процессов

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

*Лабораторный практикум*



Составители:

канд. физ.-мат. наук *М.А. Еремин*;

канд. физ.-мат. наук *С.С. Храпов*.

Рецензент

канд. физ.-мат. наук *Н.Г. Лебедев*

Печатается по решению Учебно-методической комиссии  
физического факультета ВолГУ (протокол № 1 от 15.02.2005).

**Компьютерное** моделирование физических процессов: лабораторный практикум /составители М. А. Еремин, С. С. Храпов; ВолГУ, каф. теоретической физики и волновых процессов. — Волгоград: Издательство ВолГУ, 2005. — 36 с.

Сборник содержит описание девяти лабораторных работ по курсу «Компьютерное моделирование физических процессов», читаемому на III курсе физического факультета ВолГУ.

Работы рассчитаны на подготовленного читателя, прослушавшего лекционный курс и освоившего практические навыки реализации простейших численных методов на ЭВМ в рамках курсов «Технологии программирования» и «Программирование и математическое моделирование».

©Составление. М.А. Еремин, С.С. Храпов, 2005

©Издательство Волгоградского государственного университета, 2005

# Лабораторная работа № 1

## Интерполяция сплайнами

Естественная потребность в наличии аппроксимирующих функций, которые сочетали бы в себе локальную простоту многочлена невысокой степени и глобальную на всем отрезке  $[a, b]$  гладкость, привела к появлению сплайн-функций, или сплайнов. **Сплайны** – это специальным образом построенные кусочно-многочленные функции, которые нашли широкое применение в решении разнообразных задач. К настоящему времени они стали важной составной частью различных вычислительных методов.

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$  и известны ее значения в узлах  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Интерполяционным сплайном степени  $m$  для функции  $f(x)$  называется функция  $S_m(x)$ , обладающая следующими свойствами:

1. на каждом из частичных отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $(i = 1, \dots, n)$  функция  $S_m(x)$  является полиномом степени  $m$ ;
2. на всем отрезке  $[a, b]$  функция  $S_m(x)$  имеет непрерывные производные до порядка  $p$  включительно;
3. значения сплайна и функции совпадают в узлах:  $S_m(x_i) = f(x_i) = f_i$ ,  $(i = 0, \dots, n)$ .

Разность  $m - p$  между степенью сплайна и наивысшим порядком непрерывной на отрезке  $[a, b]$  производной называется **дефектом сплайна**. Наибольшее распространение получили кубические сплайны с дефектом, равным 1 или 2.

Для кубического сплайна  $S_3(x)$  имеет место равномерная сходимость к непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$ . Рассмотрим подробнее построение кубического сплайна с дефектом, равным 1. По определению, сплайн  $S_3(x)$  на  $i$ -м отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  является кубическим многочленом. Будем искать его в виде:

$$S_3(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad (1)$$

где  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Коэффициенты кубического сплайна (1) могут быть однозначно определены из требования выполнения условий 1 – 3. Условие совпадения значения сплайна и функции  $f(x)$  в узлах дает  $2n$

уравнений относительно  $4n$  неизвестных:

$$f_{i-1} = a_i, \quad (2)$$

$$f_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3, \quad (3)$$

где  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Потребуем непрерывности первой и второй производной во всех точках отрезка  $[a, b]$ , включая узлы:

$$\lim_{x \rightarrow x_i - 0} S'_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} S'_3(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i - 0} S''_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} S''_3(x).$$

В результате получим еще  $2(n-1)$  уравнение:

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \quad (4)$$

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}, \quad (5)$$

где  $i = 1, \dots, n-1$ .

Заметим, что система уравнений (2)-(5) недоопределена, так как число уравнений системы (равное  $4n-2$ ) меньше числа неизвестных (равного  $4n$ ). Недостающие два уравнения обычно связывают с некоторыми дополнительными условиями, накладываемыми на сплайн в граничных точках  $a$  и  $b$ . Возможно использование различных граничных условий, укажем лишь на некоторые наиболее известные из них.

1) Если в граничных точках известны значения первой производной  $f'(x_0 = a)$  и  $f'(x_n = b)$ , то естественно положить

$$b_1 = f'_0, \quad (6)$$

$$b_n + 2c_n h_n + 3d_n h_n^2 = f'_n. \quad (7)$$

Разрешая (2)-(5) относительно  $c_i$  с учетом (6) и (7), получим:

$$2c_1 + c_2 = \frac{3}{h_1}(g_1 - f'_0), \quad (8)$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3(g_i - g_{i-1}), \quad (9)$$

$$2h_{n-1}c_{n-1} + (4h_{n-1} + 3h_n)c_n = 3(3g_n - 2g_{n-1} - f'_n). \quad (10)$$

Здесь

$$g_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i},$$

а в уравнении (9) индекс  $i$  пробегает следующий ряд значений:  $i = 2, \dots, n-1$ . Уравнения (8)-(10) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, которая

легко решается с использованием метода прогонки. Построенный таким образом сплайн называется **фундаментальным**.

2) Если в граничных узлах известны значения второй производной, то можно наложить на сплайн граничные условия вида  $S''(x_0) = f''(x_0)$  и  $S''(x_n) = f''(x_n)$ . Это приводит к следующим уравнениям:

$$2c_1 = f''_0,$$

$$2c_n + 6d_n h_n = f''_n.$$

В результате уравнения (8), (10), описывающие связь величин в граничных точках, изменят свой вид, в то время как уравнение (9) останется без каких-либо изменений:

$$c_1 = \frac{f''_0}{2}, \quad (11)$$

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2(h_{n-1} + h_n)c_n = 3 \left( g_n - g_{n-1} - \frac{f''_n}{6}h_n \right). \quad (12)$$

3) Предполагая наличие нулевой кривизны на концах отрезка (вне зависимости от того, выполнены эти условия для интерполируемой функции или нет), то есть считая, что  $f''(x_0) = 0$  и  $f''(x_n) = 0$ , придем к системе уравнений, определяющей **естественный** кубический сплайн.

В заключение отметим, что термин «сплайн» происходит от английского слова «spline» (гибкая линейка, стержень) – названия приспособления, которое использовалось чертежниками для проведения гладких кривых через заданные точки. Уравнение свободного равновесия профиля линейки, как это следует из курса сопротивления материалов, имеет вид:  $S^{(4)} = 0$ . Следовательно,  $S(x)$  в промежутке между соседними узлами представляет собой многочлен третьей степени. Отсутствие изломов у линейки означает непрерывность первой и второй производной  $S(x)$ .

## Задания

- Шаг за шагом сделайте все выкладки, приведенные в этой лабораторной работе.
- Постройте интерполяционные сплайны: 1) первого; 2) второго порядка.
- Значения функции  $y = f(x)$  заданы в  $n = 10$  точках. По выбору преподавателя постройте естественный или фундаментальный сплайн. Вычислите значение сплайна в произвольной точке  $x^*$  интервала  $[a, b]$  и сравните его с точным значением функции. Постройте графики зависимости  $S_3(x)$  и  $y = f(x)$ :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $y = x^2 + 3x - 1, [-1, 1];$              | 2. $y = \ln x, [1, 4];$                           |
| 3. $y = \operatorname{sh} x, [-1, 1];$       | 4. $y = \operatorname{ch} x / (1 + x^2), [0, 2];$ |
| 5. $y = x^6 - 3x + 1, [-1, 1];$              | 6. $y = \operatorname{ch} x / 2, [-1, 1];$        |
| 7. $y = \cos(x + x^3), [0, \pi];$            | 8. $y = \ln \sin x, [1, 2];$                      |
| 9. $y = \sin x \cos 3x, [-\pi, \pi];$        | 10. $y = \sin x / x, [0, 1];$                     |
| 11. $y = x + \arcsin x, [0, 1];$             | 12. $y = x^4 + 5x^2 - 1, [-1, 1];$                |
| 13. $y = \sqrt{x}e^x, [0, 1];$               | 14. $y = x^3 + \operatorname{arctg} x, [-1, 1];$  |
| 15. $y = x \operatorname{tg} x, [0, \pi/2];$ | 16. $y = x \sin x, [0, \pi].$                     |

## Лабораторная работа № 2

### *Интегрирование быстроосциллирующих функций*

В радиотехнических задачах часто возникает необходимость вычисления интегралов вида:

$$I = \int_a^b f(x) e^{j\omega x} dx = \int_a^b f(x) \cos \omega x dx + j \int_a^b f(x) \sin \omega x dx, \quad (1)$$

Здесь  $\omega(b-a) \gg 1$ ,  $f(x)$  — некоторая достаточно гладкая функция,  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица. Функции  $f(x) \cos \omega x$  и  $f(x) \sin \omega x$  являются быстроменяющимися и имеют на отрезке  $[a, b]$  порядка  $(b-a)\omega/\pi$  нулей. При вычислении интеграла (1) с помощью стандартных квадратурных формул для обеспечения приемлемой точности на каждый полупериод колебаний подынтегральной функции необходимо взять хотя бы несколько десятков точек. Так как отрезок  $[a, b]$  содержит приблизительно  $(b-a)\omega/\pi$  нулей, требуется взять порядка  $\omega(b-a) \gg 1$  число узлов интегрирования, то есть шаг интегрирования должен быть мал ( $\omega h \ll 1$ ). Следовательно, использование стандартных формул интегрирования в случае быстроосциллирующих подынтегральных функций приводит к неоправданному росту объема вычислений.

Для существенного уменьшения машинного времени полезно рассматривать функцию  $\rho(x) = e^{j\omega x}$  как весовую. Тогда кусочно-полиномиальная интерполяция функции  $f(x)$  приводит к квадратурным формулам интерполяционного типа, которые принято называть формулами Филона.

Разобьем весь интервал интегрирования на  $n$  элементарных отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  длиной  $h_i = x_i - x_{i-1}$ . Тогда интеграл (1) может быть представлен в виде суммы интегралов по этим элементарным отрезкам:

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) e^{j\omega x} dx. \quad (2)$$

Интеграл на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  вычислим, заменяя амплитуду  $f(x)$  ее значением в середине интервала:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) e^{j\omega x} dx \approx f_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{j\omega x} dx = F_{i-1/2} \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega h_i}{2}, \quad (3)$$

где

$$F_{i-1/2} = f_{i-1/2} e^{j\omega x_{i-1/2}}, \quad x_{i-1/2} = x_i - h_i/2.$$

В результате для интеграла (1) получим квадратурную формулу, являющуюся аналогом составной квадратурной формулы средних прямоугольников:

$$I = \frac{2}{\omega} \sum_{i=1}^n F_{i-1/2} \sin \frac{\omega h_i}{2}. \quad (4)$$

По определению, погрешность вычисления интеграла находится по формуле:

$$R = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) e^{j\omega x} dx - \frac{2}{\omega} \sum_{i=1}^n F_{i-1/2} \sin \frac{\omega h_i}{2}. \quad (5)$$

Разлагая функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_{i-1/2}$  и удерживая слагаемые до первого порядка включительно, получим:

$$R = \frac{j}{\omega^2} \sum_{i=1}^n f'_{i-1/2} e^{j\omega x_{i-1/2}} \left( 2 \sin \frac{\omega h_i}{2} - \omega h_i \cos \frac{\omega h_i}{2} \right). \quad (6)$$

Если шаг интегрирования мал, то есть  $\omega h \ll 1$ , то тригонометрические функции в (6) можно разложить в ряды, которые быстро сходятся. В этом случае, как это легко показать из (6), погрешность интегрирования  $R = O(h^2)$ . Если же шаг интегрирования не слишком мал, то есть  $\omega h \leq 1$ , то оценка погрешности интегрирования дает:  $R = O(n\omega^{-2}f')$ . Следовательно, для малости погрешности интегрирования необходимо, чтобы производная  $f'$  была мала.

Поэтому для построения более точных формул приходится использовать более сложные виды интерполяции амплитудной функции  $f(x)$ . Например, заменяя  $f(x)$  на каждом из элементарных отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  линейной функцией

$$f(x) \approx f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} (x - x_{i-1}),$$

получим квадратурную формулу, являющуюся аналогом формулы трапеций:

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{2} (A_i f_{i-1} + B_i f_i) e^{i\omega x_{i-1/2}}, \quad (7)$$

где

$$A_i = \frac{\sin \psi_i}{\psi_i} + j \frac{\psi_i \cos \psi_i - \sin \psi_i}{\psi_i^2}, \quad B_i = \frac{\sin \psi_i}{\psi_i} - j \frac{\psi_i \cos \psi_i - \sin \psi_i}{\psi_i^2},$$

$$\psi_i = \frac{\omega h_i}{2}.$$

Оценка погрешности интегрирования по формуле (5) при  $\omega h \leq 1$  показывает, что  $R = O(n\omega^{-3}f'')$ . Она мала, если амплитудная функция  $f(x)$  на всем интервале интегрирования ведет себя приблизительно как линейная функция.

### Задания и контрольные вопросы

1. Получите квадратурную формулу Филона (3).
2. Покажите, что погрешность интегрирования выражается формулой (6).
3. Вычислите значение определенного интеграла по одной из квадратурных формул и оцените его точность:

1.  $\int_0^2 e^{-x^2} \sin 10x \, dx;$

3.  $\int_2^4 \frac{\sin 8x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx;$

5.  $\int_1^2 \frac{x \cos 20x}{x+2} \, dx;$

7.  $\int_{-1}^1 \frac{\sin 13x}{\sqrt{x^2+2}} \, dx;$

9.  $\int_0^1 \frac{e^{-x} \sin 12x}{x+10} \, dx;$

11.  $\int_0^1 \frac{\sin 6x}{x^4+1} \, dx;$

13.  $\int_{-1}^1 e^{-2x} \cos 22x \, dx;$

15.  $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x \sin 15x}{2x+3} \, dx;$

2.  $\int_0^1 e^{-x^2} \cos 5x \, dx;$

4.  $\int_0^3 \frac{\sin 13x}{x^2+4} \, dx;$

6.  $\int_{-1}^1 \frac{\cos 9x}{x^4+1} \, dx;$

8.  $\int_{-1}^1 \frac{\cos 15x}{x^2+1} \, dx;$

10.  $\int_0^4 e^{-x^2} \cos 7x \, dx;$

12.  $\int_0^2 \sqrt{x} \sin 13x \, dx;$

14.  $\int_0^1 \frac{\sqrt{2-x} \cos 11x}{x^4+1} \, dx;$

16.  $\int_{-1}^2 \frac{\sin x \cos 4x}{4x^2+1} \, dx.$

### Лабораторная работа № 3

*Квадратурные формулы наивысшего порядка точности*



Рассмотрим задачу вычисления интегралов вида:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx, \quad (1)$$

где  $\rho(x)$  – некоторая весовая функция,  $f(x)$  – функция действительного переменного,  $[a, b]$  – любой конечный или бесконечный отрезок числовой оси.

Приближенное значение интеграла (1) часто ищут в виде линейной комбинации значений функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ :

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (2)$$

Равенство (2) называют квадратурной формулой, определяемой узлами  $x_k$  и коэффициентами  $A_k$ . Существуют различные подходы к построению квадратур.

Допустим, по каким-либо причинам заранее известна таблица значений функции  $f(x_k)$  подынтегральной функции  $f(x)$  в узлах  $x_k$ . Тогда по заданной системе узлов и таблице значений можно построить интерполяционный полином Лагранжа

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n l_k^{(n)}(x) f(x_k), \quad l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_k^n(x)}{\omega_k^n(x_k)}, \quad (3)$$

где

$$\omega_k^n(x) = \frac{\omega_n(x)}{x - x_k}, \quad \omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k),$$

и положить в интеграле (1)

$$f(x) \approx L_{n-1}(x).$$

В результате получим приближенное равенство (2), в котором коэффициенты  $A_k$  представляют собой интегралы от интерполяционных коэффициентов Лагранжа:

$$A_k = \int_a^b \rho(x) l_k^{(n)}(x) dx. \quad (4)$$

Квадратурные формулы, у которых коэффициенты определяются равенствами (4), называются интерполяционными. При фиксированном числе узлов  $n$  построенная квадратура является точной для всех полиномов степени, не превышающей  $n - 1$ . Таким образом, для повышения точности

интегрирования необходимо разбивать отрезок интегрирования на достаточно большое количество частей. Однако возможны и другие способы повышения точности квадратурной формулы.

В квадратурной формуле (2) можно считать неизвестными не только коэффициенты  $A_k$ , но и узлы  $x_k$ . Поэтому естественно стремиться к повышению точности интегрирования при фиксированном числе узлов  $n$  за счет наилучшего выбора  $A_k$  и  $x_k$ . Если по условию задачи существует выбор узлов и функция  $f(x)$  обладает высокой степенью гладкости, то для интегрирования следует использовать квадратурные формулы типа Гаусса.

При  $\rho(x) \geq 0$  установлено (см., напр., [3]), что квадратурную формулу (2) можно сделать точной для всех полиномов  $G(x)$  степени  $2n - 1$  (отсюда и название – «квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности»). Для этого необходимо и достаточно, чтобы на отрезке  $[a, b]$  многочлен  $\omega_n(x)$  был ортогонален по весу  $\rho(x)$  ко всем многочленам  $G(x)$  степени меньше  $n$ , т. е.

$$\int_a^b \rho(x) \omega_n(x) G(x) dx = 0.$$

**Формула Гаусса.** При постоянной весовой функции  $\rho(x) = 1$  получается квадратурная формула Гаусса

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (5)$$

узлами которой являются корни многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Коэффициенты  $A_k$  легко вычисляются по формуле

$$A_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_n(x_k)]^2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Значения узлов  $x_k$  и коэффициентов  $A_k$  приведены в [6], с. 710, табл. 25.4. Для остатка формулы Гаусса имеет место представление

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!} \left[ \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right]^2 f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [-1, 1].$$

Из выражения для остатка следует, что погрешность интегрирования быстро убывает с ростом  $n$ . Например, при интегрировании по  $n = 5$  узлам  $R_5(f) \approx 8 \cdot 10^{-10} f^{(10)}(\xi)$ .

Сделаем еще одно замечание: при вычислении интегралов вида  $\int_a^b f(x) dx$  линейным преобразованием

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$$

отрезок интегрирования  $[a, b]$  приводится к стандартному отрезку  $[-1, 1]$ .

**Вычисление интегралов вида**  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx$  **и**  $\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f(x) dx$  ( $\alpha > -1$ ).

В квадратурной формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (6)$$

имеющей наивысшую алгебраическую степень точности, узлы должны совпадать с корнями Чебышева–Эрмита степени  $n$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Значения узлов  $x_k$  и коэффициентов  $A_k$  приведены в [6], с. 718, табл. 25.10.

Ортогональными на полуоси  $[0, \infty]$  по весу  $\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}$  являются многочлены Чебышева–Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x}).$$

Узлами соответствующей квадратурной формулы являются корни многочлена Чебышева–Лагерра степени  $n$ . Значения узлов  $x_k$  и коэффициентов  $A_k$  приведены в [6], с. 717, табл. 25.9.

**Квадратурные формулы типа Гаусса для интегралов вида**  $\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} f(x) dx$ .

Для интегралов, имеющих весовую функцию  $\rho(x) = (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta}$ , используют квадратурную формулу наивысшей точности

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (7)$$

в которой узлы являются корнями многочлена Якоби степени  $n$ . При  $\alpha = \beta = 0$  многочлены Якоби совпадают с многочленами Лежандра, и формула (7) преобразуется к формуле Гаусса (5).

В частном случае, когда  $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ , за узлы  $x_k$  следует принять корни многочлена Чебышева  $T_n(x) = \cos n \arccos x$ , которые находятся по формуле

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi,$$

причем коэффициенты  $A_k$  не зависят от  $k$  и все  $A_k = \pi/n$ . В результате квадратурная формула приобретает вид

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (8)$$

Квадратурная формула (8) называется формулой Мелера.

### Задания и контрольные вопросы

1. Каким образом достигается повышение точности вычисления интегралов при фиксированном числе узлов?
2. Почему квадратурные формулы типа Гаусса называют формулами наивысшего порядка точности?
3. Вычислите значение определенного интеграла по формулам типа Гаусса по  $n = 6$  узлам и оцените точность, рассчитав интеграл по большему числу узлов  $n > 6$ . Все вычисления в программе производите с двойной точностью.

$$1. \int_0^1 \ln(1+x) dx;$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$5. \int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$7. \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x+2} dx;$$

$$9. \int_0^1 \sqrt{x} e^{-x^2} dx;$$

$$11. \int_0^{\infty} \frac{2e^{-x}}{x^2+3} dx;$$

$$13. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^4}}{1+x^2} dx;$$

$$15. \int_0^1 \frac{\lg(x+1)}{x^2+1} dx;$$

$$2. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx;$$

$$4. \int_0^3 e^{-x^2} dx;$$

$$6. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} dx;$$

$$8. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x+2} dx;$$

$$10. \int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{x+2} dx;$$

$$12. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{2+x} e^{-x^2} dx;$$

$$14. \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \cos x}{x+5} dx;$$

$$16. \int_0^1 x \ln(x+1) dx.$$

## Лабораторная работа № 4

### Приближенное вычисление несобственных интегралов

**Вычисление несобственных интегралов I и II рода.** Для приближенного вычисления сходящихся несобственных интегралов  $\int_0^{\infty} f(x) dx$ ,  $\int_a^b f(x) dx$  (в последнем интеграле функция  $f(x)$  имеет особенность в точке  $c \in [a, b]$ ) применяют достаточно простой прием, основанный на свойствах определенных интегралов. Эти интегралы допускают представление в виде:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^A f(x) dx + \int_A^{\infty} f(x) dx, \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx, \quad (2)$$

причем  $A$  выбирают настолько большим, а  $\delta$  столь малым, чтобы в пределах заданной точности интегралы  $\int_A^{\infty} f(x) dx$ ,  $\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx$  не влияли бы на результаты. Остальные интегралы в (1), (2) вычисляют стандартными методами.

*Пример 1.* Вычислить интеграл  $I = \int_0^{\infty} 1/(x^3 + 1) dx$  с точностью  $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$ . Сделаем оценку верхнего предела интегрирования:

$$I = \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} < \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2A^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, имеем  $A = 1/\sqrt{\varepsilon} = 10$ . Поэтому приближенно полагаем  $I = \int_0^{\infty} 1/(x^3 + 1) dx \approx \int_0^{10} 1/(x^3 + 1) dx$  и вычисляем последний интеграл с точностью  $\varepsilon/2$ .

**Метод Конторовича для вычисления несобственных интегралов II рода.** Для нахождения численного значения несобственных интегралов II рода часто применяют метод выделения особенностей, предложенный Л.В. Конторовичем. Этот метод состоит в выделении из подынтегральной функции  $f(x)$  в несобственном интеграле  $\int_a^b f(x) dx$  некоторой функции  $g(x)$ , имеющей те же особенности в точке  $c \in [a, b]$ , что

и  $f(x)$ , причем эта функция должна быть легко интегрируемой, а разность  $f(x) - g(x)$  не должна иметь особенности при  $x = c$ , то есть  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = 0$ .

Опишем алгоритм построения функции  $g(x)$  в случае, когда  $f(x)$  имеет особенность степенного вида:

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{(x-c)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3)$$

Функция  $\psi(x)$  разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = c$ , и полагаем

$$g(x) = \psi(x) = \psi(c) + \frac{\psi'(c)}{1!}(x-c) + \dots + \frac{\psi^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad (4)$$

причем удерживаем в разложении столько слагаемых, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\psi(x) - g(x)}{(x-c)^\alpha} = 0. \quad (5)$$

Данный предел может быть легко вычислен с использованием правила Лопиталя. Таким образом, исходный интеграл допускает представление в виде:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{g(x)}{(x-c)^\alpha} dx + \int_a^b \frac{\psi(x) - g(x)}{(x-c)^\alpha} dx. \quad (6)$$

Первый интеграл в (6) вычисляется аналитически, а второй находится численно по какой-либо квадратурной формуле. При  $x = c$ , как это следует из (5), подынтегральная функция не имеет особенности и непрерывна вместе со своими  $n$  производными.

*Пример 2.* Вычислить интеграл:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Подынтегральную функцию запишем в виде:

$$f(x) = \frac{(1-x)^{-1/2}}{\sqrt{x}}.$$

Особой точкой является точка  $c = 0$ . Для того чтобы выполнялось условие (5), в разложении функции  $\psi(x) = (1-x)^{-1/2}$  достаточно удержать одно слагаемое. Тогда исходный интеграл разбивается на два следующим образом:

$$\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{0.5} \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_0^{0.5} \frac{(1-x)^{-1/2} - 1}{\sqrt{x}} dx.$$

Первый интеграл допускает аналитическое вычисление, а значение второго находится по квадратурным формулам, причем при  $x = 0$  подынтегральная функция обращается в нуль.

### Задания и контрольные вопросы

1. Каким образом вычисляются несобственные интегралы I рода?
2. В чем состоит метод Конторовича для нахождения значений несобственных интегралов II рода?
3. Вычислите несобственные интегралы I рода, используя квадратурную формулу Симпсона, с точностью  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ . Аналитически определите верхний предел интегрирования –  $A$ . Примечание: результат интегрирования не должен зависеть от  $A$ .

$$1. \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx;$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3(x+1)} dx;$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+x+1)^{3/2}} dx;$$

$$7. \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{3x}-3} dx;$$

$$2. \int_0^{\infty} e^{-5x} \sin x dx;$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+5x)^6} dx;$$

$$6. \int_0^{\infty} \frac{x}{x^5+1} dx;$$

$$8. \int_0^{\infty} \frac{1}{(10x^2+1)^3} dx.$$

4. Используя метод Конторовича, найдите значение несобственных интегралов II рода с использованием квадратурной формулы Симпсона и оцените погрешность интегрирования:

$$1. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}};$$

$$3. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(e^{x/2}+3)}};$$

$$5. \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt{x(x^2-9)}};$$

$$7. \int_1^4 \frac{\sin x}{\sqrt{x^2-1}} dx;$$

$$2. \int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt[4]{(1-x)^3}};$$

$$4. \int_{0.5}^1 \frac{\ln x}{1-x} dx;$$

$$6. \int_{0.5}^4 \frac{x^3 \cos(x/2)}{\sqrt{x^2-1}} dx;$$

$$8. \int_0^1 \frac{x \arcsin x}{(x^2-1)^{3/2}} dx.$$

### Лабораторная работа № 5

#### *Исследование параметрического резонанса*

Параметрический резонанс может возникнуть в незамкнутых колебательных системах, параметры которых изменяются под действием внешних

воздействий. Простейшим примером подобной системы является маятник, точка подвеса которого колеблется в вертикальном направлении.

Одномерный осциллятор, собственная частота которого изменяется со временем, описывается уравнением:

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2[1 + h \cos(\gamma t)]x = 0, \quad (1)$$

где  $\omega_0$  – собственная частота незатухающих колебаний,  $\gamma$  – частота изменения собственной частоты незатухающих колебаний как параметра системы,  $\sqrt{h}\omega_0$  – амплитуда изменения частоты собственных колебаний. Постоянная  $h$  по смыслу задачи является малой величиной:  $h \ll 1$ . Уравнения вида (1) в математической физике называются уравнениями Матье.

Параметрический резонанс заключается в росте амплитуды колебаний, который возникает при частотах изменения параметра системы, близких к значениям вида  $\gamma = 2\omega_0/n + \varepsilon$ , где  $n$  – любое целое число,  $|\varepsilon| \ll 2\omega_0/n$ . Наиболее интенсивным по скорости роста амплитуды колебаний и широким по интервалу частот, в котором он возможен, является резонанс первого порядка  $n = 1$ . Ширина резонансных областей с увеличением  $n$  уменьшается как  $h^n$ , так же происходит значительное уменьшение скорости роста колебаний.

Используя метод медленно меняющихся амплитуд, можно показать, что резонанс первого порядка имеет место при выполнении условия (см., напр., [4]):

$$|\varepsilon| \leq \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} + O(h^2). \quad (2)$$

Обратим внимание на то, что при наличии трения в системе ( $\lambda \neq 0$ ), резонанс наблюдается не при сколь угодно малой амплитуде  $h$ , а лишь начиная с определенного порога, который легко найти из (2):

$$h_{crit} = \frac{4\lambda}{\omega_0}.$$

Более слабым и узким является резонанс второго порядка  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ , оценка ширины которого в случае отсутствия трения имеет вид:

$$|\varepsilon| \leq \frac{5}{24}h^2\omega_0 + O(h^3).$$

Можно предположить, что при действии диссипации граница резонанса будет сужаться и, возможно, смещаться. Основной целью Вашей работы является: во-первых, определение скорости роста амплитуды колебаний при резонансе; во-вторых, сравнение теоретических границ резонанса первого и второго порядка с границами, определенными в результате интегрирования



уравнений движения; и в третьих, определение границ резонанса второго порядка при наличии трения в колебательной системе.

Для удобства выберем систему единиц, в которой собственная частота незатухающих колебаний равна единице. Введем безразмерное время  $\tau = t\omega_0$  и безразмерный параметр трения  $\Lambda = \lambda/\omega_0$ . Уравнение (1) приобретает форму

$$\ddot{x} + \Lambda \dot{x} + [1 + h \cos(\Gamma\tau)]x = 0, \quad (3)$$

где  $\Gamma = \gamma/\omega_0 = 2/n + \epsilon$ ,  $\epsilon = \varepsilon/\omega_0 \ll 2/n$ .

Уравнение Матье является обыкновенным линейным уравнением с периодическими коэффициентами. Теория таких уравнений и систем была разработана Г. Флоке и А.М. Ляпуновым. Кратко отметим основные результаты, относящиеся к уравнению (3) (см. [8]).

**Теорема Флоке – Ляпунова.** Уравнение (3) с периодическими коэффициентами имеет фундаментальную систему решений вида

$$x_1(\tau) = e^{k_1\tau} \cdot p_1(\tau), \quad x_2(\tau) = e^{k_2\tau} \cdot p_2(\tau), \quad (4)$$

либо вида

$$x_1(\tau) = e^{k\tau} \cdot p_1(\tau), \quad x_2(\tau) = e^{k\tau} \cdot [\tau p_1(\tau) + p_2(\tau)], \quad (5)$$

где  $p_i(\tau)$  – периодические с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\Gamma}$$

функции,  $k_i$ ,  $k$  – постоянные. Легко видеть, что при сдвиге на период решения вида (4) умножаются на некоторую постоянную  $\rho$ :

$$x(\tau + T) = \rho \cdot x(\tau).$$

Числа  $k_1$ ,  $k_2$  называются характеристическими показателями (показателями Ляпунова), а числа  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  – мультипликаторами. Связь между мультипликаторами и характеристическими показателями определяется соотношениями:

$$\rho_1 = e^{k_1 T}, \quad \rho_2 = e^{k_2 T}.$$

Пусть  $X(\tau)$  – фундаментальная матрица уравнения (3), то есть

$$X(\tau) = \begin{pmatrix} x_1(\tau) & x_2(\tau) \\ \dot{x}_1(\tau) & \dot{x}_2(\tau) \end{pmatrix}.$$

В силу того, что функции  $x_1(\tau + T)$ ,  $x_2(\tau + T)$  – суть решения уравнения (1), матрица  $X(\tau + T)$  также будет фундаментальной. Определитель этой матрицы равен вронскиану фундаментальных решений, поэтому не

обращается в нуль. Следовательно, существует постоянная не сингулярная матрица  $C$  такая, что

$$X(\tau + T) = X(\tau) \cdot C. \quad (6)$$

Матрица  $C$  приводится либо к диагональному виду, либо к жордановой нормальной форме. Из соотношения (5) следует, что мультипликаторы  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  являются собственными значениями матрицы  $C$  и они могут быть найдены из уравнения

$$\det[X(T) - \rho X(0)] = 0. \quad (7)$$

Мультипликаторы  $\rho_1$  и  $\rho_2$  связаны между собой отношением:

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = e^{-\Lambda T}. \quad (8)$$

Итак, для нахождения мультипликаторов необходимо построить любые два линейно независимых решения уравнения (3). Требуемые решения могут быть найдены путем численного интегрирования уравнения (3) на интервале  $[0, T]$  с линейно независимыми начальными условиями вида

$$x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0 \quad (9)$$

и

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1. \quad (10)$$

В заключение отметим, что параметрическому резонансу соответствует случай  $|\rho_1| > 1$  или  $|\rho_2| > 1$ .

### Задания и контрольные вопросы

1. В чем состоит явление параметрического резонанса? Приведите систем, в которых он наблюдается.
2. При каких частотах изменения параметра системы наблюдается параметрический резонанс? Почему наиболее сильно выражен резонанс первого порядка?
3. Перечислите все режимы колебаний, описываемые уравнением (1).
4. Получите уравнение (3).
5. Составьте программу, численно решающую задачу Коши методом Рунге – Кутты 4-го порядка точности.
6. Исследуйте режимы колебательной системы при отсутствии трения  $\Lambda = 0$  и  $\epsilon = 0$ . Положите  $n = 1$ . Параметр  $h$  выберите с помощью преподавателя. Постройте график зависимости  $x(\tau)$ , проинтегрировав уравнения движения на 30–40 периодах колебаний.

7. Постройте два линейно-независимых решения уравнения (3), используя начальные условия (9), (10) и решая алгебраическое уравнение (7), вычислите мультипликаторы. Модифицируйте Вашу программу таким образом, чтобы в ней автоматически определялись границы резонанса. Интервал изменения параметра  $\epsilon$  подберите исходя из теоретической оценки (2). Не забывайте, что необходимо рассмотреть случаи  $\epsilon < 0$  и  $\epsilon \geq 0$ . Постройте зависимость  $\alpha(\epsilon)$ . Объясните расхождение полученных границ резонанса с теоретическими.
8. Проведя серию вычислительных экспериментов, определите границу резонанса первого порядка при наличии трения  $\Lambda$  в колебательной системе. Постройте зависимость  $\alpha(\epsilon)$  при различных значениях коэффициента трения  $\Lambda$ . Сравните полученные границы резонанса с теоретическими.
9. Реализуйте в Вашей программе автоматическое определение резонансной области в плоскости параметров  $(\epsilon, \Lambda)$ , а также запись величин  $\epsilon$ ,  $\Lambda$  и  $\alpha$  в файл «reson.dat». Используя программы *MathLab*, *Maple* или *Surfer*, постройте в резонансной области линии постоянного инкремента  $\alpha = \alpha(\epsilon, \Lambda)$ .
10. Прodelайте задания 6–8 для резонанса второго порядка  $n = 2$ .

## Лабораторная работа № 6

### *Уравнение теплопроводности*

Типичным представителем уравнений в частных производных параболического типа является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где  $T$  — температура,  $D$  — коэффициент теплопроводности,  $t$  и  $x$  — время и пространственная координата соответственно. Уравнение (1) описывает медленное перераспределение температуры в одномерной среде, происходящее неволновым диффузионным образом через хаотическое неупорядоченное движение переносчиков тепла. Отметим, что уравнение (1) с аналогичным успехом описывает любой медленный диффузионный процесс и в каждом конкретном случае имеет соответствующее название. Например, уравнение, описывающее перераспределение концентрации примеси в среде, называется уравнением диффузии. Характерная особенность решения уравнения (1) заключается в том, что всякое неоднородное начальное

распределение  $T(x, t = 0)$ ,  $0 \leq x \leq L$  не переносится вдоль  $x$  в виде волны, а постепенно «размазывается», так что происходит выравнивание распределения  $T(x)$ .

В традиционном конечноразностном подходе переменная  $T$  дискретизируется и ассоциируется с узлами пространственной сетки  $x_i$  и временной сетки  $t_n$ :  $T = T(x_i, t_n) = T_i^n$ . Для аппроксимации первой производной по времени требуется использовать значения  $T$  в двух или более различных моментах времени —  $T^n$  и  $T^{n+1}$ , и как минимум, три значения  $T_{i-1}$ ,  $T_i$ ,  $T_{i+1}$  для аппроксимации второй производной по пространственной координате. Соответственно, разностные схемы оказываются двух- (и более) слойными по времени и трех- (и более) слойными по координате. В зависимости от того, на каком временном слое аппроксимируется правая часть уравнения (1), различают явные и неявные схемы.

#### *Явная схема*

Простейшая явная схема имеет вид

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = D \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2}, \quad (2)$$

где  $\tau$  и  $h$  — шаги по времени и координате,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $N = L/h$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Для удобства мы здесь выбрали однородную пространственно-временную сетку:  $\tau = t_{n+1} - t_n = \text{const}$ ,  $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$  для любых  $i$  и  $n$ .

Если известно распределение  $T_i$  на  $n$ -м временном слое, то значение  $T^{n+1}$  в каждом  $i$ -м узле определяется из (2) явным образом:

$$T_i^{n+1} = \frac{\tau D}{h^2} T_{i+1}^n + \left(1 - 2\frac{\tau D}{h^2}\right) T_i^n + \frac{\tau D}{h^2} T_{i-1}^n. \quad (3)$$

Значения  $T$  в узлах  $i = 1$  и  $i = N - 1$ , примыкающих к граничным, вычисляются с использованием граничных условий в точках  $i = 0$  и  $i = N$ .

Схема (2) *условно устойчива*. Иначе говоря, при достаточно больших шагах интегрирования по времени  $\tau$ , превышающих характерное диффузионное время  $t_{diff} \sim h^2/D$ , за которое возмущение переносится на расстояние  $\sim h$  диффузионным образом, численное решение начинает неограниченно расти, так что спустя конечное число шагов происходит переполнение (*overflow*) и остановка расчета. Это явление называется *численной неустойчивостью* и связано с тем, что в схеме учитывается поступление информации в узел  $i$  только от соседних узлов  $i - 1$  и  $i + 1$ , в то время как при  $\tau > t_{diff}$  информация должна поступать также и от более удаленных узлов. Анализ устойчивости схемы (2) дает точную границу [3], [9], [10]

$$\tau \leq \frac{h^2}{2D}. \quad (4)$$

### Неявная схема

В неявной схеме переменные на  $n + 1$ -м временном слое задействованы в трех соседних узлах

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = D \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2}, \quad (5)$$

поэтому явно выразить  $T^{n+1}$  через известные  $T^n$  нельзя. Система алгебраических уравнений (5) относительно неизвестных  $T^{n+1}$  решается методом прогонки. Напомним суть метода.

Решение для  $T_i^{n+1}$  ищется в виде

$$T_i^{n+1} = A_{i+1}T_{i+1}^{n+1} + B_{i+1}, \quad (6)$$

где  $A_{i+1}$  и  $B_{i+1}$  — прогоночные коэффициенты. Прогонка начинается с узла  $i = 0$ . При этом из левого граничного условия определяются коэффициенты  $A_1$  и  $B_1$ .

Если граничное условие задано в виде  $T(x = 0, t) = \varphi_1(t)$ , то полагаем

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \varphi_1(t_{n+1}) = \varphi_1^{n+1}. \quad (7)$$

Если задано граничное условие второго рода

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = f_1(t),$$

то приближенно полагаем

$$A_1 = 1, \quad B_1 = -hf_1(t_{n+1}) = -hf_1^{n+1}. \quad (8)$$

Подставляя (6) в систему (5), получаем рекуррентные уравнения для определения  $A$  и  $B$ :

$$A_{i+1} = \frac{\tau D}{h^2 + \tau D(2 - A_i)}, \quad B_{i+1} = \frac{h^2 T_i^n + \tau D B_i}{h^2 + \tau D(2 - A_i)}. \quad (9)$$

Прогоняя «вперед» по формулам (9), начиная с первых  $A_1$  и  $B_1$  из (7) или (8), находим все  $A$  и  $B$  вплоть до  $A_N$  и  $B_N$ . Правое граничное условие используем для того, чтобы начать прогонку «назад».

Если задано  $T(x = L, t) = \varphi_2(t)$ , то

$$T_N^{n+1} = \varphi_2^{n+1}. \quad (10)$$

Если задано  $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = f_2(t)$ , то с некоторой погрешностью

$$T_N^{n+1} = \frac{hf_2^{n+1} + B_N}{1 - A_N}. \quad (11)$$

Далее по формулам (6) прогоняем «назад», от  $i = N - 1$  до  $i = 1$  и находим все  $T_i^{n+1}$ .

Схема (5) абсолютно устойчива, т. е. устойчива *при любом шаге  $\tau$* . Это связано с тем фактом, что в уравнениях (5) переменные  $T_i^{n+1}$  самозацепляются. Если изменить значение  $T$  в некотором узле  $(i, n)$ , то это приведет к тому, что изменятся значения на всем  $n + 1$ -м временном слое, а не только в узлах  $(i - 1, n + 1)$  и  $(i + 1, n + 1)$ , как в случае явной схемы. Другими словами, информация в каждый узел сетки попадает не только от смежных узлов, но и от всех узлов в целом вне зависимости от величины шага  $\tau$ , и поэтому ограничений на шаг интегрирования не возникает.

### Контрольные вопросы

1. Выведите рекуррентные уравнения (9).
2. Найдите погрешность, с которой аппроксимируются граничные условия второго рода (8) и (11).
3. Найдите порядок аппроксимации схем (2) и (5) по времени и по пространству.
4. Докажите условие устойчивости явной схемы (4). *Указание:* решение (2) ищите в виде  $T_i^n \sim q^n \exp\{jkih\}$  (здесь  $j$  — мнимая единица). Очевидно, схема устойчива, когда  $|q|$  не превышает единицу ни для одного  $k$ .
5. Докажите, что схема (5) абсолютно устойчива.

### Задания

Численно решите уравнение теплопроводности (1) с помощью как явной, так и неявной схем. Сравните результаты, полученные при использовании обеих схем. Далее по тексту  $T_\xi = \partial T / \partial \xi$ . *Указание:* расчетная область  $0 \leq x \leq 1$ ,  $h \leq 0.02$ ,  $t \leq 4$ .

1.  $T_t = T_{xx}$ . НУ —  $T(x, 0) = 0$ . ГУ —  $T_x(0, t) = 0$ ,  $T(1, t) = 0$ .
2.  $T_t = T_{xx}$ . НУ —  $T(x, 0) = 100$  при  $x = 0.4$ , в остальных точках  $T(x, 0) = 0$ . ГУ —  $T_x(0, t) = T_x(1, t) = 0$ .
3.  $T_t = T_{xx}$ . НУ —  $T(x, 0) = 0$ . ГУ —  $T(0, t) = t/(1 + t)$ ,  $T(1, t) = 0$ .
4.  $T_t = T_{xx}$ . НУ —  $T(x, 0) = 0$ . ГУ —  $T_x(0, t) = -1$ ,  $T(1, t) = 0$ .
5.  $T_t = T_{xx}$ . НУ —  $T(x, 0) = 0$ . ГУ —  $T_x(0, t) = -2$ ,  $T(1, t) = 1$ .

6.  $T_t = (D(x)T_x)_x$ . НУ —  $T(x, 0) = 1 - x$ . ГУ —  $T_x(0, t) = T_x(1, t) = 0$ .

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x < 0.5 \\ 2, & \text{при } x \geq 0.5. \end{cases}$$

7.  $T_t = T_{xx} + f(x)$ . НУ —  $T(x, 0) = 0$ . ГУ —  $T_x(0, t) = T_x(1, t) = 0$ .

$$f(x) = \begin{cases} 100(x - 0.4)(0.6 - x), & \text{при } x \in [0.4, 0.6] \\ 0, & \text{при } x \notin [0.4, 0.6]. \end{cases}$$

## Лабораторная работа № 7

### Волновое уравнение

Волновое уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

описывает одномерные линейные волны без дисперсии. Например, колебания струны, звук в жидкости (газе) или электромагнитные волны в вакууме (в последнем случае уравнение (1) должно быть записано в векторном виде).

Общее решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (2)$$

где функции  $f$  и  $g$  определяются из начальных и граничных условий:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \\ 0 &\leq x \leq a \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = p(x).$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \varphi_1(t), \\ 0 &\leq t \leq T \end{aligned} \quad (4)$$

$$u(a, t) = \varphi_2(t).$$

Решение (2) описывает две волны, бегущие в противоположные стороны с постоянной и одинаковой скоростью  $c$  без изменения своей формы.

Простейшей разностной схемой, аппроксимирующей уравнение (1), является явная пятиточечная схема

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} &= c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}, \\ x_i &= ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad N = a/h \\ t_n &= n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, K, \quad K = T/\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

шаблон которой показан на рис. 1.

Эта схема, получившая название «крест», имеет второй порядок точности по времени и по пространственной координате и является трехслойной по времени. Ее применение предполагает, что при нахождении значений  $u^{n+1}$  на верхнем слое значения  $u^n$  и  $u^{n-1}$  уже известны. Для начала расчетов по этой схеме требуется задать значения  $u^0$  и  $u^1$ . Значения  $u^0$  определяются сразу из первого начального условия (3)

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (6)$$

Значения  $u^1$  можно определить лишь приближенно из второго начального условия (3):

$$u_i^1 = u_0(x_i) + \tau h(x_i) + O(\tau^2), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (7)$$

Граничные условия (4) аппроксимируются без труда

$$\begin{aligned} u_0^n &= \varphi_1(t_n), \\ u_N^n &= \varphi_2(t_n). \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, K \quad (8)$$

Таким образом, задача (1), (3), (4) аппроксимируется уравнениями (5)–(8).

Область устойчивости схемы «крест» ограничена условием Куранта – Фридрихса – Леви [3], [10]

$$\tau \leq \frac{h}{c}. \quad (9)$$

*Примечание.* Граничные условия II рода

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \psi_1(t) \\ 0 \leq t \leq T \\ \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) &= \psi_2(t) \end{aligned} \quad (10)$$

с погрешностью  $O(h^2)$  аппроксимируются уравнениями:

$$\begin{aligned} u_0^n &= u_1^n - h\psi_1(t_n), \\ u_N^n &= u_{N-1}^n + h\psi_2(t_n). \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, K \quad (11)$$

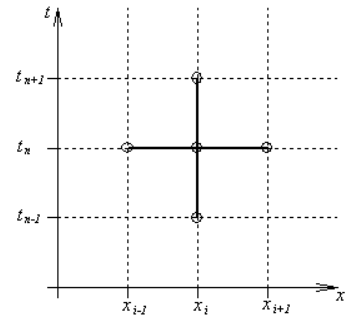


Рис. 1. Шаблон схемы «крест» для волнового уравнения

## Контрольные вопросы

1. При неоднородном шаге по времени  $\tau = \tau_n \neq const$  схема (5) уже не является справедливой. Выведите правильное разностное уравнение.



2. Покажите, что схема (5) аппроксимирует (1) со вторым порядком точности как по времени, так и по пространству.
3. Исходное волновое уравнение (1) описывает бездисперсионный волновой процесс, или, другими словами, фазовая скорость  $v = \omega(k)/k = c$  одинакова для гармонических волн с произвольным волновым числом  $k$ . Имеется ли дисперсия в разностной аппроксимации (5)? *Указание:* найдите дисперсионное соотношение для схемы (5). Решение ищите в виде  $u_i^n \sim \exp\{-j\omega n\tau + jk i h\}$  (здесь  $j$  — мнимая единица).
4. Докажите условие устойчивости (9). *Указание:* решение (5) ищите в виде  $u_i^n \sim q^n \exp\{j k i h\}$  (здесь  $j$  — мнимая единица). Очевидно, схема устойчива, когда  $|q|$  не превышает единицу ни для одного  $k$ .
5. Запишите уравнение (1) в виде закона сохранения энергии. Докажите, что схема «крест» обладает свойством консервативности по отношению к сохранению энергии.

### Задания

Численно решите волновое уравнение (1), используя схему «крест». *Указание:* расчетная область  $0 \leq x \leq 1$ ,  $h \leq 0.02$ ,  $t \leq 4$ .

1.  $u_{tt} = u_{xx}$ . НУ —  $u(x, 0) = 0.2 \sin^2 \pi x$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ . ГУ —  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .

2.  $u_{tt} = u_{xx}$ . НУ —  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = 0.2 \sin^2 \pi x$ . ГУ —  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .

3.  $u_{tt} = u_{xx}$ . НУ —  $u(x, 0) = \begin{cases} 0.2 \sin^2 3\pi x, & \text{если } x \leq 1/3 \\ 0, & \text{если } x > 1/3 \end{cases}$ ,

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} -0.6\pi \sin 6\pi x, & \text{если } x \leq 1/3 \\ 0, & \text{если } x > 1/3 \end{cases}.$$

ГУ —  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .

4.  $u_{tt} = (c(x)u_x)_x$ , где  $c(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \leq 1/2 \\ 1/2, & \text{при } x > 1/2 \end{cases}$ . НУ —

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin^2 3\pi x, & \text{при } x \leq 1/3 \\ 0, & \text{при } x > 1/3 \end{cases},$$

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} -3\pi \sin 3\pi x, & \text{при } x \leq 1/3 \\ 0, & \text{при } x > 1/3 \end{cases}.$$

ГУ —  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .

5.  $u_{tt} = u_{xx}$ . НУ —  $u(x, 0) = 0$ ,  $u_t(x, 0) = \sin 2\pi x$ . ГУ —  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .
6.  $u_{tt} = u_{xx}$ . НУ —  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ . ГУ —  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = te^{-t}$ .
7.  $u_{tt} = u_{xx} + xe^{-2x}$ . НУ —  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ . ГУ —  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ .
8.  $u_{tt} = (c(x)u_x)_x$ .  $c(x) = 3 - 2x$ . НУ —  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ . ГУ —  $u(0, t) = \begin{cases} \sin \pi t, & \text{если } t \leq 1 \\ 0, & \text{если } t > 1 \end{cases}$ ,  $u(1, t) = 0$ .

## Лабораторная работа № 8

### *Диссипативные структуры*

Организация материи в природе происходит в направлении от простого к сложному. Важным является то, что материя способна к самоорганизации, т. е. к спонтанному образованию сложных упорядоченных структур. Это свойство наиболее наглядно проявляется в биологических системах, но также присуще и системам неорганической природы.

Хотя многообразие форм и путей эволюции материи чрезвычайно велико, основные качественные закономерности процесса самоорганизации зачастую схожи, вне зависимости от его конкретной реализации, будь то в физике, химии или биологии, и могут быть описаны в рамках единых и относительно простых математических моделей. Исследованием таких моделей занимается *синергетика* — наука о самоорганизации в средах самой различной природы.

Самопроизвольный переход от простого к сложному сопровождается повышением упорядоченности и согласованности. К примеру, при определенных условиях в системе, не подверженной внешним пространственно неоднородным воздействиям, из первоначально однородного состояния возникает структура. На языке математики это означает, что пространственно однородное решение некоторой системы нелинейных уравнений теряет устойчивость, а взамен возникает устойчивое пространственно неоднородное решение.

Исторически сложилось так, что зарождение структур было впервые описано (и с тех пор активно изучается) на примере нелинейной системы диффузионного типа:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = D_i \Delta n_i + F_i(n_1, \dots, n_N), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $D_i$  — коэффициент диффузии  $i$ -й компоненты,  $F_i$  — нелинейный источник — функция, характеризующая, например, темп химической реакции, локальный рост биологических популяций или скорость нагрева вещества в теории горения. Стационарные, устойчивые пространственно неоднородные решения системы (1) принято называть *диссипативными структурами*. Считается, что на языке диссипативных структур могут быть объяснены такие разнообразные явления, как морфогенез, то есть дифференциация клеток и процесс образования многоклеточного организма, пятнистая окраска животных, кочковатая поверхность болот, возникновение сотовой структуры при конвекции. Условия формирования и наиболее типичные формы диссипативных структур — вот некоторые из вопросов, находящихся в центре внимания синергетики.

### *Модель «Подвижный хищник — подвижная жертва»*

Рассмотрим возникновение диссипативной структуры на примере двухкомпонентной диффузионной модели типа «Подвижный хищник — подвижная жертва» [11].

Динамика изменения численности жертвы  $n_1$  и хищника  $n_2$  задается уравнениями:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = b(n_1)n_1 - n_1n_2 + D_1\frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -d(n_2)n_2 + n_1n_2 + D_2\frac{\partial^2 n_2}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Здесь предполагается, что блуждания как хищников, так и жертв по одномерному ареалу происходят случайным образом и описываются диффузионными слагаемыми (крайние справа слагаемые в (2) и (3)). Хищники питаются жертвами (слагаемые  $\pm n_1n_2$ ), в то время как жертвы — вегетарианцы. Первое слагаемое в правой части (2) описывает естественный прирост жертв (в отсутствие хищников жертвы размножаются). Напротив, в отсутствие жертв хищники вымирают, на что указывает наличие слагаемого  $-d(n_2)n_2$  в уравнении (3). Функцию роста  $b(n)$  и смерти  $d(n)$  в экологических моделях часто аппроксимируют линейным или квадратичным способом. Для конкретности возьмем:

$$b(n_1) = a + bn_1 - cn_1^2, \quad (4)$$

$$d(n_2) = d_0 + d_1n_2. \quad (5)$$

Предположим, что обе популяции изолированы на некотором конечном ареале, скажем на интервале  $x \in [0, l]$ , тогда граничные условия записываются в виде

$$\left. \frac{\partial n_{1,2}}{\partial x} \right|_{0,l} = 0, \quad (6)$$

Уравнения (2), (3) с учетом (4), (5), допускают стационарные пространственно однородные решения:

$$n_1^* = \frac{bd_1 - 1 \pm \sqrt{(bd_1 - 1)^2 + 4cd_1(ad_1 + d_0)}}{2cd_1}, \quad (7)$$

$$n_2^* = \frac{-2cd_0d_1 + bd_1 - 1 \pm \sqrt{(bd_1 - 1)^2 + 4cd_1(ad_1 + d_0)}}{2cd_1^2}. \quad (8)$$

Согласно теории [11], [12], состояния (7), (8) могут стать неустойчивыми, если подвижность особей разных популяций различна:  $D_1 \neq D_2$ . Тогда возникает либо новое устойчивое стационарное, но пространственно неоднородное состояние, либо нестационарное состояние в виде периодических осцилляций. Описанная модель используется в экологии для объяснения проявления пятнистости у животных, распределенных на однородном ареале.

### Контрольные вопросы

1. Что такое диссипативная структура?
2. Приведите примеры диссипативных структур из области физики.
3. Ограничен или нет рост жертв в отсутствие хищников (см. уравнение (4))? Какими факторами определяется выбор данной функции роста?
4. Исследуйте стационарные состояния (7), (8) на устойчивость. Решение ищите в виде  $n_j = A_j \exp\{-i\omega t + ikx\}$  (здесь  $i$  — мнимая единица). Укажите область неустойчивых длин волн ( $k_{min} < k < k_{max}$ ). При каких значениях параметра  $\delta$  такая область существует? Значения остальных параметров возьмите из Задания.

### Задание

Численно исследуйте динамику и переход к установившемуся состоянию в системе «хищник – жертва», описываемой уравнениями (2), (3) с учетом (4), (5) и граничных условий (6). Воспользуйтесь явной схемой для уравнения теплопроводности (см. лабораторную работу № 6). Задайте следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} l &= 5, & b &= 16/9, & d_0 &= 1, & D_1 &= 4 \\ a &= 35/9, & c &= 1/9, & d_1 &= 2/5, & D_2 &= \delta D_1 \end{aligned}$$

Количество пространственных ячеек  $N$  в расчетной сетке подберите самостоятельно.

В качестве начального условия задайте однородное состояние (7)–(8), на которое наложено малое возмущение  $\Delta n_1(x)$  и  $\Delta n_2(x)$ :  $|\Delta n_1(x)| \ll n_1^*$ ,  $|\Delta n_2(x)| \ll n_2^*$ . Возмущение можно задавать с помощью генератора случайных чисел, а можно в виде заданной функции, например, синусоиды:  $\Delta n_j(x) = A_j \sin(2\pi x/\lambda_j)$ , где  $\lambda_j$  — длина волны возмущений,  $A_j$  — амплитуда возмущений.

Проведите эксперименты со следующими значениями параметра  $\delta = D_2/D_1$ :

$$\delta = 1.25 \cdot 10^{-2}; \quad 1.25 \cdot 10^{-3}; \quad 1.25 \cdot 10^{-4}; \quad 1.25 \cdot 10^{-5}.$$

Определите зависимость установившегося состояния от  $\delta$  и от выбора начального состояния.

## Лабораторная работа № 9

### *Движение заряженных частиц в электромагнитном поле*

Пусть в некоторой области пространства существует электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$  и магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$ . В общем случае векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  являются функциями координат и времени. Если в рассматриваемой области находится заряженная частица, то на нее действует сила Лоренца  $\vec{F}_L$ , выражаемая формулой

$$\vec{F}_L = q \left( \vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}] \right), \quad (1)$$

где  $q$  — заряд частицы  $\vec{v}$  — ее скорость.

Эта формула справедлива при следующих предположениях: размеры частицы настолько малы, что ее заряд можно считать точечным — только в этом случае можно не учитывать дополнительные силы, связанные с распределением заряда по объему частицы; у частицы отсутствует собственный магнитный момент; пренебрегается силой лучистого трения, которая существенна только при большой величине ускорения, испытываемого частицей в электромагнитном поле.

Уравнение движения частицы в заданном поле может быть написано в обычной форме

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}_L. \quad (2)$$

Если считать массу частицы  $m$  постоянной, то есть пренебречь поправками на теорию относительности, что допустимо, когда скорость движения много меньше скорости света, тогда уравнение (2) с учетом (1) принимает вид

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (3)$$

Анализ движения заряженных частиц в электромагнитных полях не представляет серьезных математических трудностей только для простейшей конфигурации поля. Однако во всех практически интересных случаях электромагнитные поля оказываются настолько сложными, что решение уравнения движения возможно только численным путем.

### *Движение в однородном магнитном поле*

Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном магнитном поле. Электрическое поле отсутствует, а начальная скорость частицы  $\vec{v}_0$  произвольно ориентирована относительно вектора  $\vec{B}$ .

Разложим вектор начальной скорости на составляющие — параллельную магнитному полю  $v_{\parallel}$  и перпендикулярную к нему  $v_{\perp}$ . Величина  $v_{\parallel}$  в процессе движения остается постоянной по величине и направлению, так как сила Лоренца, действующая на заряженную частицу, не имеет составляющей, направленной вдоль поля  $\vec{B}$ . Поэтому движение частицы складывается из двух простых движений: равномерное перемещение вдоль магнитного поля и движение в перпендикулярной полю плоскости. Сила Лоренца лежит в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, и равна по величине

$$F = qv_{\perp}B. \quad (4)$$

В каждый момент времени эта сила направлена под прямым углом к  $v_{\perp}$ , то есть сила  $\vec{F}$  непрерывно поворачивает составляющую  $v_{\perp}$ , не меняя ее величины. Эта сила является центростремительной, а значит движение в плоскости, перпендикулярной к полю, описывается уравнением

$$mv_{\perp}^2/r = qv_{\perp}B \quad (5)$$

и представляет собой равномерное движение по окружности со скоростью  $v_{\perp}$ . Здесь  $r$  — радиус кривизны траектории или радиус окружности. Из уравнения (5)

$$r = mv_{\perp}/qB. \quad (6)$$

Отсюда получаем следующие выражения для периода обращения и угловой частоты:

$$T = 2\pi r/v_{\perp} = 2\pi m/qB, \quad (7)$$

$$\omega = 2\pi/T = qB/m. \quad (8)$$

Отметим, что в выражении для периода и частоты скорость частицы не входит в явном виде. Окружность, по которой движется заряженная частица, принято называть *ларморовой* окружностью, а величину  $\omega$  — *ларморовой* частотой.

Сложение равномерного перемещения вдоль направления магнитного поля с равномерным вращением в перпендикулярной плоскости приводит

в результате к движению частицы по винтовой линии. Направление вращения составляет левовинтовую систему с вектором  $\vec{B}$  для положительного заряда и правовинтовую систему для частицы с отрицательным зарядом.

### *Движение заряженных частиц в комбинированных полях*

1) Пусть направление электрического и магнитного полей совпадают. Ориентируем ось  $Z$  вдоль направления полей и примем, что в начальный момент частица находится в точке  $0$  и обладает скоростью, составляющей угол  $\alpha$  с осью  $Z$ . В перпендикулярной плоскости частица движется по окружности, радиус которой определяется выражением

$$r = mv \sin \alpha / qB. \quad (9)$$

Вдоль оси  $Z$  движение будет равномерно ускоренным (или замедленным) с ускорением

$$a = qE/m. \quad (10)$$

В результате траектория частицы будет представлять собой винтовую линию с переменным шагом.

2) Несколько более сложная картина возникает, если электрическое поле ориентировано под прямым углом к магнитному. Направим ось  $Y$  вдоль электрического поля, ось  $Z$  — вдоль магнитного поля и предположим для простоты, что начальная скорость частицы лежит в плоскости  $XY$ . В этом случае вся траектория частицы также будет лежать в этой плоскости. Уравнения движения имеют вид:

$$m\ddot{x} = qB\dot{y}, \quad (11)$$

$$m\ddot{y} = qE - qB\dot{x}. \quad (12)$$

Введем вместо  $x$  новую переменную  $\tilde{x} = x - ut$ , где  $u$  — некоторая постоянная. Физический смысл такого преобразования состоит в переходе к новой системе координат, которая движется относительно исходной со скоростью  $u$  в направлении оси  $X$ :

$$\ddot{\tilde{x}} = qB\dot{y}/m, \quad (13)$$

$$\ddot{y} = qE/m - qB\dot{\tilde{x}}/m - qBu/m. \quad (14)$$

Если выбрать постоянную  $u$  равной  $E/B$ , то уравнение (14) упрощается и система (13)–(14) принимает вид:

$$\ddot{\tilde{x}} = qB\dot{y}/m = \omega\dot{y}, \quad (15)$$

$$\ddot{y} = -qB\dot{\tilde{x}}/m = -\omega\dot{\tilde{x}}. \quad (16)$$

Здесь и далее  $\omega$  определяется выражением (8).

Рис. 2. Траектории движения заряженных частиц ( $q > 0$  и  $q < 0$ ) в скрещенных электрическом и магнитном полях: а) при  $v_0 = 0$ ; б) при  $v_0 > E/B$  — сплошная линия,  $v_0 = E/B$  — точечная линия

Электрическое поле исчезло из последних равенств, и они представляют собой уравнения движения частицы, находящейся под действием однородного магнитного поля. Таким образом, частица в новой системе координат  $(\tilde{x}, y)$  должна двигаться по окружности. Так как эта новая система координат сама перемещается относительно исходной со скоростью  $u = E/B$ , то результирующее движение частицы будет складываться из равномерного движения по оси  $X$  и вращения по окружности в плоскости  $XY$ . Как известно, траектория, возникающая при сложении таких двух движений, в общем случае представляет собой *трохоиду* (рис. 2, а). В частности, если начальная скорость равна нулю, реализуется простейший случай движения такого рода — по *циклоиде* (рис. 2, б).

Другой интересный случай получается, если начальная скорость частицы направлена вдоль оси  $X$  и равна  $E/B$ . При этом трохoidalная траектория вырождается в прямую линию, так как в системе координат  $(\tilde{x}, y)$  частица покоится.

Решение уравнений (15) и (16) с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= v_0, \\ y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= ut + (v_0 - u) \sin(\omega t) / \omega, \\ y(t) &= (v_0 - u) [\cos(\omega t) - 1] / \omega. \end{aligned} \tag{18}$$

Отметим, что движение заряженных частиц под действием скрещенных электрических и магнитных полей имеет общие черты с движением в неоднородном магнитном поле. В обоих случаях результирующее движение складывается из движения по окружности и поступательного перемещения центра окружности — так называемого дрейфа. Следует, однако,



иметь в виду, что в отличие от дрейфа в неоднородном магнитном поле, где скорость дрейфа имеет противоположное направление для разнозарядных частиц, в скрещенных полях направление дрейфа не зависит от знака заряда.

### Задание

Исследуйте движение заряженной частицы массы  $m$  и заряда  $q$  (электрона) в однородных скрещенных полях: магнитном и электрическом. Магнитное поле  $B$  направлено по оси  $Z$ :  $\vec{B} = (0, 0, B)$ . Электрическое поле  $E$  — по оси  $Y$ :  $\vec{E} = (0, E, 0)$ . Частица влетает, имея начальную скорость  $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$  и  $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$ .

Запишите уравнение движения заряженной частицы в безразмерной форме. Характерное время движения —  $1/\omega$ . Найдите аналитическое решение. Численно решите систему безразмерных уравнений, используя метод Рунге — Кутты.

Рассмотрите случаи:

1.  $E = 0$ ; изменяя магнитное поле  $B$ , выясните, как изменяется траектория частицы.
2.  $B = 0$ ; изменяя электрическое поле  $E$ , выясните, как изменяется траектория частицы.
3.  $E \neq 0$ ;  $B \neq 0$ . Нарисуйте траекторию частицы.
4. Варьируя величину начальной скорости  $v_0$ , выясните, как изменяется траектория движения частицы.
5. Определите скорость дрейфа частицы. Сравните численные решения с аналитическими. Качественно объясните результаты. Нарисуйте траектории частицы  $y(x)$ .

*Рекомендации.* При решении задачи сначала используйте следующие значения полей и начальной скорости электрона:  $B = 2$  Тл (в дальнейшем исследовании характера движения электрона эта величина не должна превышать 3 Тл),  $E = 5 \cdot 10^4$  В/м,  $v_0 = 7 \cdot 10^4$  м/с.

## Список литературы

- [1] *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. — М.: Высшая школа, 1994.
- [2] *Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П.* Численные методы. — М.: Просвещение, 1991.
- [3] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978.
- [4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. — М.: Наука, 1988.
- [5] Сборник задач по методам вычислений. // под ред. Монастырского П.И. — М.: Физико-математическая литература, 1994.
- [6] Справочник по специальным функциям. // под ред. Абрамовиц М., Стиган И. — М.: Наука, 1979.
- [7] *Турчак Л.И.* Основы численных методов. — М.: Наука, 1987.
- [8] *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
- [9] *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975.
- [10] *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.
- [11] *Свирижев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. — М.: Наука, 1987.
- [12] *Кунин С.* Вычислительная физика. — М.: Мир, 1992.