

Soal Pengayaan Matematika SMP HOTS

CC:011218

Closed Book

Balya Rochmadi

December 1, 2018

Petunjuk:

1. Penjabaran Fungsi Polinomial

(a) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

(b) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

(c) $(a + b + c + d + e + \dots) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots + (2ab + 2ac + 2ad + \dots)$

(d) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

2. Fungsi kuadrat berbentuk akar:

(a) Jika terdapat $\sqrt{(a + b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ dengan $a > 0$ dan $b > 0$

3. Akar Kuadrat Berurutan dengan urutan minimal 4:

(a) Kasus empat urutan: $\sqrt{(a)(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 1} = a^2 + 3a + 1$

4. Teorema Sophie Germain

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$$

5. Akar-akar kuadrat

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a)(c)}}{2a}$$

6. Pangkat tiga (koreksi cc:281118)

(a) $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

(b) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

(c) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

(d) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

7. Identitas Aljabar Lanjutan

(a) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(b) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(c) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

(d) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

8. Faktorial

$$n! = (n)(n - 1)(n - 2)(n - 3) \dots (2)(1)$$

9. Koefisien Binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

10. Ekspansi Binomial

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^ny^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0y^n$$

atau

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

11. Identitas Aljabar umum

$$a^n - b^n = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

12. Sifat Keterbagian identitas Aljabar Umum

(a) apabila $x \neq y$ dan $n \in \mathbb{N}^+$ maka $x - y$ habis membagi $x^n - y^n$

(b) apabila $x \neq y$ dan $n \in \mathbb{N}^+$ maka $x + y$ habis membagi $x^n + y^n$

13. Deret dan Seri

(a) Deret Aritmatika

$$U_n = a + (n - 1)b \text{ (Suku ke-} n \text{)}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b) \text{ (Jumlah suku sampai } n\text{-suku)}$$

$$U_t = \frac{U_1 + U_n}{2} \text{ (Suku Tengah)}$$

(b) Deret Geometri

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}} \text{ (rasio)}$$

$$U_n = ar^{n-1} \text{ (Suku ke-} n \text{)}$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ (Jumlah suku ke-} n \text{ jika } r > 1)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ (Jumlah suku ke-} n \text{ jika } 0 < r < 1)$$

14. Persamaan Linier

(a) Bentuk

$$y = mx + c$$

(b) Gradien

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Karakteristik:

- i. Jika $m < 0$ maka persamaan linier tersebut definit negatif (kurva miring ke kiri)
- ii. Jika $m = 0$ maka persamaan linier tersebut konstan
- iii. Jika $m > 0$ maka persamaan linier tersebut definit positif (kurva miring ke kanan)

(c) Persamaan Linier baru

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

15. Pertidaksamaan Linier

(a) Pertidaksamaan Linier

$$ax + b \geq 0 \text{ atau } ax + b \leq 0$$

Domain : R^+

Range : R^+ atau R^-

(b) Pertidaksamaan Rasional Satu variabel

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \text{ atau } \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

Domain : R_+^+ dan $g(x) \neq 0$

Range : R^+ atau R^-

(c) Pertidaksamaan Kuadrat

i. Bentuk $ax^2 + bx + c \geq 0$ atau $ax^2 + bx + c \leq 0$

ii. Cara penyelesaian:

A. Faktorkan

B. Hasil faktor digunakan sebagai titik uji himpunan

(d) Pertidaksamaan Rasional Kuadrat

- i. Bentuk :

$$\frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} \geq 0 \text{ atau } \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} \leq 0$$
- ii. Cara penyelesaian:
 - A. Faktorkan
 - B. Sederhanakan kalau bisa
 - C. Hasil faktor digunakan sebagai titik uji himpunan

(e) Pertidaksamaan Universal

$$\sum_{k=0}^n x_k^2 \geq 0 \text{ dengan persamaan berlaku jika } x = 0$$

(f) Pertidaksamaan Rata-Rata Kuadrat, Rata-rata Aritmatika, Rata-rata Geometri, Rata-rata Harmonik.

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

(g) Maxima dan Minima menggunakan AM-GM

(h) Pertidaksamaan Segitiga

$$a^2 + b^2 \geq (a + b)^2 \text{ atau } |a| + |b| \geq |a + b|$$

(i) Pertidaksamaan Linier Dua Variabel

i. Bentuk

$$ax + by \geq 0 \text{ atau } ax + by \leq 0$$

ii. Pada soal biasanya memakai soal cerita.

(j) Pertidaksamaan Nilai Absolut

i. Nila Absolut

$$|a| \geq 0$$

Jika $a < 0$ maka $|a| = -a$

Jika $a \geq 0$ maka $|a| = a$

Kerjakan Soal Berikut! Ingat Waktu!

1. **(OSN-E)** Berapakah nilai minimum dari $x(x - 3)^3$ jika $0 < x < 1$?

2. **(Konseptual)** Buktikanlah Pertidaksamaan Berikut ini!

(a) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$

(b) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$

(c) $0 \leq \frac{b - a}{1 - ab} \leq 1$ dengan $0 \leq b \leq 1$

(d) $0 \leq ab^2 - ba^2 \leq \frac{1}{4}$

3. **(IMO-1996#1)** Misalkan a, b, c adalah bilangan bulat positif dengan $abc = 1$, buktikanlah bahwa :

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ac}{a^5 + b^5 + ac} \leq 1$$

4. **(HOTS/UNBK-K)** Panjang dan lebar persegi panjang ABCD masing-masing 30 cm dan 20 cm. Bagian tepi-tepi persegi panjang itu dipotong selebar x cm sehingga diperoleh persegi panjang PQRS. Perhatikan gambar di bawah ini. Keliling persegi panjang PQRS tidak lebih dari 52 cm. Tentukan batas-batas panjang pemotongan yang dilakukan.

5. **(HOTS/UNBK-K)** Pak Irvan memiliki sebuah mobil box pengangkut barang dengan daya angkut tidak lebih dari 500 kg. Berat pak Irvan adalah 60 kg dan dia akan mengangkut kotak barang yang setiap kotak beratnya 20 kg.

(a) Tentukan banyak kotak maksimum yang dapat diangkut oleh pak Irvan dalam sekali pengangkutan!

- (b) Jika pak Irvan akan mengangkut 115 kota, paling sedikit berapa kali kotak itu akan terangkut semua?
6. **(HOTS/UNBK-K)** Jumlah dua bilangan tidak lebih dari 120. Jika bilangan kedua adalah 10 lebihnya dari bilangan pertama, maka tentukan batas nilai untuk bilangan pertama
7. **(HOTS/UNBK-K)** Suatu model kerangka balok terbuat dari kawat dengan ukuran panjang $(x + 5)$ cm, lebar $(x - 2)$ cm, dan tinggi x cm.
- (a) Tentukan model matematika dari persamaan panjang kawat yang diperlukan dalam x .
- (b) Jika panjang kawat yang digunakan seluruhnya tidak lebih dari 132 cm, tentukan ukuran maksimum balok tersebut?
8. **(UNBK-M)** Untuk membuat cover (kulit buku) sebuah buku diperlukan kertas berbentuk persegi panjang, dengan selisih panjang dan lebarnya adalah 7cm, serta memiliki luas 450cm^2 . Hitunglah panjang dan lebar cover (kulit buku) buku itu !
9. **(UNBK-M)** Seutas kawat yang panjangnya 16 meter akan dibuat persegi panjang. Berapa ukuran persegi panjang itu agar luasnya maksimum?