Soal Pengayaan Matematika SMP HOTS
CC:301118
Closed Book

Balya Rochmadi

December 21, 2018

Petunjuk:

1. Penjabaran Fungsi Polinomial
   (a) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
   (b) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
   (c) $(a+b+c+d+e+...) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ... + (2ab + 2ac + 2ad + ...)$
   (d) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
2. Fungsi kuadrat berbentuk akar:
   (a) JIka terdapat $\sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ dengan $a > 0$ dan $b > 0$
3. Akar Kuadrat Berurutan dengan urutan minimal 4:
   (a) Kasus empat urutan: $\sqrt{(a)(a+1)(a+2)(a+3)+1} = a^2 + 3a + 1$
4. Teorema Sophie Germain

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$$

5. Akar-akar kuadrat

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a)(c)}}{2a}$$

6. Pangkat tiga (koreksi cc:281118)

   (a) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

   (b) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

   (c) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

   (d) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

7. Identitas Aljabar Lanjutan

   (a) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

   (b) $a^4 - b^4 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

   (c) $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

   (d) $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

8. Faktorial

$$n! = (n)(n-1)(n-2)(n-3)...(2)(1)$$

9. Koefisien Binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

10. Ekspansi Binomial

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

atau

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

11. Identitas Aljabar umum

$$a^n - b^n = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1}$$

12. Sifat Keterbagian identitas Aljabar Umum

    (a) apabila $x \neq y$ dan $n \in N^+$ maka $x - y$ habis membagi $x^n - y^n$

    (b) apabila $x \neq y$ dan $n \in N^+$ maka $x + y$ habis membagi $x^n + y^n$

13. Deret dan Seri

    (a) Deret Aritmatika

    $$U_n = a + (n-1)b \text{ (Suku ke-n)}$$
    $$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) \text{ (Jumlah suku sampai n-suku)}$$
    $$U_t = \frac{U_1 + U_n}{2} \text{ (Suku Tengah)}$$

    (b) Deret Geometri

    $$r = \frac{U_n}{U_{n-1}} \text{ (rasio)}$$
    $$U_n = ar^{n-1} \text{ (Suku ke-n)}$$
    $$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ (Jumlah suku ke-n jika } r > 1\text{)}$$
    $$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ (Jumlah suku ke-n jika } 0 < r < 1\text{)}$$

14. Persamaan Linier

    (a) Bentuk
    $y = mx + c$

    (b) Gradien
    $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Karakteristik:

i. Jika $m < 0$ maka persamaan linier tersebut definit negatif (kurva miring ke kiri)
ii. Jika $m = 0$ maka persamaan linier tersebut konstan
iii. Jika $m > 0$ maka persamaan linier tersebut definit positif (kurva miring ke kanan)

(c) Persamaan Linier baru
$y - y_0 = m(x - x_0)$

15. Pertidaksamaan Linier

(a) Pertidaksamaan Linier

$$ax + b \geq 0 \text{ atau } ax + b \leq 0$$

Domain : R^+
Range : R^+ atau R^-

(b) Pertidaksamaan Rasional Satu variabel

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \text{ atau } \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

Domain : R^+_-dan $g(x) \neq 0$
Range : R^+ atau R^-

(c) Pertidaksamaan Kuadrat

i. Bentuk $ax^2 + bx + c \geq 0$ atau $ax^2 + bx + c \leq 0$
ii. Cara penyelesaiaan:
   A. Faktorkan
   B. Hasil faktor digunakan sebagai titik uji himpunan

(d) Pertidaksamaan Rasional Kuadrat

i. Bentuk :
$$\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f} \geq 0 \text{ atau } \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f} \leq 0$$

ii. Cara penyelesaiaan:

A. Faktorkan

B. Sederhanakan kalau bisa

C. Hasil faktor digunakan sebagai titik uji himpunan

(e) Pertidaksamaan Universal

$\sum_{n=0}^{k} x_k^2 \gneq 0$ dengan persamaan berlaku jika $x = 0$

(f) Pertidaksamaan Rata-Rata Kuadratik, Rata-rata Artimatika, Rata-rata Geometrika, Rata-rata Harmonik.

$\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$

(g) Maxima dan Minuma menggunakan AM-GM

(h) Pertidaksamaan Segitiga

$$(a+b)^2 \leq a^2+b^2$$

16. Fungsi dan Relasi

(a) Semua fungsi adalah relasi, sebagian relasi adalah fungsi.

(b) Fungsi sebagai pemetaan x ke y

$$f : x \to y$$

(c) Banyaknya pemetaan A ke B adalah

$$n(B)^{n(A)}$$

(d) Fungsi berkorespondensi satu-satu berarti memiliki pemetaan daerah domain dan range yang sifatnya tunggal.

(e) Fungsi dapat memiliki banyak x untuk satu y tetapi tidak boleh memiliki banyak y untuk satu x.

(f) Notasi daerah fungsi

Untuk setiap domain x bilangan real, menghasilkan range y bilangan real dengan anggota tersebut.

$$f(x) : x|x \in R \& f(x) \in R$$

(g) Fungsi linier mememiliki persamaan

$$f(x) = mx + c$$

(h) Fungsi kuadrat memiliki persamaan yaitu

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(i) *Bodiless Function*

Yaitu fungsi yang tidak memiliki badan fungsi, misalkan $f(x) = f(x + y) + f(x)$

(j) *Recursive Function*

Yaitu fungsi yang memanggil dirinya sendiri Misalkan $f(x) = c + f(x)$
*fungsi rekursif memiliki bentuk yang mirip dengan fungsi tanpa badan

(k) Fungsi Rasional

Adalah fungsi yang berbentuk pecahan semisal,

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(l) Dekomposisi Fungsi Rasional Parsial

Semisal terdapat $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{5x}{x+1}$
maka akan terdapat konstanta A dan B sehingga

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{5x}{x+1} = \frac{2(x+1) + 5x(x)}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

maka,

$$\frac{5x^2 + 4x + 1}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

sehingga

$$5x^2 + 4x + 1 = A(x+1) + B(x) = Ax + A + Bx = (A+B)x + A$$

Jika $x = 0$ maka

$$5(0)^2 + 4(0) + 1 = A(0+1) + B(0) = A \text{ dan } A = 1$$

Kerjakan Soal Berikut! Ingat Waktu!

1.