

利用平板电容器测量真空介电常数

Zric 物理学系

摘要：本实验利用平行板电容器、优利德 UT601 电容表等仪器测量数据，通过选用合适的模型拟合数据，测得真空介电常数，并设计实验验证电容器倾角效应和边缘效应的影响。实验用电容表测得导线分布电容，在调节电容器上下极板平行后，分别用反比例函数和考虑了边缘效应的修正公式拟合计算真空介电常数，与理论值进行比较分析，两者相对误差分别为 9.15% 和 2.14%；将上极板调节有一定倾角后，验证了倾角带来的变化，选用合适理论方程进行拟合，得到真空介电常数与理论值相对误差 0.23%，同时定量分析了鼓轮零点和两极板夹角的不确定性对实验误差的影响。

一、引言

电容是指物体在单位电压下的能够储藏的电荷量，记为 C，国际单位是法拉（F）。电容的大小和电容器的几何形状、电容器中填充的材料的相对介电常数有关。电容器是各个领域中不可缺少的电子元件，广泛应用于各种电子产品中。

平行板电容法是测量真空介电常数 ϵ_0 一种最经典、最原始的方法。该方法操作简单，但存在引线电感、电阻以及电容器的边缘效应及倾角效应的影响，因而测量的电容值易存在一定误差，导致测得的介电常数不够精准。本实验研究平行板电容器的特性，利用平行板电容器测得数据，选用合适的模型拟合数据，计算得到真空介电常数，并探究电容器倾角效应和边缘效应的影响。

二、实验原理

1、介电介质是一种不导电的绝缘介质，在电场作用下会产生极化现象，从而在均匀介质表面上感应出束缚电荷，这样就减弱了外电场的作用。在充电的真空平行板电容器中，若两金属极板自由电荷密度分别为 $+\sigma_0$ 和 $-\sigma_0$ ，极板面积为 S，两内表面间距离为 d，而且 $S \gg d^2$ ，则电容器内部所产生的均匀电场的强度为 $E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 d}$ ，由此可以计算出电容 $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ ，通过分析 C 和 d 的关系可以得到真空介电常数 ϵ_0

2、平行板电容器边缘效应及倾角效应的修正

理想平行板电容公式为 $C = \frac{\epsilon_0 S}{d} + C_0$ ，其中 d 表示极板间距。

考虑边缘效应时，平行板电容器的电容量为^[1]，式中 L 表示极板长度（下同）

$$C = \frac{\varepsilon_0 L}{\pi} \left\{ \ln \left[\frac{\pi L}{d} + 1 \right] + \frac{\pi L}{d} + 1 \right\} + C_0 \quad (1)$$

对非平行板电容器 ($S >> d^2$)，考虑倾角效应的影响，当上下极板夹角为 θ 且忽略边缘效应时，有^[2]

$$C = \frac{\varepsilon_0 L}{\theta} \ln \left(\frac{L\theta}{d} + 1 \right) + C_0 \quad (2)$$

考虑边缘效应和非平行情况时，有^[3]

$$C = \frac{\varepsilon_0 L}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{\theta} \ln \left(1 + \frac{L\theta}{d} \right) + \ln \left[\frac{\pi \ln(1 + L\theta/d)}{\theta} + 1 \right] + 1 \right\} + C_0 \quad (3)$$

特别注意，在实际计算时，还要考虑电路中分布电容的影响，处理方法是在拟合公式后加上参数 C_0 ， C_0 表示电路中的总分布电容，这么处理实际是默认了分布电容与电容板是并联的，这可能对结果带来一定误差。

三、实验装置及过程

1、实验仪器：平行板电容器（上下两金属极板均为 $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ ，板间距通过鼓轮调节，调节范围为 $0-10\text{mm}$ ，调节精度为 0.01mm ）优利德 UT601 电容表、导线、游标卡尺（精度 0.02mm ）等。

2、实验过程：（1）打开电容表，调节调零旋钮，使电容表示数为 0。随后插上导线，观察到电容表示数在 4.6pF 到 5.2pF 间变化，对应导线的分布电容 C_{dis} ，且电极间距越小，分布电容越大，总的分布电容需要通过拟合计算测出。将两根导线接触放电，将电容器两平板也接触放电。

（2）将电容表与平行板电容器连接，粗略观察，可以看到增大极板间距，电容变小；减小极板间距，电容变大。且随极板间距减小，电容增大越来越快。

（3）调节电容器，将鼓轮调节到 0 点，通过调节上方四个角的螺丝将上下极板调至平行，随后将鼓轮示数调节至 9.000mm ，调紧固定旋钮。测量四个角上的极板间距 d ，每个角测量 5 组数据，计算两极板是否有倾角 θ 。



Fig. 1 平行板电容器模型图

(4) 将电容表档位调至 $2nF$, 利用电容突变法测量 TT_0 , 当上下极板接触时, 电容值发生突变, 超过测量范围, 此时先将电容表关闭, 再记录鼓轮零点的读数, 共测 5 组数据。(其中鼓轮零点测量精度要求为士 $0.002mm$)

(5) 利用电容表测量不同间距 d 所对应的电容量 C , 满足有 $d=TT-TT_0$, 测量时将 d 从大到小测量, 电容表档位 $200pF$, d 范围可在 $0.100-10.000mm$, 当 d 小于 $1.000mm$ 时, 测量数据更加密集。利用所得数据进行拟合分析。

(6) 验证倾角效应影响, 让上平行板右侧比左侧高 $1mm$ 左右, 用游标卡尺测四个角的间距, 每个点测 5 组数据, 计算倾角 θ 。后再次用电容突变法测量 TT_0 , 测 5 组数据。然后同上做法, 利用电容表测量不同间距 d 所对应的电容量 C , 用所得数据进行比较分析。平板电容和电容表使用前应短路放电。

四、实验结果和分析

4.1 导线分布电容 C_{dis}

在开路状态下, 将导线接入电容表, 选取电容表档位 $2nF$, 测得导线分布电容在 $4.4pF \sim 5.3pF$ 之间波动, 且会随两导线间距变化。因此, 实验过程中尽可能保持导线与电容表相对电容器不动, 固定距离测得 $C_{dis} \approx 4.6pF$ 。

4.2 平行板电容 C 与 d 关系

使用电容突变法测量得到的鼓轮零点 $TT_0 = 0.198mm$, d 满足公式 $d = TT - TT_0$ 。

测量次数	1	2	3	4	5	平均值
TT_0/mm	0.200	0.196	0.198	0.197	0.198	0.198

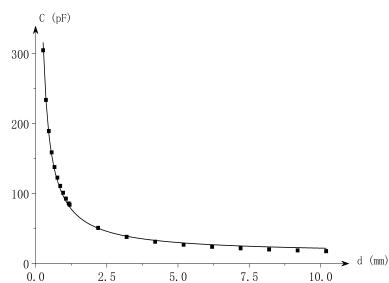


Fig. 2 反比例函数拟合曲线

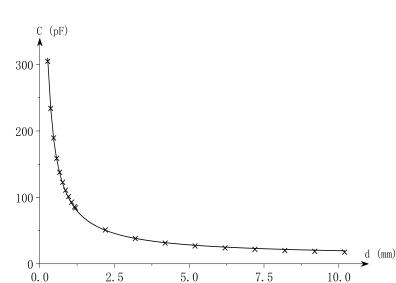


Fig. 3 计入边缘效应拟合曲线

Fig.2 使用公式 $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} + C_0$, 拟合计算得到 $C = (8.04 \pm 0.08) \times 10^{-2} \frac{1}{d} + 14.86(pF)$, 取极板面积 $S = 0.01m^2$ 代入 (下同), 计算得到 $\varepsilon_0 = \frac{k}{S} = (8.04 \pm 0.08) \times 10^{-12}(F/m)$, 分布电容 $C_0 = 14.9pF$ 。拟合 $R^2 = 0.985$,

与标准值 $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}(F/m)$ 比较, 相对误差 $\beta_1 = \frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = 9.15\%$, 可见拟合精度较低, 边缘效应的影响不可忽略。

Fig.3 考虑了边缘效应的影响, 使用公式(1)拟合得到, $\varepsilon_0 = (8.66 \pm 0.04) \times 10^{-12}(F/m)$, 分布电容 $C_0 = 9.9pF$ 。拟合 $R^2 = 0.998$ 。相对误差 $\beta_2 = \frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = 2.14\%$, 拟合精度明显高于上例, 但仍有较大误差, 推测可能是因为计算分布电容时, C_0 并不能单纯当作并联情况计入拟合公式, 存在串联的分布电容会对拟合带来误差。

理论解释: 由于平行板电容器的边缘效应会使其实际电容比不考虑边缘效应时的理想平行板电容器的电容大, 因而据此可以推断这是由于电容器的边缘效应产生了不同的电容附加值所致^[4]

4.3 倾斜角 θ 的计算

通过调节上极板的四个螺母使上极板倾斜一定角度, 使用游标卡尺测量矩形极板 4 个角上的间距, 每个点测量 5 次得到下表:

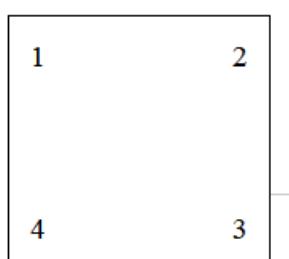


Fig. 4 测量点位示意图

点位	间距 d/mm					平均值/mm
	1	2	3	4	5	
1	9.04	9.02	9.02	9.00	9.00	9.02
2	10.08	10.08	10.10	10.10	10.08	10.09
3	10.02	10.02	10.04	10.00	10.00	10.02
4	9.02	9.04	9.02	9.00	8.98	9.01

可以看到测量间距相对平均值的偏差均小于 0.002mm, 可以认为间距调节满足要求, 且倾斜角度计算公式 $\theta = \frac{d_1 + d_4 - d_2 - d_3}{2L}$, 近似计算得到 $\theta = 0.011rad$ 。

4.4 倾斜电容板 C 与 d 关系

使用电容突变法测量得到的鼓轮零点 $TT_0 = 0.250mm$, $d = TT - TT_0$ 。

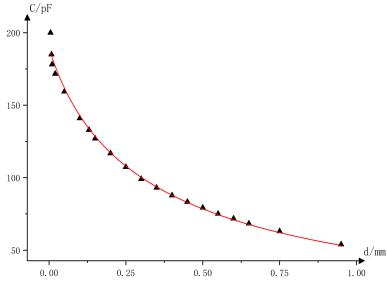


Fig. 5 公式(2)拟合曲线

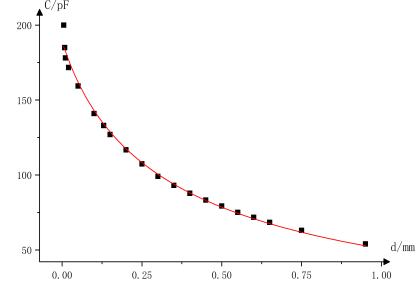


Fig. 6 公式(3)拟合曲线

Fig.4 使用公式(2)拟合, 忽略了边缘效应, 得到 $\varepsilon_0 = (8.20 \pm 0.16) \times 10^{-12} (F/m)$, 分布电容 $C_0 = 12.4 pF$, 拟合 $R^2 = 0.992$, 与标准值 $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} (F/m)$ 比较, 相对误差 $\beta_1 = \frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = 7.34\%$

Fig.5 使用公式(3)拟合得到, 得到 $\varepsilon_0 = (8.83 \pm 0.14) \times 10^{-12} (F/m)$, 分布电容 $C_0 = 15.7 pF$, 拟合 $R^2 = 0.998$, 与标准值 $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} (F/m)$ 比较, 相对误差 $\beta_2 = \frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = 0.23\%$, 可见使用公式(3)模型拟合精度要更高, 优于公式(2), 两个模型的精度差距之大, 也说明在板有倾斜角度的情况下边缘效应越发不可忽视, 这也与前述理论结果符合。

4.5 $u(TT_0)$ 和 $u(\theta)$ 对模型公式(3)误差的影响

测量次数	1	2	3	4	5	平均值
TT_0/mm	0.250	0.252	0.251	0.251	0.250	0.251

鼓轮零点 TT_0 和两极板的夹角 θ 的不确定性对理论建模带来的影响, 根据公式, 计算 $u(TT_0) = \sqrt{u_A^2(TT_0) + u_B^2(TT_0)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 (TT_{0i} - \bar{TT}_0)^2}{5 \times (5-1)} + (\frac{\alpha}{\sqrt{3}})^2} = 0.002 \text{mm}$ 。由 $u(TT_0) = 0.002 \text{mm}$ 得到 $u(d) = 0.002 \text{mm}$ 代入公式(3), 得 $\Delta\varepsilon_0 = 4.1 \times 10^{-14} F$, 对于误差贡献了大约 0.62%;

由 $u(\theta) = 0.0002 \text{rad}$ 代入公式(3)得到 $\Delta\varepsilon_0 = 1.3 \times 10^{-13} F$, 对于误差值贡献了大约 1.31%。可见对于模型公式(3), θ 的不确定度影响要大于 d 的影响。

五、 结论

(1) 接入导线后开路测量, 测得导线分布电容 C_{dis} 在 $4.4 pF \sim 5.3 pF$ 。

(2) 平行板情况下, 使用公式 $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} + C_0$, 拟合计算得到 $C = (8.04 \pm 0.08) \times 10^{-2} \frac{1}{d} + 14.86(pF)$, 相对误差 $\beta_1 = \frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = 9.15\%$, 考虑边缘效应使用公式(1)拟合得到, $\varepsilon_0 = (8.66 \pm 0.04) \times 10^{-12}(F/m)$, 总分布电容 $C_0 = 9.9pF$, 相对误差 $\beta_2 = \frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = 2.14\%$ 。公式(1)拟合精度更高。

(3) 调节上极板倾斜, 测量四个角上的极板间距, 计算得到 $\theta = 0.011rad$

(4) 倾斜情况下, 使用公式(2)拟合得到 $\varepsilon_0 = (8.20 \pm 0.16) \times 10^{-12}(F/m)$, $C_0 = 12.4pF$, 相对误差 $\beta_1 = \frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = 7.34\%$ 。使用公式(3)拟合得到 $\varepsilon_0 = (8.83 \pm 0.14) \times 10^{-12}(F/m)$, $C_0 = 15.7pF$, 相对误差 $\beta_2 = \frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = 0.23\%$ 。公式(3)拟合精度高于公式(2), 说明倾斜情况下边缘效应不可忽略, 公式(3)更好描述了电容 C 与 θ 和 d 的关系。

(5) 对于倾斜板的模型公式(3), 鼓轮零点不确定度 $u(TT_0)$ 带来的误差约 0.62%, 两极板的夹角不确定度 $u(\theta)$ 带来的误差约 1.31%。

六、参考文献

- [1] 李文, 赵威, and 王福谦. 计及边缘效应的平行板电容器单位长度电容的计算. 数学的实践与认识, 53(10):136–141, 2023.
- [2] 李建青, 马争争, and 田旭. 非平行板电容器电容和电场的两种计算方法之讨论. 大学物理, (08):21–23, 2008.
- [3] 万步勇, 张小松, and 冯庆. 非平行板电容器电容的边缘效应研究. 大学物理, 31(07):9–12, 2012.
- [4] 浦天舒, 杨旭方, 郭程, and 陈嘉欣. 电容器边缘效应对介电常数测量的影响及修正. 大学物理实验, 26(03):46–47, 2013.