

利用波耳共振仪研究一维受迫振动

Zric 物理学系

摘要：本文研究了受迫振动和共振现象，使用波耳共振仪，定量测定机械受迫振动的幅频特性和相频特性，以研究不同阻尼矩对受迫振动的影响，并给出了测量阻尼系数的方法，利用频闪方法来测定策动力与振子间的相位差。文章总结了此实验并在后文给出了对实验数据的处理与误差分析，得到了关于一维受迫振动的一些结论。

一、 引言

在机械制造和建筑工程等领域中，受迫振动所导致的共振现象引起人们极大关注。它有广泛的实用价值。因此，有必要深入研究受迫振动这一现象，为了便于理论计算并解释本质，本文将着重研究一维受迫振动。二维乃至更高维的受迫振动，如空间克拉尼图形，均可看作由多个方向上的一维受迫振动的线性或非线性叠加。

二、 实验原理

物体在周期外力的持续作用下发生的振动称为受迫振动，这种周期性的外力称为策动力。如果外力是按简谐振动规律变化，那么稳定状态时的受迫振动也是简谐振动，此时，振幅保持恒定，振幅的大小与策动力的频率和原振动系统无阻尼时的固有振动频率以及阻尼系数有关。在受迫振动状态下，系统除了受到策动力的作用外，同时还受到回复力和阻尼力的作用。所以在稳定状态时物体的位移、速度变化与策动力变化不是同相位的，而是存在一个相位差。

实验中所用波耳共振仪采用摆轮在弹性力矩作用下自由摆动，在电磁阻尼力矩作用下作受迫振动来研究受迫振动特性，可直观地显示机构振动中的一些物理现象。

数学表述如下： J 是摆轮转动惯量， b 是阻尼力矩， k 是蜗卷弹簧的回复力矩。

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + k\theta = M_0 \cos \omega t \quad (1)$$

做化简如下：定义 ω_0 为固有频率， β 为阻尼系数。

$$\omega_0^2 = \frac{k}{J}, \quad 2\beta = \frac{b}{J}, \quad m = \frac{M_0}{J} \quad (2)$$

化简得到：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = m \cos \omega t \quad (3)$$

求解该微分方程得到振动的稳定解：

$$\theta = \frac{m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad (4)$$

$$\varphi = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (5)$$

给出幅频和相频的理论曲线图：

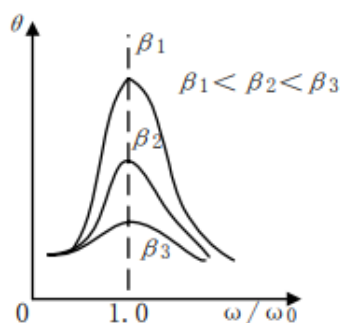


Figure 1 幅频理论曲线

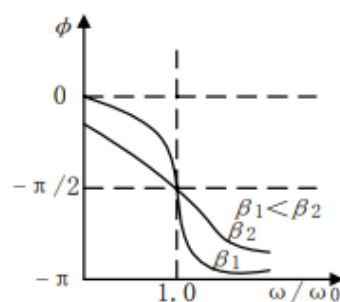


Figure 2 相频理论曲线

理论上，摆轮将在 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时发生幅频共振，此时摆轮振幅最大，在 $\omega = \omega_0$ 时，达到相频共振，相位差 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 。

三、 实验装置及过程

3.1 装置说明

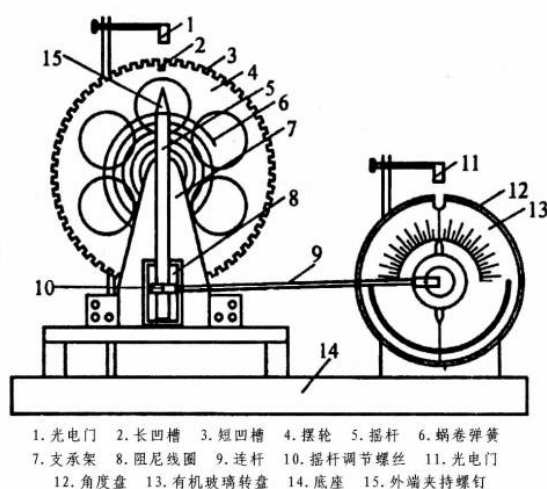


Figure 3 实验装置示意图

实验中所用 BG-2 型波尔共振仪由振动仪与电器控制箱两部分组成。振动仪部分如 Figure 1 所示，实验采用计算机软件实时测量各个物理量，测量精度分别为： $\theta \pm 0.5^\circ$ ， $\varphi \pm$

0.5° , $T_f \pm 0.2ms$

3.2 仪器调节

调节过程如下：先转动有机玻璃转盘 13，观察摇杆 8 的位置变化。发现摇杆的平衡位置对应转盘示数 $0/180^\circ$ ，也就是初始位置。同时观察光电门 11。光电门指示灯应处于常亮状态，仅在转盘转至 $90^\circ/270^\circ$ 时指示灯才熄灭，表示光电门工作正常。在调节光电门 1 时，先从正面观察，长凹槽 2 对准光电门中间。光电门 1 中实际有 2 个光电门，分别由长凹槽、短凹槽触发。位置太高，信号触发有问题；太低，可能有摩擦。又由于摆轮 4 在大角度摆动时，不是严格处于同一平面内，会有前后、上下的微小位移。所以还需要从侧面调节，光电门 1 太靠前或太靠后可能会与摆轮产生摩擦。

目测调节好仪器后，以较大初始幅度（大于 150° ）拨动摆轮，使其自由振动，用数据采集软件记录一组数据。观察振幅-时间曲线，如果发现左、右半周期的振幅值呈现逐渐减小趋势（偶尔会有小幅度波动），曲线为有少量“毛刺”的台阶状下降曲线（振幅测量精度有限所致），此时可认为装置已调好。如果出现大量“毛刺”，说明光电门的测量零点偏左或者偏右，需要水平调节光电门位置，使其正对长凹槽。

3.3 稳定读数

用衰减法测量阻尼系数时，考虑到轴承的摩擦效应，初始摆轮的角度尽量介于 $120^\circ \sim 150^\circ$ 之间，才能保证阻尼系数基本为一个稳定值^[1]

测量幅频、相频曲线读取数据时，需要先启动测量，再使摆轮振动，由于受迫振动存在衰减项，需要等衰减项振幅减小，振动稳定后再读数，读数时观察相邻的 2 个强迫力周期示数和 1 个摆轮周期示数，根据这三个示数是否一致来判断此时系统是否已达稳定。当出现多次三个示数相等时可以读数。

选取大约 18-20 个测量点读数，在接近共振时，由于振幅变化较快，测量点要适当密集一些，在振幅变化平稳时等距取点测量即可，要求相邻测量点数据的振幅相差不超过 20° ，相位差相差不超过 10° ，但也不宜太小。

四、 实验结果和分析

4.1 实验结果

(1) 0 档阻尼，指数拟合测量 β_0

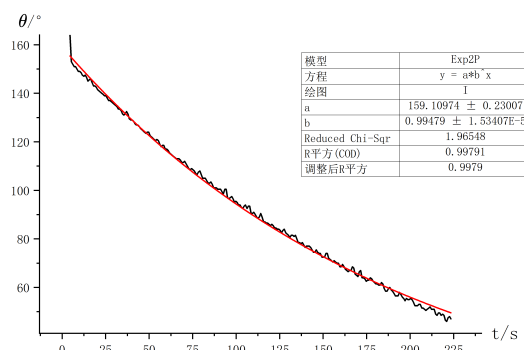


Figure 4 θ -t 关系图

结果: Figure 4 使用指数拟合, 得到 $\beta_0 = 5.22 \times 10^{-3} s^{-1}$ (保留 3 位有效数字)。

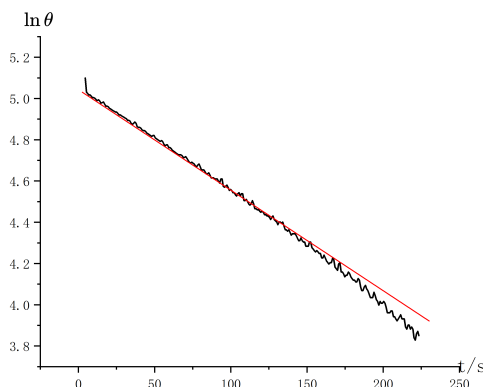


Figure 5 $\ln \theta$ -t 关系图

如 Figure 5, 作 $\ln \theta - t$ 图, 理论上应当为直线, 且斜率为 $-\beta_0$, 根据 $\ln \theta$ 末端偏离直线可以看出, β_0 会随着 θ 变化, 根据曲线上测量起点和终点处的斜率差异可以估计出变化量 $\Delta\beta_0 = 0.794 \times 10^{-3} s^{-1}$

这一现象可以由轴承摩擦的影响来说明, 轴承摩擦效应由轴承和轴承之间的摩擦力产生, 在转动速度较小时静摩擦力较大, 而在转动速度达到一定的临界值后摩擦力保持稳定^[2], 所以 β_0 会随 θ 减小而先稳定再增大, Figure 5 中振幅衰减曲线斜率变化符合该理论预期。

(2) ω_0 估算和 ω_0 不确定度估算:

根据公式 $\omega = \frac{2\pi}{T_f} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta_0^2}$, 得到 $\omega_0 = \sqrt{(\frac{2\pi}{T_f})^2 + \beta_0^2}$, 计算 ω_0 时不需要考虑 β_0 的变化, 这是因为 $\omega_0 \approx 3.95 rad/s$, $\beta_0 \approx 5.22 \times 10^{-3} s^{-1}$, $\frac{\beta_0}{\omega_0} = 0.132\%$, 基本可以忽略 β_0 的影

响，近似认为 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_f} + \frac{T_f\beta_0^2}{4\pi}$ 进行计算，此时取 $\beta_0 = 5.22 \times 10^{-3}s^{-1}$ 。

周期 T_f 的测量属于 A 类不确定度，计算公式如下：(T_f 有 4 位有效数字，不确定度保留 5 位有效数字)

$$u_A(T_f) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T}_f)^2} = 3.8512 \times 10^{-3}s \quad (6)$$

测量满足均匀分布^[1]，最小分辨 $\delta_m = 0.0002s$ ，则 B 类标准不确定度为

$$u_B(T_f) = \frac{\delta_m}{\sqrt{3}} = 1.155 \times 10^{-4}s \quad (7)$$

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial T_f} = -\frac{2\pi}{T_f^2} = -2.479s^{-1} \quad (8)$$

合成不确定度 $u(\omega_0)$

$$u(\omega_0) = \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial T}\right)^2 [u_A^2(T) + u_B^2(T)] + u^2(\beta_0)}, \quad u(\beta_0) = 1.534 \times 10^{-5}s^{-1} \quad (9)$$

计算得到不确定度 $u(\omega_0) = 9.551 \times 10^{-3}rad/s$ (保留 4 位有效数字)

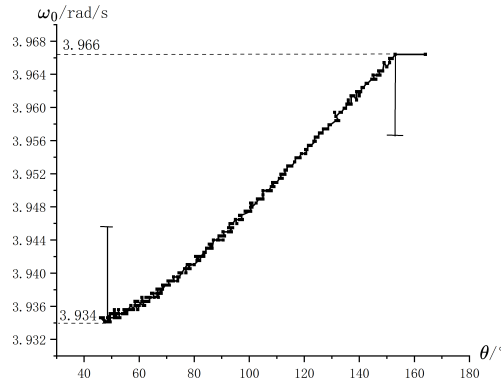


Figure 6 $\omega_0 - \theta$ 关系图

$\Delta\omega_0 = 3.200 \times 10^{-2}rad/s$, $\Delta\omega_0 > 2u(\omega_0) = 1.900 \times 10^{-2}rad/srad/s$, 根据数理统计知识，95% 置信区间要求 $\Delta\omega_0 < 2u(\omega_0)$ ，不能认为 ω_0 不变。从图像上看 ω_0 会随 θ 增大而增大，变化接近线性。

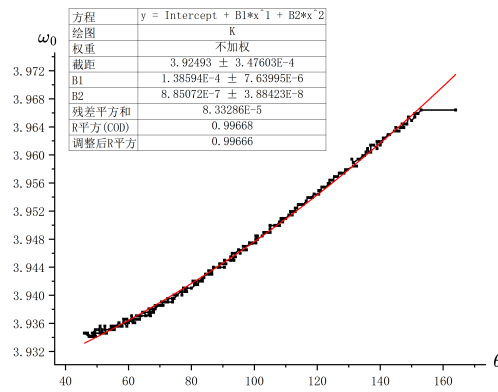


Figure 7 $\omega_0 - \theta$ 多项式拟合图

采用二阶多项式拟合得到 $\omega_0 = 8.851 \times 10^{-7}\theta^2 + 1.386 \times 10^{-4}\theta + 3.925$ ，可以看到，二次项系数较小，在后续计算用到 ω_0 时可以忽略不计，统一取 $\omega_0 = 3.956\text{rad/s}$ 。(保留 4 位有效数字)

原因分析：1. 随着振幅增大，蜗卷弹簧此时由于形变过大，使得回复力 F 与 θ 间不再是简单的线性关系，可能出现 $F \propto a_1\theta + a_2\theta^2 + o(\theta)$ ，使得回复力矩 k 会随 θ 增大而增大，这就使得固有频率 ω_0 也增大，符合实验结果。

2. 弹簧拉伸压缩过程不对称，在不对称振动模式下周期 T 随着 θ 的增大而减小，与实验中的 ω_0 随 θ 增大而增大相符合。因此弹簧应属于不对称模式，在物理上可以这样理解：卷曲弹簧拉伸和压缩的弹性模量不相同，从而造成拉伸和压缩的恢复力矩是非对称的，这一点在理论和实验上都是合理的。^[2]

(3) 1 档阻尼，指数拟合测量 β_1

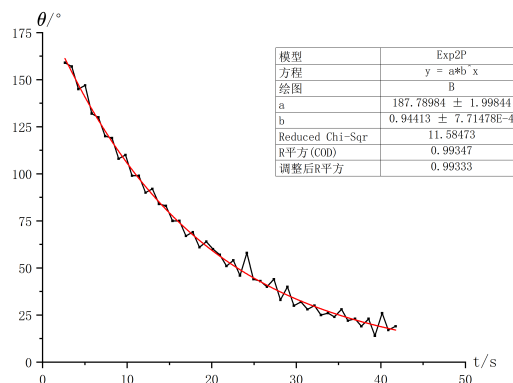


Figure 8 $\theta - t(\beta_1)$ 关系图

第一次测量 β_1 ，指数拟合得到结果 $\beta_1 = 5.75 \times 10^{-2}\text{s}^{-1}$ （保留 3 位有效数字）

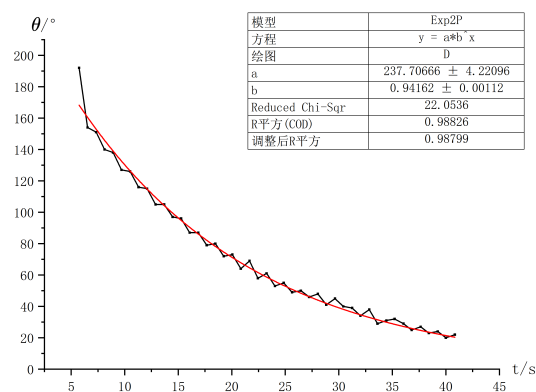


Figure 9 $\theta - t(\beta_1'')$ 关系图

第二次测量 β_1 ，指数拟合得到结果 $\beta_1 = 6.02 \times 10^{-2} s^{-1}$ （保留 3 位有效数字）

实验前后， β_1 数值不等， $\Delta\beta_1 = 2.71 \times 10^{-3} s^{-1}$ 但 $\frac{\Delta\beta_1}{\beta_1} = 4.59\% > 2.00\%$ ，因此可以认为测量前后 β_1 发生了变化。数值上的这一差异有几种可能来源：

1. 仪器测量误差，因为实验时可以发现光电门支架与摆轮连接点并不能保持静止，而是会有小幅度振动，这给光电门的测量带来了不可避免的误差。
2. 实验测量前后由于长时间通电，通电线圈及电路中电流的热效应，电磁阻尼的热效应所引起的温度变化不可忽略，温度升高会使电路中器件阻值改变，使线圈中电流改变从而使阻尼力变化，即 β_1 改变。

（4）幅频、相频曲线图

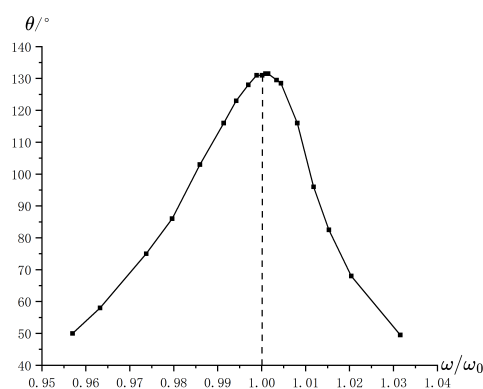


Figure 10 振幅-频率比值曲线

受迫振动振幅会随 ω/ω_0 增大而先增后减，在比值接近 1 时振幅最大，达到共振时，振幅最大值 θ_{max} 对应的比值 $\omega/\omega_0 = 1.0021$ ，相对偏差 0.23%，符合理论值 $\omega/\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta_1^2}/\omega_0 = 0.9998$ ，取 $\beta_1 = 5.89 \times 10^{-2} s^{-1}$ ， $\omega_0 = 3.956 rad/s$ 。

但是理论上不应该出现共振比值大于 1 的情况。原因分析：驱动电机转速不稳定，需要对电机角速度进行修正，电机角速度的随机误差是指电机的角速度满足均值为 ω 、误差范围为 $\epsilon\%$ 的随机值。修正模型为 $\omega' = \omega + \epsilon$ 。其中 ϵ 是一个大小不超过 0.01ω 的随机数，在统计上满足均匀或正态分布 [2]，根据数值模拟计算结果，可知在该修正下， ω/ω_0 存在大于 1 的情况，这解释了实验数据的反常。

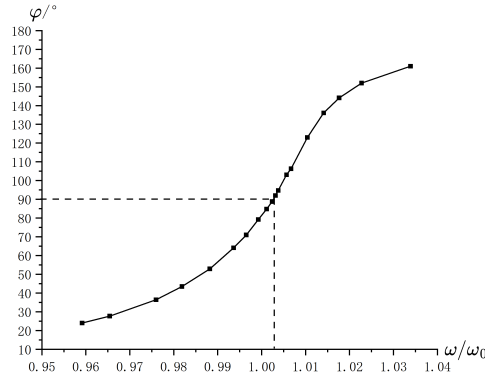


Figure 11 相位差-频率比值曲线

受迫振动时，摆轮相位始终落后于驱动力相位，且相位差会随 ω/ω_0 增大而增大，从 0 增大到 π ，达到共振时，相位差 $\varphi = 90^\circ$ 对应的比值 $\omega/\omega_0 = 1.0024$ ，相对偏差 0.24%，在考虑前述电机转速不稳定的情况下，可以认为符合理论值 $\omega/\omega_0 = 1$ 。

五、实验结论

(1) 0 档阻尼下，采用指数拟合测量得到 $\beta_0 = 5.22 \times 10^{-3} s^{-1}$ ，且 β_0 会随着 θ 变化，变化量 $\Delta\beta_0 = 0.794 \times 10^{-3} s^{-1}$ ，这可以用轴承摩擦效应解释。

(2) 1 档阻尼下，指数拟合测量得到实验前 $\beta_1 = 5.75 \times 10^{-2} s^{-1}$ ，实验后 $\beta_1 = 6.02 \times 10^{-2} s^{-1}$ ， $\frac{\Delta\beta_1}{\beta_1} = 4.59\% > 2.00\%$ ，认为测量前后 β_1 发生了变化，变化原因可能来自仪器的系统误差和测量偏差，和长时间通电时电流热效应引起的电路中电流变化。

(3) 估算得到不确定度 $u(\omega_0) = 9.551 \times 10^{-3} rad/s$ ，根据 $\omega_0 - \theta$ 图像， $\Delta\omega_0 = 3.200 \times 10^{-2} rad/s$ ， $\Delta\omega_0 > 2u(\omega_0) = 0.019 rad/s$ ，所以 ω_0 会随着 θ 变化，这可以用蜗卷弹簧弹性力非线性变化解释。二阶多项式拟合得到 $\omega_0 = 8.851 \times 10^{-7} \theta^2 + 1.386 \times 10^{-4} \theta + 3.925$ ，近似认为 $\omega_0 = 3.956 rad/s^{-1}$ 。

(4) 幅频曲线振幅随 ω/ω_0 而先增后减，呈现为峰型曲线，在 $\omega/\omega_0 = 1.0021$ 达到幅频共振，最大振幅 $\theta_{max} = 131.5^\circ$ ，比值与理论值 0.9998 的偏差可以用电机转速不稳定来解释。

(5) 相频曲线相位差随 ω/ω_0 增大而持续增大, 从 0 增大到 π , 增大速度先慢再快后慢, 且摆轮相位始终落后于驱动力相位, 相位差 $\varphi = 90^\circ$ 对应的比值 $\omega/\omega_0 = 1.0024$, 符合理论值 1, 此时达到相频共振。

六、 参考文献

- [1] 全红娟, 潘渊, 朱婧, 魏俊波, and 丁健. 波尔共振仪实验的不确定度分析. 大学物理实验, 27(05):100–102+112, 2014.
- [2] 董霖, 王涵, and 朱洪波. 波尔共振实验“异常现象”的研究. 大学物理, 29(2):57–57, 2010.
- [3] 杜全忠, 王鹏, 王旭明, and 姚明. 受迫振动的阻尼特性研究. *Research & Exploration in Laboratory*, 34(11), 2015.