Matemáticas DH 108 -1

Marcela Ilabaca Moore **Funciones.Apoyo 1** .

Recordemos la definición de **función compuesta** :

Dadas dos funciones $g : X \to Y, f : Y \to Z,$ se define la compuesta $f \circ g : X \to Z$ como :

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ siempre que tenga sentido, es decir que ocurra $\mathrm{Re}\,c(g) \subseteq Dom(f)$.

A trabajar!

Apliquemos lo anterior en los casos siguientes:

Si $f(x) = 5x - 1,\ g(x) = 2x^2 - 7,\ h(x) = \dfrac{1}{x+1}$ determine :

a)$(f \circ g)(x)$ b)$(f \circ h)(x)$, c)$(h \circ g)(x)$, d)$(f \circ f)(x)$ e)$(h \circ f)(x)$

f)$(h \circ h)(x)$, g)$(g \circ g)(x)$

Funciones Inyectivas:

Diremos que una función $f : X \to Y$ es inyectiva si se cumple:

para cada $x_1 \neq x_2$ se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$ o equivalentemente

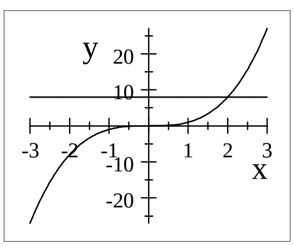
Si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{x}$ es inyectiva en cualquiere dominio de números no negativos.

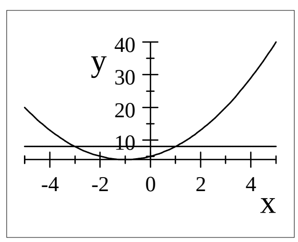
Geométricamente esto se puede probar usando el hecho siguiente:

cualquier recta horizontal debe cortar la gráfica de la función en , a lo más, un punto.

Ejemplos:



,



$y = x^3$ inyectiva $y = x^2 + 2x + 5$ no

Función Epiyectiva.

Diremos que una función $f : X \to Y$ es epiyectiva o sobreyectiva si se cumple:

Rec$(f) = Y$.

Es decir para cada elemento y del conjunto Y , existe un $x \in Dom(f)$ tal que $y = f(x)$.

Función Biyectiva.

Diremos que una función $f : X \to Y$ es biyectiva si es inyectiva y epiyectiva .

En este caso , es posible definir la función inversa de f , $f^{-1} : Y \to X$ que satisface:

$f^{-1}(y) = x$ siempre que $f(x) = y$.

Es decir $f \circ f^{-1} = I_Y$, y además $f^{-1} \circ f = I_X$

Ejemplo: Determinemos la inversa de $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$

Dado que $f \circ f^{-1} = I_Y$ se tiene que $f(f^{-1})(x) = x,$ es decir
$\frac{f^{-1}(x)}{2} + 1 = x \Rightarrow \frac{f^{-1}(x)}{2} = x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2(x-1)$

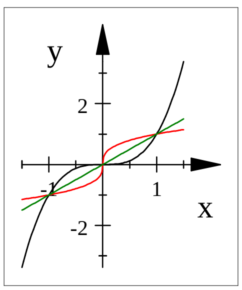
A trabajar!
Encuentre f^{-1}, identifique su dominio y recorrido en cada caso.

$f(x) = x^5$ $\qquad f(x) = x^4, x \geq 0$ $\qquad f(x) = x^3 + 1$

$f(x) = \frac{x-7}{2}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x^2}, x \geq 0$ $\qquad f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ $\quad f(x) = x^2 - 2x, x \leq 1$(complete el cuadrado) $\quad f(x) = (2x^3+1)^{1/5}$

La gráfica de $f^{-1}(x)$ y de $f(x)$ son simétricas con respecto a la recta $y = x$
pues , el punto $(x,y) \in Graf(f) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow (y, f^{-1}(y)) \in graf(f^{-1})$



$y = x^3$,$y = \sqrt[3]{x}$

Siga trabajando!
Demuestre que $h^{-1}(x) = h(x)$ si $h_1(x) = \frac{6x+7}{5x-6}$ tambien en el caso $h_2(x) = \frac{x+9}{x-1}$
calcule $h^{-1}(h^{-1}(x))$.

Funciones Par e Impar.
1) Diremos que una función $f: X \to Y$ es par si $f(-x) = f(x)$. Geométricamente , esto significa que la función es simétrica con respecto al eje Y.
2)Diremos que una función $f: X \to Y$ es impar si $f(-x) = -f(x)$. Geométricamente , esto significa que la función es simétrica con respecto al origen.
....**nuevamente a trabajar**...
Indique si las siguientes funciones son par, impar o ninguno de éstos tipos:

$f(x) = x^5$ $\qquad f(x) = x^4, x \geq 0$ $\qquad f(x) = x^3 + x$

$f(x) = \frac{x-7}{2}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x^2}, x \geq 0$ $\qquad f(x) = \frac{x}{x^2-2}$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ $\qquad f(x) = x^2 - 2x$ $\qquad f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 1$

Practiquemos algo de gráficas:
Grafique en cada caso $y = f(x)$. y $y = g(x)$.identifique los valores de x
que satisfacen $f(x) > g(x)$.
i)$f(x). = \frac{x}{2}, g(x) = \frac{4}{x} + 1$ $\qquad$ ii)$f(x) = \frac{2}{x+1}, g(x) = \frac{3}{x-1}$