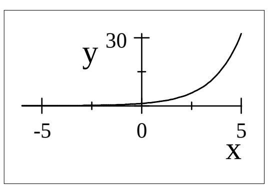
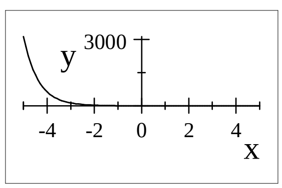
Matemáticas DH -108 -1
Marcela Ilabaca Moore **Función exponencial y logarítmica** .
.
Recordemos algunas reglas de los exponentes .Si $m \in \mathbb{N}$
$b^m = b \bullet b \bullet \bullet \bullet b$ m veces.
$b^{-m} = \frac{1}{b^m}$ con $b \neq 0$ y $b^0 = 1 \ \forall b \in \mathbb{N}$
Además si $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple:
$b^m \bullet b^n = b^{m+n}$
$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$
$(b^m)^n = b^{mn}$
$b^{\frac{m}{n}} = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{b^m}$
Definamos:
Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$ con $a > 0, x \in \mathbb{R}$
Luego Dom$(f) = \mathbb{R}$ y Rec$(f) = \mathbb{R}^+$
Por ejemplo si $a = 2 \quad f(x) = 2^x, a = 1/5 \quad f(x) = (1/5)^x$

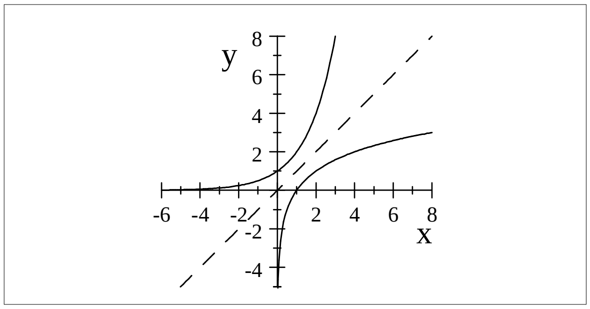




$f(x) = 2^x$ $f(x) = (1/5)^x$

En general la gráfica de f es asintótica al eje x , creciente si $a > 1$ y decrece si $0 < a < 1$.
Corta el eje y en $y = 1$
¿Es una función exponencial 1-1 o inyectiva? ¿Es epiyectiva?
Un caso particular :
Si la base es el número irracional $e = 2.718281828\ldots = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$
en este caso $f(x) = e^x$ como $e > 1$ la función es creciente y dado que es inyectiva podemos definir una función inversa :
Definamos:
Si $a > 0$ definiremos $y = \log_a(x)$ ssi $a^y = x$.
Por ejemplo :

$\log_2 16 = 4$ pues $2^4 = 16$
$\log_4 8 = 3/2$ pues $4^{3/2} = 8$
$\log_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$
$\log_a a = 1$ pues $a^1 = a$
Observemos que $\log_a 0$ no está definido pues $a^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
Gráficamente ,dado que es la inversa de la exponencial (observémoslo en realidad...) tendremos la simetría esperada con respecto a la recta $y = x$.



$f(x) = 2^x, f^{-1}(x) = \log_2(x)$

¿Cuales serán el dominio y recorrido en el caso del logaritmo?

Propiedades importantes de los logaritmos :

1. $\log(ab) = \log a + \log b$

2.$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

3.$\log a^x = x \log a$

4.$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ donde $\ln(x) = \log_e(x)$ y se llama el logaritmo natural de x.

Ahora .....**a trabajar**.....

0.Calcule los siguientes valores:

$x = \log_{16}(1/8) \quad x = \log_{1/25} 5 \quad x = \log_{1/3}(27)$

1. Dibuje la gráfica del siguiente par de funciones:

$y = 3 - e^{2x}$; $y = \log_5(x+3)$

Indique dominio y recorrido en ambos casos.

2. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\log_5(x^2 - 5x + 10) - \log_5(2x^2 - 3) = -1$

b) $3^{2x+1} = 5^{x-1}$

Aplicaciones:....**o sea ¡problemas**!....

3. La población del mundo crece a un ritmo de 2% anual .Si se supone que el crecimiento es exponencial , puede demostrarse que dentro de t años la población estará dada por una función de la forma

$P(t) = P_0 e^{0.02t}$ donde P_0 es la población actual.

¿Cuánto tiempo tardará la población actual en duplicarse?

4. El número de hamburguesas vendidas por una cadena nacional de comida rápida crece exponencialmente .

Si se vendieron 4.000 millones de hamburguesas el año 2005 y 12.000 millones el 2010 .

¿Cuántas se venderán el 2015?

5. Un fabricante de juguetes ha descubierto que la fracción de sus barcos a pila que se hunden en menos de t días es apróximadamente $f(t) = 1 - e^{-0.03t}$.

a) Elabore una gráfica de esta función de confiabilidad.

¿Qué le sucede a la gráfica cuando t crece sin límites?

b)¿Qué fracción de los barcos puede esperarse que floten al menos 10 días?

6. El editor de una importante editorial estima que si se distribuyen x miles de ejemplares de cortesía a los profesores ,la venta del nuevo texto serán aproximadamente de $f(x) = 20 - 15e^{-0.2x}$ miles de ejemplares en el primer año.De acuerdo con este estimativo, ¿cuántos ejemplares de cortesía debe enviar el editor para generar ventas de 12.000 ejemplares durante el primer año?