TD 05 – Parcours Eulériens/Hamiltoniens et Coloration des sommets

Exo 1. Ordonnancement

Modéliser le problème d'ordonnancement ci-dessous à l'aide d'un graphe potentiels/tâches et résoudre ce problème en utilisant l'algo. de plus long chemin dans un graphe orienté sans cycle.

	Durée	Prédécesseurs
A	7	//
B	8	//
C	2	A
D	4	A et C
E	3	C et D
F	1	C et D

Exo 2. Tri topologique – Plus long chemin dans un graphe orienté sans cycle

Exercice : En l'an de grâce 1479, le sire Gwendal, paludier à Guérande, désire aller vendre sa récolte de sel à l'une des grandes foires du Duché. Il connaît les gains qu'il pourra réaliser dans chacune des foires, mais ceux-ci seront diminués des octrois qu'il devra acquitter le long du chemin emprunté pour s'y rendre. A quelle foire, et par quel chemin le paludier doit-il se rendre de façon à réaliser le plus grand bénéfice possible ?

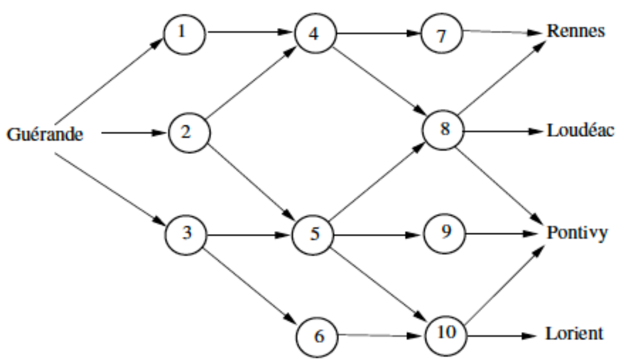
Tableau des gains en écus dans les différentes foires :

Foires	Rennes	Loudéac	Pontivy	Lorient
Gains	550	580	590	600

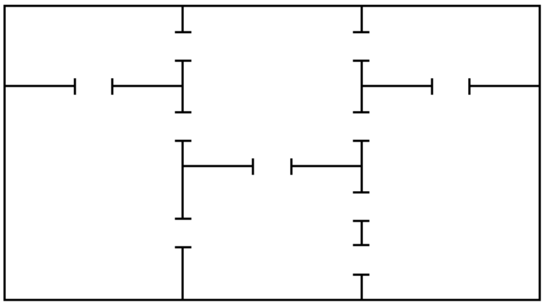
Tableau des octrois en écus dans les différentes villes :

Villes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Rennes	Loudéac	Pontivy	Lorient
Octrois	10	12	15	5	15	10	3	10	5	20	4	5	20	7

Graphe des chemins possibles de Guérande aux différentes foires :

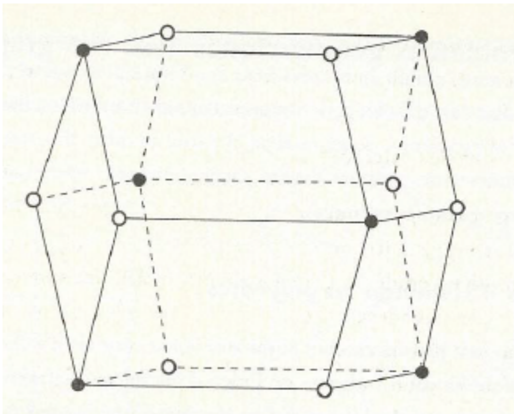


Exo 3. Un visiteur se promène dans les différentes salles du musée de la ville d'Izis dont le plan est donné ci-dessous :

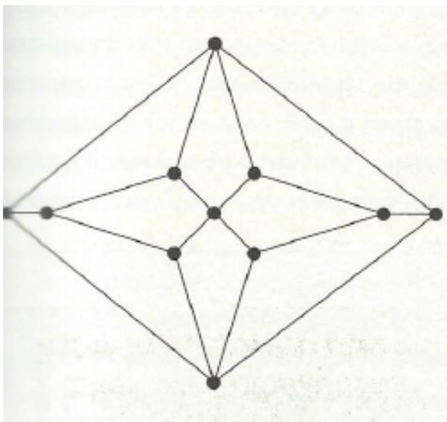


1. Représentez ce plan sous forme d'un graphe en indiquant quels sont les sommets ? et quelles sont les arêtes ?
2. Existe-t-il un parcours passant une fois et une seule par chaque salle ? si oui, donnez un exemple
3. Sans donner d'exemple, indiquez s'il existe-un parcours passant une fois et une seule par chacune des portes ? Si oui, indiquer s'il s'agit d'une chaîne ou bien d'un cycle ? Justifier.

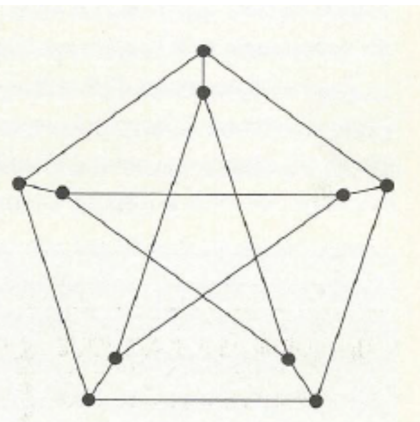
Exo 4. Les 3 graphes ci-dessous possèdent-ils un parcours hamiltonien ?



Graphe #1

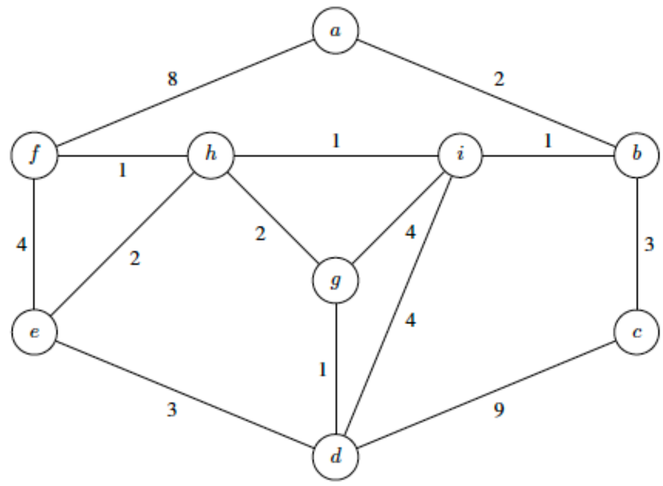


Graphe #2



Graphe #3

Exo 5. Appliquer l'algorithme du postier chinois au graphe ci-dessous :



1. Déterminer l'ensemble des sommets de degré impair
2. Calculer le distancier de cet ensemble des sommets
3. On n'étudiera pas ici l'algo de couplage de poids minimal. A la place on utilisera une solution force brute, en calculant tous les couplages et en prenant celui de poids minimal.
4. En déduire le cycle eulérien ainsi obtenu
5. Remarquer que la complexité de l'algorithme du postier chinois est polynomiale (si on utilise l'algo de couplage de poids minimal).
6. Comparer les complexités des problèmes suivants :
   a. Existence parcours eulérien vs Existence parcours hamiltoniens
   b. Problème du Postier Chinois vs PVC

Exo 6. Un lycée doit prévoir les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs :

- 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7,
- 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7,
- 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7,
- 4 et 5, 4 et 6,
- 5 et 6, 5 et 7
- 6 et 7.

On souhaite planifier les examens sur un nombre minimal de créneaux (noté *nb_opt*).

1. Modéliser ce problème sous la forme d'un problème de coloration des sommets d'un graphe (que l'on dessinera). On indiquera quels sont les sommets ? les arêtes ? et à quoi correspond *nb_opt* ?
2. Appliquer l'algorithme de Welsh et Powell sur ce graphe. On indiquera les différentes étapes.
3. En analysant la structure du graphe, proposer un minorant de *nb_opt*.
4. A l'aide des questions (2) et (3), déduire la valeur de *nb_opt*.

Exo 7. On a vu que : *tout graphe contenant un triangle (K3) ne peut pas être coloré en moins de trois couleurs.*

1) Construire un graphe sans K3 qui nécessite également trois couleurs.
2) Comment, à partir du graphe précédent, construire un graphe sans K4 nécessitant 4 couleurs ?
3) Comment construire un graphe sans K5 nécessitant 5 couleurs ?

Exo 8. Exprimez la résolution d'un Sudoku classique en termes de coloration de graphe. Décrivez le graphe (nombre de sommets, nombre d'arêtes, etc.). Combien faut-il de couleurs ?

Exo 9. Algorithme de construction d'un parcours Eulérien (cycle/chaîne).

1. Soit *G* un graphe dont ***tous les sommets sont de degré pair.*** On souhaite construire un cycle eulérien de *G* en utilisant l'algorithme ci-dessous :

Algorithm 1 CycleEulérien(G, x)

Require: un graphe G sans sommet de degré impair et x un sommet de G.
Ensure: une liste $(x, x_2, \ldots, x_k, x)$ de sommets de G formant un cycle eulérien.
1: $A \leftarrow$ ensemble des sommets adjacents à x dans G.
2: **if** $A = \emptyset$ **then**
3:    **return** (x)
4: **else**
5:    $C = (x = y_1, \ldots, y_\ell = x) \leftarrow$ un cycle quelconque d'origine x dans G.
6:    supprimer les arêtes de C dans G.
7:    $R \leftarrow ()$
8:    **for** $i = 1$ à ℓ **do**
9:       $R \leftarrow R \cdot$ CycleEulérien(G, y_i)
10:    **end for**
11:    **return** R
12: **end if**

a. On souhaite appliquer cet algorithme au graphe *G cf (page suivante)* avec comme sommet initial *(x = 1)*. On suppose que le cycle *C* obtenu (ligne 5) vaut : *C = 1 – 2 – 3 – 4 – 1*. Dérouler la suite de l'algorithme.

b. Pourquoi cet algorithme est-il correct ? En particulier, pourquoi peut-on faire un appel récursif à la fonction de calcul d'un cycle (ligne #9)

2. Soit *G* un graphe possédant **(exactement) 2 sommets de degré impair notés *x* et *y*.** *En s'inspirant de l'algorithme précédent,* proposer un algorithme permettant de construire une chaîne eulérienne de *G* d'origine *x* et d'arrivée *y*. Pour cela, compléter l'algorithme suivant et donner un exemple d'exécution.

Algorithm 2 ChaineEulérienne *(G, x, y)*

Require : un graphe *G* ayant exactement deux sommets de degré impair *x* et *y*.
Ensure : une liste *(x, x_2, …, x_k, y)* de sommets de *G* formant une chaîne eulérienne.
1. *C = (x = y_1, …, y_l=y)* une chaîne quelconque d'origine *x* et d'arrivée *y* dans *G*.
2. Supprimer les arêtes de *C* dans *G* ;
3. *R ← ()*

(A compléter)

Graphe exemple pour Exo 9