致謝

謝謝我的肝、我的學分、還有你 :D

Contents

第壹章、緒

一、為何而做

好的，顯然我們快要讀大葉掃落葉了，而且課綱對於課本的編排順序非常紊亂，像是三角就分散在 B1 第二章、B3 第一章，諸如此類. 其他的例子還有非常多，所以我就盡個微薄之力寫一點東西出來，把相似的內容擺在一起，盡量通順的解釋所有知識點的關聯性，將他編織成面，而不是一盤散沙. 而且你也對整套要考的東西有一定瞭解了，也就是我們擁有更多的工具，可以拿新的東西解決舊的問題，更加融會貫通；而不是看到一定的題型就硬幹最古早的方法. 可以參考上一頁目錄，看看跟課本有啥不同 ↓.

B1 Ch1 座標 & 函數	B3 Ch1 三角應用
B1 Ch2 三角函數	B3 Ch2 指對數
B1 Ch3 平面向量	B3 Ch3 空間向量
	B3 Ch4 聯立方程 & 矩陣
B2 Ch1 式的運算	B4 Ch1 線性規劃
B2 Ch2 直線與圓	B4 Ch2 二次曲線
B2 Ch3 數列與級數	B4 Ch3 微分
B2 Ch4 排列組合	B4 Ch4 積分

二、！注意！

內容參考了教育部於一零九年給出的數學領域課程手冊，雖是主要面向國中小及普通高中，不過比起傳統課本還是更貼近課綱要傳達的東西. 對於在電學相關應用的部分會特別標註出來，不會跟統測的數 C 考試混淆. 就上一節末段所述，後面的東西會是個大雜燴，會著重必要的原因跟後面的結論：講原因在於可以快速且深刻的瞭解他為啥長這樣，而不是看到公式就死幹；結論會融合其他部分一起呈現出來. 而中間的很詳細推導過程，統測不會考，你也不會想看. 當然，可以直接跳到要看的部分. 這裡不會有太多公式題目，這不是啥公式大集，要寫題目就看複習講義，要考高分請去刷題.
好的，可以開始你的旅途；或按右上角叉叉了掰掰.

說文解字

這類綠色框框會是一些故事、幹話，對考試沒有直接幫助，但是閒暇時後配瓜子啃著吃還蠻香的.

例題 1.1 / 這是題目

題目會在上半部. 標題寫〔C.109.2.18〕是指：
數 C、109 年度 2 模 18 題；如果沒有中間的 2 就是統測題.

下面會放蝦趴的解決方法，應該噢.

定義 1.1 / 一些規則

定義就是直接定的規則，它不能從其他規則推出來.

結論 1.1 / 一些結論

包含定理、引理、推論、公式，只要是能推導出來得東西都在這.

三、關於符號

這裡如同字典，有需要再回來翻閱就好，不需要特別背. 以下介紹一些在其他領域相對罕見的數學符號，它有助於我們節省很貴的墨水.

$\Rightarrow$	推得，$A \Rightarrow B$ 表示 A 可以推出 B ；但 B 不一定能推出 A .
$\Leftrightarrow$	等價，$A \Leftrightarrow B$ 表示 A 與 B 等價，即可互相推得.
$\{\ \dots,\ \dots\ \}$	集合，$\{a, b, c\}$ 表示由 a, b, c 所構成的集合.
$\{\ \dots : \dots\ \}$	集合，$\{a : P(a)\}$ 表示由滿足條件 $P(a)$ 的元素 a 所構成的集合.
$\{\ \dots \mid \dots\ \}$	集合，$\{a \mid P(a)\}$ 表示由滿足條件 $P(a)$ 的元素 a 所構成的集合.
$\varnothing$	空集合，表示不含任何元素的集合，$\varnothing$ 為所有集合的子集合.
$\in$	屬於，$a \in A$ 表示 a 是集合 A 中的一個元素.
$\subset$	子集合，$A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集合，即 A 中的元素皆包含於 B .
$\cup$	並集，或稱聯集，$A \cup B$ 表示由 A 與 B 中的所有元素組成的集合.
$\cap$	交集，$A \cap B$ 表示由同時存在於 A 與 B 中的元素組成的集合.
$\forall$	全稱量詞，為 For All 中的 A 倒置，$\forall x \in \mathbb{R}$ 表示對所有 x 屬於實數.
$\exists$	存在量詞，為 Exists 中的 E 倒置，$\exists x \in \mathbb{R}$ 表示存在 x 屬於實數.
$\mathbb{N}$	自然數集，為 Natural 首字母，表示由所有正整數組成的集合，不包含零.
$\mathbb{Z}$	整數集，為德文 Zahl 首字母，表示由所有整數組成的集合.
$\mathbb{Q}$	有理數集，為 Quotient 首字母，表示由所有有理數組成的集合.
$\mathbb{R}$	實數集，為 Real 首字母，表示由所有實數組成的集合，不包含 $+\infty$、$-\infty$.
$\mathbb{C}$	複數集，為 Complex 首字母，表示由所有複數組成的集合.

第貳章、數

起源

數學嘛，當然從數字開始. 回首望，不論人類發展還是我們學習過程，都是從一開始的計數，也就是正整數開始的. 後來我們會了加減法，有了零跟負整數，擴充到了整數. 再後來我們會了乘除法，把範圍再次擴展到了有理數. 再後來經過了一個〔神奇的階段〕，我們填滿了整個實數軸. 最後的最後，直接搞出了另外一個維度的虛數，完成了整個數系的建構.

$$\text{正整數 } \mathbb{N} \subset \text{整數 } \mathbb{Z} \subset \text{有理數 } \mathbb{Q} \subset \text{實數 } \mathbb{R} \subset \text{複數 } \mathbb{C}$$

其中這個〔神奇的階段〕也就是促成微積分會那麼雞掰的主因，過往的整數、分數它在軸上都是離散的、有限的，要如何把它填滿變成完整的、實數軸；從有限定義無限，這就是微積分最底層在研究的東西. 整數就沒啥好講的你都會，所以我們從有理數跟無理數開始.

一、根式運算

(一)、Pre〔B1 Ch1〕

要定義好無理數，比較簡單的方法就是定義好有理數：我們說有理數集是蒐集所有〔兩個整數相除〕的結果，之所以有理數符號使用 $\mathbb{Q}$ 也是來源於此，法文中的「商」寫作「Quotient」，取字首作為符號使用. 而無理數就是補足有理數之間的空缺，最常見的就是常數 π、e ，或一些根號、對數等等.

$$\text{有理數 } \mathbb{Q} = \{x | x = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{Z}\}$$

(二)、指數律〔B1 Ch1〕

你對根號應該非常瞭解，直觀來看就是：開 n 次根號、再 n 次方 = 不變. 所以理所當然的我們可以把根號寫成倒數在上面. 順便把倒數的整理出來：

結論 2.1 / 指數律

$$\begin{aligned} \text{開 } n \text{ 次跟號} &\iff \frac{1}{n} \text{ 次方} \\ \text{倒數} &\iff -1 \text{ 次方} \end{aligned}$$

對於奇怪的一串東西就可以單純用只數表示：

$$\frac{1}{\sqrt[5]{64}} = 2^{-\frac{6}{5}}$$

因為 5 次根號，所以指數有 $\frac{1}{5}$ 個東西；
因為 $64 = 2^6$，所以不變的寫 6；
因為倒數，所以指數有負號；

遇到指數化簡的題目，十之八九換成一個最簡單的 a^b 應該都不會錯ㄌ.

(三)、雙重根式〔B2 Ch1〕

那我們搞定一層的根號以後，在運算中可又會遇到更多層的根號，我們必須設法解決他：

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \triangleq \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

最簡單的也就是直接平方他：

$$a+\sqrt{b}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=x+y+2\sqrt{xy}$$

我們發現 $\sqrt{b}$ 跟 $\sqrt{xy}$ 只差 2 倍，所以只要從 b 抓一個 2 出來就好：

例題 2.1 / 雙重根式

化簡 $\sqrt{6+\sqrt{32}}$.

首先化簡出來的東西如果叫 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$，那麼 $x+y=6$
接下來要把 $\sqrt{32}$ 抓 2 倍出來：$\sqrt{32}=2\sqrt{8}$
裡面的 8 就是 $xy=8$
所以就可以得到 $x=2y=4$，當然反過來也對.

二、實數？

這就是我說段考不會考結果還是考出來的東西ㄏ，以防萬一，順便講一下. 他循環的部分就是用一個無窮級數代出來的，那公式要怎麼記呢？

結論 2.2 / 循環小數〔B4 Ch4〕

$$0.abcd\overline{xyz}=\frac{abcdxyz-abcd}{9990000}$$

首先上面一開始的 $abcdxyz$ 這就是主體，所以照抄很正常；
後面的 $-abcd$ ，我們現在處理循環的部分嘛，所以把沒有要循環的弄掉；
最後為啥下面要除 3 個 9 呢？因為循環節有 3 位，如果除 1000 就除盡啦.
所以每次都要留一點點給他循環下去，阿後面的 0000 就是把沒循環的弄掉.
總的來說，下面除的東西也就是 999000，
其中 9 的位數就是循環節的位數、
0 的位數就是非循環節的位數.

三、複數〔B2 Ch1〕

(一)、複數運算

顯然這在電學用的很多，他主要就是要處理很多相位的問題，就像是一般的實數已經不夠用了，我們需要另外一個維度來描述. 而運算在基電就已經練的游刃有餘了，所以在這裡主要講快速的解題方法：

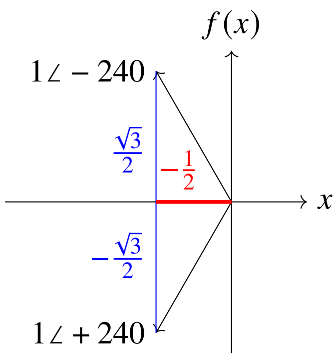
例題 2.2 / C109.19

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2=a+bi\text{ , }a+b=\,?$$

顯然如果直接用代數硬幹會浪費很多時間，死得很慘. 而且題目出的長度是 1、$\sqrt{3}$，一臉叫你換成 $1-\sqrt{3}-2$ 的三角形，所以我們不妨用極式的方法想，也就是轉換成長度跟角度：

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2\angle-60}{2\angle 60}\right)^2+\left(\frac{2\angle 60}{2\angle-60}\right)^2\\=\;&(1\angle-120)^2+(1\angle 120)^2\\=\;&1\angle-240+1\angle+240\end{aligned}$$

簡單畫個圖：



兩根虛部的正負 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 抵消掉了，剩下兩個 $-\frac{1}{2}$、所以答案 -1.

(二)、複數平面

對於一般的 $x-y$ 平面，我們可以想成它是兩軸都以 1 為單位的二維座標系統；而複數平面就是分別以 1、i 為單位的平面；或是視為有兩個分量 1、i 的平面向量系統. 而除了用兩軸來表示平面，我們也可以用角度跟長度組成的極座標：

定義 2.1 / 複數平面

對於複數 $z=a+bi$，我們把他的長度稱為「範數（Norm）」並記為：

$$z\text{ 的長度}=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

將其與 x 軸的夾角稱為「幅角（Argument）」記為：

$$z\text{ 的幅角}=\operatorname{Arg}(z)=\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

若複數 z 的長度為 r、角度為 θ，由三角函數得以推得：複數 z 的係數 a、b 可以分別表示為 $r\cos\theta$、$r\sin\theta$. 則可以重新表示為：

$$z=a+bi=(r\cos\theta)+i(r\sin\theta)$$

四、兩個不等式

(一)、算幾不等式〔B1 Ch1〕

所謂算幾，即〔算術平均數〕與〔幾何平均數〕，其中幾何嘛，就像是有一堆面積，所以要相乘才會有面積；另外一個算術，就最簡單的加法. 最簡單的型式長這樣：

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt[2]{xy}$$

左邊的 $\frac{1}{2}$ 跟右邊的 $\sqrt[2]{}$ 就是為了搞定平均的部分，所以我們也可以推廣到 3 個的情況：

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

可以看出他的規則就是，假如有 n 個東西的話：

結論 2.3 / 算幾不等式

$$\frac{1}{n}\text{和} \geq \text{積}^{\frac{1}{n}}$$

那他的條件就是裡面的數都要是正實數，不過統測應該不會搞你就是了. 而等號成立在裡面的東西都一樣的時候，可以想成是：長方形面積最大的時候，會發生在邊長一樣長嘛，舉個例：

例題 2.3 / 算幾不等式

已知 $x, y > 0$ ，$2x + y = 6$ ，則 x^2y 的最大值為何.

首先很明顯，他是給和要求積，那我們要如何拆呢？
可以看到積的部分，x^2y 有個平方，那就把它拆成都是乘的嘛
也就是 xxy ，是 2 個 x、1 個 y，就剛好跟和的 $2x + y$ 對上了
總共就有三個東西了嘛，所以塞三個東西的算幾：

$$\frac{x+x+y}{3} \geq \sqrt[3]{xxy}$$

左邊他給你了：

$$\frac{6}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y}$$

兩邊三次方答案就出來了.

除了這種要拆開的，常見的還有要配的：

例題 2.4 / 算幾不等式

$x + \frac{4}{x+3}$ 的最小值為何？

首先我們看到有兩個 x 一個在分子一個在分母，把它塞在積的那邊的話，就可以相乘

消掉了，但是分子的跟分母的差一個 3 啊，所以就補給他，阿記得後面要減回來：

$$(x+3)+\left(\frac{4}{x+3}\right)-3$$

就先不要管 -3 ，前面的你就會了：

$$\frac{(x+3)+\left(\frac{4}{x+3}\right)}{2} \geq \sqrt{(x+3)\left(\frac{4}{x+3}\right)}=2$$

所以：

$$(x+3)+\left(\frac{4}{x+3}\right) \geq 4$$

所求也就是減掉那個多的 3：

$$x+\frac{4}{x+3} \geq 1$$

（二）、柯西不等式〔B1 Ch3〕

他是從內積來的，因為內積有一個 $\cos\theta$ ，他只會在 0. 幾那邊跑，頂多到 1，所以乘 $\cos\theta$ 的另外一邊會比較小. 像是如果 $0.7x = y$，顯然 $y < x$.
所以從內積定義開始：

$$u \cdot v = \cos\theta \cdot |u|\,|v|$$

但是右邊向量長度出來有根號不好看，把它平方；也順便讓 $\cos\theta$ 只在正的：

$$\begin{array}{ccc} (u\cdot v)^2 = & \cos^2\theta & \cdot |u|^2\,|v|^2 \\ & \Downarrow & \\ |u|^2\,|v|^2 & \geq & (u\cdot v)^2 \end{array}$$

如果用坐標表示 $u=(a,b)$,$v=(x,y)$：

結論 2.4 / 柯西不等式

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) \geq (ax+by)^2$$

好ㄉ這就是柯西不等式，基本上他跟算幾的型式非常不一樣，所以不太會混淆. 他的型式根據最一開始的向量，一邊是畢氏定理的樣子；另一邊就是線性組合.

例題 2.5 / 柯西不等式

$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)$ 的最小值為何？

我們先用算幾想想看，顯然他應該放在乘的那項，
但是乘開會變成：$1+4+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}$，很醜.
而且也很難通過一開始操作讓他變得好看，所以考慮柯西：
很顯然他不會是線性組合的樣子，所以把他安置在畢氏那邊，那就要湊成畢氏的樣子：

$$\left(\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^2\right)$$

那另外一邊也就是線性組合嘛：

$$\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\cdot\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^2=3^2=9$$

所以答案 9.

(三)、其他極值方法

基本上只要有很多變數就會是柯西或算幾，因為你微分只會單變數函數，另外一個很多不等式的也就是線性規劃. 另外如果看到面積極值啊或是啥的應用問題，盡可能的減少未知數，因為這樣就可以直接微下去，不用在那邊湊柯西或算幾. 不過統測不太會出這種，基本上題目都可以直接對應到課本的某個章節.

第參章、函數

一、Pre

說文解字

函數的函這個字，甲骨文寫作裡面一支箭矢，外面用囊包著. 就此就衍伸出了包含的感覺. 最初翻譯這個詞的人是李善蘭，就是翻譯第一本清朝微積分那個人，她給出的解釋是：「凡此變數中，含彼變數者，稱為函數.」就像是有兩個變數 x、y，y 會隨著 x 變動才一起動，所以 y 稱為 x 的函數.

依上面講的，它有從屬的感覺，在現代數學中把它抽象成〔對應關係〕，也就是有一個「關係」叫做 f，他處理的就是 x，y 之間的關係，所以如果兩坨東西之間有關係，我們可以用函數把它串起來，比如班上的座號跟偷電度數關係，就可以寫成：

$$f(\text{座號}) = \text{偷電度數}$$

但是座號只能是正整數啊，電的度數是任意實數，所以我們就把它寫成是：

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

也就是一開始是正整數的座號，映射到實數的偷電度數. 所以顯然的，數列也是一種函數，是項數跟項之間的關係，而項數也是正整數，所以跟上面的座號-偷電度數類似. 當然，它也可以反過來，比如我想要知道偷 5 度電的人有誰，就可以考慮對應關係：

$$f(\text{偷電度數}) = \text{座號}$$

但是這樣出來的人可能就不唯一，因為可能很多人都剛好偷了 5 度電嘛，所以我們說這個對應關係就不是函數. 那如果一開始的對應變成：

$$f(\text{座號}) = \text{學號}$$

它就可以反過來當成一個函數了啊，因為他們都是一一對應，不會有重複的狀況發生.

(一)、名詞〔B1 Ch1〕

定義 3.1 / 函數

給定兩個集合 D、R ，以及集合內元素的對應關係 f，如果 D 裡面的每個元素 x ，在 R 中有一個確定的 y 與 x 相對應，則稱 f 是一個函數，記為：

$$y = f(x),\ x \in D$$

在這裡 x 就稱為自變量、 y 稱為因變量，而自變量 x 的範圍 D 稱為函數 f 的定義域（Domain）；而由因變量組成的集合：

$$R = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

稱為函數 f 的值域（Range）.

要特別強調的是，我們只強調對應關係. 如果兩個函數表達式的定義域跟對應關係都相

同（即對於每個自變量，對應到的因變量都一樣），則稱這兩個函數表達式是同一個函數，例如說：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R} \\ g(x) &= |x| \quad , \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

則 f、g 是同個函數.

（二）、反函數

什麼時候可以有反函數呢，也就是一開始是一一對應的，像是指對數. 而三角函數就不會有反函數，因為同界角對出來都一樣. 那 $\tan^{-1}x$ 這個電學很常用到的反正切是啥呢？

很簡單，既然同界角會出事，那我就把角度限定在不會出事的 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 就好啦！在圖形上原函數跟反函數會對稱於 $y = x$ 這條線，可以想作是 x 軸、y 軸整個翻轉反過來了.

（三）、單調性〔B4 Ch3〕

也就通俗上講的遞增或遞減，那我們要怎麼用數學表示「y 隨著 x 的增大而增大」、「y 隨著 x 的減小而減小」？

定義 3.2 / 單調性

對於函數 $y = f(x)$ 的定義域為 D，且區間 $I \subset D$、對任意的 α、$\beta \in I$，皆有 $\alpha < \beta$ ：

若 $f(\alpha) \le f(\beta)$ ，
則稱 f 在區間 I 內是單調遞增的；

若 $f(\alpha) \ge f(\beta)$ ，
則稱 f 在區間 I 內是單調遞減的；

若 $f(\alpha) < f(\beta)$ ，
則稱 f 在區間 I 內是嚴格遞增的；

若 $f(\alpha) > f(\beta)$ ，
則稱 f 在區間 I 內是嚴格遞增的.

所以我們從定義知道，指對數函數在整個實數軸都是單調的；而像是正餘弦就會增減增減跳來跳去.

（四）、奇偶性〔B4 Ch4〕

這名字源自於冪函數：$f(x) = x^n$，可以拿最熟悉的 $n = 2, 3$ 畫看看.
奇函數　對稱於原點　$f(-x) = -f(x)$
偶函數　對稱於 y 軸　$f(-x) = f(x)$
那有啥用呢？，因為奇函數一正一負嘛，所以在積分的時候，如果遇到：

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

只要 $f(x)$ 是奇函數，那積出來就是 0.

（五）、圖形〔Common〕

一開始在畫一個函數圖形的時候，不就是一個一個點代進去，然後畫點點在座標上，再連起來，所以其實函數圖形就是滿足那個函數的點的集合：

$$\text{函數圖形} = \{(x, y) : y = f(x)\}$$

那串符號一開始的 (x, y) 代表元素的型式：顯然圖形是一堆點組成，所以是一個數對. 中間冒號就分隔用的，也可以直接寫一槓：

$$\text{函數圖形} = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

後面的 $y = f(x)$ 也就是前面 (x, y) 的特性. 整個就是函數圖形是一堆滿足 $y = f(x)$ 的 (x, y). 最常用的圖形性質就是拉伸跟位移嘛，鏡像其實就是負的拉伸，所以不必多談. 剛剛講到函數圖形也就是滿足 $y = f(x)$ 的點集合.

比如這時候你想要把圖形水平方向往正移 3 單位：首先水平方向當然考慮 x 而不是 y，再來它水平方向往正移 3 單位，也就是 x 多了 3、所以為了一開始的函數還要成立，是不是在 x 外面要把它減回來：$y = f(x-3)$，同理伸縮也是，所以可以得到這坨東西：

結論 3.1 / 函數圖形變動

$$\begin{aligned}
y\text{方向平移} &: \quad y - k = f(x) \\
x\text{方向平移} &: \quad y = f(x - h) \\
y\text{方向拉伸} &: \quad \frac{1}{a}y = f(x) \\
x\text{方向拉伸} &: \quad y = f(\frac{1}{b}x)
\end{aligned}$$

簡單來說就是為了要平衡，所以要弄上反的變動.

例題 3.1 / C.111.1.13

設 $f(x) = -5\sin(-4\pi x - 3) - 2$，若函數的最大值為 a 且週期為 b，則 $a + b$ 之值為何.

可以看出 $f(x)$ 是最一開始的 $\sin x$ 經過一串變換而得到的，我們一步步來抽絲剝繭，從在 $\sin x$ 裡面的開始：

$$\begin{aligned}
x\text{ 前面 } \times(-4\pi) &\quad \Leftrightarrow \quad x\text{ 方向壓縮 } -4\pi\text{ 倍} \\
x\text{ 後面 } -3 &\quad \Leftrightarrow \quad x\text{ 方向位移 } +3\text{單位}
\end{aligned}$$

而在 $\sin x$ 外面的就跟 x 沒有關係了，剩下都是 y 的變動：

$$\begin{aligned}
\sin x\text{ 前面 } \times(-5) &\quad \Leftrightarrow \quad y\text{ 方向放大 } -5\text{ 倍} \\
\sin x\text{ 後面 } -2 &\quad \Leftrightarrow \quad y\text{ 方向位移 } -2\text{單位}
\end{aligned}$$

特別注意的是，$\sin x$ 外面的 y 變動，因為不是直接附加在 y 旁邊，他們之間隔了等號，所以 $\times 5$ 就是直接放大 5 倍；而不是像 x 一樣，因為是直接乘在 x 旁邊，所以 x 為了抵抗才要縮小.

綜上所述，一開始 $\sin x$ 是 -1 到 1 ，而會影響最大值 a 的 y 方向放大 -5 倍；再經過後面 y 方向位移 -2 ，它的範圍：

$$\begin{aligned} \sin x &: [-1,1] \\ -5\sin x &: [-5,5] \\ -5(\sin x)-2 &: [-7,3] \end{aligned}$$

最大值即為 3 . 而影響週期的就只有改變 x 方向伸縮的 -4π 倍，而原本 $\sin x$ 週期是 2π ，所以被壓縮過的週期就是：

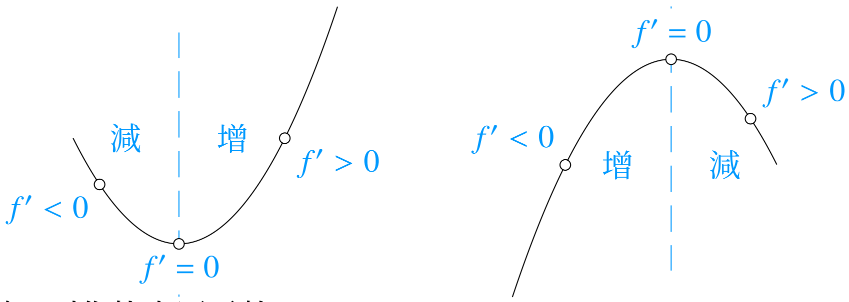
$$\frac{2\pi}{-4\pi} = -\frac{1}{2}$$

新週期 b 取 $+\frac{1}{2}$.

(六)、數值分析

我們說微分在算的就是函數的變化.「遞增」也就是隨著 x 的增加 y 也一起增加，故一次微分 >0 ；反之，「遞減」是隨著 x 的增加而 y 隨之減少，故一次微分 <0 . 而二次微分即為一次微分的變化，比如一次函數從負到正、由小到大、越來越傾斜、也就是凹口向上的曲線，那一次的變化就是越來越大，二次的微分大於零. 我們可以由右圖得知到：

遞增	一階微分正
遞減	一階微分負
極值	一階微分零
凹向上	二階微分正
凹向下	二階微分負
反曲點	二階微分零



基本上他應該會給你一些特徵，叫你找出原函數.

(七)、複合函數〔Common〕

這最有感的應該就是剛教完的變數變換，舉個例子，這有個函數叫作：

$$h(x) = \sqrt{(2x+5)}$$

我們就可以看作是一個 $f(x) = 2x+5$ 跟一個 $g(t) = \sqrt{t}$.
而 $h(x) = (g \circ f)(x)$ 也就是 x 先經過 f 在經過 g .
那為啥要這樣拆呢？因為簡單的函數我們都會處理、而且比較熟悉，把一個複雜的東西變簡單不是合情合理，對積分而言，直接硬幹 $h(x) = \sqrt{(2x+5)}$ 的積分非常困難，所以我們把它拆成簡單的東西處理.

二、線性函數〔B1 Ch1〕

一般的一次函數它會長這樣 $f(x) = ax+b,\ a,b \in \mathbb{R}$. 這樣就可以直接描繪出大概的圖形了，因為 a 是斜率； b 是 y 截距. 還有他除了是一次函數外，當然也叫線性函數. 普遍一點的定義：

定義 3.3 / 線性函數

$f(x)$ 是線性函數 $\Leftrightarrow f(ax+b)=af(x)+f(b)$

就是對於加法跟係數積可以拆開，顯然三角函數就沒有這個特性，因為：

$$\sin x+\sin y\neq\sin(x+y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

相似的，微分跟積分也有這樣的特性，即：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(af(x)+b) &= a\cdot\frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx}(b)\\ \int af(x)+b\ dx &= a\cdot\int f(x)\ dx+\int b\ dx\end{aligned}$$

我們把它稱為線性算子.

三、二次函數

(一)、配方、極點〔B1 Ch1、B4 Ch3〕

，一種國中配方，一種高中微分，顯然，微分大獲全勝.

例題 3.2 / 二次函數極值

求 $f(x)=ax^2+bx+c$ 之極值.

直接微 $f'(x)=2ax+b\overset{\Delta}{=}0$
故當

$$x=-\frac{b}{2a}$$

有極值

$$f(-\frac{b}{2a}).$$

，問你原函數：

例題 3.3 / C111.1.2 改

拋物線 $f(x)=-x^2+3x+4$ 在 x 軸之上有一矩形圍住，矩形的最小面積為何.

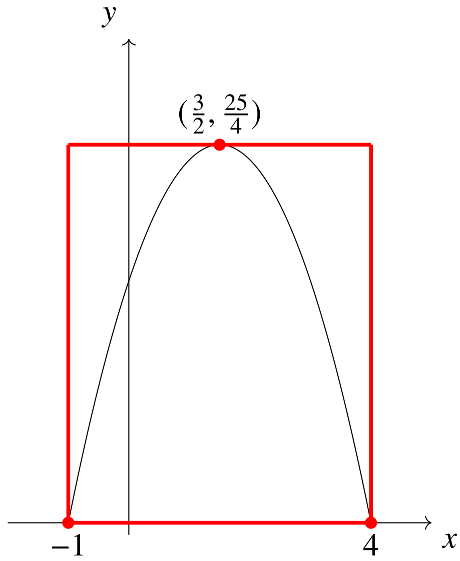
要知道矩形面積就需要知道底跟高，
我們發現底的兩端即是兩個解；
高就是函數頂點的 y 座標，
分別解出兩根、頂點座標就答案ㄌ：
兩根：

$$\begin{aligned}
\because\quad & -x^2+3x+4=0 \\
\Rightarrow\quad & x^2-3x-4=0 \\
\Rightarrow\quad & (x-4)(x+1)=0 \\
\Rightarrow\quad & x=-1 \text{ or } 4
\end{aligned}$$

配方算頂點：

$$f(x)=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{25}{4}$$

故矩形底邊是 $|4-(-1)|=5$ ；高是 $\frac{25}{4}$.



其實那個頂點的式子也不用背，
它就是 $f(x)=x^2$ 位移到 (h,k) 、再拉伸 a 倍罷了.
簡單來說，如果像是應用問題叫你算函數極值，直接微比較快；
如果他給圖形特徵，用頂點或硬幹.

(二)、一元二次不等式〔B1 Ch1〕

在這邊它要你知道在哪些範圍它是正的、哪些是負的，那個點它一定設計過了，基本上都會是十字交乘可以直接出來的，在稍微畫個圖，就答案ㄌ：

例題 3.4 / 一元二次不等式

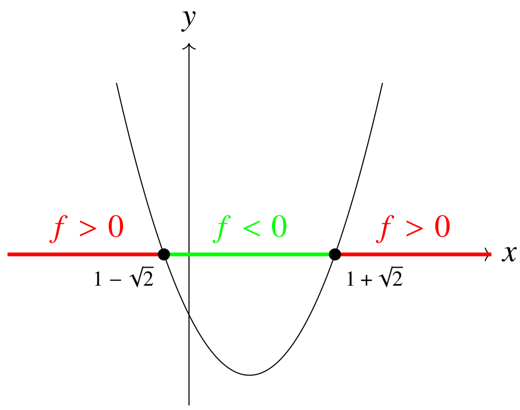
若 $1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}$ 為不等式 $x^2+ax+b\le 0$ 的解，求 a,b.

首先，畫圖.
平方項係數 $>0\Rightarrow$ 開口向上
那兩個交點 $1-\sqrt{2}$、$1+2$
就是 $f(x)=0$ 的兩個根
所以除了把 ↓ 炸開

$$(x-(1-\sqrt{2}))(x-(1+\sqrt{2}))=0$$

也可以反推：

$$\begin{aligned}
x &= 1\pm\sqrt{2} \\
x-1 &= \pm\sqrt{2} \\
(x-1)^2 &= 2 \\
x^2-2x-1 &= 0
\end{aligned}$$



比較係數就答案ㄌ.

這裡不外乎就是〔1. 給函數問解的範圍〕；或〔2. 給解範圍問函數〕

第一個就很簡單的，解出它的根，畫圖就有了.
第二個的，如果 $f(x) > 0$ 範圍是 $x \in \mathbb{R}$ 這種全部實數的那是不是代表：
跟 x 軸沒交點 $\Leftrightarrow$ 方程式沒實根 $\Leftrightarrow$ 判別式 < 0.
意賅簡言之，畫圖.

四、多項式

(一)、運算〔B2 Ch1〕

我不會多項式除法：D
但這裡主要需要懂多項式的餘因式定理、要會把 x 的多項式轉換成以 $(x-a)$ 的多項式.

(二)、泰勒級數〔B2 Ch1〕

在多項式除法後面通常會有一種題目：

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 4 = a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d$$

叫你算 a, b, c, d ，通常就是一直除下去嘛，在這邊我們可以有另外一種觀點，把一開始的：

$$f(x) = (x-0)^3 + 3(x-0)^2 - (x-0)^1 - 4$$

看作是從 $x = 0$ 往兩邊展開的；把新的：

$$a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2)^1 + d$$

看作是從 $x = -2$ 往兩邊展開. 那係數 a, b, c, d 到底要怎麼算呢？

結論 3.2 / 泰勒級數

給定任意無窮可微函數 $f(x)$ ，皆可以下列泰勒級數展開：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \left[\frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0\right] + \left[\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1\right] + \left[\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2\right] + \ldots \end{aligned}$$

其中 $f^{(n)}(x)$ 表示函數 $f(x)$ 對 x 做 n 次微分，$n!$ 表示 n 階乘.

我們發現題目規定的 $(x-a)^n$ 它已經幫我們做好了！剩下要找的係數就是：

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

其中 a 就是 $(x-a)^n$ 中的參考點，以上面那題就是 -2 ，試著用看看：

例題 3.5 / 泰勒級數

若多項式：

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 4 = a(x+2)^3 + b(x+2)^2 + c(x+2) + d$$

試求解係數 a, b, c, d.

根據上述的泰勒級數，我們知道 0 次項係數 d 是：

$$d = \frac{f^{(0)}(-2)}{0!} = f(-2) = 2$$

1 次項係數 c 就是 n 代 1：

$$c = \frac{f'(-2)}{1!} = f'(2) = -1$$

2 次項係數 b 即是 n 代 2：

$$b = \frac{f''(-2)}{2!} = f''(2) = -3$$

3 次項係數 a 即為 n 代 3：

$$a = \frac{f'''(-2)}{3!} = f'''(2) = 1$$

就結束ㄌ.

那要怎麼記呢，首先，他就是用另外一個多項式來描述現在的 $f(x)$ ；所以一定要有描述走向的那一項，也就是 $f^{(n)}(a)$ ；那下面的 $\frac{1}{n!}$ 可以看作是要把多項式微分的指數下來除掉，後面的 $(x-a)^n$ 就是原本的 x^n 位移而已.

(三)、多項式係數對圖形影響〔B4 Ch3〕

一直說要有能力快速看出圖長怎樣，我們就拿微分出來用，他的概念就是微 n 次代 0 ：
沒有微代 0 就是 0 這個點的截距
微一次代 0 就是 0 這個點的斜率
微二次代 0 就是 0 這個點的凹凸性
舉個例，簡單的二次開始：

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f'(x) &= 2ax + b \\ f''(x) &= 2a \end{aligned}$$

所以：

結論 3.3 / 多項式係數對圖形影響

對多項式而言，微 n 次代 0 就是 n 次項係數的正負.

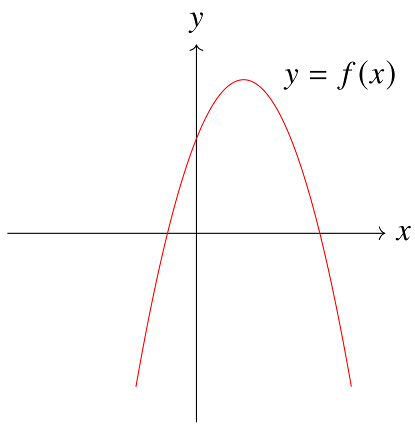
所以如果函數 $f(x) = +5x^2 - 6x + 1$ 就可以知道在 0 這個點：
因為二次項係數正，所以凹口向上；
因為一次項係數負，所以切線負斜率；
因為零次項係數正，所以截距正.
那微三次又是啥意思呢？可以這樣想微分就是變化嘛，所以微三次就是二次微分的變化率：
比如 三次微分正 $\Leftrightarrow$ 二次微分從負到正 $\Leftrightarrow$ 從凹向下到凹向上
反之 三次微分負 $\Leftrightarrow$ 二次微分從正到負 $\Leftrightarrow$ 從凹向上到凹向下

以此類推更高階微分也是同理，當然這只是知道他的走勢而已，需要更細緻的圖就再抓幾個點描上去就好ㄌ.

比如右邊這個函數，假設他是：

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

那麼根據圖形中他在 $x = 0$ 這個點的特性：



$$\begin{aligned} \text{凹口向下} \Leftrightarrow \quad & f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \text{二次項係數} \ a < 0 \\ \text{切線斜率正} \Leftrightarrow \quad & f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \text{一次項係數} \ b > 0 \\ \text{y 軸截距正} \Leftrightarrow \quad & f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \text{常數項係數} \ c > 0 \end{aligned}$$

五、指對數運算函數

(一)、指對數律〔B3 Ch2〕

指數-對數之間的關係就像是加法-減法；乘法-除法；微分-積分，他們是互逆的. 先來複習一下指數的各部位名稱：

$$a^x = b$$

a 叫底數；x 是數，所以顯然，我們把變數放在指數的部分，不然就變多項式了.
另外一部分也就是對數，剛講了我們重點在指數，而對數又是指數反過來：

$$x = \log_a b$$

a 在一樣在下面一樣叫底數，b 是真數.
整串 $\log_a b$ 就像是代表，〔a 的幾次方是 b〕的那個〔幾次方〕，所以運算特性就用指數去想就好ㄌ：

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \Leftrightarrow \log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$$

其中比較特別的是換底公式：

$$\log_a b = \frac{\log_a c}{\log_a c}$$

跟下面這個表達式不謀而合：

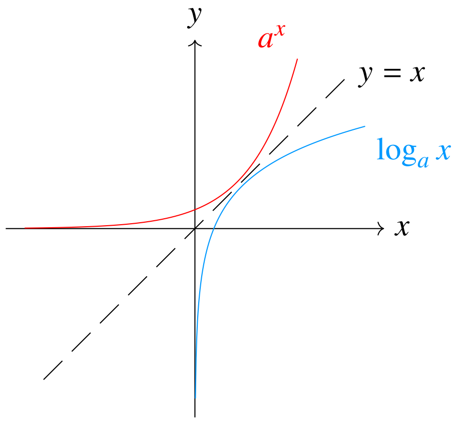
$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$$

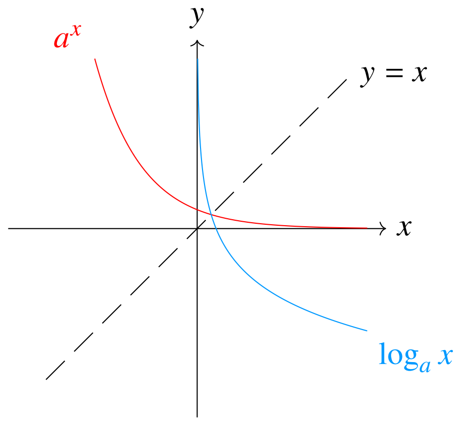
其他對數運算基本上在指數都有對應的，沒啥好講，就多刷題，就像國小學四則運算一樣.
在技高中我們將 $\log_{10} x$ 簡寫為 $\log x$ ；其他常用的底數有計算機領域以 2 為底的 $\operatorname{lb} x$ ；理工科的以 e 為底的自然對數 $\ln x$ (是小寫 LN 不是 IN)，至於這個 $\ln x$ 為啥常用，微分那部分會講到.

（二）、函數特性〔B3 Ch2〕

定義 3.4 / 指對數函數

若 $0 < a \neq 1$，則稱：
$f(x) = a^x$ 是以 a 為底的指數函數；
$f(x) = \log_a x$ 是以 a 為底的對數函數；





由反函數性質知道，指對數一定會對稱於 $y = x$ ，因此上面兩張圖可以由互相對 $y = x$ 做對稱得到，甚至可以只要知道指數函數圖形就可以推出對數函數的了. 可以由下面這個函數圖形↓拉看看那個底數 a ，看當底數不同有啥變化.
https://www.desmos.com/calculator/ju6etmlxyl

基本上可以觀察到當 a 在 1 兩邊的狀況完全相反，可以理解為倒數可以變成 -1 次方，提出去之後就變成了對稱. $y = a^x$ 恆過 $(0,1)$ ，因為 $1 = a^0$ ； $y = \log_a x$ 恆過 $(1,0)$ ，因為 $0 = \log_a 1$. 剩下一些顯然的特性我們把它列出來：

結論 3.4 / 指對數函數特性

當 $a > 1$ 時：a^x、$\log_a x$ ，皆嚴格遞增；
當 $a < 1$ 時：a^x、$\log_a x$ ，皆嚴格遞減；

不論 $a > 1$ 或 $a < 1$ ：a^x 皆凹向上；$\log_a x$ 皆凹向下.

又可以觀察到，a 在大概 1.45 附近的時候他們會相切，而這個確切的值會是 $a = e^{\frac{1}{e}}$. 剩下的大概就是給你幾個圖問，這可以應用在比較大小，因為他們圖形都是單調遞增或單調遞減，只要把底數或指數弄一樣就可以了：

例題 3.6 / 指對數比較大小

比較 $a = 0.01$、$b = \frac{1}{10\sqrt{10}}$、$c = 10^{-\frac{3}{4}}$ 之大小關係.

首先我們把它全部換同底，就可以比較了嘛：

$$a = 10^{-2} b = 10^{-\frac{3}{2}} c = 10^{-\frac{3}{4}}$$

因為 $10 > 1$，所以 $y = 10^x$ 是單調遞增，x 的大小關係就是 y 的大小關係.
答案就出來ㄌ.

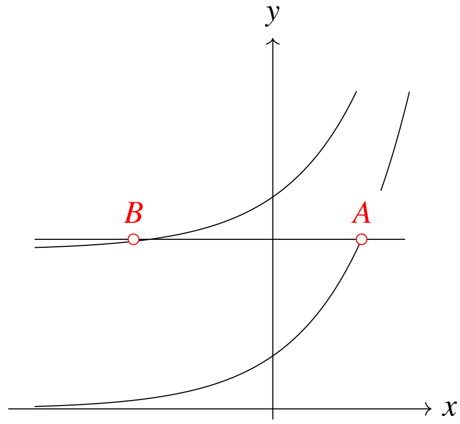
來個關於函數圖形的：

例題 3.7 / A109.21

設直線 $y = k$ 與兩指數函數 $y = 2^x + 3$、$y = 2^x$ 的圖形分別交於 A、B 兩點.
若 $\overline{AB} = 4$，則 k 為何.

好ㄉ不要緊張，先畫圖，兩個指數函數都可以很快畫出來.
$y = 2^x + 3$ 就是 $y = 2^x$ 往上移三單位，然後他說有一條叫 $y = k$ 的水平線交他倆於 A、B ，所以也就是有兩個不同的 x_A、x_B 分別帶到兩個指數，出來都是 k：

$$\begin{aligned} 2^{x_A} + 3 = k &\Rightarrow x_A = \log_2(k-3) \\ 2^{x_B} = k &\Rightarrow x_B = \log_2 k \end{aligned}$$



他又說他們距離是 4：

$$x_B - x_A = \log_2 k - \log_2(k-3) = 4$$

所以我們只要解這個式子就好了：

$$\begin{aligned} \log_2 k - \log_2(k-3) &= 4 \\ \log_2\left(\frac{k}{k-3}\right) &= 4 = \log_2 16 \\ \frac{k}{k-3} &= 16 \\ k &= \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

(三)、對數應用

如同生活上會用基於乘除法的「倍數」這個概念，更大量級的數字我們可以用建立在次方上的「對數」去表達一個大概的值. 或是為了方便觀察數之間的關係：如若每當表示氫離子濃度皆使用 $a \times 10^n\ mol/L$ 會非常冗贅不必要，因此我們基於對數的概念建立出了 ph 值的制度. 其他常見應用如聲音強度、芮氏規模、星等、傳染病模型之類數值間差異極大的比較.

在技高課程我們單單討論一個數的位數而已，如有一個數叫 1000，我們都知道它可以表示為 10^3；意即 $\log_{10} 10^3 = 3$. 我們把取完對數結果中的整數部分稱為「首數」，它給出了這個數的位數；而小數部分稱為「尾數」，它不重要. 因此我們可以給出以下結論：

結論 3.5 / 量級估計

當 $x > 1$、$\log x$ 的首數為 n ，
則 x 的整數部分為 $n + 1$ 位數.

當 $0 < x < 1$、$\log x$ 的首數為 $-n$ ，
則 x 自小數點後第 n 位不為零.

六、三角函數

(一)、關於弳〔B1 Ch2〕

國小學的角度量其實就是用一個圓下去分，每次計算都要寫一個 $\frac{\theta}{360^\circ}$ 非常麻煩. 因此我們就重新定義了一個角度的表示方式，就是用扇形的弧長與半徑比值，單位是弧度，或稱為

弳、radian、rad. 由於是兩個長度相除，在物理上稱之為無因次量，而又因為他真的很好用，所以角度沒有特別標示 $\theta°$ 那個小圈圈的話，就默認弧度量. 根據定義，他跟角度 degree 的轉換規則就是：

$$\frac{\pi}{180} \times deg. = rad.$$

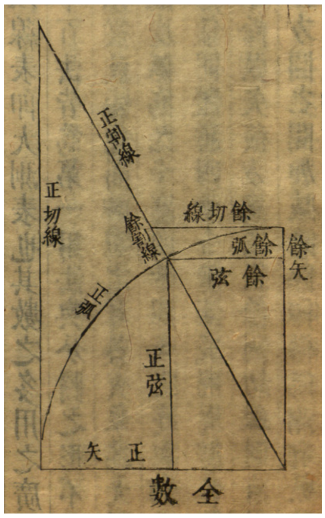
或者用圖比較好記，轉一圈是 2π 嘛，就這樣細分下去就好ㄌ.

對於弧度量的單位依舊可以稱之為「弧度」，但稱為「弳」比較妥當，若固然稱「弧度」會跟 degree 的「度」混淆. 在還不熟悉之前不要刻意省略單位，這樣容易出現 $\pi = 180°$ 的謬誤，甚者會有 $\pi^2 = 180 \times 180°$ 的錯誤認知. 類似的還有 $\pi \neq 180$、$\pi \neq 180°$，正確的是「π 弳等於 180 度」. 這就像是你不會說 1 = 2.54 而會說 1 inch = 2.54 cm 一樣.

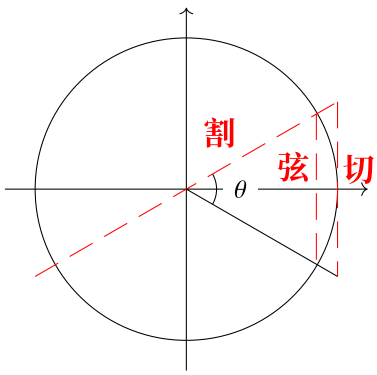
（二）、六個名詞〔B1 Ch2〕

說文解字

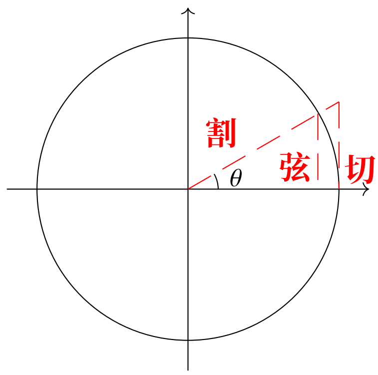
這肯定是高中數學的一個災區，陌生繁雜的符號名詞不說；還有一堆又臭又長的公式特性，長得很類似又不盡相同. 可以發現到六個三角函數不外乎就是前綴〔正、餘〕配上主要的〔弦、切、割〕排列組合罷了；對應外文就是前綴〔沒東西、co-〕配上〔sine、tangent、secant〕.



弦的外文之所以不使用 string 之類的詞，是因為梵文的弓弦寫作「jiva」；而轉寫到阿拉伯文省略成了「jb」；再翻譯到拉丁文的時候被解讀成了「jayb」是胸部、海灣的意思；因此使用了拉丁文的「sinus」；到現代英語就成了「sine」. 對照到圖形上的實際線條，我們從右邊這張大概 400 年前的圖，出自熊明遇所著作的格致草. 而這是放在第二象限的，我們把它放在比較熟悉的第一象限；並且補齊變成一個完整的圓，就能懂它為什麼要這樣命名了：

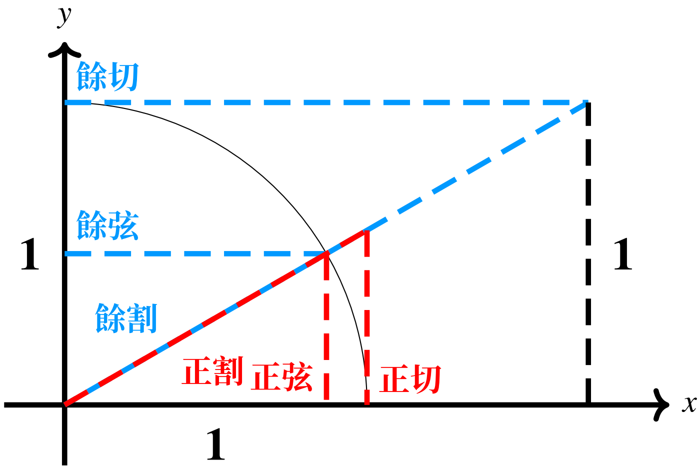


↑ 起初一開始長這樣 ↑



↑ 為了方便改成這樣 ↑

也就是把它都變一半！好啦現在搞定〔弦、切、割〕了，那前面的〔正、餘〕是哪來的呢？顯然，餘就是餘角 complementary angles，跟外文的 co-前綴也對的上，所以加上它是個單位圓，角度其實是弧度，整張完整的圖會長這樣：



這張圖確實好用，任何有關角度的特性：如各象限正負、象限角的函數值、任意角轉換等看它就可以知道了，也不用背哪個函數在那裡是正是負，還有 $\tan x$、$\cot x$、$\sec x$、$\csc x$ 在一些角度會爆掉變無窮嘛，當然也可以從這張圖得知. 當然現在上面的三角形都有一邊剛好是單位圓半徑的 1，而實際上遇到的問題不可能那麼湊巧，所以比如：

$$\sin x = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\text{、}\cos x = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

之所以要除掉斜邊，就可以理解為是因為要縮放到斜邊為 1 的三角形.

因此對於陌生的定義就不再那麼毫無頭緒了：

定義 3.5 / 三角比

互為倒數

$$\sin\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

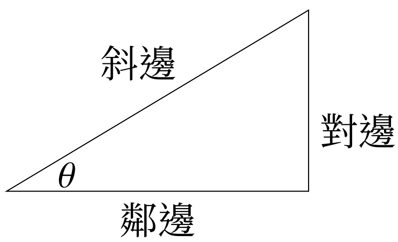
$$\cos\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$$



下面三個 $\cot x$、$\sec x$、$\csc x$ 可以分別用上面的 $\tan x$、$\cos x$、$\sin x$ 去表示，而 $\tan x$ 又是 $\sin x$ 除以 $\cos x$. 宗上所述，如果非常熟悉正餘弦，基本上三角的變換是遊刃有餘了.

(三)、函數特性〔B1 Ch2、B3 Ch1〕

常見的角度化簡題目，之所以有口訣〔奇變偶不變，符號看象限.〕，是因為若遇到如 90°、270° 之類的 $(90 \times 2n)°$ 是依附在 y 軸上的角，根據上圖割圓八線. 依照上面線性函數講的，三角函數並不是線性函數，所以才會有和差角、倍角公式，其實最實用的還是和角，不想背那

麼多就記和角就好了，其他有個印象可以現場推：

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$$

就像是輪流帶不同角度那樣，有點像是乘法微分：

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$

另外一個就是餘弦的和角：

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$$

記這兩個其他基本上就可以推出來了，二倍角就是代 $x=y$；差角就是 y 變 $-y$，基本上會用到的公式他會給你，但不代表不用讀，他給了你不一定會用，要夠熟悉他才知道怎麼用.

例題 3.8 / C109.2

若 $\tan\theta+\sec\theta=5$，則 $\tan\theta-\sec\theta$ 為何？

在這裡可以把它換成 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=5\Rightarrow\sin x+1=5\cos\theta$，然後硬幹出 $\sin\theta$ 或 $\cos\theta$，在分別算出 $\tan\theta$、$\sec\theta$ 得出答案.
但是我們可以發現，題目提供的跟要找的東西，剛好是 $A+B$、$A-B$，所以後續盡可能往 $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 靠近. 而公式表給了：

$$\text{三角函數的平方和公式：}1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

我們把它移項：

$$\tan^2\theta-\sec^2\theta=-1$$

發現它剛好是 A^2-B^2 的形式，把它打開：

$$(\tan\theta+\sec\theta)(\tan\theta-\sec\theta)=-1$$

紅色部分題目給了叫作 5，所求就是 $\frac{-1}{5}$.

例題 3.9 / C109.3

$\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 50^\circ-\sin 25^\circ\cos 25^\circ\cos 20^\circ$ 為何.

首先我們觀察一下，都是 $\sin x$、$\cos x$，而且角度剛好是〔10°、20°〕、〔25°、50°〕，所以不太可能是要換成其他像是平方公式的東西，我們往二倍角或和差角想，先把他分一下：

$$\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 50^\circ-\sin 25^\circ\cos 25^\circ\cos 20^\circ$$

綠色部分剛好是 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 會出現的一部份，把他換掉：

$$\frac{1}{2}\sin 20^\circ\cos 50^\circ-\frac{1}{2}\sin 50^\circ\cos 20^\circ$$

把 $\frac{1}{2}$ 提出來裡面剩下很像上面講過的 $\sin x$ 和角，但他中間是負，所以是差：

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\sin 20^\circ \cos 50^\circ - \sin 50^\circ \cos 20^\circ) \\
&= \frac{1}{2}(\sin(50^\circ - 20^\circ)) \\
&= \frac{1}{2}\sin(30^\circ)
\end{aligned}
$$

(四)、疊合〔B3 Ch1〕

疊和應用不用多說了吧，電學只要有關信號跟交流的用到一堆，最簡單的疊和就是兩個頻率一樣的波疊起來：

$$f(x) = 3\sin x + 4\cos x \overset{\Delta}{=} ?\ \sin(?\,x + \ ?)$$

我們想要把他以一個波表示疊出來的東西，那我們往剛剛的和角想：

$$\sin(x+\phi) = \sin x \cdot \cos\phi + \cos x \cdot \sin\phi$$

那藍色的 $\sin\phi$、$\cos\phi$ 分別就是三角形的兩邊嘛，而且他自己不能超過 1，要把它弄成 對邊斜邊、鄰邊斜邊 的感覺，所以我們把原本的 $f(x)$ 提出斜邊：

$$f(x) = 3\sin x + 4\cos x = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right)$$

我們就可以構造一個新的三角形，使得他的 $\sin\phi = \frac{4}{5}$、$\cos\phi = \frac{3}{5}$，所以括號裡面就是和角：

$$\sin(x+\phi) = \sin x \cdot \cos\phi + \cos x \cdot \sin\phi$$

這樣就可以讓原本的函數用新疊和出來的東西表示了：

$$f(x) = 5\sin(x+\phi)$$

所以就知道極值是 5. 我們發現到當他長成 $f(x) = a\sin x + b\cos x$ 的樣子，極值就會是係數做畢氏：$\sqrt{a^2+b^2}$.

例題 3.10 / 疊合

$f(x) = 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 1$ 之極值為何.

前面的 $2\sin x\cos x$ 根據倍角就是 $\sin 2x$；
後面的 $2\cos^2 x - 1$ 也根據倍角是 $\cos 2x$.
現在的 $f(x)$ 就很好看了：

$$f(x) = \sin 2x + \cos 2x$$

但他問極值嘛，這樣不可能可以直接知道，所以考慮疊和. 極值就係數做畢氏：

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

(五)、一個酷東西〔Electric〕

當然實務上的波不會那麼剛好只有兩個，甚至可以直接說直流偏壓也是一個頻率為零的波. 所以大概 200 年前就有一個熱力學家搞了一個很方便的東西出來，他可以把所有具週期的信號波，用正餘弦跟直流偏壓表示，也就是傅立葉級數：

$$f(x) = \underbrace{a_0}_{\text{直流}} + \underbrace{\sum_{0}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)}_{\text{交流}}$$

結合交流電路的有效值定義，我們就可以知道含直流偏壓 a_0 的交流信號 $f(t)$，有效值是：

$$V_{rms} = \frac{1}{T}\sqrt{\left(\frac{f(t)}{\sqrt{2}}\right)^2 + a_0^2}.$$

當然這是離散的，把時域轉到頻域，所有變化都趨於零，就可以得到傅立葉變換ㄌ：

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

好的這不重要可以跳過.

七、單變數微積分

地圖

我們從微分學起，微分英文叫 differential，大概可以聯想到有一些不同的、差異的東西. 再看前面中文有個微，是微小的. 所以整個組在一起，可以解讀為微分是在搞〔微小〕的變化，但是他總會有個變化的對象，比如電流，可以看作電荷對時間的變化嘛；速度，可以看作位置對時間的變化. 但是這樣用 $\frac{\Delta\text{一個東西}}{\Delta\text{另個東西}}$ 這樣算就好了啊，學微分幹嘛？你可以仔細看一下，這樣明明只有變化量啊，剛剛說好的〔微小〕呢？

所以高一物理講到瞬時速度的時候，用了一個奇怪的符號：

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

就是為了要搞定〔微小〕的部分，所以勒，要學微分的話，要先搞定前面這個 lim 詭異的東西.

而另外一個部分，積分 Integral，一樣從命名上而言可以解讀為要累積一整塊東西嘛，最簡單的我們可以把他分割成一堆長方形，而不同長方形就會有不同的高，我們就可以用一串數列把他串起來，就不會是一串零零散散的數字了.

(一)、Re：實數〔B4 Ch3〕

原本的實數 $\mathbb{R}$ 是沒有 $-\infty$、$+\infty$ 的概念，到了有極限的高等數學中我們將原本的實數集加入正負無窮，擴充為廣義實數集：

定義 3.6 / 廣義實數集

在實數集 $\mathbb{R}$ 中加入元素 $-\infty$、$+\infty$ ，令：

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

我們稱集合 $\overline{\mathbb{R}}$ 為廣義實數集，規定 $\forall x \in \mathbb{R}$，皆有 $-\infty < x < +\infty$.

根據定義我們可以推導出一堆運算法則：

結論 3.6 / 廣義實數集運算法則

若 $a \in \mathbb{R}$、$b \in (0, +\infty)$、$c \in (-\infty, 0)$, 則：

1) $a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty$.
2) $a - (\pm\infty) = -(\pm\infty) + a = \mp\infty$.
3) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty$.
4) $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$.
5) $b \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot b = \pm\infty$.
6) $c \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot c = \mp\infty$.
7) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$.
8) $(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$.
9) $\frac{\pm\infty}{b} = \pm\infty$.
10) $\frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$.

相反，有些式子依舊無法定義：

定義 3.7 / 不定式

1) $\infty - \infty$型：$(+\infty) - (+\infty), (+\infty) + (-\infty), (-\infty) + (+\infty)$.
2) $0 \cdot \infty$型：$0 \cdot (\pm\infty)$.
3) $\frac{\infty}{\infty}$型：$\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$
4) $\frac{0}{0}$型：$\frac{0}{0}$.

而對於不定式的極限值運算，我們到極限的運算方式小節討論.

(二)、極限〔B4 Ch3〕

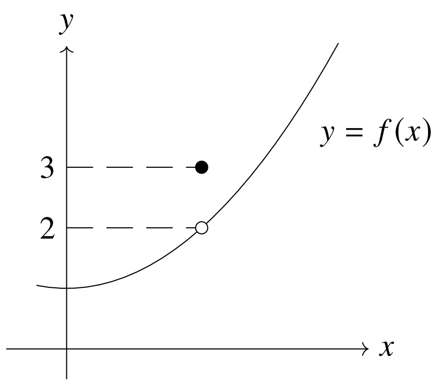
1、直觀定義

懂運算之前，要先懂這符號到底再寫啥：

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

可以看到他有一個主體 lim，也就是 limit 的簡寫，下面的 $x \to 2$ 就代表著 x 往 2 靠近，右邊的 $f(x)$ 也就是作用的對象是 f 這個函數. 所以整坨就代表：當 x 一直往 2 靠近的時候，$f(x)$ 會往哪裡走. 有一個小細節要注意，這裡只在乎他會往哪走，也就是他的走向，實際 f 在 2 這個點到底有沒有東西不太重要.

像是右邊這個函數
他在當 x 往 x_0 靠近時
$f(x)$ 越來越靠近 2
所以稱 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 2$
但是實際上 f 在 $x = x_0$ 這個點的值
是上面的 $f(x_0) = 3$
所以極限值不一定會等於極限值.



這樣也會有一個新的問題出現我們把 x 靠近 x_0 的時候，要從左邊還是右邊，又如果兩邊的極限不一樣呢？所以我們把從左邊靠近的極限叫作「左極限」，記為：

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

多了一個負號表示從負方向，也就是左邊；反之，從右邊的叫做「右極限」，寫成：

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

一樣是多了一個正號表示從正方向；即右邊. 而當他倆相等的時候，就可以說極限值存在了.

定義 3.8 / 極限

對於函數 $f(x)$ ，且 $L \in \mathbb{R}$ ，若：

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

則稱 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的極限值：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

是存在的，並且值為 L.

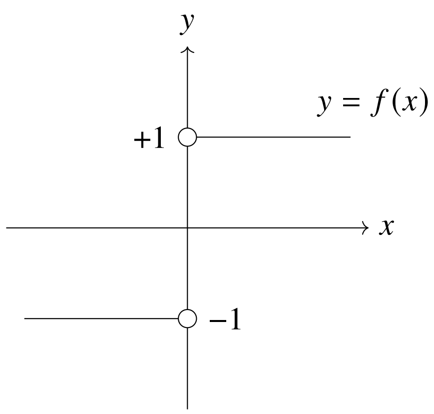
像是右邊這個函數：

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

然而：

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$$

因此我們不知道他往 0 靠近的時候到底是 −1 還是 +1，故稱之為極限不存在，常簡寫成 D.N.E.，是 Does Not Exists 縮寫.



2、連續

需要這個東西，可以說是因為微分是要算微小的變化，阿如果我們要微分的這個函數是斷開的，它就不會有微小變化了. 比如剛剛右上角那張 −1 、 +1，如果我們要討論它在 x=0 這個點的變化，爆炸了唄！所以簡單來說，直觀的定義連續就是極限值 = 函數值，當然他們倆個都要存在嘛：

定義 3.9 / 連續

稱函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 是連續的（continuous, conti.）⇔

$$\begin{cases} f(x) \text{ 存在} \\ \lim_{x\to a} f(x) \text{ 存在} \\ f(x) = \lim_{x\to a} f(x) \end{cases}$$

但是他不可能直接考這行字啊，所以可能出這樣：

例題 3.11 / 連續

給定函數：

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ,x \le 1 \\ ax + b & ,1 < x < 3 \\ -2 & ,x \ge 3 \end{cases}$$

若 $f(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 皆連續，則 a、b 為何.

他在整個實數軸都連續嘛，所以當然在 $x = 1$、$x = 3$ 這兩個點也連續. 所以根據定義，他在這兩個點的極限值 = 函數值：

$$\begin{aligned} &\because \quad f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \\ &\therefore \quad a + b = 2 \\ &\because \quad f(3) = \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) \\ &\therefore \quad 3a + b = -2 \end{aligned}$$

解聯立就答案ㄌ.

我們根據連續的定義，可以知道連續函數有一個特性就是：極限值 = 函數值，所幸我們學過的函數在各自的定義域內上都是連續的，這代表我們往後在求極限就只要把他代進去就好ㄌ.

3、運算方式

依照剛講的連續，一般的極限就直接代進去就好，但是有些我們要討論他趨近無窮的狀態，顯然不可能直接代進去. 而在函數那邊講過，數列也可以看做是一種函數，所以我們可以把函數極限跟數列極限一起處理. 第一種不外乎就是去零因子，要把會出問題的地方去掉：

例題 3.12 / 去零因子.1

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

分子分母代零進去都是零，所以上下都藏了一個會出問題的東西，就要把他抓出來消掉：

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1} x+1 = 2$$

例題 3.13 / 去零因子.2

$$\lim_{x\to3} \left(\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{x-3}$$

一樣代進去會變成 $0 \cdot \frac{1}{0}$ 會爆炸，所以要把出問題的部分搞掉，先通分：

$$= \lim_{x\to3} \frac{3-x}{3x(x-3)} = \lim_{x\to3} \frac{3-x}{-3x(3-x)}$$

紅色部分可以消：

$$= \lim_{x\to3} \frac{1}{-3x} = \frac{-1}{9}.$$

也有可能發生極限不存在的情況：

例題 3.14 / D.N.E.

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x-1}$$

可以發現代進去下面是零，上面不是零，所以代表分子沒有東西可以把分母出問題的地方消掉，故極限不存在.

當確定極限存在之後，接下來就是要找到快速的方法計算他，幾種常見的就像多項式分式跟指數的形式，通常就是把最大的除掉就好ㄌ.

例題 3.15 / 多項式函數趨於無窮

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+17x-11}{3x^2+7x+6}$$

當 x 趨於無窮大的時候，次方越高跑的越快嘛，所以我們只考慮最高次. 方法就把他同除最高次：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+17x-11}{3x^2+7x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\left(\frac{x^2}{x^2}\right)+17\left(\frac{x}{x^2}\right)-11\left(\frac{1}{x^2}\right)}{3\left(\frac{x^2}{x^2}\right)+7\left(\frac{x}{x^2}\right)+6\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

藍色因為分母比分子大，所以趨於零；而紅色就是 1 ，剩下就是：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot1}{3\cdot1} = \frac{2}{3}.$$

除了這種 x 在下面的多項式，他也可以在上面變成指數函數，方法一樣：

例題 3.16 / 指數函數趨於無窮

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot 2^{8x}-3\cdot 2^{x}}{4\cdot 3^{x}+7\cdot 16^{2x}}$$

先把他指數換成一樣的只有 x 比較方便處理：

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot 256^{x}-3\cdot 2^{x}}{4\cdot 3^{x}+7\cdot 256^{x}}$$

同除 256^x：

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot\left(\frac{256}{256}\right)^{x}-3\cdot\left(\frac{2}{256}\right)^{x}}{4\cdot\left(\frac{3}{256}\right)^{x}+7\cdot\left(\frac{256}{256}\right)^{x}}$$

藍色底數 <1，趨於零；而紅色就是 1 ，答案就是 $\frac{7}{5}$.

還有一些拆一拆可以消的：

例題 3.17 / 消去

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$$

如果我們想辦法把根號拆掉，那中間紅色的 $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$ 就可以消. 所以我們用 $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ ：

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}
\end{aligned}$$

就跟上面一樣了，同除最高次 n^1 ，答案 $\frac{2}{2}=1$.

他也可以結合微分定義考：

例題 3.18 / 結合微分定義.C110.05

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(3+h)+2}-\frac{1}{3+2}}{h}$$

顯然這就是微分的定義： $\lim_{變化\to 0}\frac{y變化}{x變化}$ ，那上面那個函數就是 $f(x)=\frac{1}{x+2}$. 特別來講，這題的是在 $x=3$ 這個位置的微分，所以整個：

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

他要求的極限值就是 $f'(3)$ ，直接微:

$$f'(3)=\left(\frac{1}{x+2}\right)\Big|_{x=3}=\frac{1}{-(x+2)^2}\Big|_{x=3}=-\frac{1}{25}$$

當然如果考試忘記就直接炸開算極限也可以

差不多就這樣. 還有左右極限要稍微注意下. 極限就多刷題熟悉快速的算法.

4、L'Hopital's rule

結論 3.7 / L'Hopital's rule

若 $\dfrac{f(a)}{g(a)}$ 為不定式，則 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

羅必達可以多種形態表達，但它的概念像是這樣的：因為它代進去是 $\frac{\infty}{\infty}$，我們無從得知這個比值，所以我們退一步觀察它增長的速度，進而為不定式極限賦值. 習慣上我使用符號「$\overset{\text{H}}{=}$」來表達這個等號使用羅畢達法則.

例題 3.19 / L'Hopital's rule

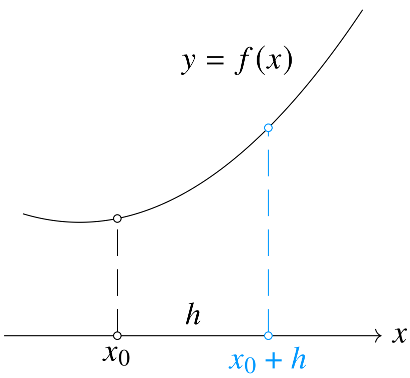
$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{x^3-8}.$$

直接把 2 代進去發現上下都是零，為不定式，可以去零因子也可以直接羅，這邊考慮羅：

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{x^3-8}\overset{\text{L}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{6x-5}{3x^2}=\frac{7}{12}.$$

（三）、微分〔B4 Ch3〕

微分即微小變化，之前算一個函數 y 對 x 的變化，也就是很簡單的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，我們現在需要知道一個點 x_0 的變化，但是一個點 x_0 就固定住了啊，沒有變化量. 所以我們可以用另外一個點 $x=x_0+h$ 來靠近 x_0 ，也就是：



$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

左邊藍色那部分 lim 就代表 x 往 x_0 靠近，右邊紅色就是簡單的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ，我們也可以把下面的 Δx 寫成另外一個數 h ，故上面那個式子可以等價於：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

一樣左邊藍色代表 x 的變化很小、趨近 0 ，而右邊紅色也是簡單的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

這式子就是微分定義了. 我們把大家的符號都展示出來：如果是 y 對 x 微分的話，牛頓

把它寫成 $\dot{y}$，拉格朗日寫成 y'，他倆上面那一小個點點代表這個 y 被微分了一次. 當然你可以一直把它微下去，微兩次就兩個點 y''. 但是這種方法少寫了微分的對象，在多變數就容易混淆. 萊布尼茲：$\frac{dy}{dx}$，也就類似於 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，不過包含了微小的概念在裡面；歐拉符號系統前面的 D 就代表微分 Differential，下標 x 就是對 x 微分. 這兩個就對於微分的對象有明確寫出來，而現在需要熟悉的是萊布尼茲的系統，因為在積分的變數變換會有類似的概念.

	微分	積分
牛頓	$\dot{y}$、$\ddot{y}$	$\overset{\prime}{y}$、$\overset{\prime\prime}{y}$
歐拉	$D_x y$、$D_x^2 y$	$D_x^{-1} y$、$D_x^{-2} y$
拉格朗日	y'、y''	$y^{(-1)}$、$y^{(-2)}$
萊布尼茲	$\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\int y\,dx$、$\iint y\,dx$

因此我們可以給出微分的明確定義、以及一堆名詞：

定義 3.10 / 導函數

給定函數 $f(x)$，若極限：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，則稱函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 是可微分的（differentiable, diff.），並記此極限作：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

若在定義域內的自變數以及導數之間存在對應關係，則稱為導函數. 將原函數 $f(x)$ 到導函數 f' 的過程，稱為微分.

1、特性

依據連續以及微分的定義，我們可以推導出一些結論，以幫助我們得以快速判斷：

結論 3.8 / 可微一定連續

已知函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微，則函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 必連續.

結論 3.9 / 連續不一定可微

已知函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 連續，但函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不一定可微.

反例：考慮函數 $f(x)=|x|$，f 在 $x=x_0$ 連續，但不可微.

結論 3.10 / 反函數微分

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 處導數存在，且 $f'(x_0)\neq 0$，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近連續且嚴格單調，則其反函數 $x=\varphi(y)$ 在 $y=y_0=f(x_0)$ 是可微分的，並且：

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

即在同個點上，原函數導數及反函數導數互為倒數.

2、運算方式

我們知道微分也是線性運算，所以他對係數積跟加法可以直接拆開：

$$(c\cdot f)' = c\cdot f(f+g)' = f'+g'$$

要注意，這裡的 c 需要對 f 而言只是一個常數，如果他是一個函數的話，並不通用：

$$(f\cdot g)' \neq f'\cdot g'(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

就類似於分別把每個各微一次加起來. 還有一個除法，因為分子有個負號，要注意前後順序：

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

接下來最重要的就是合成函數微分. 要會微分之前要先知道他要怎麼拆嘛，舉個例：

$$f(x) = \sin\sqrt{(2x+5)}$$

這個要怎麼拆勒？我們可以從最靠近 x 的開始：第一層就是 $2x+5$ ，不把再拆成 $2x$ 再 $+5$ 的原因是，他只是係數積跟加法，不影響微分結果. 再出去第二層是根號：$\sqrt{(\ )}$；最後就是 $\sin(\ )$ 但應該最多就出到兩層，而且基本上會都是多項式跟根號.

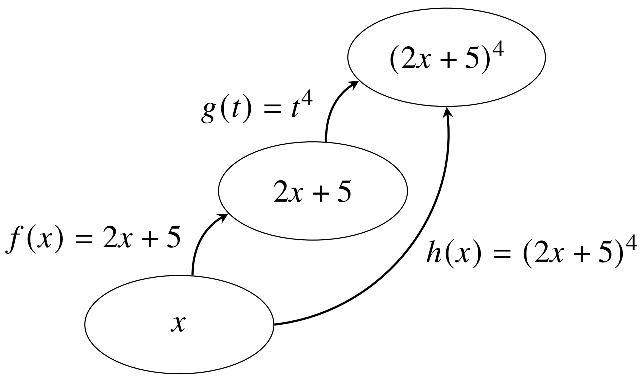
會拆之後就可以微了，當然，要一層層微進去. 比如考慮：

$$h(x) = (2x+5)^4$$

可以拆成是 $g(t) = t^4$ 跟 $f(x) = 2x+5$ 複合如果會亂掉可以畫右邊這個圖. 現在要算的是 h 對 x 微，所以就要一層層微下去：

$$h'(x) = 4\,(2x+5)^3\cdot 2$$

另外一個比較常見的就是外面那層是根號，不過方法一樣，根號就是 $1/2$ 次方. 記得只要他很多層，就要一層一層微，在多變數函數或向量函數同理.
6666***



3、P.S.

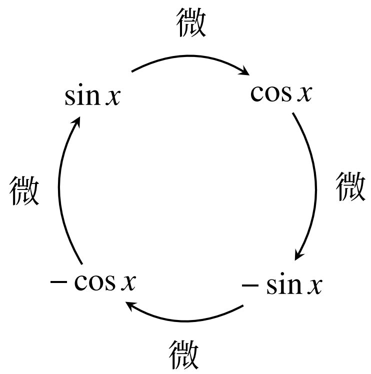
在指對數函數小節曾提到，$\ln x$、e^x 之類以 e 為底的指對數尤為常用. 若考慮函數 $f(x) = e^x$，據推導 $f'(x) = e^x$. 也就是以 e 為底的指數函數微完還是它自己！這有啥好處呢？考慮微分方程 $y' = y$ ，它就是一個解，而物理上又一堆微分方程，比如經典的牛二：

$$F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

抑或更貼近的 RL 直流暫態：

$$E(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

既然最一般的微分方程解是 e^x ，那其他更複雜的也就是繼續往上堆而已. 可以說 $\sin x$、$\cos x$ 也是 e^x 堆起來的，所以微一微才會四個一循環.



(四)、數列〔B4 Ch4、B2 Ch3〕

數列極限運算在前面的極限講過了，要看極限請往上滑，這裡著重講數列的特性. 在這裡我們一般研究的是無窮數列，因為有限數列就都已經定好了，沒啥好研究. 研究啥呢？研究走向. 所以才會有收斂、發散的定義. 首先我們說一個數列收斂，就是他會往一個值靠近嘛；反之，不收斂就是發散. 特別要注意的是，像是 $\{a_n\} = (-1)^n$ 這類，他會在 -1、1 之間跳來跳去，那他也是發散，因為他不是往〔一個值〕靠近，另外我們稱這個點為聚點.

另外就是等比數列的收斂性質，就他要 0. 多才會越乘越小，當然負的也可以. 如果比值是 1 的話每一項都會是 a_1 ，所以他會收斂在 a_1 . 但如果是 -1 的話，就像上一段講的，會在 $\pm a_1$ 跳來跳去，不收斂. 還有就是把他加起來的叫做級數. 最一開始我們要寫一坨東西加起來會寫：

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

這樣看可能還好，但是數字一多起來會很亂，而且這樣標是沒人知道點點點裡面是啥. 所以我們用一個符號串起來：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

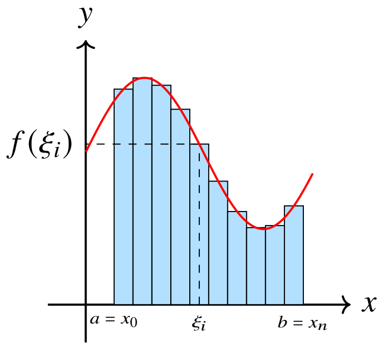
簡單來說他就是把一堆東西加起來，叫做求和符號. 那個沙漏狀的是希臘字母 Sigma 大寫，其源自「Σογμαρω」意為「增加的」之字首、和現今使用的「Summation」是同源字. 而上下標是範圍，後面是一般式. 有點像是 for 迴圈，預設那個變數 k 是正整數. 當然它也是線性的運算，也就是他對係數積跟加法可以直接拆開，乘除法指對數就不行.

1、等差等比

2、複利

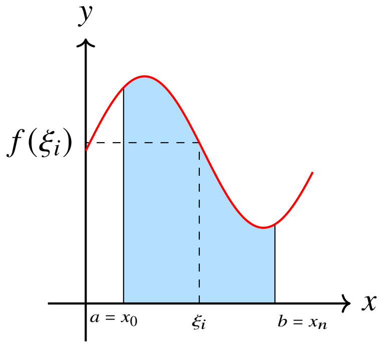
（五）、積分〔B4 Ch4〕

所謂積分，理所當然的是要累積一些東西，而對於函數 $f(x)$ 而言，即累積所有區間內的 $f(x)$. 也就是給定了 x 的範圍，要算這塊範圍的曲線下面積. 最簡單就是通過切割成很多塊長方形來逼近他. 長方形的底；也就是 Δx 已經是確定了的；而在一個區間內有那麼多的函數值，那高要怎麼取呢？



黎曼和

既然我們是要逼近他，類似於左右極限；長方形的高可以取 最高 跟 最低，還有一個中間任意值. 如此一來就可以通過：最低 < 中間 < 最高 來逼近了. 而我們把以最低為長方形的高所累積出來的面積，稱為下和 Lower Sum（L）；同理，以最高的稱為上和 Upper Sum（U）；而在中間的稱為黎曼和 Riemann Sum（R）. 因為這東西是黎曼搞出來的，稱為黎曼積分理論. 而因為長方形的高：最低 < 中間 < 最高，所以：$L < R < U$ ，當分割的區間越來越小時，L 會遞增；U 會遞減. 故若 L、U 趨近於同一個值 A，就稱 f 在 $[a,b]$ 上是可積的.



積分

我們可以把每個區間，長方形的高弄成一個數列，而我們只要探究這個數列的和就可以趨近積分了. 那他的符號跟之前的黎曼和：

$$\int_a^b f(x)dx \quad \sum_a^b f(x)\Delta x$$

可以說是異曲同工之妙，藍色部分都是長方形面積的底乘高，左邊紅色就是累加起來. 而實際上那條像蟲的積分符號就是 Summation 的 S 拉長得到的，當時的人們如果 S 寫在字首都習慣把它拉長. 所以在積不出來的面積甚至體積的時候，就可以回歸這個分割方法想.

（六）、微積分基本定理

他叫 Fundamental Theorem of Calculus，簡稱 F.T.C. 如果每次積分都要用數列累積，這樣非常累贅繁複，我們就此推導出了微積分基本定理，它有兩部分：

結論 3.11 / F.T.C.

〔Part1〕：先微再積 = 不變 or 積分 = 反·微分！

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'x = f(x)$$

〔Part 2〕：積完直接代進去！

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dt = F(b) - F(a)$$

其中 $F'(x) = f(x)$. $f(x)$ 稱為 $F(x)$ 的導函數；$F(x)$ 稱為 $f(x)$ 的反導函數.

例題 3.20 / F.T.C.

Evaluate：

$$\int_0^1 x dx.$$

1° by F.T.C. Part1 積分 = 反微分
也就是找誰微完是 x 嘛，就是 $\frac{1}{2}x^2+c$

2° by F.T.C. Part2 積完代進去
所求就是積分出來的 $\frac{1}{2}x^2$ 代入 $0 \sim 1$ ：

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}x^2\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

（七）、變數變換

實際上遇到的積分不可能那麼簡單，比如根據電壓有效值的定義，也許會遇到如：

$$\int \sin^2 x dx$$

這類複合函數的積分，當然我們有相應的對應方法.

例題 3.21 / 變數變換.1

$$\int (2x+5)^5$$

顯然這炸開會死. 我們可以把複雜的部份包起來，就是複合函數裡面那層. 比如我們把它包成一個叫做 u 的變數，想要把整個換到 u 的世界：

$$u = (2x+5)$$

那還有後面的 dx 要換過去，也就是我們要找到 dx、du 之間的關係，可以通過 u 對 x 微分的 $\frac{du}{dx}$ 找到：

$$\frac{du}{dx} = (2x+5)' = 2$$

把 du 乘到右邊：

$$du = 2 \cdot dx$$

這樣就可以全部換到 u 的世界了：

$$\int (2x+5)^5 dx = \int u^5 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^5 du$$

我們發現中間為了要找到 dx、du 之間的關係，會 u 對 x 微. 所以如果包起來的以外還有東西，就要盡可能的去跟 $\frac{du}{dx}$ 配：

例題 3.22 / 變數變換.2

$$\int x^2\sqrt{2x^3+1}dx$$

顯然直接積根號會炸掉，所以包根號裡面的東西為：$u = 2x^3+1$，之後還剩下前後的 x^2、dx. 接下來找到 dx、du 關係：

$$\frac{du}{dx} = (2x^3+1)' = 6x^2$$
$$\Rightarrow du = 6x^2dx$$

就跟剩下的部分配上了，就只差一個係數：

$$\int x^2\sqrt{2x^3+1}dx = \int \sqrt{u}\cdot\frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

簡單來說就是能包就要盡量包乾淨，把能配的地方配好，就多刷題ㄅ. 搞定不定積分這種沒上下限的之後，接下來就再把上下限加進去，變定積分. 在這裡有兩種想法：

〔Method.1〕：
既然我們剛剛已經會沒有上下限的積，那就先不要理上下限，積完再代進去：

例題 3.23 / 定積分-變數變換

$$\int_1^{\frac{3}{2}}(2x-1)^4dx$$

先積：

$$\int(2x-1)^4dx = \cdots = \frac{1}{2}\frac{(2x-1)^5}{5}+c$$

再代數字：

$$\left[\frac{1}{2}\frac{(2x-1)^5}{5}\right]_1^{\frac{3}{2}} = \cdots$$

〔Method.2〕：
我們也可以直接把上下限一同換到 u 的世界：

例題 3.24 / 定積分-變數變換

$$\int_1^{\frac{3}{2}}(2x-1)^4dx$$

令 $u = 2x-1$，則 $du = 2dx$.
接下來根據剛剛設定的關係式 $2x-1=u$，把上下限也換進去：

$$\begin{cases} \text{上限：}\frac{3}{2} : 12\cdot\frac{3}{2}-1=2 \\ \text{下限：}1\cdot : 12\cdot 1-1=1 \end{cases}$$

所以我們就得到 u 世界的上下限, 把它重新寫出來：

$$\int_1^{\frac{3}{2}} (2x-1)^4 dx = \int_1^2 u^4 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^2 u^4 du$$

一樣就很好積了.

剩下如絕對值積分就可以回歸積分本來是算面積的定義，比如要算：

$$\int_0^1 x dx$$

除了直接積之外，也可以視作函數 $f(x)$ 在區間 $[0,1]$ 圍出的面積.

（八）、應用時如何積？

知道怎麼算之後就要知道怎麼用，一般而言，我們通常是要累積一塊區域的東西，比如我要知道一個面通過的磁通是多少、一段時間內流過的電荷量是多少這類的. 就按照一開始定義積分的思緒：[Step.1 分割]→[Step.2 累積]. 拿課本教過的舉例，兩函數圍成的面積：