1. Logic

Definition 能夠判斷真偽的敘述稱為**命題 (Statement)**

Question 下列哪些敘述是命題？

□「5 大於 2。」

□「3 小於 1。」

□「2024 年是閏年。」

□「我期中考考得很爛。」

□「x 是偶數」

當命題 P 與 Q 兩者皆為 True 時，「P and Q」為 True；當 P 與 Q 其一為 True 時，「P or Q」為 True. 我們使用「$\wedge$」表示 and；「$\vee$」表示 or

Question 試著回答以下問題.

□ 學生優惠要求「出示學生證」或「出示在學證明」是 And 還是 Or？

□ 當我們寫下「$5 \geq 3$」時，表示「$5 = 3$ and $5 > 3$」還是「$5 = 3$ or $5 > 3$」

我們用「$P \Rightarrow Q$」來表示「若 P 則 Q」這樣的因果關係. 其中我們稱 P 是充分條件；Q 是必要條件. 當「$P \Rightarrow Q$」and「$Q \Rightarrow P$」時，記為「$P \rightleftarrows Q$」，互稱為充分必要條件

Question 判斷下列敘述之間的關係，並說明 P 是 Q 的充分條件、必要條件、充要條件，或都不是.

□ P: 一個人是臺灣人，Q: 一個人是亞洲人.

□ P: 一個整數 n 是偶數，Q: n 可以被 2 整除.

□ P: $x^2 = 4$，Q: $x = 2$.

□ P: 一個三角形是等邊三角形，Q: 一個三角形是等腰三角形.

為了處理關於「所有」或「存在」的命題，我們需要引入新的符號來精確地描述它們，這就是所謂的量詞（Quantifiers）. 數學上常見的量詞有以下兩種：

- 「$\forall$」:「For all」、「For each」、「For every」、「對所有」、「對任意」
- 「$\exists$」:「There is」、「There exists」、「存在」、「可以找到」

Question 將下列敘述用符號 $(\exists, \forall)$ 表示：

☐ 存在一個數 n，使得 $n^2 = 4$.

☐ 對於所有的數 x，$x^2 + 1 > 0$.

☐ 存在一個數 $a < 0$ 使得 $x^2 = a$ 無實數解

☐ 對於任意兩個數 a 和 b，如果 $a < b$，則 $a + c < b + c$ 對於所有實數 c 成立.

完成後，思考一下，交換量詞的順序對於要表達的意思有變化嗎？

2. Set

Definition 將一些確定的、無序的、互異的元素蒐集起來可以組成一個**集合 (Set)**

可以通過以下這兩種方法來描述集合：

- 列舉：直接列出所有元素. 例如，$\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4\}$.
- 描述：透過性質來定義集合. 例如，$\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$ 代表所有滿足 $x^2 - 4 = 0$ 的實數 x 所構成的集合.

常見符號：

- $x \in A$：元素 x 屬於集合 A.
- $A \subseteq B$：集合 A 是集合 B 的子集（所有 A 的元素都在 B 裡）.
- $A \cup B$：聯集，包含所有在 A **或**在 B 裡的元素.
- $A \cap B$：交集，包含所有在 A **且**在 B 裡的元素.

Question 說明以下集合的包含關係：

☐ $A = \{0, 1, 1\}$

☐ $B = \{0, 1, 2\}$

☐ $C = \{2, 1, 0, 0\}$

☐ $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 2\}$

☐ $E = \{0, 1, 2, 3\}$

Question 如果 $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ 且 $\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$，那麼 $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ 集合是什麼？$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ 集合又是什麼？

Question 若 $P = \{x \mid P(x)\}$、$Q = \{x \mid Q(x)\}$，嘗試說明：

☐ $P \subset Q$ 等價於 $P(x) \Rightarrow Q(x)$

☐ $P = Q$ 等價於 $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

3. Function

Definition 當確定對應規則及該規則適用的對象時，我們將該映射規則稱為**函數 (Funcion)**. 適用對象所組成的集合稱為**定義域 (Domain)**、所有適用對象使用規則映射之後的結果組成的集合稱為**值域 (Range)**.

從定義域 D 映射到值域 R 的函數可以記為：

$$f : D \longmapsto R$$

或者寫成定義域 D 通過 f 會映射到值域 R 的：

$$D \overset{f}{\longmapsto} R$$

也可以說明一個函數如何將其定義域中的每個特定元素 $x \in D$ 轉換或映射到其對應域中的另一個元素 $f(x) \in R$ 的：

$$x \longmapsto f(x)$$

Question 判斷下列對應關係是否為函數？請說明理由.

- □ $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$
- □ $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 3$

函數只強調對應關係，只要定義域與映射規則一樣，即使表達方式不同，它們也被稱為同樣的函數.

Question 說明各選項中的兩個函數是否為同一個函數.

- □ $f(x) = |x|$ 定義在 $x \in \mathbb{R}$、$g(x) = \sqrt{x^2}$ 定義在 $x \in \mathbb{R}$.
- □ $f(x) = x + 1$ 定義在 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$、$g(x) = \frac{x}{x(x+1)}$ 定義在 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definition 當任取定義域中相異的 x_1 與 x_2，若 $f(x_1) \neq f(x_2)$，則稱函數 f 是一對一的.

當函數為一對一時，其反函數才得以存在.

Question 考慮函數 $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ 定義為 $f(x) = 3x - 2$.

- □ 判斷 f 是否為一對一？請說明理由.
- □ 判斷 f 是否存在反函數？若存在，請找出 $f^{-1}(x)$; 若不存在，請說明如何限制其定義域或值域使其反函數存在.

考慮函數 $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ 定義為 $g(x) = x^2$.

- ☐ 判斷 g 是否為一對一？請說明理由.
- ☐ 判斷 g 是否存在反函數？若存在，請找出 $g^{-1}(x)$; 若不存在，請說明如何限制其定義域或值域使其反函數存在.

由以上兩題，思考如何定義三角函數的反函數.

複合函數 $(g \circ f)(x)$ 表示 $g(f(x))$.

Question 給定函數 $f(x) = x^2 + 1$ 和 $g(x) = 2x - 3$，給出下列複合函數的表達式：

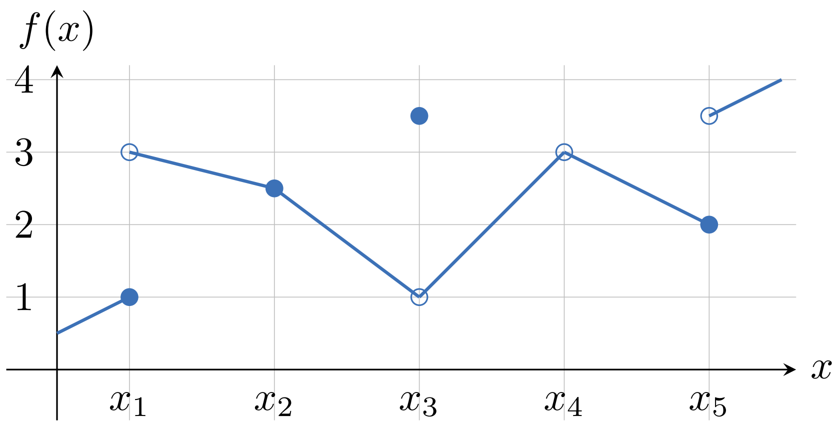
- ☐ $(f \circ g)(x)$
- ☐ $(g \circ f)(x)$
- ☐ $(f \circ f)(x)$

寫出表達式之後，觀察交換複合順序是否影響結果？

4. Limit

Definition $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ 表示當 x 很靠近 a 但不等於 a 時，$f(x)$ 會靠近 L

Question Given a function $f(x)$, whose graph is shown below, determine whether the limit of $f(x)$ from x_1 to x_5 exists or not. If it is exist, give its value.



Remark 在數學上，「靠近」這件事情是不夠明確的，什麼叫作「靠近」，那什麼叫作「不靠近」，我們沒辦法講清楚，因此我們會需要接下來的精確定義來說明到底什麼是 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Definition 給定任意函數 $f(x)$ 以及定義域內的任意值 x_0，其極限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ 等價於：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ s.t. } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

在該定義中有四個過程，分別是：

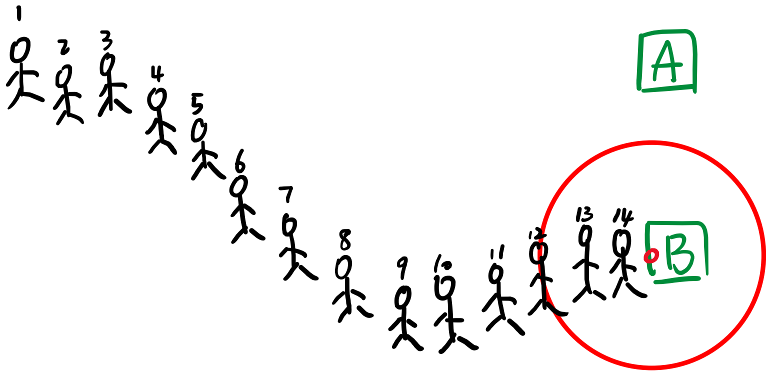


Figure 1: $\varepsilon - \delta$ 定義直觀示意圖：給定紅色範圍半徑之後，會對應的一個編號範圍；使得只要編號落在這編號範圍內，人的位子也會落在紅色圈圈內

1. 先任意給一個 ε ($\forall \varepsilon > 0$)
2. 接著找到一個與之對應的 δ_ε ($\exists \delta_\varepsilon > 0$)
3. 再假設 x 滿足 $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ (if $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$)
4. 最後由此推導出 $|f(x) - L| < \varepsilon$ (then $|f(x) - L| < \varepsilon$)

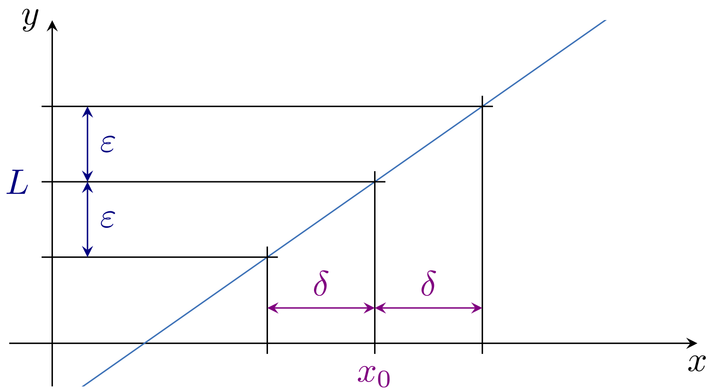


Figure 2: 極限的 $\varepsilon - \delta$ 定義：給定任意的 ε 之後會有與之對應的 δ_ε 使得落在 δ_ε 範圍裡的 x，其函數值 $f(x)$ 將會落在 ε 之中

Question

☐ Use $\varepsilon - \delta$ languege to show that $\lim_{x \to 2} 2x + 5 = 9$.

我們如何挑選 δ 的？書寫過程與實際思考過程順序相同嗎？

給定 $\lim_{x \to x_0} f(x) = F$、$\lim_{x \to x_0} g(x) = G$ 以及 $c \in \mathbb{R}$，我們有：

1. $\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot F$

2. $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = F + G$
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = F \cdot G$
4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$, 若 $G \neq 0$.

給定 $\lim_{x \to x_0} f(x) = F$、$\lim_{t \to F} g(t) = g(F)$，我們有：

5. $\lim_{x \to x_0} h(f(x)) = h(F) = h(\lim_{x \to x_0} f(x))$

我們常見的函數 (冪函數、指對數、三角、反三角) 在其定義域上的函數值與極限值相同.

Question 計算以下極限：

- ☐ $\lim_{x \to -3} x^2 - 13$
- ☐ $\lim_{y \to 2} \frac{2y + 5}{11 - y^3}$
- ☐ $\lim_{t \to -1/2} 4t(3t + 4)^2$
- ☐ $\lim_{h \to 0} \frac{3}{\sqrt{3h + 1} + 1}$

每一步、每一個等號使用了極限運算哪條規則？

Question 計算以下極限：

- ☐ $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}{x}$
- ☐ $\lim_{y \to 2} \frac{y^3 - 8}{y^4 - 16}$
- ☐ $\lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{\sqrt{t + 3} - 2}$

如何「去零因子」?

Next Week：含有無窮的極限、夾擠定理、連續性、一點點微分