1. 1st-order linear ODEs

Theorem. (**一階線性 ODE 與積分因子法**) 一階線性 ODE 的標準形式 (Standard Form) 為：

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

若兩邊同乘積分因子 (Integrating Factor) $\mu(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$，可將左式化為乘積微分：

$$\underbrace{\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mu(x)y]} = \mu(x)Q(x)$$

兩邊積分後，可得通解公式：

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)Q(x)\,\mathrm{d}x + C\right]$$

Question Solve the following DEs.

▷ $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2e^{-x}$

積分因子 $\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x} = e^{-2\ln x} = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$，同乘後可得：

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = e^{-x}\\
\Rightarrow\quad & \left(\frac{1}{x^2}\cdot y\right)' = e^{-x}\\
\Rightarrow\quad & \frac{1}{x^2}\cdot y = \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} + C\\
\Rightarrow\quad & y = -x^2e^{-x} + Cx^2
\end{aligned}$$

▶ $y' + 2y = 5,\ y(0) = \dfrac{3}{2}$

積分因子 $\mu(x) = e^{\int 2\,\mathrm{d}x} = e^{2x}$，同乘後可得：

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 5e^{2x}\\
\Rightarrow\quad & (e^{2x}\cdot y)' = 5e^{2x}\\
\Rightarrow\quad & e^{2x}\cdot y = \int 5e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}e^{2x} + C\\
\Rightarrow\quad & y = \frac{5}{2} + Ce^{-2x}
\end{aligned}$$

代入初始值 $y(0) = \frac{3}{2}$ 得到 $\frac{3}{2} = \frac{5}{2}Ce^{0}$，亦即 $C = -1$，那麼特解為：

$$y = \frac{5}{2} - e^{-2x}$$

2. Bernoulli Equation

有些非線性方程式雖然不是線性的，但可以透過變數變換「化簡 (Reduce)」為線性方程式. 最著名的例子是 **伯努利方程 (Bernoulli Equation)**：

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

令 $u = y^{1-n}$，將非線性項 y^n 消除，轉化為 u 的一階線性 ODE：

$$u' = (1-n)y^{-n}y' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-n}u' + P(x)u = Q(x)$$

Question Solve the following DEs.

▷ $y' - 2y = 5y^2$

這是 $n = 2$ 的 Bernoulli 方程式. 將方程式同除以 y^2，並令 $u = y^{1-2} = y^{-1}$，則 $u' = -y^{-2}y'$，原方程式整理如下：

$$-u' - 2u = 5 \ \Leftrightarrow \ u' + 2u = -5$$

積分因子 $\mu(x) = e^{\int 2\,\mathrm{d}x} = e^{2x}$，同乘後可得：

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & e^{2x}u' + 2e^{2x}u = -5e^{2x} \\
\Rightarrow \quad & u = -\frac{5}{2} + Ce^{-2x} \\
\Rightarrow \quad & y^{-1} = -\frac{5}{2} + Ce^{-2x}
\end{aligned}$$

▶ $y' - \frac{1}{x}y = xy^5$

這是 $n = 5$ 的 Bernoulli 方程式. 將方程式同除以 y^5，並令 $u = y^{1-5} = y^{-4}$，則 $u' = -4y^{-5}y'$，原方程式整理如下：

$$y^{-5}y' - \frac{1}{x}y^{-4} = x \ \Rightarrow \ -\frac{1}{4}u' - \frac{1}{x}u = x \ \Rightarrow \ u' + \frac{4}{x}u = -4x$$

積分因子 $\mu(x) = e^{\int \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x} = e^{4\ln x} = x^4$，同乘後可得：

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & x^4u' + 4x^3u = -4x^5 \\
\Rightarrow \quad & u = -\frac{2}{3}x^2 + Cx^{-4} \\
\Rightarrow \quad & y^{-4} = -\frac{2}{3}x^2 + Cx^{-4}
\end{aligned}$$

3. Solving 2nd-order linear homogeneous ODEs by reducing order

3.1. Reduction of order

Theorem. (Reduction of order) 給定二階線性齊次 ODE $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$，若已知 $y_1(x)$ 是該方程式的一個解，為了找出第二個解 y_2，我們令 $y_2 = u(x) \cdot y_1(x)$，則：

$$\begin{cases} y_2' = u'y_1 + uy_1' \\ y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \end{cases}$$

將其代回原方程式整理後可得：

$$u''y_1 + u'(2y_1' + Py_1) + u(\underbrace{y_1'' + Py_1' + Qy_1}_{=0}) = 0$$

由於 y_1 是方程式的一個解，$y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$，方程式變為：

$$u''y_1 + u'(2y_1' + Py_1) = 0$$

接著我們令 $w = u'$、$w' = u''$，方程式被進一步化簡為：

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{w'}{w} = -\frac{2y_1'}{y_1} - P \\
\Rightarrow \quad & \ln|w| = -2\ln|y_1| - \int P(x)\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow \quad & w = u' = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} \\
\Rightarrow \quad & u(x) = \int \left(\frac{e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}{y_1(x)^2}\right)\,\mathrm{d}x \\
\Rightarrow \quad & y_2 = u(x) \cdot y_1 = y_1 \cdot \int \left(\frac{e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}{y_1(x)^2}\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Remark 當題目沒有提供已知的一個解 y_1 時，先嘗試 $y_1 = x$ 或 $y_1 = e^x$ 是否為解. 不建議死背最後的積分公式，而是記住令 $y_2 = u(x)y_1$ 並代入求解 u'' 的過程

Question Find the general solution of following equation.

- ▷ $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$, Given that $y_1=x$ is a solution.
  令 $y=u(x)y_1=ux$，則 $y'=u'x+u$、$y''=u''x+2u'$. 將其代入原方程式：

$$(1-x^2)(u''x+2u')-2x(u'x+u)+2(ux)=0$$

展開後依照 u'',u',u 整理係數：

$$x(1-x^2)u''+(2-4x^2)u'+\underbrace{(-2x+2x)}_{=0}u=0$$

令 $w=u'$，則 $w'=u''$，方程式降階為一階可分離變數方程式：

$$\Rightarrow \quad x(1-x^2)w'+(2-4x^2)w=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{w'}{w}=\frac{4x^2-2}{x(1-x^2)}=\frac{-2}{x}+\frac{2x}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \ln|w|=-2\ln|x|-\ln|1-x^2|=\ln\left|\frac{1}{x^2(1-x^2)}\right|$$

$$\Rightarrow \quad u'=w=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad u=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1-x^2}\right)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\Rightarrow \quad y=c_1x+c_2\left(\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1\right)$$

- ▶ $y''-3y'+2y=0$, given that $y_1=e^x$ is a solution.
  令 $y=u(x)y_1=ue^x$，計算 y'、y'' 代入原方程式並消去 e^x：

$$(u''+2u'+u)-3(u'+u)+2u=0$$

展開後依照 u'',u',u 整理係數：

$$u''+(2-3)u'+\underbrace{(1-3+2)}_{=0}u=0 \quad\Rightarrow\quad u''-u'=0$$

令 $w=u'$，則 $w'=u''$，方程式降階為一階可分離變數方程式：

$$\Rightarrow \quad w'-w=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{w'}{w}=1$$

$$\Rightarrow \quad \ln|w|=x$$

$$\Rightarrow \quad u'=w=e^x$$

$$\Rightarrow \quad u=\int e^x\,\mathrm{d}x=e^x$$

$$\Rightarrow \quad y=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

3.2. Euler Cauchy equation

Theorem. (**Euler Cauchy equation**) 形如：

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

之方程式稱為**柯西-尤拉方程式 (Euler Cauchy equation)**. 可以通過令 $y = x^m$ 代回原方程式得到輔助方程式 (Auxiliary Equation，或稱為特徵方程式 Characteristic Equation)：

$$m^2 + (a-1)m + b = 0$$

設 m_1, m_2 為此一元二次方程式的兩根，通解 $y(x)$ 依判別式分為三種情況：

- Case 1: 相異實根 ($m_1 \neq m_2$)

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$$

- Case 2: 重根 ($m_1 = m_2 = m$)

$$y = c_1x^m + c_2x^m \ln x$$

- Case 3: 共軛複虛根 ($m = \alpha \pm i\beta$)
  利用歐拉公式 $x^{i\beta} = e^{i\beta \ln x} = \cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x)$，通解寫為：

$$y = x^\alpha \left[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)\right]$$

Question Find the general solution of the following Euler-Cauchy equations.

▷ $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
設試解 $y = x^m$，代入方程式可得輔助方程式：

$$m(m-1) - 2m + 2 = 0$$

整理方程式：

$$m^2 - m - 2m + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 - 3m + 2 = 0$$

因式分解求解 m：

$$(m-1)(m-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 1,\ m_2 = 2$$

由於 $m_1 \neq m_2$ 為相異實根，故通解為：

$$y = c_1x + c_2x^2$$

▶ $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$
設試解 $y = x^m$，代入方程式可得輔助方程式：

$$m(m-1) + 2m - 6 = 0$$

整理方程式：

$$m^2 - m + 2m - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 + m - 6 = 0$$

因式分解求解 m：

$$(m+3)(m-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = -3,\ m_2 = 2$$

由於 $m_1 \neq m_2$ 為相異實根，故通解為：

$$y = c_1x^{-3} + c_2x^2$$

Next Week: n-th order linear homogeneous ODEs with Constant Coefficients.