1. What is ODE system

- 微分方程組從何而來？

Question 如何解出迴路電流 $i_1(t)$、$i_2(t)$？
由 KVL，單一迴路上總電壓升與電壓降相同：

$$\begin{cases} V_s - i_1R_1 - (i_1 - i_2)R_2 - L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} & = 0 \\ -(i_2 - i_1)R_2 - i_2R_3 - L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} & = 0 \end{cases}$$

整理可得：

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_2}{L_1} & \frac{R_2}{L_1} \\ \frac{R_2}{L_2} & -\frac{R_2+R_3}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_s$$

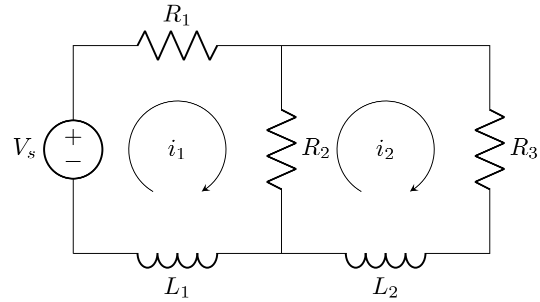

Figure 1: a two-loop circuit

- 微分方程組與我們過去學過的微分方程式有何不同？

Question Solve $y' = 2t,\ y(0) = -2$
方程式 $y' = 2t$ 定義了平面上各點的斜率規律，據此可繪製出「方向場」. 其「解」即為順著這些斜率延伸的曲線路徑. 若未指定起點，存在無窮多條符合規律的路徑（通解，如 $y = t^2 + C$）；一旦給定初始條件 $y(0) = -2$，便能唯一確定其中一條路徑（特解）.

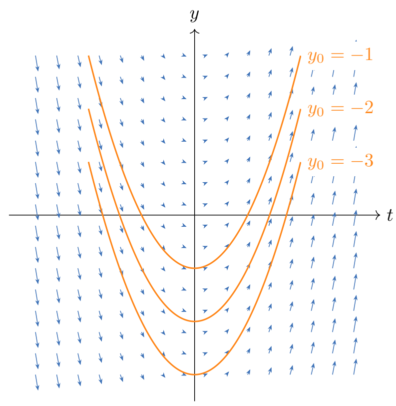

Figure 2: 微分方程式：$y' = 2t$

Question Solve $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$, $x(0) = 0,\ y(0) = 0.4$

方程組 $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 定義了相平面（$x - y$ 平面）上各點 (x, y) 的變化趨勢，亦即該點的切向量 (x', y'). 方程組的解 $(x(t), y(t))$ 即是隨時間 t 演化、且處處切於該向量場的軌跡. 若未給定初始條件，相平面上將存在無窮多條符合此趨勢的曲線，構成通解；一旦給定初始值或邊界值，便能唯一確定一條特定的路徑，稱為特解.

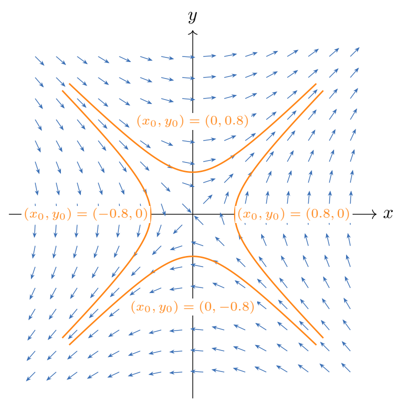

Figure 3: 微分方程組相平面

為了方便處理，方程組通常寫成向量與矩陣的形式，稱為**狀態表示式 (State-Space Representation)**：

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}$$

- $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ 是狀態向量 (State Vector).
- A 是系統矩陣 (System Matrix)，通常表示系統本身的參數.
- $\mathbf{g}$ 是外力項 (Forcing Term)，如電壓源或電流源.

給定一個 n 階線性微分方程：

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r(t)$$

雖然 n 階微分方程直觀，但在計算與數值分析上，將其降階為多個一階微分方程構成的向量系統，會更具統一性：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)}_{\mathbf{g}}$$

當我們得到向量解 $\mathbf{x}(t)$ 後，除了觀察每個分量隨時間 t 的變化，我們也可以將時間 t 視為參數，觀察狀態變數在 $x_1 - x_2$ 平面中移動的軌跡. 對於二階系統，這種幾何化的視角即為**相平面 (Phase Plane) 分析**：

- 軌跡 (Trajectories)：隨時間變化的解曲線.
- 臨界點 (Critical Point)：滿足 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的點（通常為原點），此時系統靜止.
- 方向場 (Direction Field)：在平面每一點畫出向量 $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ 所得的向量場.

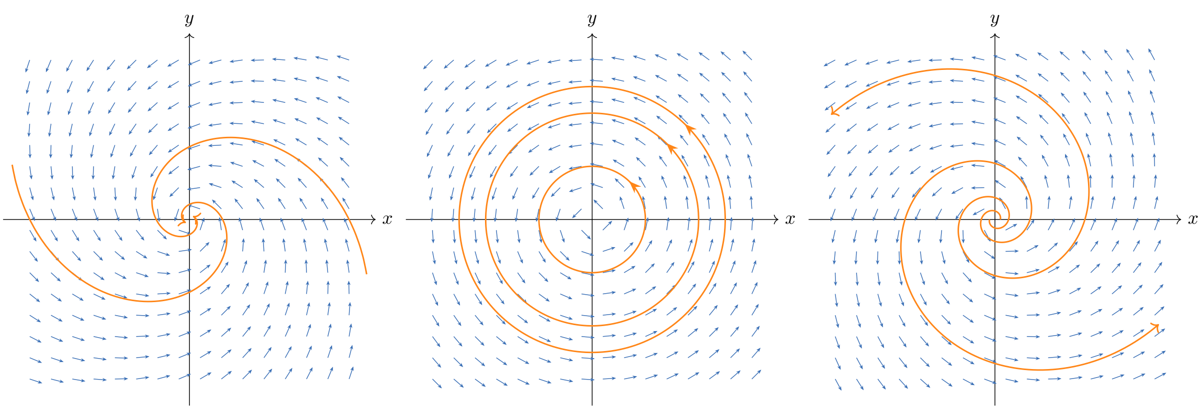

Figure 4: 微分方程組的穩定性問題

2. Homogeneous Systems

2.1. Supplement: Eigenvalue & Eigenvector

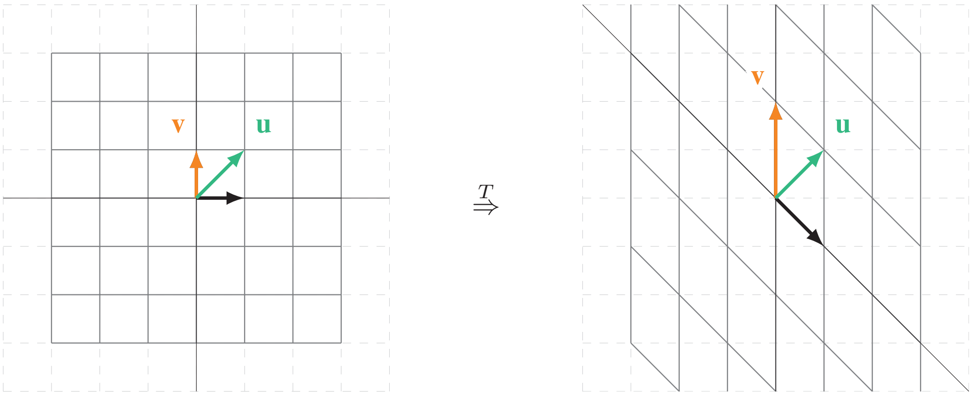

Figure 5: 特徵值與特徵向量：向量 $\mathbf{u}$ 在經過矩陣 T 的變換之後保持不變；$\mathbf{v}$ 則是放大了 2 倍，則我們稱 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$ 是 T 的特徵向量；1、2 為與之對應的特徵值.

Definition 給定矩陣 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$，若對非零向量 $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$，存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得：

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

則稱向量 $\mathbf{v}$ 是矩陣 A 的一個**特徵向量 (Eigenvector)**，且 λ 為與之對應的**特徵值 (Eigenvalue)**.

Question Determine whether the vector $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ is an eigenvector of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. If so, find the corresponding eigenvalue λ.

For $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, since $A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2\mathbf{v}_1$,

so $\mathbf{v}_1$ is a eigenvector of A with eigenvalue $\lambda = -2$.

For $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, since $A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 5\mathbf{v}_2$,

so $\mathbf{v}_2$ is a eigenvector of A with eigenvalue $\lambda = 5$.

For $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, since $A\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 22 \end{bmatrix} \notin \text{span}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$.

so $\mathbf{v}_3$ is NOT a eigenvector of A.

Theorem. (特徵多項式) 給定矩陣 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 要找到其特徵值滿足：

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_n) = 0$$

我們稱以 λ 為變數的多項式 $\Lambda_A(\lambda)$ 定義為：

$$\Lambda_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

為矩陣 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的**特徵多項式 (Charateristic Polynomial)**. 那麼特徵多項式 $\Lambda_A(\lambda)$ 的根即為矩陣 A 的特徵值；且其對應的特徵向量即為以下方程式解空間的基底：

$$(A - \lambda_i I_n)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Remark 對於二階矩陣 $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$，其特徵多項式為：$\Lambda_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$

Question Compute the eigenvalues and their eigenvectors for the given matrix.

$\triangleright$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

特徵多項式 $\Lambda_M(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ 為：

$$\Lambda_M(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)^2$$

那麼特徵多項式 $\Lambda_M(\lambda)$ 的根 $\Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow A$ 的特徵值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$
對於 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ，代回 $(A - \lambda I_2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 可得：

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解方程式得 $\mathbf{v}$ 為：

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

分別取基底 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$、$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 為特徵值 $\lambda_1 = 3$、$\lambda_2 = 3$ 所對應的特徵向量.

- $M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

  特徵多項式 $\Lambda_M(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ 為：

$$\Lambda_M(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

  那麼特徵多項式 $\Lambda_M(\lambda)$ 的根 $\Leftrightarrow (\lambda-5)(\lambda-2)=0 \Leftrightarrow A$ 的特徵值 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2.$
  對於 $\lambda_1 = 5$ ，代回 $(A - \lambda I_2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 可得：

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  解方程式得 $\mathbf{v}$ 為：

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  取基底 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 為特徵值 $\lambda_1 = 5$ 所對應的特徵向量.
  對於 $\lambda_2 = 2$ ，代回 $(A - \lambda I_2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 可得：

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  解方程式得 $\mathbf{v}$ 為：

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -2c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

  取基底 $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 為特徵值 $\lambda_2 = 2$ 所對應的特徵向量.

Theorem. (**齊次系統通解**) 欲解 $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$，我們仿照單一 ODE 的做法，猜測解的形式為 $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$. 將其代入原方程組得到：

$$\lambda\mathbf{v}e^{\lambda t} = A\mathbf{v}e^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

這代表 λ 必須是 A 的特徵值 (Eigenvalue)，而 $\mathbf{v}$ 是對應的特徵向量 (Eigenvector). 亦即，若 $n \times n$ 矩陣 A 有 n 個線性獨立的特徵向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$，對應特徵值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$，則方程式 $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ 的通解為：

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}_ne^{\lambda_n t}$$

Question Find the general solution of following equations.

▷ $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$

特徵方程式：$\det(A - \lambda I_2) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

當 $\lambda_1 = 3$: $(A - 3I_2)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

當 $\lambda_2 = -1$: $(A + 1I_2)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

通解：$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}$

▶ $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$

特徵方程式：$\det(A - \lambda I_2) = (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$

當 $\lambda_1 = 4$: $(A - 4I_2)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

當 $\lambda_2 = -1$: $(A + 1I_2)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

通解：$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$

Remark 若特徵方程式產生複數根 $\lambda = \alpha \pm i\beta$，且對應的特徵向量為 $\mathbf{v} = \mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$. 雖然我們可以寫成複數形式的通解，但通常我們更偏好實數形式的解. 利用歐拉公式，我們可以得到通解為：

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\alpha t}(\mathbf{a}\cos\beta t - \mathbf{b}\sin\beta t) + c_2 e^{\alpha t}(\mathbf{a}\sin\beta t + \mathbf{b}\cos\beta t)$$

此時相平面上的軌跡通常呈現螺旋形 (Spiral) 或中心點 (Center).

Remark 若 λ 為特徵方程式的 k 重根，但我們只能找到少於 k 個線性獨立的特徵向量，此時矩陣 A 稱為虧損矩陣 (Deficient Matrix)，我們必須尋找廣義特徵向量 $\mathbf{k}$ (Generalized Eigenvectors). 以二階矩陣、λ 為二重根且僅有一個特徵向量 $\mathbf{v}$ 為例，通解為：

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}e^{\lambda t} + c_2(\mathbf{v}t + \mathbf{k})e^{\lambda t}$$

3. Non-homogeneous Systems

當系統包含非齊次項 $\mathbf{g}(t)$ 時，通解為 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$. 我們使用參數變換法 (Variation of Parameters). 首先，我們定義基本矩陣 (Fundamental Matrix) $\Phi(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$，其每個 columns vector 由 n 個線性獨立的齊次解向量組成：

$$\Phi(t) = [\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{x}_n(t)]$$

那麼齊次解可寫作 $\mathbf{x}_h = \Phi(t)\mathbf{c}$. 假設特解形式為 $\mathbf{x}_p = \Phi(t)\mathbf{u}(t)$，代入原式推導可得：

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\ dt$$

Remark 對於二階矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$，其反矩陣為 $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Question Find the particular solution for following equations.

▷ $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix}$.

齊次解得 $\lambda_1 = 1, \mathbf{v}_1 = [2,1]^T$；$\lambda_2 = 2, \mathbf{v}_2 = [1,1]^T$

基本矩陣 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \frac{1}{e^{3t}}\begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^t & 2e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

計算 $\Phi^{-1}\mathbf{g} = \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-e^t \\ -e^{-t}+2 \end{bmatrix}$

積分得 $\mathbf{u}(t) = \int \begin{bmatrix} 1-e^t \\ -e^{-t}+2 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} t-e^t \\ e^{-t}+2t \end{bmatrix}$

特解 $\mathbf{x}_p = \Phi\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2e^t(t-e^t)+e^{2t}(e^{-t}+2t) \\ e^t(t-e^t)+e^{2t}(e^{-t}+2t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2te^t-2e^{2t}+e^t+2te^{2t} \\ te^t-e^{2t}+e^t+2te^{2t} \end{bmatrix}$

▶ $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 5e^{4t} \\ 0 \end{bmatrix}$.

齊次解得 $\lambda_1 = 4, \mathbf{v}_1 = [3,2]^T$；$\lambda_2 = -1, \mathbf{v}_2 = [1,-1]^T$

基本矩陣 $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 3e^{4t} & e^{-t} \\ 2e^{4t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi^{-1}(t) = \frac{1}{-5e^{3t}}\begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -2e^{4t} & 3e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}e^{-4t} & \frac{1}{5}e^{-4t} \\ \frac{2}{5}e^t & -\frac{3}{5}e^t \end{bmatrix}$

計算 $\Phi^{-1}\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}e^{-4t} & \frac{1}{5}e^{-4t} \\ \frac{2}{5}e^t & -\frac{3}{5}e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5e^{4t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2e^{5t} \end{bmatrix}$

積分得 $\mathbf{u}(t) = \int \begin{bmatrix} 1 \\ 2e^{5t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} t \\ \frac{2}{5}e^{5t} \end{bmatrix}$

特解 $\mathbf{x}_p = \Phi\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3e^{4t}(t)+e^{-t}(\frac{2}{5}e^{5t}) \\ 2e^{4t}(t)-e^{-t}(\frac{2}{5}e^{5t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3te^{4t}+\frac{2}{5}e^{4t} \\ 2te^{4t}-\frac{2}{5}e^{4t} \end{bmatrix}$

4. Phase Plane & Stability of 2D Systems

在平面上絕大多數的點，微分方程都給出了一個明確的「前進方向」，這意味著軌跡在這些點是平滑、唯一且不相交的. 只有在原點，其斜率是 $\frac{0}{0}$，這代表所有軌跡都可以在這裡匯聚或發散而不違反唯一性. 因此我們只需要探討原點附近的流向，就可以進而確定整個平面的狀態.

Definition 給定一個二維系統 $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ 隨著 $t \in \mathbb{R}$ 的變動，$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ 將會畫出**軌跡 (Trajectories)**. 我們考慮其軌跡在平面上的切線斜率：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{cx+dy}{ax+by}$$

該式讓平面中的每一點 $P(x,y)$ 都對應唯一的切線方向 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，但對於原點 $P_0 = P(0,0)$ 代入後變成 $\frac{0}{0}$，這使得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 無法確定原點，便稱為系統的**臨界點 (Critical Point)**.

考慮二維系統的特徵方程式：

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}\, A)\lambda + \det A$$

那麼依據二次方程式的根與係數關係 (韋達定理，Vieta's Formulas)：

$$\begin{cases} T = \mathrm{tr}\, A & = a+d \quad = \lambda_1 + \lambda_2 \\ D = \det A & = ad-bc = \lambda_1 \lambda_2 \\ \Delta = T^2 - 4D \end{cases}$$

並且我們知道齊次二維系統的通解為：

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

我們可以依此得到軌跡的走向進而討論臨界點的穩定性：

- 漸近穩定 (Asymptotically Stable)：隨時間增加，所有軌跡皆趨向原點.
- 穩定 (Stable)：軌跡在原點附近穩定環繞.
- 不穩定 (Unstable)：軌跡會遠離原點.

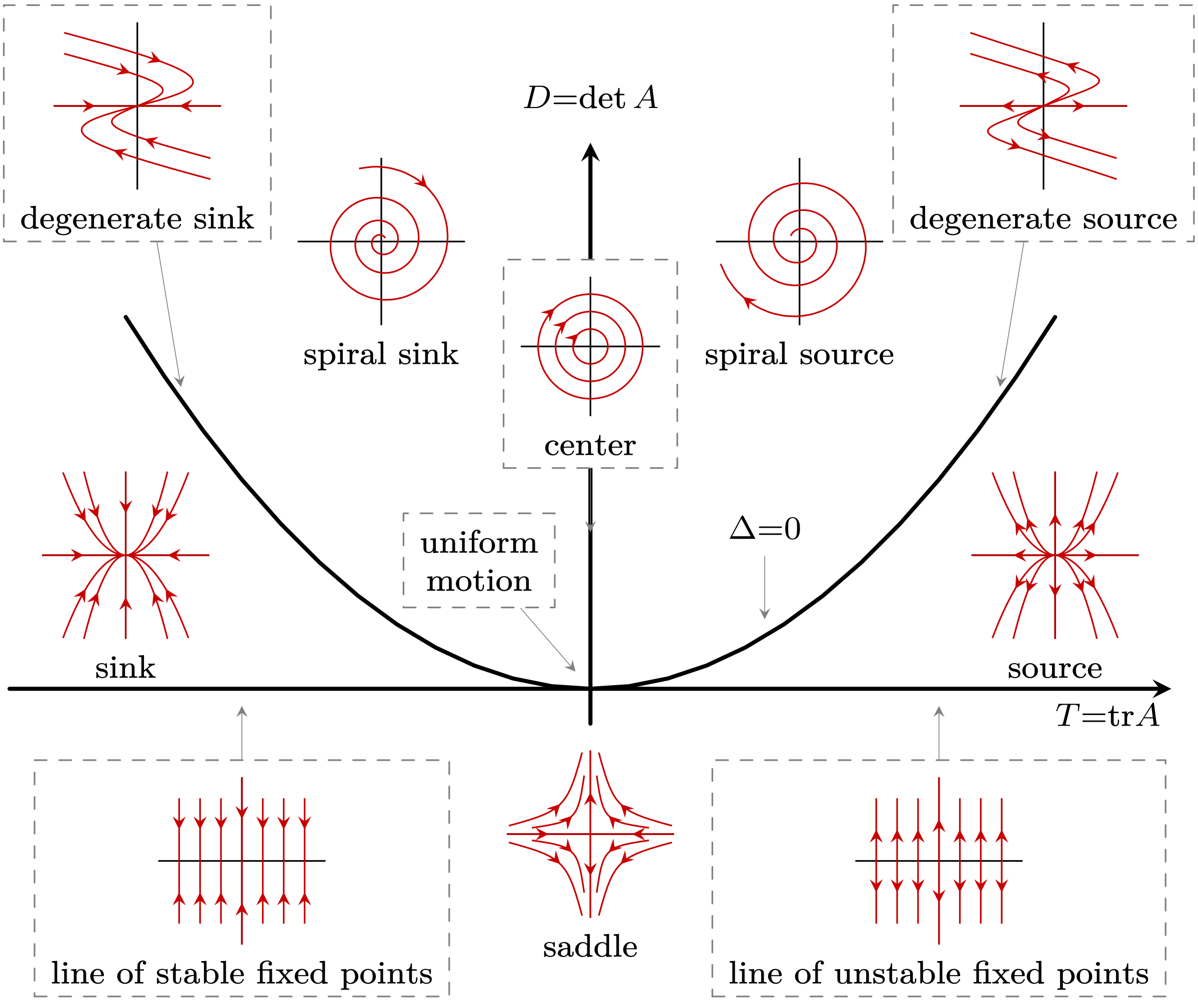

Figure 6: The Trace-Determinant Plane

特徵值 $\lambda_{1,2}$ 性質	**臨界點類型**	**條件**	**穩定性**
同號正實根 $(+,+)$	源點 (Source)	$D>0, \Delta \geq 0, T>0$	不穩定
同號負實根 $(-,-)$	匯點 (Sink)	$D>0, \Delta \geq 0, T<0$	漸近穩定
正複數根 $(\alpha \pm i\beta)$	螺旋點 (Spiral)	$\Delta<0, T>0$	不穩定
負複數根 $(\alpha \pm i\beta)$	螺旋點 (Spiral)	$\Delta<0, T<0$	漸近穩定
異號實根 $(+,-)$	鞍點 (Saddle)	$D<0$	不穩定
純虛根 $(\pm i\beta)$	中心點 (Center)	$T=0, D>0$	穩定

Table 1: 特徵值與系統穩定性判別彙整

overview

- **一階微分方程 (1st-Order ODEs)**
  - 變數可分離型 (Separable): 整理成 $F(x)\mathrm{d}x = G(y)\mathrm{d}y$ 後兩邊積分.
  - 正合型 (Exact): 若 $M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = 0$ 且 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$，則存在 $u(x, y) = C$.
  - 積分因子: 非正合時用 $\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\mathrm{d}x}$ 或 $\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}\mathrm{d}y}$ 使其正合.
  - 線性方程 (Linear): $y' + P(x)y = Q(x)$，同乘積分因子 $\mu(x) = e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$.
  - 伯努利方程 (Bernoulli): $y' + P(x)y = Q(x)y^n$，令 $u = y^{1-n}$ 化為線性方程.
- **二階與高階線性齊次 ODEs (Higher-Order Homogeneous)**
  - 降階法 (Reduction of Order): 已知一解 y_1，令 $y_2 = u(x)y_1$，代回方程式.
  - 尤拉-柯西方程 (Euler-Cauchy): $x^2y'' + axy' + by = 0$，令 $y = x^m$ 得特徵方程式 $m^2 + (a-1)m + b = 0$.
  - 常係數齊次解: 特徵方程 $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$
    - 相異實根: $y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$
    - 重根: $y = (c_1 + c_2x)e^{\lambda x}$
    - 共軛複根 $\alpha \pm i\beta$: $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$
  - Wronskian 行列式: $W(y_1, y_2) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \neq 0$ 則線性獨立.
- **線性非齊次 ODEs (Non-homogeneous ODEs)**
  - 待定係數法: 依 $r(x)$ 猜測 y_p. 需要注意解的線性獨立性.
  - 參數變換法: $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$
    - $\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix}$ (務必注意 y'' 係數須為 1).
- **線性微分方程組與穩定性 (ODE Systems & Stability)**
  - 狀態表示式: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}$. 齊次通解 $\mathbf{x}_h = \sum c_i\mathbf{v}_ie^{\lambda_i t}$.
  - 利用基本矩陣 Φ 找到特解: $\mathbf{x}_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\mathrm{d}t$.
  - 穩定性判別:
    - $D = \det A = \lambda_1\lambda_2$：決定相鄰軌跡的開合與方向. 若 $D < 0$，說明特徵值一正一負，必然存在吸引與排斥的方向（鞍點）.
    - $T = \mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2$：決定系統能量的消長. $T < 0$ 代表系統耗散（向內匯聚），$T > 0$ 代表系統增益（向外發散）.
    - $\Delta = T^2 - 4D$：決定有沒有旋轉成分. 當 $\Delta < 0$ 時產生複數根，代表系統具備簡諧運動的旋轉特性.

Next Week: Midterm Exam 4/13 - 4/17.