NTNU calculus (B) Note

H.-J. SU

November 8, 2025

Contents

Chapter 0
寫在前面

1. 數學在做什麼？

不知道你是不是覺得數學就是一堆冰冷的公式、數字和繁複的計算？其實，數學遠不止是算術. 正如美國數學家 Jordan Ellenberg 所說：「*Mathematics is the extension of common sense by other means.*」. 這句話精闢地道出了數學並不是憑空捏造的抽象符號，而是我們理解世界、解決問題的常識在更深層次、更精確層面的延伸.

數學的發展，在一開始或許確實是出於人們的好奇，自嗨創造出的一個完善、邏輯自恰的系統，但當社會發展到一個階段時，往往會出乎意料的用上數學理論. 舉例來說，我們最初為了計算物品數量，自然而然地產生了正整數的概念：它們可以一個接一個，無窮無盡地向上增加. 但隨後，我們開始好奇：既然能往上數，那能不能往下數呢？這種看似簡單的好奇，最終催生了負數的概念. 雖然負數在計算實體物品數量上沒有直接幫助，但它很快就被應用來表示欠債、溫度低於零，或是方向等抽象概念，極大地豐富了我們描述世界的能力.

又比如，三角函數最初只是為了解決幾何問題，它幫助我們理解三角形的角度與邊長比例之間的關係. 然而，隨著科學的進步，我們發現它的函數圖形是一個完美的週期性波形，這使得三角函數在研究電磁波、聲波、交流電等週期性現象時，成為了不可或缺的工具.

這些例子都證明了數學並非僅僅是「為數學而生」，而是在不斷探索和延伸我們對「常識」的理解，並最終成為解決現實世界複雜問題的工具. 但這些好奇並實際創造出一個新的數學理論的工作就交給數學家就好了. 作為理工科系的學生，我們最重要的目標是直觀地理解並熟練運用這些數學工具. 一旦我們熟悉了這些工具，我們的直覺將會越來越精準，更能有效地分析和解決實際問題.

一個數學理論的誕生，往往從具體例子中萌芽. 我們透過觀察這些例子，將其共性抽象化並提煉成定義. 隨後，我們深入探討這些定義的性質，逐步發展出獨特的理論體系. 最後，這套理論不僅能解釋原始現象，更能廣泛應用於其他領域.

我們可以看看圖論如何啟發了眾多演算法. 最初的問題可能只是像哥尼斯堡七橋問題那樣，想知道能否不重複地走過每一座橋. 這就是一個具體觀察. 數學家歐拉將每塊陸地視為點，每座橋視為連接點的邊，這便是將實例抽象化為圖 (Graph) 的定義.

有了這個抽象的圖模型，歐拉開始研究圖的性質，發現了歐拉路徑存在的條件. 這個發現奠定了圖論的基礎. 隨著理論的發展，許多圖論問題，例如尋找兩點間的最短路徑、優化網路流量、或是解決排班問題，都因此催生出大量高效率的演算法. 從簡單的

橋樑問題，發展出解決複雜導航、通訊網路等問題的工具，圖論到演算法的演變清晰地展示了數學理論從實例到應用的過程.

(1). 一些數學名詞

在數學的嚴謹世界裡，我們需要一套清晰的語言來建構知識體系，確保每一步推理都是正確的. 這套語言包含了以下幾個核心概念：

- **公理 (Axiom)**：是那些我們不需證明、自然而然接受的基本敘述. 可以把公理想像成遊戲規則，它們是我們開始討論數學前就設定好的基本事實. 例如，在歐氏幾何中，「任意兩點可以決定一條直線」就是一個公理.
- **定義 (Definition, Def.)**：是用來賦予特定術語精確意義的敘述. 它們為我們所討論的對象或概念劃清了界線，確保所有人都對同一個詞有相同的理解. 是比公理再更細緻的規則. 例如，我們定義「偶數」為能被 2 整除的整數，這樣就不會有歧義.

給出一些大家都接受的規則之後，自然而然的可以由這些規則有一些推論：

- **特性 (Property, Prop.)**：指的是某個數學對象或概念所具備的特徵或性質. 這些特性通常是透過定義或定理推導出來的，用來形容一些不是很強的、可以輕易得到的結論. 例如，矩形的一個特性是其對角線等長.
- **引理 (Lemma)**：是一個小型輔助性定理，它本身可能沒有太大的獨立意義，但其主要目的是為了證明一個更重要的定理. 雖然不起眼，卻能幫助我們一步步前進.
- **定理 (Theorem, Thm.)**：則是數學中最核心的成果，它是經過嚴格邏輯證明為正確的敘述. 定理通常普遍和非常重要，是數學理論體系中的關鍵支撐點. 例如，勾股定理就是一個廣為人知的數學定理.
- **引理 (Corollary, Cor.)**：是一個可以直接由某個定理推導出來的敘述，通常其證明過程非常簡短，可以看作是定理的特例，雖然不如定理本身重要，但能進一步擴展我們的理解.

在這本書中我統一使用以下橘色方格來分別表示敘述規則的公理、定義；用紫色方格敘述結論的特性、引理、定理、推論.

定義 0.1 / 一些規則

包含定義、公理，就是直接定的規則，它不能從其他規則推出來.

結論 0.1 / 一些結論

包含特性、引理、定理、推論、公式，只要是能推導出來得東西都在這.

2. 微積分實際上在做什麼？

過去國高中學的數學皆是在處理「靜態」的問題：計算固定的面積、長度、角度；找出方程式的解；描述物體的固定速度等等. 但現實世界是「動態」的，事物無時無刻不在變化. 例如，汽車的速度會不斷改變，水流的速度在不同位置也有所不同，甚至金融市場的趨勢也瞬息萬變. 過去的數學在處理這些「變化」和「累積」的問題時，就顯得力不從心了. 這即是我們需要微積分的原因，它專為解決這些連續變化的問題：

- **微分 (Differential)**：顧名思義，微分正是在處理微小的變化量. 它就像一個放大鏡，給出函數局部變化的線性描述.
- **積分 (Intergration)**：則是將這些微小的變化量累積起來，最終給出一個整體的總和.

這兩個概念都包含了「微小」這個詞，一個在描述瞬間的變化，另一個則在累積這些變化. 這「微小」或「趨近於零」的直覺，是我們過往數學中不曾出現的. 為了精確地定義和運用這種直覺，我們引入了「**極限 (Limit)**」的概念. 極限就像一道橋樑，讓我們的數學工具能夠精準地捕捉到那些「無限接近」的瞬間變化與「無限累積」的總量，從而分析和理解現實世界的動態.

3. 一些先備知識

要正式學習一門新學科，我們得先學會它的語言. 這就像學習一門外語，沒有基礎詞彙和語法，溝通起來會很吃力. 在數學中，這些語言與概念不只方便溝通，更能確保我們對問題的理解和表達都精準無誤.

(1). 邏輯語言

能夠被判斷真偽的敘述稱為**命題 (Statement)**. 比如「$5 > 2$」、「$4 < 3$」都是命題，因為我們能夠判斷前者為 True、後者為 False. 但「我期中考考得很爛」就不是一個命題，因為每個人對「考得很爛」有不同標準，除非我們給出考得很爛的定義 (比如低於 60 分)；類似地，「$x > 2$」也不是一個命題，因為我們不曉得 x 究竟是多少，無法判斷真偽，這個敘述至多只能當作在描述 x 的一個性質.

我們能夠像是自然語言那樣，通過一些連接詞 (Connective) 將許多命題組合在一起，組合後的結果依然是個命題，自然也能判斷真偽.

And、Or

在日常生活中，我們經常會用到「且」這個概念. 例如，你向朋友發出邀請：「明天有空的話，我們一起去喝杯咖啡並且看場電影吧！」這句話隱含了兩個條件：1. 喝咖啡；2. 看電影. 若你們只喝了咖啡而沒看電影，或者只看了電影而沒喝咖啡，這個承諾就沒有完全兌現. 只有當這兩件事都完成了，這個邀請才算實現.

而邏輯語言的連接詞「And」就與字面意義的「且」一樣，要當 P 與 Q 同時為真時，P and Q 才為真，只要 P 或 Q 之間有一個為假，「P and Q」就為假. 為了方便，我們使用「$\wedge$」來表示「And」. 例如命題「$2<7 \ \wedge \ 3<5$」是對的；但命題「$5<2 \ \wedge \ 2<3$」就是錯的.

與之相對的，「或」也是一個非常直觀的連接詞，這在我們的生活中也隨處可見. 例如，學生優惠要求「出示學生證或是出示在學證明」，這意味著我們只需要擇一出示學生證或在學證明即刻享有學生優惠，並不必要兩者皆出示. 當然，如果你既展示了學生證、又出示了在學證明，那也能夠享有優惠.

邏輯語言的「Or」就與「或」相同，只要 P 與 Q 之間的其中一個敘述為真即可使「P or Q」為真. 我們使用「$\vee$」來表示「Or」. 比如我們過去熟知的大於等於符號 $\geq$，比如我們會寫「$3 \geq 1$」，這即是代表「$3>1 \ \vee \ 3=1$」. 因此，命題「$5 \geq 5$」亦為真.

if ...then ...

除了上述 And、Or 那樣「並列」的邏輯關係，我們會用 $P \Rightarrow Q$ 來表示「若 P 則 Q」的因果關係，亦即「當 P 成立時，Q 也必定成立」. 比如我們會說「我是師大人 $\Rightarrow$ 我是大學生」. 但當 P 不成立時，我們不能保證 Q 的真偽性. 比如當我說「我不是師大人」時，並不能保證「我不是大學生」，因為我可以是台大、清大、交大任何其他學校的學生.

數學上，我們有一些其他的常見方式來描述如「$P \Rightarrow Q$」這樣的命題：

- Q if P
- P implies Q
- P is sufficient for Q
- Q is necessary for P
- P only if Q
- Q whenever P

為了得到 Q，需要有充分的 P，因此我們稱 P 是 Q 的**充分條件 (sufficient condition)**. 反過來說，由於有 P 就必然能推出 Q，所以我們稱 Q 是 P 的**必要條件 (necessary condition)**.

if and only if

特別來說，若兩個命題可以互相推得，即 $P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$，我們記做 $P \Leftrightarrow Q$，並稱它們互相為**充分必要條件 (necessary and sufficient conditions)**，簡稱為充要條件. 文字上，我們時常寫為：

- P if and only if Q (若且唯若、當且僅當)
- P iff Q (if and only if 的簡寫)
- P is equivalent to Q (P 等價於 Q)
- P is necessary and sufficient for Q

比如我們就可以說「$x+1=0$ if and only if $x=-1$」.

量詞

上述我們討論了兩個或兩個以上命題該如何連接在一起，並如何判斷組合後的真偽. 不過我們針對單一命題的描述還不夠多元，比如，我們時常需要描述一個群體中的所有成員是否都具備某個性質，或者這個群體中是否存在至少一個成員具備某個性質.

舉例來說，當我們說「班上的每個同學都喜歡數學」，這句話所要表達的是一種「所有」的概念；而當我們說「班上有同學正在玩手機」，這句話則是一種「存在」的描述. 這兩種說法都無法簡單地用「且」或「或」來表達，因為它們牽涉到對一個群體中所有或部分個體的判斷.

為了處理這類關於「所有」或「存在」的命題，我們需要引入新的符號來精確地描述它們，這就是所謂的量詞（Quantifiers）.

數學上常見的量詞有以下兩種：

- 「$\forall$」:「For all」、「For each」、「For every」、「對所有」、「對任意」
- 「$\exists$」:「There is」、「There exists」、「存在」、「可以找到」

比如我們要描述「所有實數 x 平方後的結果皆為正數」就可以表示為：

$$\forall x,\ x^2 \geq 0$$

當我們處理多個變數時，量詞的順序變得至關重要，因為它會影響命題的意義. 例如，當我們說「對於任意實數 x，都存在一個 y 使得 $x+y=0$」，我們是在描述一個普遍的性質. 這個命題可以表示為：

$$\forall x,\ \exists y,\ x+y=0$$

這句話的意思是，我們可以先任意選擇一個 x，比如說 $x=5$，然後我們就能找到一個對應的 $y=-5$，使得 $x+y=0$ 成立. 如果我們換一個 $x=100$，則 y 也會隨之變為 -100. 因此，這裡的 y 是依賴於 x 的，它會隨著 x 的不同而改變.

但當我們將量詞順序對調時，意義就會完全不同. 例如：

$$\exists x,\ \forall y,\ x+y=y$$

這句話的意思是「存在一個固定的 x，使得對於任意的 y 都有 $x+y=y$」. 在這種情況下，我們先說明有一個特殊的 x 存在，這個 x 無論你選擇什麼樣的 y 都能滿足等式. 例如，這個特殊的 x 就是 0，因為對於任何 y 來說，$0+y=y$ 都會成立. 在這裡，x 是事先固定的，並不會隨著 y 的變化而改變.

(2). 集合

在討論一個課題之前，我們需要先確定討論的對象有哪些. 因此，我們經常用「**集合 (set)**」來將所研究的對象做分類，把一些確定的、互異的、沒有順序的對象蒐集在一起，組成一個集合. 例如，我們蒐集所有臺北市的行政區作為一個集合 D_{tp}，其中包含北投、士林、內湖等 12 個元素. 這個集合可以記作：

$$D_{tp}=\{\text{北投},\text{士林},\text{內湖},\text{中山},\text{大同},\text{中正},\text{萬華},\text{大安},\text{松山},\text{信義},\text{文山},\text{南港}\}$$

這個例子也說明了集合的三個特性：

- **確定性：**任何一個對象，我們都能明確判斷它是否屬於這個集合. 例如，我們可以明確地說「信義區」屬於 D_{tp}，而「板橋區」不屬於 D_{tp}.
- **互異性：**集合中的每個元素都是獨一無二的，不會有重複.
- **無序性：**集合內元素的順序並不重要. 例如，$\{1,2,3\}$ 與 $\{3,1,2\}$ 是同一個集合.

反過來講，如果一個元素 x 屬於集合 A，我們稱 x 是 A 的**元素 (element)**，並記作 $x\in A$. 例如，「信義」這個元素屬於 D_{tp}，記作 信義 $\in D_{tp}$. 我們通常使用大寫字母來表示集合，小寫字母來表示其中的元素，但這並非硬性規定，只是約定俗成.

集合的描述方式

除了列舉出集合內的所有元素，另一個描述集合的常見方式是，說明它是由滿足特定條件的物件所組成. 格式為：

$$A=\{x \mid x \text{ 滿足條件} P\}$$

其中，豎線的左邊表示集合內元素的「格式」，比如需要說明它是一個實數、一個點、一個函數等等；豎線右邊則是 x 需要滿足的條件.

例如，區間 (a, b) 可以描述為：

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

而集合 $B = \{x \mid x^2 - 1 > 0\}$ 則包含所有滿足 $x^2 - 1 > 0$ 的 x. 透過解不等式，我們知道這個集合等同於區間 $(-\infty, -1)$ 和區間 $(1, \infty)$ 的組合.

集合的運算：聯集與交集

如果 A 和 B 是兩個集合，那麼 A 和 B 的**聯集 (union)** 包含所有屬於 A 或屬於 B 的元素，表示為：

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$$

類似地，A 和 B 的**交集 (intersection)** 是同時屬於兩個集合的元素的集合，記為：

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$$

例如，當我們想表達「$x < -2$ 或 $x > 3$」時，就可以簡單地表示為 $x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$.

集合之間的關係：子集

除了瞭解元素與集合之間的關係，我們也時常需要知道集合與集合之間的關係. 例如，考慮集合 $A = \{1, 2\}$ 和 $B = \{1, 2, 3\}$. 顯然，集合 A 中的每個元素 (1 和 2) 都同時也在集合 B 之內. 這時，我們就說 A 是 B 的**子集合 (Subset)**，記做 $A \subseteq B$. 根據這個定義，有兩個重要的性質：

1. 每個集合都是它自己的子集：$A \subseteq A$

2. 空集合 $\emptyset$（不包含任何元素的集合）是每個集合的子集：$\emptyset \subseteq A$

(3). 函數

過去在國高中學過一些多項式函數、指對數函數、三角函數等等，每種函數都有各自的特性. 但一般來說，給定兩個非空集合 A 與 B，**函數 (Function)** 即是一「對應關係」f，使得集合 A 中的每一個元素 a ，都有唯一對應的、屬於集合 B 之中的元素 $b = f(a)$. 其中 A 稱為該函數的**定義域 (Domain)**、B 稱為該函數的**值域 (Range)**.

定義 0.2 / 函數

要定義一個函數 f，我們需要說明：

1. 對應規則：如何將給定的 x 計算出 $f(x)$
2. 定義域：說明此規則可應用於哪些 x

有關函數的記號有許多種，不過每種都直觀的呈現了對應關係，比如有強調 f 是從定義域 A 映射到值域 B 的：

$$f : A \longmapsto B$$

或者寫成定義域 A 通過 f 會映射到值域 B 的：

$$A \overset{f}{\longmapsto} B$$

也可以說明一個函數如何將其定義域中的每個特定元素 x 轉換或映射到其對應域中的另一個元素 $f(x)$ 的：

$$x \longmapsto f(x)$$

這些符號都不約而同地展示出函數強調的是「對應關係」，因此符號上怎麼寫不是很重要. 比如函數 $f(x) = 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$ 與函數 $g(s) = 2s + 1,\ s \in \mathbb{R}$ 應該視作同一個函數. 或更一般的，只要兩個函數的定義域相同，並且對應關係也相同，那麼也稱這兩個函數為同一個函數. 比如 $f(x) = \sqrt{x^2},\ x \in \mathbb{R}$ 與 $g(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$，是同一個函數.

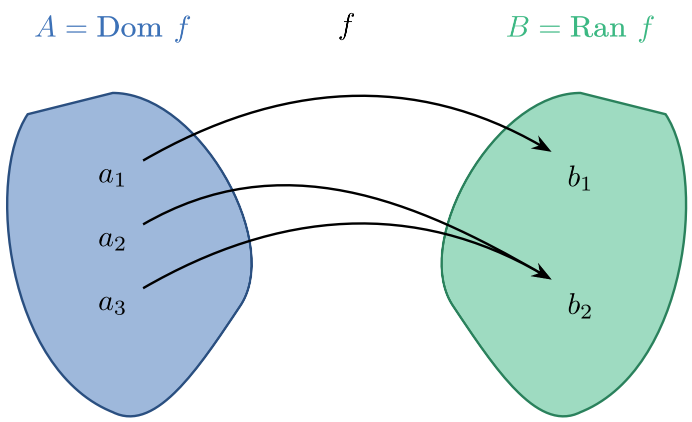


Figure 1: 從集合 A 映射到集合 B 的函數 f 將每個 A 中的元素 a 唯一對應到 B 中的元素 b.

要注意的是，每個定義域中的元素 x 只能對應到唯一的 $f(x)$，不能每次丟同樣的 x 進到 f 得到的是不同函數值. 但兩個不同的輸入變數可能對應到同一個函數值. 例如，函數 $f(x) = x^2$ 中，$x = 2$ 時輸出 4，而 $x = -2$ 時也輸出 4. 這表示兩個不同的輸入 2 和 -2 都指向同一個輸出 4，這仍然是完全符合函數的定義的.

因此要判斷一個圖形是否代表一個函數，我們可以使用一個非常直觀的方法，稱為**鉛直線判別法**. 在座標上繪製完出函數圖形後，再畫上一條鉛垂線來標示一個固定的

自變數 x. 如果這條鉛直線在任何地方都只與圖形相交於一個點 $(x, f(x))$，即該自變數只對應到一個函數值 $f(x)$，該那麼這個圖形就代表一個函數.

也就是說，若我們在定義域上的某個位子畫上鉛直線後，發現它與圖形與兩個以上的交點，那麼該圖形就不是函數圖形.

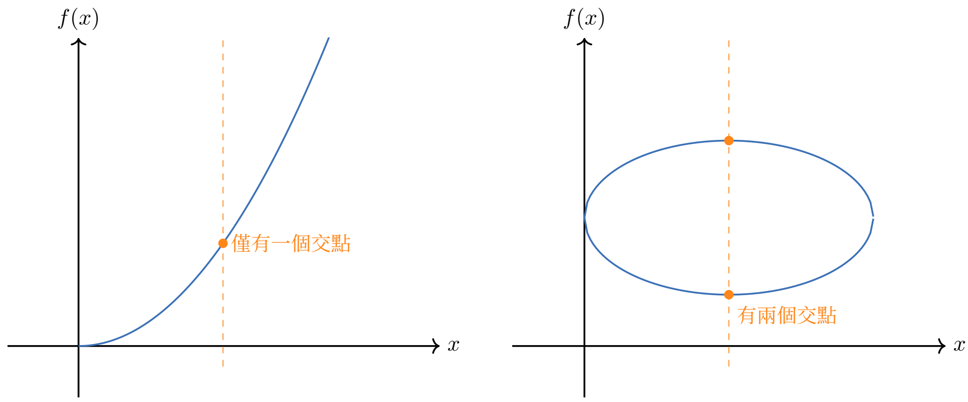


Figure 2: 函數圖形的鉛直線判別法：從左圖定義域中的任意 x 做鉛直線皆與函數圖形只有一個交點；但右圖卻能在定義中找到一些 x 做鉛直線之後有兩個交點，因此左圖為函數圖形、右圖不是

反函數

有了從定義域 A 映射到值域 B 的函數 $f : A \longmapsto B$ 之後，我們不禁會想，那麼是否可以反過來，找到一種從 B 到 A 的對應關係呢？這就是反函數 f^{-1} 的概念，它是反過來的、從 B 映射回 A 的函數 $f^{-1} : B \longmapsto A$. 那既然反函數也是一種函數，它也必須滿足 $\text{Dom } f^{-1} = B$ 中的**每個**元素 b，都要有**唯**一與之對應的、在 $\text{Ran } f^{-1} = A$ 之中的元素 $a = f^{-1}(b)$.

為了滿足 「**每個**」 B 之中的 b，都要有「**唯一**」在 A 之中的 $a = f^{-1}(b)$ 與之對應，我們有以下兩個函數的性質：

- **單射 (一對一, Injection, one-to-one)**：意思是指在定義域 A 中，不同的元素會被映射到值域 B 中不同的元素. 也就是說，對於任意 $a_1, a_2 \in A$，若 $a_1 \neq a_2$，則 $f(a_1) \neq f(a_2)$. 這個性質保證了當我們考慮反函數 f^{-1} 時，每個來自 B 的元素 b 都只會對應到 A 中**唯一的**一個元素 a，因此滿足了反函數輸出結果的「唯一」性.
- **滿射 (映成, Surjection, onto)**：表示集合 B 中的所有元素都被 A 中的元素映射之後的結果覆蓋. 也就是說，對於 B 中的每一個 b，都可以在 A 中找到至少一個 a，使得 $f(a) = b$. 這個性質保證了反函數 f^{-1} 的定義域能夠包含 B 中的**每個**元素，使得 f^{-1} 可以在整個 B 上被定義.

當一個函數同時是單射也是滿射時，我們稱它是**雙射 (Bijection)**. 這意味著定義域 A 中的每個元素都唯一地對應到對應域 B 中的一個元素，並且對應域 B 中的每個

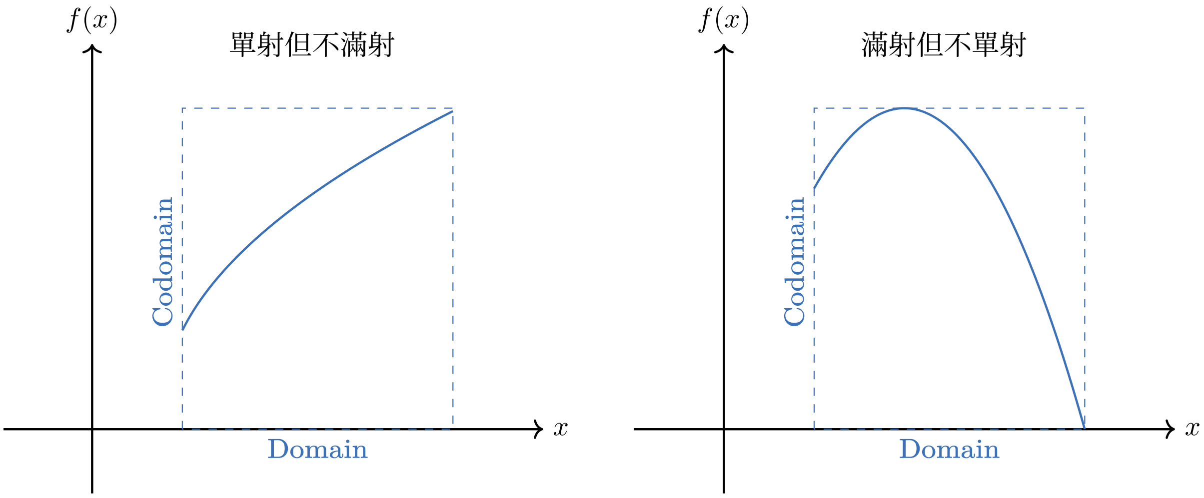


Figure 3: 單射與滿射：左圖中定義域內任意不同的 x_1、x_2 會對應到不同的 $f(x_1)$、$f(x_2)$；右圖中定義域內所有的 x 映射之後的像 (Image) 會填滿整個值域，但對應不唯一

元素也唯一地被定義域 A 中的一個元素所對應. 雙向都是完美的一對一對應，因此該函數的反函數就得以存在.

比如我們定義函數 f 是 $f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ 定義為 $f(x)=x^2$，顯然，定義域 $\mathbb{R}$ 中的所有元素映射過去的結果是 $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$，即所有正實數或 0，無法填滿整個 $\mathbb{R}$，那麼該函數就不是映成的；另一方面，我們可以找到不同的 $x_1=+2$ 與 $x_2=-2$ 使得它們的經過 f 映射之後的結果都是 4，因此它就不是一對一的.

由以上分析，函數 $f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ 定義為 $f(x)=x^2$ 是沒有反函數的，原因是它既不是一對一也不是映成的. 但若是我們縮小其定義域與對應域為 $f:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\longmapsto\mathbb{R}^+\cup\{0\}$，即可使該函數變成一對一且映成的，那麼它的反函數就得以存在.

註 一般來說，對應域 (Codomain) 是至少包含所有此函數的輸出值的一個集合，值域 (Range) 只是它的一部分，值域表示的是所有定義域的元素映射後組成的集合. 但師大微乙中模糊了值域 (Range) 與對應域 (Codomain) 的差別，直接將對應域簡化為值域. 那麼在寫師大微乙的題目時，若是遇到需要說明函數是否存在反函數，只需要說明一對一即可. □

由於反函數是將原函數的輸入當作輸出、輸出當作輸入，在圖形上看就像是把 x 軸與 y 軸對調. 因此，若將反函數與原函數放在同一個座標軸上，他們的圖形會對稱於 $y=x$ 這條斜直線.

複合函數

我們已經了解了從集合 A 到 B 的正向映射 f，以及它的反向映射 f^{-1}. 但在實際應用中，問題往往不會只有單層映射那麼簡單.

舉例來說，考慮一個物體在二維平面上、以直角坐標系表示的位置函數. 這個函數 f 的定義域是時間 $\mathbb{R}$，值域是二維平面上的位置 $\mathbb{R}^2$，因此我們可以寫成 $f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}^2$，

定義為 $f(t) = (x, y)$. 這表示給定任意時間 t_0，我們就能透過這個函數得到物體在 t_0 時刻的位置 (x, y).

然而，在處理某些物理問題時，使用不同座標系——比如極坐標——或許會更方便. 這時，我們就需要一個將直角坐標轉換為極坐標的函數 g. 這個函數的定義域是 $\mathbb{R}^2$ (直角坐標)，值域也是 $\mathbb{R}^2$ (極坐標)，我們可以定義為 $g : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$，即 $g(x, y) = (r, \phi)$.

如此一來，我們就能巧妙地將這兩個函數結合起來，得到物體在極坐標中隨時間變化的函數：$g(f(t)) = (r, \phi)$. 這個 $g(f(t))$ 就是一個**複合函數 (Composite Function)**，我們通常會寫成 $(g \circ f)(t)$. 這表示有一個新的函數叫做「$g \circ f$」，它直接作用在時間 t 之上，將時間 t 映射到極坐標 (r, ϕ). 因此，這個複合函數的映射關係是 $(g \circ f) : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^2$. 透過複合函數，我們便能流暢地在不同描述方式之間進行轉換，大大簡化了問題的處理.

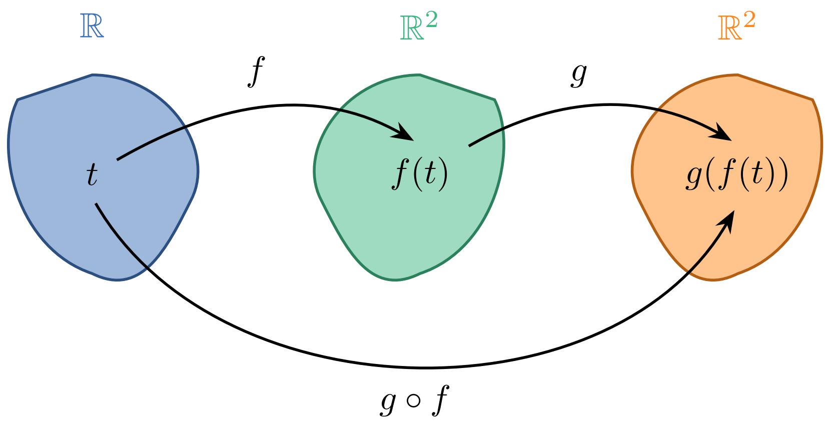


Figure 4: 時間 t 透過函數 $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^2$ 轉換為直角坐標 (x, y)，接著 (x, y) 再透過函數 $g : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ 轉換為極坐標 (r, ϕ). 整個流程可視為單一的複合函數 $(g \circ f) : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^2$，直接將時間映射到極坐標位置

在處理函數時，你可能會遇到一些符號看似相似，進而導致混淆. 此時，關鍵在於不要拘泥於計算，而是要深入理解每個函數對輸入到底做了什麼運算. 舉例來說，如果我們定義 $f(x) = x + 2$，這表示函數 f 的作用是將任何給定的輸入都加上 2. 而我們定義 $g(y) = y^2$，則表示函數 g 的作用是將任何給定的輸入進行完全平方.

當我們計算 $(g \circ f)(x)$ 時，這個複合表示你先對 x 執行 f 運算，得到 $f(x)$，然後再將 $f(x)$ 作為輸入丟給 g. 根據定義，$f(x)$ 是「輸入加上 2 的結果」，也就是 $(x + 2)$. 接著，g 會將這個新的輸入「平方」. 因此，最終的結果就是 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2)^2$.

反之，如果我們將複合順序顛倒，計算 $(f \circ g)(x)$，這表示你先對 x 執行 g 運算，得到 $g(x)$，然後再將 $g(x)$ 作為輸入丟給 f. 根據定義，$g(x)$ 是「輸入平方的結果」，也就是 x^2. 接著，f 會將這個新的輸入「加上 2」. 因此，最終的結果就是 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 2$.

在兩個例子中，我們可以清楚看到複合函數的順序會直接導致不同的輸出. 因此，

一般而言，對於任意兩個函數 f 和 g，$f \circ g \neq g \circ f$.

習題

► **邏輯語言問題**

1. 找到所有使以下命題為真的整數 n：
   (a) $n \geq 2$ and $n \leq 7$
   (b) $n \geq 2$ or $n \leq 7$
   (c) $n \leq 2$ and $n \geq 7$
   (d) $n \leq 2$ or $n \geq 7$

2. 判斷下列命題之間的關係，並說明 P 是 Q 的充分條件、必要條件、充要條件，或都不是.
   (a) P: 一個人是臺灣人，Q: 一個人是亞洲人.
   (b) P: 一個整數 n 是偶數，Q: n 可以被 2 整除.
   (c) P: $x^2 = 4$，Q: $x = 2$.
   (d) P: 一個三角形是等邊三角形，Q: 一個三角形是等腰三角形.

3. 將下列敘述用邏輯符號 $(\exists, \forall, \text{s.t.})$ 表示：
   (a) 存在一個整數 n，使得 $n^2 = 4$.
   (b) 對於所有的實數 x，$x^2 + 1 > 0$.
   (c) 存在一個實數 $a < 0$ 使得 $x^2 = a$ 無實數解
   (d) 對於任意兩個實數 a 和 b，如果 $a < b$，則 $a + c < b + c$ 對於所有實數 c 成立.

► **集合問題**

4. 寫出下列集合的所有元素：
   (a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -3 < n \leq 2\}$
   (b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ 是10 的因數}\}$
   (c) $C = \{k \in \mathbb{Z} \mid k^2 = 9\}$

5. 判斷下列敘述的真偽：
   (a) $5 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ 為質數}\}$

(b) $\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$

(c) $[2, 5) = \{x \mid 2 \leq x < 5\}$

6. 使用區間符號表示下列集合：

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 7\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\}$

7. 說明以下集合的包含關係：

(a) $A = \{0, 1, 1\}$

(b) $B = \{0, 1, 2\}$

(c) $C = \{2, 1, 0, 0\}$

(d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 2\}$

(e) $E = \{0, 1, 2, 3\}$

8. 若 $P = \{x \mid P(x)\}$、$Q = \{x \mid Q(x)\}$ 論證以下命題：

(a) $P \subset Q$ 等價於 $P(x) \Rightarrow Q(x)$

(b) $P = Q$ 等價於 $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

► **函數問題**

9. 判斷下列對應關係是否為函數？請說明理由.

(a) $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 3$

10. 判斷下列 x、y 關係式表示的圖形是否為函數圖形？請說明理由.

(a) $y = 3x - 5$

(b) $x^2 + y^2 = 9$

(c) $y = x^3$

(d) $2x^2 - 4y^2 = 8$

11. 考慮函數 $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ 定義為 $f(x) = 3x - 2$.

(a) 判斷 f 是否為單射？請說明理由.

(b) 判斷 f 是否為滿射？請說明理由.

(c) 判斷 f 是否存在反函數？若存在，請找出 $f^{-1}(x)$; 若不存在，請說明如何限制其定義域或值域使其反函數存在.

12. 考慮函數 $g:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ 定義為 $g(x)=x^2$.

(a) 判斷 g 是否為單射？請說明理由.

(b) 判斷 g 是否為滿射？請說明理由.

(c) 判斷 g 是否存在反函數？若存在，請找出 $g^{-1}(x)$; 若不存在，請說明如何限制其定義域或值域使其反函數存在.

13. 給定函數 $f(x)=x^2+1$ 和 $g(x)=2x-3$，給出下列複合函數的表達式：

(a) $(f\circ g)(x)$

(b) $(g\circ f)(x)$

(c) $(f\circ f)(x)$

CHAPTER 1
極限

1. 極限的直觀概念

正如我們在 第 0.2 節：微積分實際上在做什麼？ (第3頁) 中提過，微積分的核心在於處理微小的變化量. 那麼，我們該如何精確地定義什麼是「微小變化量」呢？

比如我們正在考慮一個變數 x 的變化量，我們稱之為 h，它是由兩個點 x' 和 x 之間的差異所構成，也就是 $h = \Delta x = x' - x$. 如果想讓這個變化量 h 變得無窮小，有個直觀的方法：我們可以先固定其中一端 x，然後讓另一端的 x' 持續地向 x 靠近. 當 x' 越來越接近 x 時，它們之間的差異 h 就會變得越來越小，趨近於零.

我們將這個「靠近」的過程稱為**極限 (Limit)**，並將其記作：

$$h = \lim_{x' \to x} (x' - x)$$

這裡的 $\lim\limits_{x' \to x}$ 就代表「當 x' 接近 x 時」；或者也可以記為「$(x' - x) \to h$ as $x' \to x$」. 透過極限的概念，我們就能精準地描述這種「無限靠近」或「無窮小」的狀態.

這個概念不僅適用於單純的變數變化量，也可以讓我們更了解函數的行為. 當我們觀察一個函數 $f(x)$ 時，有時候甚至沒辦法直接得到某個特定點 x_0 的函數值 $f(x_0)$ 是多少，因此我們退而求其次的了解當 x 趨近於 x_0 時，$f(x)$ 會如何變化，或者它會「趨近」到什麼值.

要注意的是，極限關注的只是函數的「趨勢」或「逼近方向」，而非函數在該點的實際值. 換句話說，當我們計算一個點的極限時，我們並不在乎函數在那個點上是否真的有定義，或者它實際的值是多少. 我們只在意當輸入值無限接近該點時，函數的輸出值會靠近哪個地方，也就是說極限值不一定會與函數值恰好相等.

但這樣又會出現一個問題，我們把 x 靠近 x_0 的時候，是要從哪個方向？要從左邊還是右邊？又如果兩邊的極限不一樣呢？因此我們稱從左邊逼近該點 $(x < x_0)$ 的極限為左極限，以 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 來表示；從右邊逼近該點 $(x > x_0)$ 的極限為右極限，用 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 來表示. 當兩邊的極限相等時，就說該點的極限存在. 亦即：

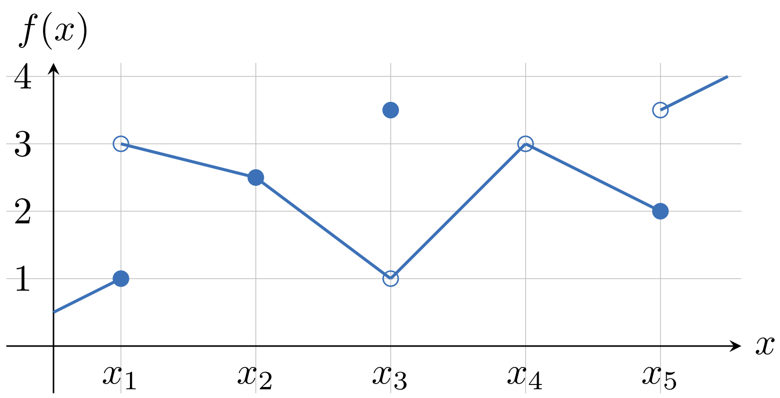
定義 1.1 / 極限存在的直觀定義

給定任意函數 $f(x)$ 以及定義域內的任意值 x_0：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ 存在} \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

例題 1.1 / 極限存在的直觀定義

Given a function $f(x)$, whose graph is shown below, determine whether the limit of $f(x)$ from x_1 to x_5 exists or not. If it is exist, give its value.



- 對於 x_1 而言，其左極限 $\lim_{x\to x_1^-} f(x) = 1$ 並不等於其右極限 $\lim_{x\to x_1^+} f(x) = 3$，因此 $\lim_{x\to x_1} f(x) = 1$ 不存在，或簡稱為 D.N.E.(Does Not Exists).
- 同理，對於 x_2，$\lim_{x\to x_2^-} f(x) = \lim_{x\to x_2^+} f(x) = 2.5$，因此 $\lim_{x\to x_2} f(x) = 2.5 \neq f(x_2)$
- 對於 x_3，$\lim_{x\to x_3^-} f(x) = \lim_{x\to x_3^+} f(x) = 3.5$，因此 $\lim_{x\to x_3} f(x) = 3.5 = f(x_3)$
- 對於 x_4，$\lim_{x\to x_4^-} f(x) = \lim_{x\to x_4^+} f(x) = 3$，因此 $\lim_{x\to x_4} f(x) = 4$
- 對於 x_5，$\lim_{x\to x_5^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to x_5^+} f(x) = 3.5$，因此 $\lim_{x\to x_4} f(x)$ D.N.E.

2. 極限的嚴謹定義

在上一小節中，我們已經直觀地理解函數如何趨近一個點，但對於「趨近」究竟要多接近，以及「無限逼近但不完全相等」的模糊描述，卻未能給出明確的答案. 這種語焉不詳的敘述方式在實際計算極限時，很容易產生問題.

例如，考慮以下極限的計算：

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+5)(x-2)}{x-2}$$

我們可能會先說「x 只是趨近於 2，並不完全等於 2」，因此可以將分子與分母中的 $(x-2)$ 消去，得到：

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}x+5$$

然而，此時我們又會說「既然 x 無限趨近於 2，那麼就可以直接將 2 代入 x」，得到：

$$\lim_{x\to 2}x+5=5+2=7$$

在這個過程中 x 一下子是 2，一下子又不是 2，這種明顯的矛盾突顯了我們對極限需要一個更嚴謹的定義. 因此，在微積分創立約兩百年後，數學家們發展出了一套完善且精確描述極限的「$\varepsilon-\delta$ 語言」.

讓我們先看一個比喻. 想像一群人排隊走向目標 B. 我們該如何精確描述他們是排隊走向 B，而不是走向另一個目標 A 呢？一個直觀的想法是，在 B 的周圍一定會有一些人. 換句話說，我們可以以 B 為圓心，畫一個半徑為 ε 的紅色圓圈（如圖中所示），那麼在這個給定範圍內的隊伍成員就會被納入圈中. 以圖為例，13 號和 14 號的人就被框住了.

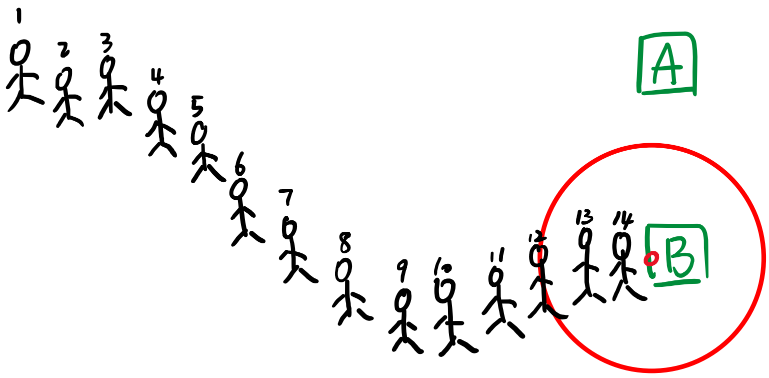


Figure 1.1: $\varepsilon-\delta$ 定義直觀示意圖：給定紅色範圍半徑之後，會對應的一個編號範圍；使得只要編號落在這編號範圍內，人的位子也會落在紅色圈圈內

我們將這個比喻延伸到函數：把排隊編號看作自變數 x，而人的位置看作函數值 $f(x)$. 也就是說，對於一個函數，當我們給定一個任意小的函數值範圍 ε（誤差容忍度）之後，總能找到一個與之對應的自變數範圍 δ_ε，使得只要 x 落在這個 δ_ε 範圍內（且 x 不等於 x_0），其對應的函數值 $f(x)$ 就會落在 ε 範圍內. 使用數學邏輯語言來描述，極限的 $\varepsilon-\delta$ 定義即是：

定義 1.2 / 極限的 $\varepsilon - \delta$ 定義

給定任意函數 $f(x)$ 以及定義域內的任意值 x_0，其極限 $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ 等價於：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ s.t. } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

在該定義中有四個過程，分別是：

1. 先任意給一個 ε ($\forall \varepsilon > 0$)
2. 接著找到一個與之對應的 δ_ε ($\exists \delta_\varepsilon > 0$)
3. 再假設 x 滿足 $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ (if $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$)
4. 最後由此推導出 $|f(x) - L| < \varepsilon$ (then $|f(x) - L| < \varepsilon$)

因此每次使用 $\varepsilon - \delta$ 說明極限時，都要按照順序完成這四個步驟. 但實際上當我們給定任意的 ε 之後，會沒有其他線索得知 δ_ε 長怎樣，所以通常會先空著它，先接著完成 3、4 步驟，再反過來得知 δ_ε 要怎麼取.

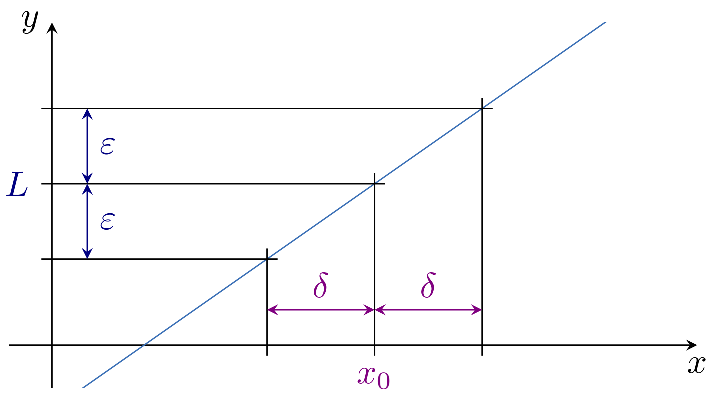


Figure 1.2: 極限的 $\varepsilon - \delta$ 定義：給定任意的 ε 之後會有與之對應的 δ_ε 使得落在 δ_ε 範圍裡的 x，其函數值 $f(x)$ 將會落在 ε 之中

例題 1.2 / 極限的嚴格定義

Use $\varepsilon - \delta$ languege to show that $\lim_{x \to 2} 2x + 5 = 9$.

Given $\varepsilon > 0$, choose $\delta_\varepsilon = \varepsilon/2$, such that if $0 < |x - 2| < \delta_\varepsilon$, then we have：

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |(2x + 5) - 9| \\ &= |2x - 4| \\ &= 2|x - 2| < 2\delta_\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Since ε is arbitriry, $\lim_{x \to 2} 2x + 5 = 9$.

註 在這證明之中，先是給定任意的 $\varepsilon > 0$，我們的目標是找到一個依賴於 ε 的 $\delta_\varepsilon = \delta(\varepsilon) > 0$，使得只要 $0 < |x-2| < \delta_\varepsilon$，就能保證 $|f(x) - 9| < \varepsilon$.

但我們對於 δ_ε 的長相毫無頭緒，所以我們先不處理他、先化簡最後會發生的 $|f(x) - L|$，來反過來得知如何選取 δ_ε：

$$|f(x) - L| = \cdots = 2|x-2|$$

現在我們希望 $|f(x) - L| = 2|x-2| < \varepsilon$，如果我們選擇 $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$，那麼：

$$2|x-2| < 2\delta_\varepsilon = 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

這樣就成功證明了當 $0 < |x-2| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ 時，保證有 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 成立. □

但是，顯然地，如果每次遇到一個極限就要從頭以 $\varepsilon - \delta$ 定義推導一次，會顯得非常沒有效率且繁複. 更簡潔的做法是我們先熟悉一些基礎函數的極限，再學習一些極限在函數運算中的特性，之後對於函數排列組合後的極限就迎刃而解了.

比如來說，如果我們知道了冪函數 x^n 在任意 $x \in \mathbb{R}$ 的極限：

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$$

在結合上極限的線性性質[1]：

$$\lim_{x \to x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) + \beta \lim_{x \to x_0} g(x)$$

而又因為多項式函數即是冪函數的線性組合，我們就可以很輕鬆地可以得知任意多項式的極限值.

因此在接下來的兩個小節中，我們會分別探討一些常見函數的極限，再瞭解一些好用的運算特性.

3. 基本函數的極限

很幸運地，我們所學過的函數 (常數函數、冪函數、指數函數、對數函數、三角函數、反三角函數) 大多都沒有間斷、沒有過度震盪，其在定義域上的極限值與函數值一致. 對於師大微積分乙的學生而言，$\varepsilon - \delta$ 定義通常不會是考試的重點，僅作為額外加分題出現. 因此，我們不會在此論證所有基本函數的極限，而僅透過 $\varepsilon - \delta$ 定義證明一些簡單函數的極限，以幫助大家熟悉 $\varepsilon - \delta$ 語言的運用.

[1]即是加法與係數積可以「拆開」. 我們將會在後面介紹.

例題 1.3 / 常數函數的極限

Given $c, x_0 \in \mathbb{R}$, show that $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$

Given $\varepsilon > 0$, choose $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, such that if $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, then we have：

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |c - c| \\ &= 0 < \varepsilon \end{aligned}$$

Since ε is arbitriry, $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

例題 1.4 / 一次冪函數的極限

Given $x_0 \in \mathbb{R}$, show that $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$

Given $\varepsilon > 0$, choose $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, such that if $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, then we have：

$$|f(x) - L| = |x - x_0| = \delta_\varepsilon < \varepsilon$$

Since ε is arbitriry, $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

4. 極限的運算特性

與上個小節相似的，在還不確定結論是否正確前我們應該使用 $\varepsilon - \delta$ 語言論證，但這並不是我們學習的重點. 因此我們直接列出結論，著墨在如何使用這些結論：

結論 1.1 / 極限運算定理

給定 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = F$、$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = G$ 以及 $c \in \mathbb{R}$，我們有：

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot F$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x) = F + G$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = F \cdot G$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{F}{G}$, 若 $G \neq 0$.

給定 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = F$、$\lim\limits_{t \to F} g(t) = g(F)$，我們有：

5. $\lim\limits_{x \to x_0} h(f(x)) = h(F) = h(\lim\limits_{x \to x_0} f(x))$

註 前四點表示極限對於四則運算可以「拆開」. 亦即,「先取極限再做加法」=「先做加法再取極限」等等. 而最後一點是極限對於複合運算的特性,其表明若該函數的極限值等於函數值 (亦即函數是「連續」的,將在第 2 章:連續 (第41頁) 介紹),那麼極限就可以直接放進函數內. □

我們實際來練習一些函數運算與函數複合後的極限:

例題 1.5 / 極限運算定理[2]

Find the limit if it exists:

(a) $\lim_{x\to -3} x^2 - 13$

(b) $\lim_{y\to 2} \dfrac{2y+5}{11-y^3}$

(c) $\lim_{t\to -1/2} 4t(3t+4)^2$

(d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$

(a)
$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3} x^2 - 13 &= \lim_{x\to -3} x^2 - \lim_{x\to -3} 13 && \text{(by 1. and 2.)} \\ &= 9 - 13 = -4 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \lim_{y\to 2} \frac{2y+5}{11-y^3} &= \frac{\lim_{y\to 2}(2y+5)}{\lim_{y\to 2}(11-y^3)} && \text{(by 4.)} \\ &= \frac{9}{3} = 3 && \text{(similar to (a))} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \lim_{t\to -1/2} 4t(3t+4)^2 &= \lim_{t\to -1/2} 4t \cdot \lim_{t\to -1/2} (3t+4)^2 && \text{(by 3.)} \\ &= \lim_{t\to -1/2} 4t \cdot \left(\lim_{t\to -1/2} (3t+4)\right)^2 && \text{(by 5.)} \\ &= -2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{-25}{2} && \text{(similar to (a))} \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{3}{\sqrt{3h+1}+1} &= \frac{\lim_{h\to 0} 3}{\lim_{h\to 0}(\sqrt{3h+1}+1)} && \text{(by 4.)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{\lim_{h\to 0}(3h+1)}+1} && \text{(by 5.)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

[2]改編自 Joel R. Hass, et al., *University Calculus — Early Transcendentals in SI Units* (4 ed. p.84)

註 雖然這些函數都是與高中類似的、可以直接「代進去」的極限. 但在到了大學階段的數學學習，要開始熟悉「每個推論都必須由於某個明確的原因」，不論數學或其他科目，每當你寫下一個「⇒」或等號時，務必清楚地知道這一步的推導依據是什麼，而不僅僅只是憑感覺. □

當然，這一些能夠適用四則運算與複合的只是少部分特例，更多時候我們需要更多工具來協助我們解決極限問題. 比如，考慮極限 $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x}$ 就不能夠使用上述的第 3. 條乘法規則，因為 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. 或者我們遇到一些直接代入後是 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, 1^{\infty}, \infty-\infty, 0^0$ 和∞^0 等等的**不定式 (Indeterminate form)**，將沒有足夠的資訊可以確定極限值.

在解決問題時沒有辦法一次就解決完所有問題，習慣上我們會將問題分類討論，針對不同層面的困難提出對於極限的解決方法. 這些方法不求一步到位、適用所有問題，而是專注於在特定條件下，以最有效率且最簡單的手段來解決核心的、最棘手的瓶頸. 這也是數學在處理問題時常見的流程.

(1). 去零因子方法

在這裡，我們主要考慮形如 $\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的極限問題. 需要特別處理這類問題是因為若 $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0) = 0$ 並且 $\lim_{x\to x_0} Q(x) = Q(x_0) = 0$，那麼將會導致極限出現 $\frac{0}{0}$，是無法定義的. 因此出現了「去零因子」方法，顧名思義，即是將 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 共同出現的、代入 x_0 之後出現 0 的因式相消去. 不過我們還是先來完整的考慮一下所有 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 的情況：

1. $P(x_0)\in\mathbb{R}$、$Q(x_0)\neq 0$ 那麼 $\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$
2. $P(x_0)\neq 0$、$Q(x_0)=0$ 那麼 $\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$ 不存在
3. $P(x_0)=0$、$Q(x_0)=0$ 那麼解決 $\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$ 時，考慮使用去零因子方法

在處理這類極限問題時，不需要死記以上這些情況再視情境套用. 它們不過是處理分式時很自然地根據分母是否為零來進行分類討論，這與我們過往的經驗非常相似. 特別的是，對於極限中的 $\frac{0}{0}$ 不定型，我們能夠嘗試去零因子方法將其轉化為第一種可直接計算的情況.

讓我們來實際計算看看去零因子方法是如何整理式子的：

2-2 exercises #11, #15, #17, #21

例題 1.6 / 極限運算定理[3]

Find the limit if it exists:

(a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x}$

(b) $\lim_{y\to 2}\dfrac{y^3-8}{y^4-16}$

(c) $\lim_{t\to 1}\dfrac{t-1}{\sqrt{t+3}-2}$

(a)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{x} && \text{(分子兩分式通分)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(x^2-1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x^2-1)} = -2 && \text{(同除以 } x\text{)}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\lim_{y\to 2}\frac{y^3-8}{y^4-16} &= \lim_{y\to 2}\frac{\cancel{(y-2)}(y^2+2y+4)}{(y^2+4)(y+2)\cancel{(y-2)}} && \text{(同除以 } (y-2)\text{)}\\ &= \frac{12}{32}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\sqrt{t+3}-2} &= \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\sqrt{t+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{t+3}+2}{\sqrt{t+3}+2} && \text{(同乘以 } \sqrt{t+3}+2\text{)}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(\sqrt{t+3}+2)}{\sqrt{t+3}^2-2^2}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{\cancel{(t-1)}(\sqrt{t+3}+2)}{\cancel{t-1}} && \text{(同除以 } (t-1)\text{)}\\ &= \sqrt{1+3}+2=4\end{aligned}$$

註 可以發現，當 $x\to a$ 時，會使多項式的極限出現零的因式即是 $(x-a)$. 因此此方法的目的即是將分子分母同時除掉 $(x-a)$，使零因子消去. □

5. 含有無窮的極限

我們過去所說的「極限不存在」可以分為兩種情況：第一種情況是，雖然函數值本身是有界的，但從不同方向逼近某一點時，左右極限不相等. 典型的例子就是步階函數，其在不連續點上的左右極限值不同，導致該點的極限不存在.

[3]改編自 Joel R. Hass, et al., *University Calculus — Early Transcendentals in SI Units* (4 ed. p.85) 2-2 exercises #32, #34, #37

另一種「極限不存在」的情況，則是函數值會趨向無窮大，這時我們稱其極限為無窮極限. 儘管嚴格來說極限「不存在」，但這類趨向無窮的極限對於理解函數的行為至關重要. 它們能幫助我們判斷函數在特定點或區間內是否會無限增大或減小，以及在趨向無窮時，函數值是否會無限接近某個固定的值或線.

這第二種情況，正是漸近線概念的基礎. 漸近線提供了一個框架，讓我們能更深入地分析函數在趨向極端值時的趨勢，從而勾勒出函數圖像的整體樣貌.

(1). 無窮極限的 $\varepsilon - \delta$ 定義與漸近線

在討論無窮極限之前，我們必須先釐清**無窮 (infinity, ∞)** 的概念. 它並非一個具體的數字，而更像是一種抽象的表示. 正因如此，我們不會去定義或討論涉及到無窮的四則運算，例如 $\infty + \infty$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$. 其中，「$+\infty$」代表著比任何實數都還要大的概念，而「$-\infty$」則是個比任何實數都還要小的概念. 需要注意的是，我們通常不會將 $-\infty$ 稱為「無窮小」. 無窮小 (infinitesimal) 通常指的是 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$，一個趨近於零但不等於零的微小量.

過去我們的 $\varepsilon - \delta$ 定義是為了說明當 $x \to x_0$ 時，函數值 $f(x) \to L$. 並使用了 ε 與 δ 來估計誤差. 但在這裡，自變數或函數值趨近於無窮，我們無法寫出類似「$0 < |x - \infty| < \delta$」的式子. 因此，我們需要重新給出相同內涵的、針對無窮極限的定義. 含有無窮的極限有八種情況：其中四種用於表示垂直與水平漸近線，另外四種則表示函數值在 x 趨向正負無窮時是無界的. 首先，**垂直漸近線 (Vertical Asymptotes)** 指的是當 x 趨近一個定值 x_0 時，$f(x)$ 會趨向正無窮或負無窮：

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0,\ \exists \delta_M > 0 \text{ s.t. } 0 < |x - x_0| < \delta_M \Rightarrow f(x) > M$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0,\ \exists \delta_M > 0 \text{ s.t. } 0 < |x - x_0| < \delta_M \Rightarrow f(x) < M$

而**水平漸近線 (Horizontal Asymptotes)** 指的是當 x 趨向正負無窮時，函數值趨向一個定值 L：

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 0 \text{ s.t. } x > N_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 0 \text{ s.t. } x < N_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

最後四種情況是當 x 趨向正無窮或負無窮時，函數值 $f(x)$ 也趨向正無窮或負無窮：

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0,\ \exists N_M > 0 \text{ s.t. } x > N \Rightarrow f(x) > M$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0,\ \exists N_M < 0 \text{ s.t. } x < N \Rightarrow f(x) > M$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M < 0,\ \exists N_M > 0 \text{ s.t. } x > N \Rightarrow f(x) < M$

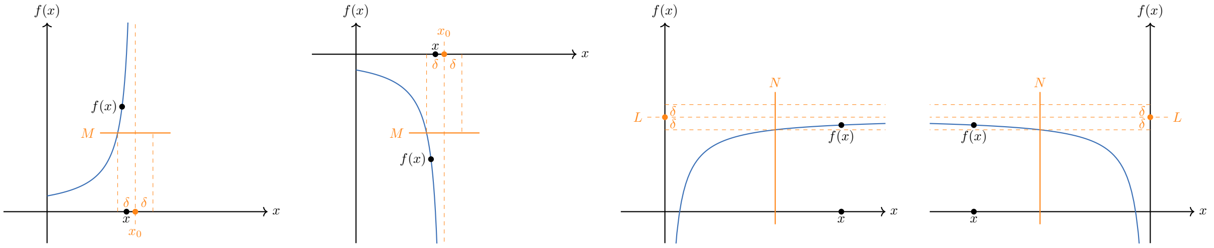


Figure 1.3: 垂直漸近線與水平漸近線

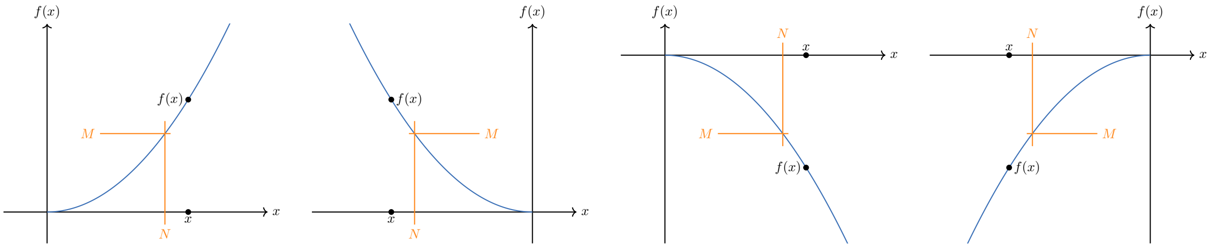


Figure 1.4: 無窮極限

8. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M < 0,\ \exists N_M < 0 \text{ s.t. } x < N \Rightarrow f(x) < M$

同樣的，對於師大微乙 (一) 的學生而言，這些含有無窮的「$\varepsilon - \delta$」定義不需要非常熟悉，只需感受過其內涵，實務上依然比較要求我們能夠找出漸近線與觀察函數的行為.

當給定了一個函數 $f(x)$，要尋找函數 $f(x)$ 的水平漸近線，關鍵在於探討函數在 x 趨向無窮大 ($x \to \infty$) 與負無窮大 ($x \to -\infty$) 時的行為. 因此，我們需要計算以下兩個極限：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad 與 \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

若其中任一極限的結果為一個有限的常數 L，那麼直線 $y = L$ 就是該函數的一條水平漸近線. 這條線描述了函數圖形在極左端或極右端的最終趨勢. 而一個函數最多可以有兩條不同的水平漸近線.

反之，垂直漸近線描述的是函數在某個特定點的發散行為. 我們要尋找一個實數 x_0，使得當 x 從右側或左側趨近 x_0 時，函數值 $f(x)$ 會趨向無窮大 (∞) 或負無窮大 ($-\infty$). 用極限的語言來說，若滿足下列任一條件，則直線 $x = x_0$ 為函數 $f(x)$ 的一條垂直漸近線：

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$$

相較於水平漸近線有固定的計算目標（$x \to \pm\infty$），尋找可能的垂直漸近線位置 $x = x_0$ 就顯得比較困難. 然而，對於特定類型的函數，我們也有一些常見的方法：

對於有理函數 (rational functions)，也就是可以表示為兩個多項式相除的函數 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$，尋找垂直漸近線的起點是找出使分母為零的點.

假設 x_0 是一個實數使得分母 $Q(x_0) = 0$. 這意味著在 $x = x_0$ 這一點，函數沒有定

義，這正是產生垂直漸近線可能的位置. 接下來，我們需要檢驗分子在該點的行為：

1. 分母為零，但分子不為零 ($Q(x_0) = 0$ 且 $P(x_0) \neq 0$)
在這種情況下，當 x 趨近於 x_0 時，分母趨近於 0，而分子趨近於一個非零常數. 這樣的結果將導致整個分式的值趨向 ∞ 或 $-\infty$. 因此，直線 $x = x_0$ 是一條垂直漸近線.

   例如對於函數 $f(x) = \frac{3x}{x-2}$，分母在 $x = 2$ 時為零，而分子在 $x = 2$ 時為 $3(2) = 6 \neq 0$. 因此，$x = 2$ 是一條垂直漸近線.

2. 分母與分子同時為零 ($Q(x_0) = 0$ 且 $P(x_0) = 0$)
這時我們會得到 $\frac{0}{0}$ 的不定型 (indeterminate form). 這表示分子和分母有共同的因式 $(x - x_0)$. 我們可以透過因式分解並消去共同項來化簡函數，即過去提及的去零因子方法：

   - 如果化簡後，分母在 $x = x_0$ 處仍然為零，則它依然是一條垂直漸近線.
   - 如果化簡後，分母在 $x = x_0$ 處不再為零，則原函數在 $x = x_0$ 處沒有定義，圖形上存在一個「洞」，而非一條漸近線.

   例如對於函數 $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$，在 $x = 2$ 時，分子和分母皆為零. 我們可以化簡：

$$g(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 \quad (\text{其中} x \neq 2)$$

   化簡後，函數在 $x = 2$ 附近等同於 $y = x + 2$. 因此，在 $x = 2$ 處沒有垂直漸近線，而是在圖形上 $(2, 4)$ 的位置有一個洞.

除了有理函數，其他類型的函數也可能具有垂直漸近線，例如對數函數 $f(x) = \ln(x)$ 在 $x = 0$ 處有垂直漸近線，以及三角函數如 $\tan(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ 點均有垂直漸近線. 關鍵仍在於找到使函數值趨向無窮的 x 點.

例題 1.7 / 水平與垂直漸近線[4]

Find the vertical and horizontal asymptotes of the given function if it exists:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

1° For horizontal asymptotes, since:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 4} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2 - 4} = 0 \end{cases},$$

$y = 0$ is a horizontal asymptotes of $f(x)$.

2° For vertical asymptotes, since $f(x)\ \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$, it is clear that there is a vertical asymptote at $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to +2^+} \dfrac{1}{x^2-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to +2^-} \dfrac{1}{x^2-4} = -\infty \end{cases}$$

Similary, at $x = -2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{x^2-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{x^2-4} = -\infty \end{cases}$$

that is, $f(x)$ has vertical asymptote at $x = -2$ and $x = +2$.

註 在計算垂直漸近線時，要特別注意左極限與右極限可能不同. 在此例題中，計算右極限 $\lim\limits_{x \to +2^+} \dfrac{1}{x^2-4}$ 時，x 是從右邊逼近 $+2$，那麼 $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x^2 - 4 > 0$，因此極限會趨向正無窮；相反，計算左極限 $\lim\limits_{x \to +2^-} \dfrac{1}{x^2-4}$ 時，x 是從左邊逼近 $+2$，那麼 $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$，因此極限會趨向負無窮. □

除了垂直與水平漸近線之外，還有一類**斜漸近線 (Oblique Asymptote)**，而其中水平漸近線可以看作是斜漸近線的一種特例. 我們來透過水平漸近線來探討如何得到斜漸近線. 我們之前說，若 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L$，那麼水平漸近線即是 $y = L$ 這條直線，這表示 $f(x)$ 在 x 很大時會很靠近 L. 也就是說，當 $x \to \infty$ 時，$f(x) - L$ 會趨近零. 因此，相似的，對於斜漸近線 $L(x) = mx + b$ 而言，它等價於：

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - L(x) = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) - L(x) = 0$$

例題 1.8 / 斜漸近線[5]

Find the oblique asymptotes of the given function if it exists:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{2x+4}$$

Method 1

Let $L(x) = mx + b$ be a oblique asymptote of $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x+4}$, then we

[4]改編自 Joel R. Hass, et al., *University Calculus — Early Transcendentals in SI Units* (4 ed. p.126) 2-6 exercises #53

have $\lim_{x\to+\infty} f(x) - L(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x+4} - mx - b = 0$, which implies that $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-1}{2x+4} - mx - b}{x} = 0$. And since $\lim_{x\to+\infty} \frac{mx}{x} = m$ and $\lim_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = 0$. Therefore, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-1}{2x+4}}{x} = m = \frac{1}{2}$.

Moreover, once again, since $\lim_{x\to+\infty} f(x) - L(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x+4} - \frac{1}{2}x - b = 0$, we have $b = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x+4} - \frac{1}{2}x = -1$.

Hence, the oblique asymptote of $f(x) = \frac{x^2-1}{2x+4}$ is $L(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Method 2

By polynomial division, we observe that $f(x) = \frac{x^2-1}{2x+4} = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{2x+4}$.

Clearly, there exists $L(x) = \frac{1}{2}x - 1$ so that $\lim_{x\to+\infty} f(x) - L(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{2x+4}\right) - \left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2x+4} = 0$, Hence, the oblique asymptote of $f(x) = \frac{x^2-1}{2x+4}$ is $L(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

註 在第一個方法中，我們直接通過計算極限 $\lim_{x\to+\infty} f(x) - L(x) = 0$ 來得到斜漸近線的斜率 m，再將其代回 $\lim_{x\to+\infty} f(x) - L(x) = 0$ 得到 b；在第二個方法中，我們由多項式除法將 $f(x)$ 拆分出 $L(x) = \frac{1}{2}x - 1$，並且剩下的部分 $f(x) - L(x) = \frac{3}{2x+4}$ 會趨向零，即是滿足斜漸近線之條件.

一般來說，對於有理函數可以嘗試第二種方式較為便捷；但對於一般的函數，無法像有理函數那樣直接拆出一個 $L(x)$ 還需要使得 $f(x) - L(x)$ 趨向零，因此只能使用第一種方法. □

水平漸近線即是告訴我們函數在自變數趨於無窮時的長期穩定狀態. 實務上，這類分析工具在各個學科中都極為重要. 比如，路學中，我們會探討含有儲能元件（如電容、電感）的電路在長時間運行後的穩定狀態. 透過極限分析，我們能判斷電路是會持續振盪、電流或電壓會衰減至零，還是會趨於一個固定的數值. 又或者在物理學中，我們分析物體在無限長時間後的運動軌跡，像是一個受空氣阻力影響而自由落體的物體，其速度會趨近於一個終端速度，不再增加. 這條水平漸近線精確地描述了物體運動的穩定狀態.

但這類趨於無窮的極限是我們過去較不熟悉的. 因此在接下來兩個小節中，我們將探討一些有關於無窮極限的特殊形式，以幫助我們更加快速熟悉無窮極限的運算[6].

[5]改編自 Joel R. Hass, et al., *University Calculus — Early Transcendentals in SI Units* (4 ed. p.128) 2-6 exercises #108

[6]標題「老大比較法」源於數學老師張旭 (https://www.instagram.com/changhsumath/)

(2). 老大比較法之一：多項式函數分式

這裡我們主要探討多項式分式在 $x \to \infty$ 時的行為. 我們來看一個例子. 要計算極限：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5+2x^3+1}{4x^5+2x^2+5}$$

我們注意到只要當指數 $p>0$ 時，就會有 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p}=0$. 因此我們將其分子分母同除以最高次方項 x^5 得到：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5+2x^3+1}{4x^5+2x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\cancelto{0}{\frac{2}{x^2}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^5}}}{4+\cancelto{0}{\frac{2}{x^3}}+\cancelto{0}{\frac{5}{x^5}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

那麼如果當分子分母的最高次項不同，我們將會得到極限值是零或無窮. 比如：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5+2x^3+1}{4x^7+2x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancelto{0}{\frac{3}{x^2}}+\cancelto{0}{\frac{2}{x^4}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^7}}}{4+\cancelto{0}{\frac{2}{x^5}}+\cancelto{0}{\frac{5}{x^7}}} = 0$$

另一種情況是：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^7+2x^3+1}{4x^5+2x^2+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\cancelto{0}{\frac{2}{x^4}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^7}}}{\cancelto{0}{\frac{4}{x^2}}+\cancelto{0}{\frac{2}{x^5}}+\cancelto{0}{\frac{5}{x^7}}} = \infty$$

因此可以得到以下結論:

結論 1.2 / 老大比較法之多項式分式

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x^1+a_0x^0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x^1+b_0x^0} = \begin{cases} 0 & \text{, if } n<m \\ \frac{a_n}{b_n} & \text{, if } n=m \\ \infty & \text{, if } n>m \end{cases}$$

註 我們能夠直接將每一個 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^p}$ 分別劃為零是依據直接比較審斂法 (Direct Comparison Theorem) (第106頁). 並且夠發現，極限的結果只與最高次項有關. □

例題 1.9 / 老大比較法之多項式分式[7]

Find the limit if it exists:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3}-x$

(a)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}}{1+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}\qquad(\text{同除以 } x=-\sqrt{x^2})$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sqrt{1}}{1}=-1$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3}-x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3}-x\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}^2-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=0$$

註 在 (a) 小題中，自變數 x 是趨向負無窮，需要注意正負號. (b) 小題中，為了使式子整理為多項式分式，分子分母同乘上了 $\sqrt{x^2+3}+x$. □

(3). 老大比較法之二：叉叉接旨刺 log

這裡我們給出一些特殊函數在 $x\to\infty$ 時的大小關係，它能幫助我們快速判斷極限結果：

結論 1.3 / 老大比較法之叉叉接旨刺 log

當 $x\to\infty$ 時，若 $a,b>1$、$p>0$，那麼我們有：

$$x^x \gg x! \gg a^x \gg x^p \gg \log_b x$$

註 其中 $x!$ 不是一個嚴謹的寫法，僅是為了表達方便. 階乘只適用於 x 是正整數的情況，若 $x\in\mathbb{R}$，那麼需要改寫為 Gamma 函數 $\Gamma(x)$，其在正整數點的函數值與階乘的關係為 $\Gamma(x+1)=x!$. □

例題 1.10 / 老大比較法之叉叉接旨刺 log[8]

Find the limit if it exists：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{4^x x}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n!}}$

[7]改編自 Joel R. Hass, et al., *University Calculus — Early Transcendentals in SI Units* (4 ed. p.126, 127) 2-6 exercises #33, #88

(a)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{4^x x} &= \lim_{x\to\infty} 4\cdot n^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty} 4\cdot a^{\log_a n^{\frac{1}{n}}}\\ &= \lim_{x\to\infty} 4\cdot a^{\frac{\log_a n}{n}} = 4\cdot a^{\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a n}{n}}\\ &= 4\cdot a^0 = 4\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n!}} &= \lim_{n\to\infty} a^{\log_a n^{\frac{1}{n!}}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{\log_a n}{n!}}\\ &= a^{\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n!}}\\ &= a^0 = 1\end{aligned}$$

註 在這兩小題之中，我們頻繁使用指對數的特性 $x = a^{\log_a x}$，其中的 $x \neq 0$. □

6. 一些重要的極限

過去我們都是直接計算函數的極限，但有時我們會遇到非常複雜的極限，比如 $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$，我們無法從過去的任何方法直接得到極限值. 或者甚至我們不知道函數的長相，只知道它的上下界函數，這時候我們就可以使用上下界函數來「夾」出極限值.

結論 1.4 / 夾擠定理 (Squeeze Theorem)

若在包含點 x_0 的一個開區間內的所有 x 滿足 $B_l(x) \leq f(x) \leq B_u(x)$，並且：

$$\lim_{x\to x_0} B_l(x) = \lim_{x\to x_0} B_u(x) = L$$

那麼有 $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

註 夾擠定理又被稱為三明治定理、逼近定理、迫斂定理、Sandwich Theorem、Pinching Theorem 等等. 該定理在趨向正負無窮時同樣適用. 請注意，該定理有兩個條件，使用該定理時務必說明清楚每個條件都成立. □

[8](a) 改編自 Joel R. Hass, et al., *University Calculus — Early Transcendentals in SI Units* (4 ed. p.523) 9-1 exercises #65

例題 1.11 / 夾擠定理[9]

It can be shown that the inequalities

$$1-\frac{x^2}{6}<\frac{x\sin x}{2-2\cos x}<1$$

hold for all values of x close to 0 (but $x\neq 0$). What does this tell you about:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2-2\cos x}$$

Give reasons for your answer.

Since $1-\dfrac{x^2}{6}<\dfrac{x\sin x}{2-2\cos x}<1$ and $\lim\limits_{x\to 0}1=\lim\limits_{x\to 0}1-\dfrac{x^2}{6}=1$.
Hence, by squeeze Theorem, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{2-2\cos x}=1$.

註 我們並不是直接計算該複雜函數的極限來得到極限值，而是通過計算上下兩個更為簡單的極限，並由夾擠定理得到該複雜函數的極限. □

(1). $\sin x/x$ 特論

我們來探討一個過去無法處理的極限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. 如果直接將 $x=0$ 代入，我們會得到 $\frac{0}{0}$ 這個不定式. 過去我們處理不定式的方法通常是透過約分來消去零因子，但這裡的分子 $\sin x$ 並不是多項式，我們無法直接提取出零因子 x. 因此我們考慮使用夾擠定理來求解這個極限.

要使用夾擠定理，我們需要找到兩個上下界函數 $B_l(x)$ 和 $B_u(x)$，使得在 0 附近的 x，不等式 $B_l(x)\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq B_u(x)$ 成立. 從圖 1.5之中我們可以觀察到，對於 $0<x<\frac{\pi}{2}$，我們有 $\sin x<x<\tan x$. 將此不等式同除以 $\sin x$，我們有 $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$. 取倒數後，即可得到上下界 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$.

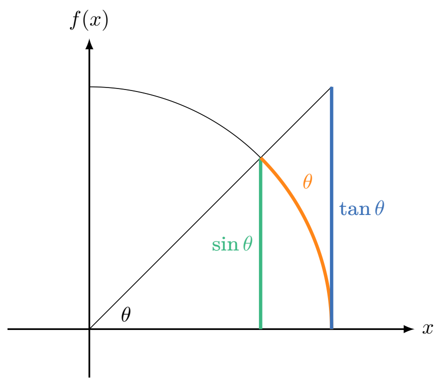


Figure 1.5: 在 $x\in[0,2\pi]$ 時，x, $\sin x$, $\tan x$ 之大小關係

要注意的是，剛剛使用的不等式只適用在 $0<x<\frac{\pi}{2}$，結論 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$ 只能用來說明右極限. 我們先分別計算上下界函數的右極限：$\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$ 和 $\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$. 根據夾擠定理，當上下界函數的極限都趨近於同一個值

[9]改編自 Joel R. Hass, et al., *University Calculus — Early Transcendentals in SI Units* (4 ed. p.85) 2-2 exercises #65

時，中間的函數極限也必須趨近於該值. 因此，我們有：$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$

相似的對於左極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}$，由於 $\sin x$ 與 x 皆是奇函數，有特性 $\sin -x = -\sin x$、$x=-(-x)$. 因此我們可以做變數變換 $t=-x$，即可將 $x\to 0^-$ 轉換為 $t\to 0^+$，那麼左極限即是 $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-\sin t}{-t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1.$

最後，由於左右極限都是 1，我們有 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

這個重要的極限告訴我們，當 x 非常接近 0 時，$\sin x$ 的值會近似於 x. 這個特性在工程上非常實用，當 x 很小時，我們經常會用更簡單的 x 來近似代替複雜的 $\sin x$.

與極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 類似地，有 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. 其相於前者就簡單許多，考慮到 $-1\le\sin x\le +1$，再同除以 x 得到 $\frac{-1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{+1}{x}$，使用夾擠定理後即可得到其在 $x\to\infty$ 的極限為 0. 因此我們有：

結論 1.5 / 有關 $\sin x/x$ 的極限結論

1 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

例題 1.12 / 有關 $\sin x/x$ 的極限

Find the limit if it exists:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin cx}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin cx}{x}=\lim_{x\to 0}c\cdot\frac{\sin cx}{cx}=c\cdot\lim_{cx\to 0}\frac{\sin cx}{cx}=c$$

(b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancelto{\sin^x}{1^2-\cos^2 x}}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\cancelto{1}{\frac{\sin x}{x}}\cdot\frac{\cancelto{0}{\sin x}}{\cancelto{2}{1+\cos x}}=1\cdot\frac{0}{2}=0$$

註 對於這類含有三角函數的極限問題，可以嘗試湊出 $\frac{\sin x}{x}$. □

(2). 歐拉數 e 特論

數學常數 e 的起源與複利計算密切相關. 複利是一種除了本金外，連同本金產生的利息也會一併計息的計算方式. 讓我們考慮一個簡單的情境：假設銀行年利率為 100%，存入 1 元本金，一年後將會得到 本金$(1+\text{利率})^{\text{週期}} = 1(1+1)^1 = 2$ 元. 但若是如果我們將計息週期縮短為每半年一次，利率隨之調整為 50%，那麼一年後，我們將會得到 $1(1+0.5)^2 = 2.25$ 元.

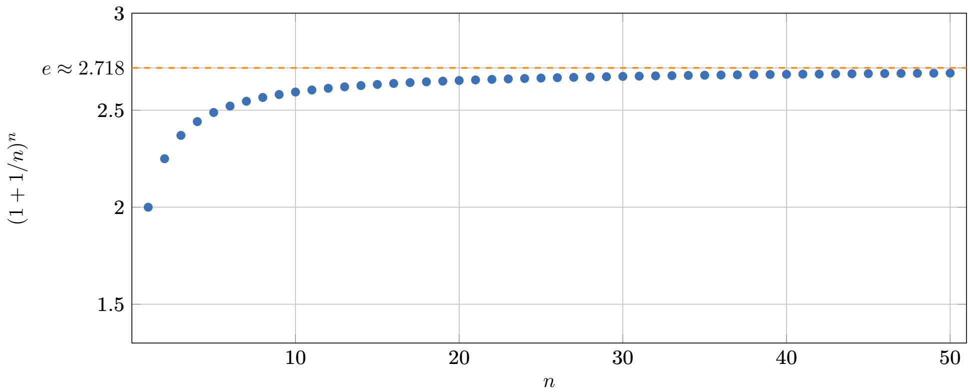


Figure 1.6: 計息次數 n 與本利和的關係：當計息次數趨向無窮時，本利和穩定於 $e \approx 2.718$

可以證明，當計息的次數越頻繁，一年後獲得的本利和就越多. 儘管這個本利和會持續遞增，但它並非無限增長，而是存在一個上限. 這個無限頻繁計息的極限收斂值，就是我們所定義的常數 e：

定義 1.3 / 歐拉數 e

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}$$

歐拉常數 e 在指對數的運算上有很好的性質，因此我們特別將以 e 為底數的指數函數寫成 $f(x) = e^x = \exp x$；將以 e 為底數的對數函數記為 $f(x) = \log_e x = \ln x$

歐拉常數 e 幫助我們解決許多形如 $(1+\text{無窮小})^{\text{無窮大}}$ 的極限，在許多學科中，只要見到「變化率與當下數值成正比」的連續變化過程，比如人口增長、放射性衰變、電容電感充放電，幾乎都能看到 e 的身影.

我們來看一些有關 e 的極限定義式問題：

例題 1.13 / 有關 e 的極限[10]

Find the limit if it exists:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$

(a)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} && \text{(對數運算特性)}\\ &= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) && \text{(極限運算特性)}\\ &= \ln e = 1 && (e\text{ 之定義})\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} &= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^{bx\cdot\frac{a}{x}} && \text{(指數湊齊 } x/a)\\ &= \lim_{n\to 0}\left((1+n)^{\frac{1}{n}}\right)^{ab} = e^{ab} && \left(\text{令 } n=\frac{a}{x}\to 0\right)\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-a}{2a}\right)}\right)^{x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-a}{2a}\right)}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right)^{2a}\cdot\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-a}{2a}\right)}\right)^{a}\\ &= e^{2a}\cdot(1+0)^{a} = e^{2a}\end{aligned}$$

註 關鍵在於需要湊出形式 $(1+■)^{■}$ 其中無限小的 ■ 與無限大的 ■ 要互為倒數，並需要注意極限是趨於 0 還是 $+\infty$，即可整理為 e 的定義式. □

習題

▶ **計算極限問題**

1. (師大微乙 (一)113#1) Find the limits. (Write ∞ or $-\infty$ where appropriate). Note that L'Hopital's Rule is forbidden. 計算以下函數的極限, 必要時請寫 ∞ 或 $-\infty$. 不可使用羅必達

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-5x+4}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3x^2+x+7}}{x}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin 2x|}{5x}$

[10] (c) 出自臺大 112 模組 01-04 班微積分 1 期考 #1.(b)

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+5x^2+9}{5x^3+x+1}$

(e) $\lim_{x\to -1} \frac{x^{10}-1}{x+1}$

(f) $\lim_{x\to 5^-} \frac{3x}{2x-10}$

2. (師大微乙 (一)112#1) Find the limit if it exists. Note that L’Hopital’s Rule is forbidden.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x + x\sin 4x}{\sin 2x \cdot \cos 3x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim_{x\to 5} \frac{\frac{x}{x-4}-5}{x-5}$

(d) $\lim_{x\to \left(-\frac{4}{3}\right)} \sin\left(2\tan^{-1}(x)\right)$

3. (師大微乙 (一)111#2) Find the limit if it exists.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3x + x^2}{\sin x \sin 2x}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{5x + 2\sin x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}} - \frac{1}{x}\right)$

4. (師大微乙 (一)110#2) Find the limit if it exists. Notice that L’Hôpital’s Rule is forbidden.

(a) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(3x)}$

(c) $\lim_{x\to -\infty} (x + \sqrt{x^2+3})$

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^6+2x^3+1}}{\sqrt{4x^4+3x+1}}$

5. (師大微乙 (一)109#4) Find the limit (極限).

(a) $\lim_{x\to -\infty} (2x + \sqrt{4x^2+1})$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}$

(c) $\lim_{\theta\to 0} \theta^2 \cot(7\theta)\csc(4\theta)$

(d) $\lim_{t\to 0} \ln\sqrt{(1+t)^{\frac{1}{3t}}}$

6. (師大微乙 (一)108#1) Find the limit.

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{e^{2x}-1}$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^3(2x) + x^4 \sin\frac{1}{x}}{x^3}$

   (c) $\lim_{x\to\infty} (2x^2+3x+1)\sin\left(\frac{1}{5x^2+4x+2}\right)$

7. (師大微乙 (一)107#1) Find the limit (極限).

   (a) $\lim_{\theta\to 0^+} \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\theta}\right)\sin^2\left(\frac{1}{\theta}\right)$

   (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3}}{1-x}$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{4-5x^{2/3}}{2x^{4/5}+3}$

   (d) $\lim_{z\to 0} \frac{5-5e^{2z}}{1-e^z}$

   (e) $\lim_{x\to 0} 6x\cot(3x)$

8. (師大微乙 (一)106 本部 #2) 計算下列極限值。

   (a) $\lim_{\theta\to 0} \theta\sin\left(\frac{1}{\theta}\right)$

   (b) $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{7x}-7}{7-x}$

   (c) $\lim_{t\to -\infty} \frac{5-4t^3}{3t^2+2}$

9. (師大微乙 (一)105 本部 #2) Find the limit.

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{5-2x^{3/2}}{3x^2-4}$

   (b) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

   (c) $\lim_{\theta\to 0} \theta^2\cos\left(\frac{1}{\theta}\right)$

   (d) $\lim_{t\to 0} \frac{1-e^{-t}}{e^t-1}$

10. (師大微乙 (一)104#1) Find the limit:

   (a) $\lim_{x\to 9} \frac{9x-x^2}{3-\sqrt{x}}$

   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4+2x-7}{2x^4-3x^3-x+6}$

(c) $\lim_{x\to\infty} e^{1/x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(3x)}{x\sin(5x)}$

(e) $\lim_{x\to 0^-}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)$

11. (師大微乙 (一)103#1)

(a) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+12}-\sqrt{x+5}) = ?$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{\sin(2x)\cos(3x)} = ?$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{4(x-\sin(x))}{x^3} = ?$

(d) If $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$, find $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-2}$ =?

► **尋找漸進線問題**

12. (師大微乙 (一)113#2) Find the horizontal and vertical asymptote of the function. 求以下函數的水平漸近線和垂直漸近線

$$f(x)=\frac{1}{x^2-9}+3$$

13. (師大微乙 (一)112#6) For the function $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-2x-3}$, find the vertical asymptotes(鉛直漸近線), oblique asymptotes(斜漸近線) for f.

14. (師大微乙 (一)111#8) Let $f(x)=\frac{2x^2+6}{x+1}$. Find all asymptotes(漸進線).

15. (師大微乙 (一)109#5) For $f(x)=\frac{2x^3-6x^2+4x}{x^2-1}$, describe the domain (定義域) of f, find the vertical asymptotes(鉛直漸近線), oblique asymptotes(斜漸近線) for f.

16. (師大微乙 (一)108#6) Let $f(x)=\frac{x}{(x-\sqrt{x^2+x})(x+1)}$. Find the domain(定義域) of the function f, find the vertical and horizontal asymptotes (水平及鉛直漸近線) of the graph of f.

17. (師大微乙 (一)107#4) For the real-valued function (實值函數) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$. Find the vertical asymptotes (垂直漸近線), slant asymptotes (斜漸近線) for f.

18. (師大微乙 (一)106 本部 #3) 對於實值函數 $f(x)=\frac{-x}{x^2-4}$, 找出上述函數圖形所有的水平漸近線、垂直漸近線 (或稱鉛直漸近線).

19. (師大微乙 (一)105 本部 #3) For $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-2}$. Find all horizontal asymptotes (水平漸近線), vertical asymptotes (垂直漸近線) for f.

20. (師大微乙 (一)104#2) Find the horizontal, vertical and slant asymptotes (水平、垂直和斜漸近線) of the graph of $f(x) = \dfrac{x^3-1}{2x^2-4}$.

21. (師大微乙 (一)103#4) Let $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$. Find horizontal asymptotes (水平漸近線), vertical asymptotes (垂直漸近線) and slant line asymptotes (斜漸近線) of $f(x)$.

▶ $\varepsilon - \delta$ **定義加分題**

22. (師大微乙 (一)112#8, Bonus) Use the $\varepsilon-\delta$ definition to show that $\lim\limits_{x\to2}(7-3x) = 1$.

23. (師大微乙 (一)110#9, Bonus)

    (a) State the definition of limit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

    (b) Prove that $\lim\limits_{x\to2}(3x+1) = 7$ by the definition of limit.

24. (師大微乙 (一)106#9, Bonus) 請利用極限的 $\varepsilon - \delta$ 定義證明

$$\lim_{x\to-1}(8-3x) = 11$$

25. (師大微乙 (一)105 本部 #9, Bonus) Use the $\varepsilon - \delta$ definition to show that

$$\lim_{x\to-2}(4x+5) = -3$$

26. (師大微乙 (一)104#6, Bonus) choose only one question from the following questions.

    (a) Show that $\lim\limits_{x\to3}(8-x) = 5$, using the precise definition, $\varepsilon - \delta$, of the limit.

    (b) Show that $e = \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Chapter 2
連續

1. 連續是什麼

在現實生活中，許多現象都是連續的，例如物體的運動軌跡或溫度的變化. 它們的數值不會有不規則的斷裂或跳躍，很方便我們研究或甚至預測它的軌跡. 對於函數而言，很直觀的，我們稱一個函數是「**連續 (Continuous)**」的，即是它的函數圖形是連續不間斷的、能一筆完成的. 但若是我們每討論一個函數的連續性都要畫出它的圖形，會顯得很繁瑣且沒有效率，或甚至有些函數圖形是無法繪製的. 因此我們需要像極限那樣，發展一套使用數學語言描述的分析方法. 我們不妨來透過不連續函數來觀察連續函數需要滿足哪些性質：

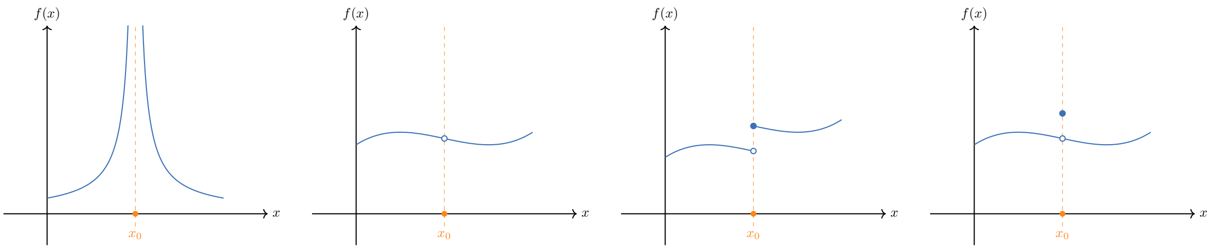


Figure 2.1: 不連續點的例子：其中第 2. 與第 4. 個函數的左右極限存在且相等，可以透過重新定義該點的函數值使函數在該點連續，這類不連續點被稱為可移除不連續點 (removable discontinuous point)；第 3. 個函數的左右極限存在但不相等，被稱為跳躍不連續點 (jump discontinuous point).

從圖形中我們觀察到，不連續的可能性有：

1. 極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 與函數值 $f(x_0)$ 皆不存在
2. 極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在但函數值 $f(x_0)$ 不存在
3. 極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在但函數值 $f(x_0)$ 存在
4. 極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 與函數值 $f(x_0)$ 不相等

因此我們定義：

定義 2.1 / 函數的連續性

給定函數 $f(x)$ 以及一點 $x_0 \in \text{Dom } f$，我們說「$f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續」等價於：

1. 極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在
2. 函數值 $f(x_0)$ 存在

3. 極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 與函數值 $f(x_0)$ 相等

當我們稱一個函數是連續函數時，指的是該函數在定義域上的所有點都連續，亦即：

$$\forall x_0 \in \text{Dom } f,\ \ f(x) \text{ is conti. at } x = x_0$$

註 「$f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續」常常簡寫為「$f(x)$ is conti. at $x = x_0$」. 並且我們經常定義集合 C^0 為所有連續函數所構成的集合，因此說一個函數是連續函數可以簡記為 $f \in C^0$. □

2. 連續函數的運算

與極限類似的，我們若是每遇到一個新的函數就重新以定義檢查一次它的連續性會非常沒有效率，並且很幸運的，過去學過的基本函數只有 $\tan x$、$\cot x$、$\sec x$、$\csc x$ 分別在 $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$、$x = k\pi$、$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$、$x = k\pi$ 點不連續. 其餘函數在其定義域上都是連續的. 因此，我們這裡主要探討連續函數經過運算後的連續性：

結論 2.1 / 連續運算定理

給定 $f(x)$、$g(x)$ 皆在 $x = x_0$ 連續，以及 $c \in \mathbb{R}$，我們有：

1. $c \cdot f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續
2. $f(x) + g(x)$ 在 $x = x_0$ 連續
3. $f(x) \cdot g(x)$ 在 $x = x_0$ 連續
4. $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x = x_0$ 連續, 若 $g(x) \neq 0$.

給定 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續、$g(x)$ 在 $x = f(x_0)$ 連續，我們有：

5. $g(f(x))$ 在 $x = x_0$ 連續.

註 前四點表示連續函數做四則運算後亦然是連續的；而最後一點是則表示連續函數合成後依然是連續的. □

例題 2.1 / 連續運算定理[1]

Find the point at which $f(x)$ is NOT continuous:

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-3x-10}$

(b) $f(x) = \dfrac{x+2}{\cos x}$

(c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 1-x & , x<0 \\ e^x & , 0 \le x \le 1 \\ x^2+2 & , x>1 \end{cases}$

(a) Since $x+3$ and $x^2-3x-10$ are conti. on $\mathbb{R}$, $f(x)$ is not conti. only at $x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow x=-2,\ 5$.

(b) Since $x+2$ and $\cos x$ are conti. on $\mathbb{R}$, $f(x)$ is not conti. only at $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

(c) Since $x^4+1>0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, we have $\sqrt{x^4+1}$ is conti. on $\mathbb{R}$. And $1+\sin^2 x \gneqq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, is also conti. on $\mathbb{R}$. Hence $f(x)$ is conti. on $\mathbb{R}$.

(d) 1° Since $1-x$, e^x, x^2+2 are conti. on $x<0$, $0<x<1$, $1<x$, respectively, it is sufficient to show its continuity at $x=0$ and $x=1$.

2° For $x=0$, since:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} 1-x = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} e^x = 1 \end{cases} \implies \lim_{x\to0} f(x) = 1$$

and $f(0) = e^x\Big|_{x=0} = 1 = \lim_{x\to0} f(x)$, $f(x)$ is conti. at $x=0$.

For $x=1$, since:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} e^x = e \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} x^2+2 = 3 \end{cases} \implies \lim_{x\to0} f(x) \text{ D.N.E.}$$

so $f(x)$ is NOT conti. at $x=1$.

3° By 1°, 2°, $f(x)$ is not conti. only at $x=1$.

註 要找不連續點，只需找到那些函數值無定義、極限不存在、極限值與函數值不相等的點即可. □

[1]改編自 Joel R. Hass, et al., *University Calculus — Early Transcendentals in SI Units* (4 ed. p.126) 2-6 exercises #16, #20, #24, #31

3. 一些有關連續函數的定理

結論 2.2 / 中間值定理 (Intermedia Value Theorem, I.V.T.)

給定 $f(x)$ 是一個在 $[a,b]$ 上的連續函數，對於任意介在 $f(a)$ 與 $f(b)$ 的實數 C，我們有：

$$\exists\ c \in [a,b] \text{ s.t. } f(c) = C$$

註 注意該定理需要是「閉區間」上的「連續函數」. 其中要求需要定義在閉區間上是為了保證 $f(a)$ 與 $f(b)$ 都可以取到值. 反之，若是我們考慮 $f(x) = 1/x$ 在 $(0,1)$，那麼左端點 $f(0)$ 將會沒有定義. 而要求連續函數則是為了對任意 C 都可以找到一個 c 使之對應，若不連續的話有可能會找不到 c 使得 $f(c) = C$. □

該定理對於目前階段而言，最有用的部分即是幫助我們尋找方程式 $f(x) = 0$ 的根. 根據中間值定理，我們只須找到 $f(x)$ 與 $f(b)$ 分別是一正一負的 (亦即 $f(a) \cdot f(b) < 0$，這表示 0 在 $f(x)$ 與 $f(b)$ 之間)，那麼就存在至少一個 $c \in [a,b]$，使得 $f(c) = C = 0$.

例題 2.2 / 中間值定理[2]

Show that the equation $2x^5 + 7x - 1 = 0$ has at least one real solution.

Since $f(-1) = -10$, $f(1) = 8$, by Intermedia Value Theorem, there exists a $c \in [-1,1]$ so that $-10 < f(c) = 0 < 8$. That is, $f(x)$ has at least one real root in $[-1,1]$.

註 這類題目常常不僅需要說明「至少存在一個根」，而是需要更進一步的說明「僅存在一個根」. 這時候就需要搭配上將在後面介紹的 Rolle's Thm 來說明解的唯一性. □

習題

1. 判斷下列函數在指定點是否連續，並說明原因.
   (a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ 在 $x = 0$
   (b) $g(x) = \frac{x+1}{x-3}$ 在 $x = 3$
   (c) $h(x) = \sqrt{x^2+4}$ 在 $x = 0$
   (d) $k(x) = \tan x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$
2. 找出下列函數的所有不連續點.
   (a) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

[2]改編自師大微乙 (一)105 本部 #5

(b) $g(x) = \tan x$

(c) $h(x) = \frac{1}{x^2-4}$

(d) $k(x) = \begin{cases} x+2 & ,x<0 \\ x^2 & ,x \geq 0 \end{cases}$

3. 確定參數 a 的值，使下列函數在 $\mathbb{R}$ 上連續.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2+a & ,x<1 \\ 3x-1 & ,x \geq 1 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & ,x \neq 0 \\ 5 & ,x = 0 \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} ax^2-1 & ,x \leq 2 \\ 2x+3 & ,x > 2 \end{cases}$

4. 判斷下列函數的連續區間.

(a) $f(x) = \sqrt{2x+6}$

(b) $g(x) = \ln(x^2-x-6)$

(c) $h(x) = \frac{x-1}{\cos x}$

5. 利用中間值定理說明下列方程式至少有一個實數解：

(a) $x^3+2x-1=0$

(b) $e^x = 3x$

(c) $\cos x = x$

6. 判斷函數 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ 在哪些點不連續. (Note: $\lfloor x \rfloor$ 為高斯符號，表示不超過 x 的最大整數)

7. 說明多項式函數 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 在 $\mathbb{R}$ 上連續. 其中 $n \in \mathbb{N}$.

8. 構造一個函數，它在 $x=1$ 處有可移除不連續點，在 $x=2$ 處有跳躍不連續點.

Chapter 3
微分

1. 導數與微分是什麼？

我們曾在 第 0.2 節：微積分實際上在做什麼？ (第3頁) 中提過，微積分的核心是如何處理微小的變化量，而我們在 第 1 章：極限 (第15頁) 嚴謹定義了「微小」的概念後，現在，我們將進一步探討這些微小變化量之間的關係.

對於一個以 x 為變數的函數 $f(x)$，描述它們之間微小變化量關係最直接的方式就是 x 與 $f(x)$ 變化的比例. 這個比例可以表示為 $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$，而其中的變化量 Δx 需要趨近於 0 時. 我們將其簡記為 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$，並稱其為 $f(x)$ 的**導函數 (Derivative)**. 而其中微小的變化量 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}f(x)$，則被稱為**微分 (Differential)**.

要注意的是，我們常常稱 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ 為 $f(x)$ 的「微分」其實是錯誤的說法. 微分 (Differential) 是變量的增量；導函數 (Derivative) 才是兩個變量之間的比率 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$；而把 $f(x)$ 變成 $f'(x)$ 的過程亦稱為微分 (Differentiate). 雖然正式名稱是如此稱呼，但口語上在沒有歧義的情況下我們依然習慣只講微分.

定義 3.1 / 導函數

給定函數 $f(x)$，其**導函數 (Derivative)** 定義為：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

特別地，在定義域上特定一點 x_0 的導函數值 $f'(x_0)$ 稱為 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的**導數**. 當極限 $f'(x_0)$ 存在，我們稱 $f(x)$ 在 $x = x_0$ **可微 (Differentiable)**. 並且，若 $f(x)$ 在其定義域上的每個點皆可微，那麼稱他是可微函數.

註 我們曾在 第 2 章：連續 (第41頁) 中介紹到所有連續函數的集合為 C^0，這其中的上標 0 即是表示沒有微分過的；也就是說，微分一次後為連續函數的函數所構成的集合為 C^1、微分兩次後為連續函數的函數所構成的集合為 C^2 等等，以此類推. 特別地，當函數 $f(x)$ 微分無窮多次後依然是連續函數時，我們稱他是光滑的 (smooth)，並記作 $f(x) \in C^\infty$. □

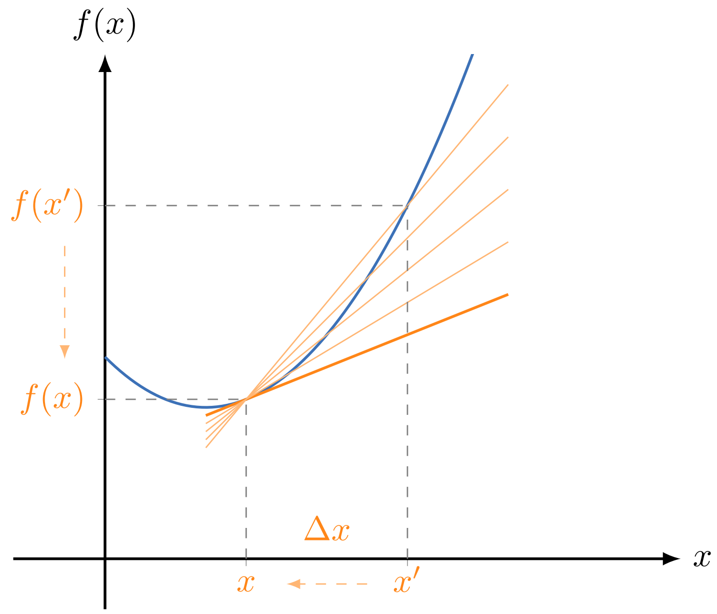


Figure 3.1: 導數在圖形上的意義：當變化量 Δx 趨近於零，亦即變數 x' 趨於固定的 x 時，變化率 $\Delta f(x)/\Delta x$ 將會越來越靠近函數 $f(x)$ 在 x 點的切線斜率.

例題 3.1 / 微分的極限定義式

Given a function $f(x)$ which is differeantiable at $x = 1$, with its derivative at $x = 1$ being $f'(1) = 2$. Find the following limits.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+4h) - f(1-7h)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(1+4h) - f(1-7h)}{h} \\
=&\lim_{h\to 0} \frac{[f(1+4h) - f(1)] - [f(1-7h) - f(1)]}{h} \\
=&\lim_{h\to 0} 4 \cdot \frac{f(1+4h) - f(1)}{4h} - (-7) \cdot \frac{f(1-7h) - f(1)}{-7h} \\
=&4 \cdot \lim_{4h\to 0} \frac{f(1+4h) - f(1)}{4h} + 7 \cdot \lim_{7h\to 0} \frac{f(1-7h) - f(1)}{-7h} \\
=&4 \cdot f'(1) + 7 \cdot f'(1) \\
=&11 \cdot f'(1) = 11 \cdot 2 = 22
\end{aligned}$$

註 我們只要湊出相同的變化量就可以使用微分的定義式. □

(1). 可微與連續的關係

既然導函數是由極限定義的，那麼可微自然會要求該極限的左極限與右極限相同，亦即，不論從哪個方向看，該點的變化率都相同. 那我們不禁會想，什麼時候一定可微

呢？是連續一定可微嗎？我們不妨來看一個例子：$f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 這個點. 首先，該點的極限存在且極限值為零，函數值也為零，因此 $f(x)$ 在該點連續. 那它在該點可微嗎？不然. 從 $x = 0^-$ 看，它是一條負變化率的直線，但從 $x = 0^+$ 觀察，它卻是一條正變化率的直線. 左右的變化率不同，因此它在該點不可微. 總而言之，我們找到了一個反例來說明「**連續** $\not\Rightarrow$ **可微**」.

反過來講，可微一定連續嗎？直觀來看似乎確實是如此，可微就保證了函數一定是連續變化的，不過我們依然要使用定義一步步說明清楚. 給定函數 $f(x)$，若它在定義域上的一點 $x = x_0$ 可微，即代表以下極限存在：

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

那麼當我們考慮極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 與函數值 $f(x_0)$ 的差：

$$\begin{aligned}\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) - f(x_0) &= \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot (x - x_0) \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} x - x_0 \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

也就是我們得到了：

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) - f(x_0) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

極限值與函數值相等，符合了連續的定義. 因此我們得到：若函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可微，那麼函數 $f(x)$ 就在 $x = x_0$ 連續. 簡言之，我們有「**可微** $\Rightarrow$ **連續**」.

(2). 有關導數與微分的符號

高中常見的微分符號 $f'(x)$ 是來自英國的牛頓 (Isaac Newton) 使用與推廣的，牛頓使用 $f'(x)$ 來表示函數 $f(x)$ 對 x 的微分. 但他使用的符號系統並沒有表明微分的對象，例如若是遇到多變數函數 $f(x, y)$，直接寫 $f'(x, y)$ 將無法分辨是對變數 x 微分或是變數 y 微分；並且對於高階微分 $f''(x)$、$f'''(x)$、$f^{(4)}(x)$ 也顯得雜亂許多.

一套較完善的符號系統則是德國數學家萊布尼茲 (Gottfried Leibniz) 所使用的，其簡潔的明確定義了微分的變數對象、微分次數. 首先，他的符號系統直觀上就呈現了導數是表示變化率，即兩個變化量的比值. 他使用 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 來表示函數 $f(x)$ 對 x 的微

分，類似地，對於其他變數 s、t 微分即表示為 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}s}$、$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}t}$. 而對於高階微分而言，其符號系統亦直觀易懂. 比如二階微分，即是對一階微分再微分一次，寫作：

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)$$

依此類推，要表示函數 $f(x)$ 對變數 x 微分 n 次即表示為：

$$\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x)$$

而最後一套符號系統是來自瑞士數學家歐拉 (Leonhard Euler)，他的符號系統則結合了牛頓與萊布尼茲的優點，他使用微分算子 $Df(x)$ 來表示函數 $f(x)$ 對變數 x 的微分. 高階微分表示成 $D(Df(x))=D^2f(x)$；對於多變數函數 $f(x,y)$ 而言，則會使用下標來表示微分的對象，例如 $D_x^2 f(x,y)$ 是表示函數 $f(x,y)$ 對變數 x 微分兩次.

一般來說，牛頓的符號 $f'(x)$ 非常簡潔，但在處理多變數或高階微分時容易資訊不足，因此通常僅在單變數函數微分時使用；萊布尼茲的符號 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 直觀且明確，清晰地表達了微分量之間的關係，讓我們能輕易理解變化率的概念；最後，歐拉的符號 $Df(x)$ 則是結合兩者的優點，引入算子的概念，使得函數的操作和高階微分的表示更為方便和系統化.

註 萊布尼茲符號 $\mathrm{d}x$ 前面的 d 作為明確的運算符號，應如同 $\sin x$、$\ln x$ 等寫作正體的「d」而非斜體的「d」. 只有當其為未知、未被明確定義、變數時，才會寫作斜體. □

2. 常見函數的微分

就像過去學習極限與連續性一樣，我們將從熟悉基本函數的微分開始，接著分析微分如何影響各種運算. 掌握這些後，我們便能靈活組合運用，解決各種複雜函數的微分問題. 要探討這些常見函數的微分，我們只能從微分的定義式下手.

比如我們先從簡單的常數函數 $f(x)=c$ 下手. 首先，直觀來看，該函數的函數值 $f(x)$ 隨著變數 x 的改變並沒有任何的變化，因此該函數的導函數應該要是 $f'(x)=0$. 我們實際從定義式驗證看看：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

這與我們猜測的結果相同，由於常數函數沒有任何變化，因此表示其變化率的導函數為 0 函數.

另一個能夠直觀上判斷出變化率的函數是線形函數 $f(x)=ax+b$，每當 x 增加一個單位，函數值 $f(x)$ 就會增加 a 個單位，因此該函數的導函數值應該要是固定的常數

值 $f'(x) = a$. 我們同樣由定義驗證看看：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a(x+\Delta x)+b) - ax + b}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{ax} + a\Delta x \cancel{+b} \cancel{-ax} \cancel{-b}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a \end{aligned}$$

結果證實了表示線形函數變化率的導函數為常數 a.

對於其他基本函數，如冪函數 x^p、指數函數 a^x、三角函數 $\sin x$、$\cos x$ 等等都應該由定義式推導出它們各自的導函數. 但同樣的，對於師大微乙的學生而言，我們比較要求有能力計算與使用這些結論. 因此，我們這裡給出一些基本函數的導函數：

結論 3.1 / 基本函數微分

由導函數的定義，我們有：

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^p = px^{p-1}$, $\forall p \in \mathbb{R}$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = \ln a \cdot a^x$, $\forall a \neq 0$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x$

註 特別地，當 (1) 中的 p 為 0 時，x^p 即是常數 1；當 (2) 中的 $a = e$ 時，引出了 $(e^x)' = e^x$. 對於其他常見函數如 $\log_a x$、$\tan x$、$\cot x$、$\sec x$、$\csc x$ 與反三角函數，它們都可以表達為 a^x、$\sin x$、$\cos x$ 的反函數或運算結果. 因此我們可以通過這三個函數的導函數，再配合上後續將介紹的運算定理得出這些函數的導函數. □

例題 3.2 / 一個陷阱

Given a function $f(x)$, its behavior is often described by its derivative. Consider the following scenario. Assume a function $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}$. A common initial thought might be to directly apply the standard derivative rule for trigonometric functions, namely $\sin' x = \cos x$. However, a closer look may reveal a subtlety. While its derivative appears to be $f'(x) = \cos \frac{\pi}{2}$, it is worthwhile to explore the nature of $f(x)$ in more depth.

Now, with this in mind, consider a similar function $g(x) = \sin \frac{\pi}{4}$, what is the derivative of $g(x)$?

(a) $\cos\dfrac{\pi}{4}$

(b) $\cos\dfrac{\pi}{2}$

(c) $\dfrac{\pi}{4}$

(d) $\dfrac{\pi}{2}$

The reason why the derivative of a given function $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}$ is $f'(x) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ is not because of the differential law $\sin' x = \cos x$, but because the function $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}$ is a constant function, and its derivative 0 is exactly equal to $\cos\frac{\pi}{2}$. Therefore, for the function $g(x) = \sin\frac{\pi}{4}$, which is also a constant function, its derivative is still $0 = \cos\frac{\pi}{2}$. Hence, option (b) is the correct answer.

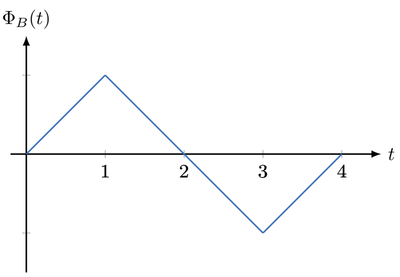
註 要注意，並非所有看似包含變數的函數都真正依賴於該變數，當函數值對於變數沒有任何變化時，表示其變化率的導函數皆為零. □

例題 3.3 / 電磁學上的應用[1]

Lenz's Law is a fundamental principle in electromagnetism that describes the phenomenon of electromagnetic induction. It states that when the magnetic flux $\Phi_B(t)$ through a closed loop changes, an induced current $I_{\text{ind}}(t)$ is generated in the coil. The magnetic field produced by this induced current will oppose (or resist) the change in the original magnetic flux. This relationship is precisely given by the following equation:

$$I_{\text{ind}}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B(t)$$

If the magnetic flux $\Phi_B(t)$ as a function of time is shown in the graph on the right, try to sketch the graph of the induced current $I_{\text{ind}}(t)$ as a function of time.

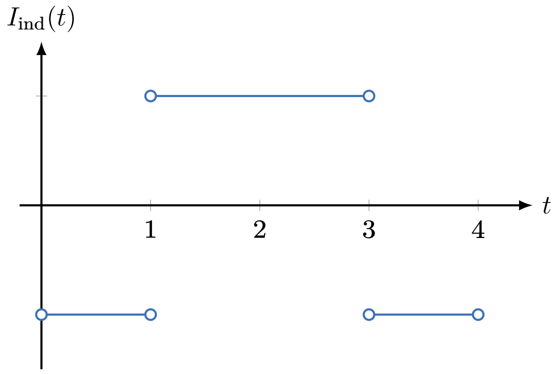


1° For $t \in (0,1)$, $\Phi_B(t)$ increases with t, meaning the rate of change $\dfrac{d}{dt}\Phi_B(t)$ is positive. Therefore , the induced current $I_{\text{ind}}(t) = -\dfrac{d}{dt}\Phi_B(t)$ will be negative constant on $t \in (0,1)$.

2° For $t \in (1,3)$, $\Phi_B(t)$ decreases with t, meaning $\dfrac{d}{dt}\Phi_B(t)$ is negative. So the induced current $I_{\text{ind}}(t)$ will be positive constant on $t \in (1,3)$.

3° For $t \in (3,4)$, $\Phi_B(t)$ increases with t, meaning $\dfrac{d}{dt}\Phi_B(t)$ is positive. So the induced current $I_{\text{ind}}(t)$ will be negative constant on $t \in (3,4)$.

4° By 1°, 2°, 3°, The sketch of the induced current $I_{\text{ind}}(t)$ as a function of time is shown below.



註 要記住，導函數是表達函數的變化率的，「切線斜率」只是一個片面的說法. 特別來說，該題的 $\Phi_B(t)$ 在 $t = 0, 1, 3, 4$ 都是不可微的，因此導函數在這些點都沒有定義. □

3. 微分運算定理與反函數微分

在前一個小節，我們已經探討了冪函數 x^p、指數函數 a^x、以及三角函數 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的導函數. 這些基本的導函數，結合微分的運算定理，能幫助我們推導出更多複雜函數的導函數.

舉例來說，我們知道正切函數 $\tan x = \sin x / \cos x$. 既然我們已經知道 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的導函數，我們若是瞭解了微分對於除法的特性，那麼我們就可以輕易的得出 $\tan x$ 的導函數.

我們先從試看看微分對函數加法與係數積有什麼影響，當然這一切依然要回歸到定義下手. 由定義，我們知道函數 $(\alpha f + \beta g)(x)$ 的導函數是：

$$\begin{aligned}
(\alpha f + \beta g)'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x + \Delta x) - (\alpha f + \beta g)(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot f(x + \Delta x) + \beta \cdot g(x + \Delta x) - \alpha \cdot f(x) - \beta \cdot g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\alpha \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \beta \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \alpha \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \beta \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \alpha \cdot f'(x) + \beta \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

也就是我們得到了 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \beta \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)$，亦即微分對於函數加法與

[1]改編自統測 103 學年度電機電子群電機類專業科目二 #1

係數積是可以「拆開」的，我們稱之為是線性的 (Linear). 我們在上個小節只知道冪函數 x^p 的導函數是 px^{p-1}，但配合上微分的線性性質我們就可以得知任意多項式的導函數：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x^5-3x^2\right) &= 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^5\right)+(-3)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right) && \text{(線性性質)}\\ &= 2\left(5x^4\right)+(-3)\left(2x^1\right) && \text{(冪函數微分)}\\ &= 10x^4-6x && \text{(合併)}\end{aligned}$$

對於乘法、除法、函數的複合，都需要由微分定義推導一次，但同樣的，這裡直接給出結論：

結論 3.2 / 微分運算定理

給定 $f(x)$、$g(x)$ 在 $x=x_0$ 可微，我們有：

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c\cdot f)(x_0)=c\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x_0))$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g)(x_0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x_0))+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x_0))$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f\cdot g)(x_0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x_0))\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x_0))$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0)=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x_0))\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x_0))}{g^2(x_0)}$

給定 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微、$g(x)$ 在 $x=f(x_0)$ 可微，我們有：

5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g\circ f)(x_0)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(f(x_0))=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f(x_0)}g(f(x_0))\cdot\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x_0)$

註 前兩點表示微分對於係數積與加法可以直接拆開，但三四點則表示對於乘法與除法並不能直接「拆開」($(fg)'\neq f'\cdot g'$)；最後一點是微分對於複合運算的特性，其表明對於複合函數的微分需要「一層一層」微進去. 因此它又被稱為**連鎖率** (Chain Rule). □

有了這些運算規則，我們就可以搭配 $\sin x$、$\cos x$ 的導函數來推論出 $\tan x$、$\cot x$、$\sec x$、$\csc x$ 的導函數. 比如，由三角函數的關係我們知道 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，再由運算定理中的第 (4) 條有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\overbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}^{1}}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

同樣，對於 $\cot x$、$\sec x$、$\csc x$，有 $\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$、$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$、$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，由

運算定理中的第 (4) 條即可得到它們的導函數分別是：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x = -\csc^2 x$、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x = \sec x \tan x$、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc x = -\csc x \cot x$. 當然，它也可以用來處理更一般的問題：

例題 3.4 / 微分運算定理之一[2]

Find the first derivative with respect to x:

(a) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+2e^x$

(b) $(2x+3)\cdot(5x^2-4x)$

(c) $\dfrac{2x+5}{3x-2}$

(a)
$$\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2e^x\right)' = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = \frac{1}{3}(3x^2)+\frac{1}{2}(2x)+2(e^x) = x^2+x+2e^x$$

(b)
$$\begin{aligned}((2x+3)\cdot(5x^2-4x))' &= (2x+3)'\cdot(5x^2-4x)+(2x+3)\cdot(5x^2-4x)' \\ &= (2)\cdot(5x^2-4x)+(2x+3)\cdot(10x-4) \\ &= (10x^2-8x)+(20x^2+22x-12) \\ &= 30x^2+14x-12\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\left(\frac{2x+5}{3x-2}\right)' &= \frac{(2x+5)'(3x-2)-(2x+5)(3x-2)'}{(3x-2)^2} \\ &= \frac{(2)\cdot(3x-2)-(2x+5)\cdot(3)}{(3x-2)^2} \\ &= \frac{-12}{(3x-2)^2}\end{aligned}$$

註 與極限四則運算類似的，需要知道每一步、每一個等號用了哪一個規則，不能僅依靠「感覺」來運算. □

例題 3.5 / 微分運算定理之二[3]

Find the first derivative with respect to x:

(a) $(2x+1)^5$

(b) $e^{\cos^2(\pi x-1)}$

[2]改編自 Joel R. Hass, et al., *University Calculus — Early Transcendentals in SI Units* (4 ed. p.155) 3-3 exercises #6, #14, #17

(a)
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1)^5 &= 5(2x+1)^4\cdot(2x+1)'\\ &= 10(2x+1)^4\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{\cos^2(\pi x-1)} &= e^{\cos^2(\pi x-1)}\cdot\left(\cos^2(\pi x-1)\right)'\\ &= e^{\cos^2(\pi x-1)}\cdot(2\cos(\pi x-1)\cdot(\cos(\pi x-1))')\\ &= e^{\cos^2(\pi x-1)}\cdot(2\cos(\pi x-1)\cdot(-\sin(\pi x-1)\cdot(\pi x-1)'))\\ &= e^{\cos^2(\pi x-1)}\cdot(2\cos(\pi x-1)\cdot(-\sin(\pi x-1)\cdot(\pi)))\\ &= -2\pi\cdot e^{\cos^2(\pi x-1)}\cdot\cos(\pi x-1)\cdot\sin(\pi x-1)\end{aligned}$$

註 要對複合函數形如 ■(■(x)) 微分，需要先不動內層的 ■(x)、先微外面的 ■′(■(x)) 後，再乘上內層的微分 ■′(x)，最後得到 ■′(■(x)) · ■′(x). 當然，若遇到更多層的複合函數，就需要一層一層微進去.

若是使用萊布尼茲符號系統來看，即 $\dfrac{\mathrm{d}■}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}■}{\mathrm{d}■}\cdot\dfrac{\mathrm{d}■}{\mathrm{d}x}$，可以簡單記為等號右側分子分母的 d■ 互相「抵消」了. □

例題 3.6 / 微分運算定理之絕對值微分

Use $|x|^2=x^2$ and chain rule to show that：

(a) $(|x|)'=\dfrac{x}{|x|}$　　(b) $(|f(x)|)'=\dfrac{f(x)}{|f(x)|}\cdot f'(x)$

We can derive the derivative of $|x|$ by first observing the identity $|x|^2=x^2$. Differentiating both sides with respect to x, we obtain:

$$\begin{aligned} & |x|^2 = x^2\\ \Rightarrow\quad & 2|x|\cdot|x|' = 2x\\ \Rightarrow\quad & |x|' = \frac{x}{|x|}\end{aligned}$$

Extending this, the derivative of $|f(x)|$ can be found by applying the chain rule:

$$(|f(x)|)'=\frac{f(x)}{|f(x)|}\cdot f'(x)$$

[3]改編自 Joel R. Hass, et al., *University Calculus — Early Transcendentals in SI Units* (4 ed. p.177) 3-6 exercises #9, #57

反函數微分

若函數 f 是將變數 x 映射到 y（表示為 $x \longmapsto y$），那麼它的反函數 f^{-1} 則是把 y 當作輸入變數，反過來映射變成 $y \longmapsto x$，也就是說，它將 x 表示成 y 的函數 $f^{-1}(y)$. 那麼我們就有：

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

同時兩邊對 x 微分得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(f^{-1}(x)) = 1$$

等號左邊運用連鎖率：

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = 1$$

移項後我們就得到了反函數的微分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

因此可以給出以下結論：

結論 3.3 / 反函數微分定理

給定函數 f，若其導函數存在且不為零，那麼其反函數 f^{-1} 存在，並且：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

其中 $y = f(x)$.

註 用萊布尼茲符號可以簡單的記為 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$. 這個式子的意義非常直觀，即反函數微分是原函數微分的倒數. 不過，使用這個式子有一個重要的前提，那就是原函數的導數 $f'(x)$ 不能為零. 如果 $f'(x)$ 等於零，那麼反函數的導數就會是無限大，這表示在該點上反函數的圖形會有一條垂直的切線. □

例題 3.7 / 反函數微分定理[4]

Given a function $f(x) = x^2$ defined on $x > 0$, find $(f^{-1})'(4)$. More generally, find $(f^{-1})'(x)$.

Since $f(2) = 4$, which implies that $(f^{-1})(4) = 2$. By inverse function rule, we have:

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$=\frac{1}{4}$$

Moreover, for each $x > 0$, $(f^{-1})(x) = \sqrt{x}$, thus:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) =& \frac{1}{f'(\sqrt{x})} \\ =& \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

註 注意等號右側分母中 $f'(2)$ 代的值與欲求的 $(f^{-1})'(4)$ 中的「4」不同，而是要帶 4 的經由反函數對應回去的 2. 這類題目經常配合要求需要說明該函數可逆，即需要說明它是 $1-1$ 的. 這時就需要說明其定義域中任意的 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$，或是反過來說明 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. □

有了該定理我們就可以擴充一些基本函數的導函數. 我們過去知道指數函數 a^x 的導函數是 $\ln x \cdot a^x$，由於對數函數 $\log_a x$ 即是 a^x 的反函數，我們就可以運用反函數微分定理得到：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_a x &= \frac{1}{\ln a \cdot a^{\log_a x}} \\ &= \frac{1}{\ln a \cdot x}\end{aligned}$$

同樣，我們可以得到反三角函數們的導函數，以 $\arcsin x$ 為例，由於他是 $\sin x$ 的反函數，並且 $\sin'(x) = \cos x$，由反函數微分定理有：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

其餘反三角函數的導函數分別為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

我們由微分定義得到冪函數 x^p、指數函數 a^x、兩個三角函數 $\sin x$、$\cos x$ 的導函數，並使用運算定理推論出對數函數 $\log_a x$、其餘四個三角函數 $\tan x$、$\cot x$、$\sec x$、$\csc x$ 以及六個反三角函數的導函數. 至此，我們已經學會所有基本函數的導函數，以及函數運算對微分的規則.

[4]改編自 Joel R. Hass, et al., *University Calculus — Early Transcendentals in SI Units* (4 ed. p.187) 3.8 example 1

常數函數與冪函數

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^p) = p \cdot x^{p-1}$$

絕對值函數

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{x}{|x|} \ (\text{for } x \neq 0) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|f(x)|) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \cdot f'(x) \ (\text{for } f(x) \neq 0)$$

指對數函數

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \ln a \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

三角函數

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

反三角函數

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{arccot}\ x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{arcsec}\ x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{arccsc}\ x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Table 3.1: 常見函數與其導函數

4. 隱函數與隱函數微分

在過去的學習中，我們習慣處理的函數通常是「**顯函數 (Explicit Function)**」，它們的形式為 $y = f(x) = \cdots$(一些只包含變數 x 的項)$\cdots$，其中 y 能夠明確地被 x 唯一決定. 然而，在許多實際問題裡，變量之間的關係可能更為複雜，無法簡單地用 $y = f(x)$ 來表達，例如描述單位圓的方程 $x^2 + y^2 = 1$. 此時，我們便稱變量 x 與 y 之間的這種關係為「**隱函數 (Implicit Function)**」. 它仍然蘊含了 x 與 y 的對應關係.

許多隱函數關係中，一個 x 值可能對應多個 y 值. 如果我們堅持將其寫成顯函數，就必須把它拆解成數個不同的函數，這無疑會增加我們處理問題的難度. 你可能會問：隱函數既然「不一定是唯一對應的」，這與函數「一個輸入對應唯一輸出」的定義豈不衝突？儘管如此，我們仍稱之為「函數」，是從局部 (locally) 的角度來看的. 也就是說，在滿足特定條件的情況下，於該關係曲線的某個點附近、某個區域內，這個隱函數可以簡化為一個顯函數.

因此，當我們談論「隱函數」時，通常指的是一個包含多個變量的方程，例如 $f(x, y) = 0$. 這個方程在特定的區域或條件下，能夠隱含地定義一個或多個函數關係. 它提供了一種更廣泛、更靈活的方式來描述變量之間的關聯，尤其在變量之間存在複雜且多值的聯繫時，隱函數的概念顯得尤為重要.

我們來試著找到一個簡單隱函數 $y^2 = x$ 的導函數 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 當然，我們在微分的時候需要把 y 當作 x 的變數，並以此正確地使用鏈鎖律 (Chain Rule)，即可得到無誤的結果：

$$
\begin{aligned}
& y^2 = x \\
\Rightarrow \quad & 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 && \text{(兩邊對 } x \text{ 微分並使用鏈鎖律)} \\
\Rightarrow \quad & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} && \text{(移項整理)}
\end{aligned}
$$

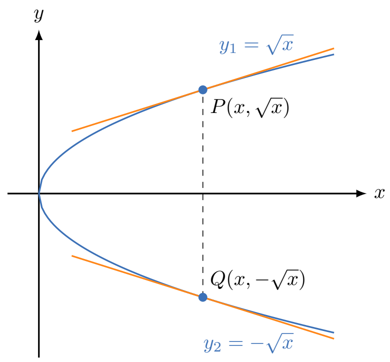


Figure 3.2: 隱函數 $f(x, y) = y^2 - x = 0$ 的圖形：隱函數 $y^2 = x$ 可以被拆解為上半 $y_1 = f(x) = +\sqrt{x}$ 與下半 $y_2 = f(x) = -\sqrt{x}$ 兩個顯函數. 但它們的導函數都可以寫成 $1/(2y)$.

這與我們過去遇過的導函數都不相同，過去的導函數通常只依賴於 x 這個變數，但我們這裡的隱函數 $y^2 = x$ 的導函數 $\frac{1}{2y}$ 卻包含了 y. 這正是因為我們原先的隱函數並非傳統的、一個輸入對應唯一輸出的函數，其「切線斜率」自然會同時被 x 與 y 的值所共同決定. 換句話說，給定一個 x 值，可能有多個 y 值與之對應，而每個 (x, y) 點的變化率 (即切線斜率) 也可能不同.

然而，當我們限縮範圍，只考慮該拋物線的上半部分，即 $y_1 = f_1(x) = \sqrt{x}$ 時，其導函數為 $y_1' = f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$，這確實可以寫成一個只依賴於 x 的顯函數形式. 同樣地，對於下半部分的 $y_2 = f_2(x) = -\sqrt{x}$，其導函數為 $y_2' = f_2'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$. 實際上，隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 正是保證了這一點：當隱函數關係在某個點 (x_0, y_0) 附近滿足特定條件時，即使整體上不是顯函數，但在這個點的附近，我們可以將 y 視為 x 的一個可微分函數 $y = f(x)$，這允許我們計算其導數，而這個導數自然會包含點 (x, y) 的資訊.

例題 3.8 / 隱函數微分[5]

Find the derivative $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ of following equation at the given point.

(a) $x^2 + \sqrt{xy} + y^2 = 72$ at $(x_0, y_0) = (2, 8)$

(b) $x^3 + ye^x + y^3 = 2$ at $(x_0, y_0) = (0, 1)$

For $x^2 + \sqrt{xy} + y^2 = 72$ at $(x_0, y_0) = (2, 8)$:

$$x^2 + \sqrt{xy} + y^2 = 72$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad 2x + \frac{1}{2\sqrt{xy}}(1y + xy') + 2yy' = 0 && \text{(兩邊對 } x \text{ 微分)}\\
&\Rightarrow \quad y' = \frac{-2x - \frac{y}{2\sqrt{xy}}}{\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 2y} && \text{(移項整理)}\\
&\Rightarrow \quad y'\Big|_{(x_0,y_0)=(2,8)} = \frac{-4}{13} && \text{(代入 } (x_0,y_0)=(2,8))
\end{aligned}
$$

For $x^3 + ye^x + y^3 = 2$ at $(x_0, y_0) = (0, 1)$:

$$
\begin{aligned}
&x^3 + ye^x + y^3 = 2\\
\Rightarrow\quad & 3x^2 + y'e^x + ye^x + 3y^2y' = 0 && \text{(兩邊對 } x \text{ 微分)}\\
\Rightarrow\quad & y' = \frac{-3x^2 - ye^x}{e^x + 3y^2} && \text{(移項整理)}\\
\Rightarrow\quad & y'\Big|_{(x_0,y_0)=(0,1)} = \frac{-1}{4} && \text{(代入 } (x_0,y_0)=(0,1))
\end{aligned}
$$

註 計算過程皆與過去的微分運算相同，遇到 y 時需要記得使用 chain rule. 這類題目經常求給定點的是切線方程式，而我們已經計算完切線斜率，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，配合上點 (x_0, y_0) 即可得到切線方程式. □

習題

▶ **判斷連續或可微與計算導函數問題**

1. (師大微乙 (一)113#3) Find the derivatives of the following functions dy/dx. 計算以下函數的微分.
   (a) $y = \dfrac{e^{2x}}{4x-3}$
   (b) $y = \sqrt{2x^3 - 5x}$
   (c) $y = (\sec x)^3$
   (d) $y = \arctan|x|, \quad x \neq 0$
   (e) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}}, \quad x > 3$
   (f) $y = \log_5 x^2$

[5]改編自師大微乙 105 分部 #4、師大微乙 110 #5

2. (師大微乙 (一)113#4) Use implicit differentiation to find dy/dx. 使用隱函數微分計算 dy/dx.

$$x^3 + y^3 = \sin(xy)$$

3. (師大微乙 (一)112#2) Find the derivatives $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

   (a) $y = \left(3x^2 - 2x + 1\right) e^{x^2}$

   (b) $y = \sin(\cos(2x+3))$

   (c) $y = \dfrac{\sqrt{(x^2+1)(x-1)}}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{(x+1)^3} \cdot \sqrt[5]{(x+2)^5}}$ (Hint: Use logarithmic differentiation.)

4. (師大微乙 (一)112#7) Let $f(x) = x\cos x$, find $f^{(112)}(x)$.

5. (師大微乙 (一)111#3) Find the derivatives $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

   (a) $y = \sec^{-1}\left(\sqrt{x^2+4}\right) + \cot(3x)$

   (b) $y = \ln\left(e^{2x} + e^{\sin 3x}\right)$

   (c) $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}, \quad x > 0$

6. (師大微乙 (一)111#9) Let $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

   (a) Use the definition of continuity to show that f is continuous at $x = 0$.

   (b) Is f differentiable at $x = 0$? Explain it.

7. (師大微乙 (一)110#3)

   (a) Write the definition of the derivative $f'(x_0)$ of a function f at a point x_0.

   (b) Show that $f(x) = |x|$ is continuous but not differentiable at $x_0 = 0$.

8. (師大微乙 (一)110#3) Finding the derivative $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

   (a) $y = (\sin x)^{\cos x}$

   (b) $y = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$

   (c) $y = \arctan\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2(x^2+4)}$

9. (師大微乙 (一)110#4) Finding the derivative $\dfrac{dy}{dx}$. (15 pts)

   (a) $y = (\sin x)^{\cos x}$

   (b) $y = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$

(c) $y = \arctan \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2(x^2+4)}$

10. (師大微乙 (一)109#2) Let $f(x) = x\cos(1/x)$ for $x \neq 0$.

    (a) Show that f has a removable discontinuity (可移除不連續點) at $x = 0$.

    (b) Is f differentiable (可微分) at $x = 0$ when $f(0)$ is defined as in the part (a)? Give your reasons.

11. (師大微乙 (一)108#2) Find the derivatives $\frac{dy}{dx}$：

    (a) $y = \ln(2x + \sqrt{x+1}), \quad x > 0$

    (b) $y = \cos(\arctan e^{3x})$

    (c) $y = x^{2/x}, \quad x > 0$

12. (師大微乙 (一)107#5) Consider the real-valued function f defined by:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if } -1 \leq x < 0 \text{ or } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

    (a) Is f continuous (連續) on the closed interval $[-1, 1]$? Give your reasons.

    (b) Find the first derivative (一階導函數) of f for $-1 < x < 0$ or $0 < x < 1$.

    (c) Is f differentiable (可微分) at $x = 0$? Give your reasons.

13. (師大微乙 (一)106 本部 #4) 假設一實值函數 h 定義為

$$h(x) = \begin{cases} x\arctan\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

    (a) 函數 h 是否在 $x = 0$ 處可微分？若是，請求出 $h'(0)$.

    (b) 計算函數 h 在 $x \neq 0$ 處的一階導數.

14. (師大微乙 (一)106 本部 #5) 對於函數 $f(x) = 4 - \dfrac{3}{x}$, 試求一實數 $c \in (1, 3)$ 滿足

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}.$$

15. (師大微乙 (一)106 本部 #8) 試求一實數 k, 使得 $x = 0$ 為下列函數 g 的一個可移除不連續點.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan(kx)}{6x}, & x > 0, \\ \dfrac{2\sin x + k - e^{5x}}{k^2x + 5}, & x < 0 \end{cases}$$

16. (師大微乙 (一)105 本部 #7) Consider a real-valued function (實值函數) defined by:

$$g(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   (a) Is g differentiable (可微分) at $x = 0$? If yes, find $g'(0)$.

   (b) Find the derivative of g for all $x \neq 0$.

17. (師大微乙 (一)105#4) Find the constant a such that the function

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{3x}, & x < 0, \\ \dfrac{1}{6}a - 7x, & x \geq 0 \end{cases}$$

   is everywhere continuous (處處連續).

18. (師大微乙 (一)104#3) Find $\frac{dy}{dx}$:

   (a) $y = 2^x\left(1 - \dfrac{4}{x+3}\right)$

   (b) $y = \left(\ln\dfrac{3}{x}\right)^{x/3}$

   (c) $y = e^{3x}\sin\left(\cos^2(3x)\right)$

   (d) $y = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}}$

   (e) $\ln(xy) - e^{x+y} + x^2y = 1$

19. (師大微乙 (一)103#2) Find $\frac{dy}{dx}$:

   (a) $y = \left(\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}\right)^2$

   (b) $x \cdot \sin(5y) = y \cdot \cos(5x) + \dfrac{1}{2}$

   (c) $y = \ln\left(|\tan^{-1}(x^3)|\right)$

   (d) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^5(x+1)^{16}}{(x+2)}}$

▶ **反函數與其微分問題**

20. (師大微乙 (一)112#4) Given a function $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $x > 1$.

   (a) Show that f is a one-to-one function on the interval $(1, \infty)$.

   (b) Let f^{-1} denote the inverse function of f, find $f^{-1}(4)$.

(c) Find the derivative $(f^{-1})'(4)$.

21. (師大微乙 (一)111#1) Evaluate $\sin(2\sin^{-1}(-\frac{3}{5}))$.

22. (師大微乙 (一)111#5) Let $f(x) = x - \pi + \cos x$.

    (a) Show that f has an inverse on $(-2\pi, 2\pi)$.

    (b) Find $(f^{-1})'(-1)$.

23. (師大微乙 (一)110#1) Given the function $f(x) = x^4 + 4x^2 + 5$, $x > 0$.

    (a) Show that f is one to one.

    (b) Find the inverse function f^{-1}.

    (c) Find the derivative $(f^{-1})'(10)$.

24. (師大微乙 (一)108#4) Given a function $f(x) = x^3 - \frac{4}{x}$, $x > 0$.

    (a) Show that $f(x)$ is a one-to-one function.

    (b) Let f^{-1} denote the inverse function of f. Find the derivative $(f^{-1})'(6)$.

Chapter 4
微分應用

1. 函數的性狀分析

在上一章，我們學習了如何計算各式函數的微分，但微分的真正價值在於它的應用. 這個章節將從純粹的運算，進入到利用導數來探索函數行為、分析函數圖形. 我們將會看到，導數不僅僅是個數字，更是幫助我們理解函數行為的工具.

(1). 切線問題

在我們最初接觸導數時，就學過它代表了函數圖形上切線的斜率. 這不僅是一個抽象的定義，更是我們將微分與幾何圖形連結的第一道橋樑. 本節將回歸這個核心概念，學習如何利用導數來精準地找出曲線上任一點的切線方程式，從而為後續的圖形分析奠定堅實的基礎.

要確定一條直線，只需要給定它通過的一點 (x_0, y_0) 與它的斜率 m. 而對於切線而言，切線斜率就恰好是函數在該點的導數 $f'(x_0) = m$. 因此，若函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可微，那麼 $f(x)$ 的函數圖形在 $x = x_0$ 的切線方程式 $L(x)$ 即是：

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

例題 4.1 / 切線問題

When an object in circular motion has the force constraining it suddenly removed, it will, due to inertia(慣性), fly off in a straight line tangent to its path at the moment of release. This tangent line represents the object's trajectory.
Consider a ball moving clockwise on the unit circle $x^2+y^2 = 1$. When the ball reaches the point $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, the rope breaks. What is the equation representing the ball's trajectory after the rope breaks?

The ball's trajectory after the rope breaks is the straight line tangent to the circle $x^2 + y^2 = 1$ at the point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. To find the slope of this line, we use implicit differentiation on the equation of the circle, as shown below:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x + 2y \cdot y' = 0$$
$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}$$

By substituting the coordinates of the point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ into our expression for the derivative, we find the slope of the tangent line to be $m = -\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = -1$. Finally, using the point-slope form of a line, we can write the equation of the ball's trajectory as:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

註 到這裡應該要非常熟悉各個函數的微分與各種微分方法，才能得心應手的使用微分解決問題. 對於這類切線問題，不外乎就是需要計算特定點的導數值來作為斜率，配合上交點即可以點斜式給出切線的方程式. □

(2). 極值與凹凸性分析

一個函數的最高點、最低點、轉折點在許多實際應用中都至關重要，例如找出成本最低或利潤最大的情況. 在這裡我們將一起研究出一些系統性的方法，來得知如何利用微分找出函數的所有極值與其他特徵.

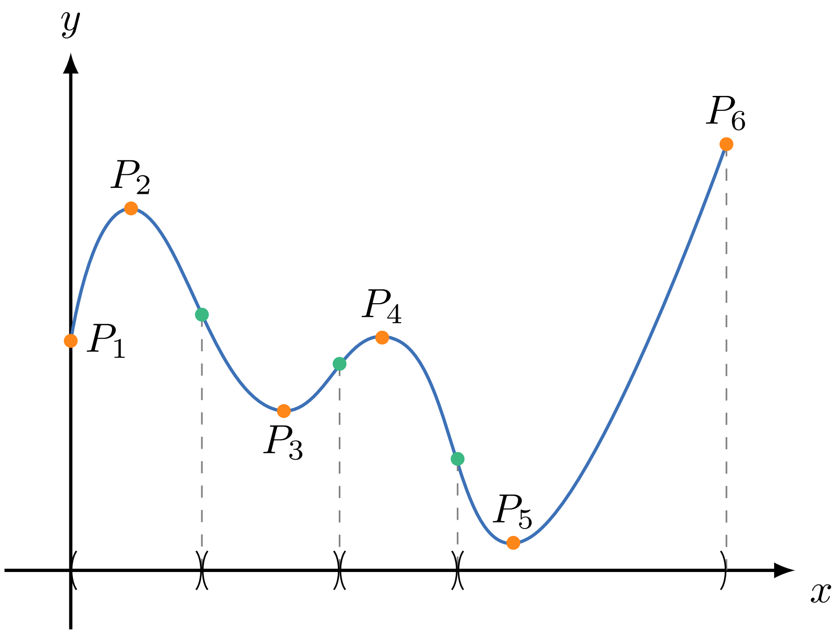


Figure 4.1: 函數的性狀分析：橘色點為極值、綠色點為反曲點

根據**極值定理** (**Extreme Value Theorem**)，一個在閉區間上的連續函數，其最大值和最小值必定存在. 如圖 4.1所示，點 P_6 與 P_5 分別代表了該函數在整個定義域上的最大值與最小值，我們稱之為**絕對極值** (**Absolute extrema**) 或**全域極值** (**Global**

extrema)；另外對於點 P_1、P_2、P_3、P_4 雖然不是全域上的極值，但它們在其鄰近區域內卻是最高或最低的點，因此我們稱這些點為**相對極值 (Relative extrema)** 或**局部極值 (Local extrema)**.

可以觀察到這些極值點分別有以下特性：

- 點 P_2, P_3, P_4, P_5 的切線為水平線，代表其導數為零 $f'(x) = 0$.
- 點 P_1, P_6 的導數無法定義，$f'(x)$ 不存在.

我們將上述兩種情況，即導數為零或導數不存在的點，統稱為**臨界點 (Critical points)**，這些點是所有可能產生極值的點. 然而，臨界點不一定就是極值所在的位置. 例如，考慮函數 $f(x) = x^3$，其在 $x = 0$ 處的導數 $f'(0) = 3x^2\Big|_{x=0} = 0$，故 $x = 0$ 是一個臨界點. 但該點左右兩側的函數值都持續遞增，左邊的函數值比他小、右邊的函數值比他大，因此它並非極大值也非極小值.

在國中學習二次函數時，我們得知可以由二次項係數判斷該拋物線是**凹向上 (Concave Upward)** 或**凹向下 (Concave Downward)**，這也是一個用來描述函數圖形的方法. 凹向上的區間，其切線斜率由負到正、由小到大，變化率為正，那麼其二階導數為正；反之，凹向下的區間，其切線斜率由正到負、由大到小，變化率為負，因此其二階導函數為負. 特別來說，凹向上與凹向下區間的交界處，二階導數為零，我們稱該點為**反曲點 (Inflection Point)**.

如圖 4.1的函數，假如我們現在還不清楚它的函數圖形，只知道它的表達式為 $f(x)$. 通過 $f'(x) = 0$ 的解可以找到一些臨界點 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5、P_6. 但到目前為止，我們還不清楚這些臨界點分別是極大值還是極小值. 這時候就可以繼續通過計算這些點的二階導數來得知結果.

結論 4.1 / 極值與凹凸性分析

給定在區間 I 上的可微函數 $f(x)$：

- 若 $x_0 \in I$ 使得 $f'(x_0) = 0$，那麼稱 x_0 是 $f(x)$ 的一個**臨界點 (Critical points)**.
- 若區間 I 內的所有點 x 都有 $f'(x) > 0$，那麼稱 f 在 I 上 **遞增 (Incresing)**.
- 若區間 I 內的所有點 x 都有 $f'(x) < 0$，那麼稱 f 在 I 上 **遞減 (Decresing)**.

給定在區間 I 上的二階可微函數 $f(x)$：

- 若 $x_0 \in I$ 使得 $f''(x_0) = 0$，且 $f''(x)$ 在 $x = x_0$ 兩端分別有不同正負號，那麼稱 x_0 是 $f(x)$ 的一個**反曲點 (Inflection points)**.
- 若區間 I 內的所有點 x 都有 $f''(x) > 0$，那麼稱 f 在 I 上 **凹向上 (Concave Upward)**.

- 若區間 I 內的所有點 x 都有 $f'(x) < 0$，那麼稱 f 在 I 上 **凹向下 (Concave Downward)**.

給定在區間 I 上的二階可微函數 $f(x)$ 且 $x_0 \in I$：

- 若 $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) > 0$ 那麼 $x = x_0$ 是 f 的一個局部極小值.
- 若 $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$ 那麼 $x = x_0$ 是 f 的一個局部極大值.

註 當函數在某個區間 I 是只遞增或只遞減，即其導函數皆大於零或皆小於零，那麼稱函數 f 在區間 I 上是**單調 (Monotonic)** 的. 這兩個方法又分別被稱為一階導數檢驗法 (1-st derivative test) 與二階導數檢驗法 (2-nd derivative test). □

當我們只知道函數解析式時，這些方法對於要瞭解函數行為時非常重要. 總而言之，要找到一個函數的極值，可以依循以下步驟：

1. 先解 $f'(x) = 0$ 或 $f'(x)$ 不存在來找到作為極值候選人的臨界點.
2. 用二階導數檢驗法判斷這些點的凹凸性進而得知該點是局部極大值或局部極小值.
3. 最後直接比較數值來判斷哪個點是絕對極大值、絕對極小值.

除了這些純粹的數值來紀錄函數行為之外，我們也可以標記數軸來協助我們觀察. 例如我們想要知道函數 $f(x) = x^3 - 12x - 5$ 在區間 $[-3, 3]$ 上的所有極值. 首先，使用一次微分可以得知臨界點與遞增遞減區間：

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

導函數 $f'(x)$ 在區間 $(-3, -2)$ 與區間 $(2, 3)$ 皆大於零，代表函數 $f(x)$ 為遞增；導函數 $f'(x)$ 在區間 $(-2, 2)$ 小於零，函數 $f(x)$ 為遞減；特別來說，在 $x = -2$ 與 $x = 2$ 這兩點，導函數皆為零，因此這兩個點，即 $(-2, f(-2))$ 與 $(2, f(2))$，為臨界點，是可能產生極值的點. 我們可以在數軸上標記出這些資訊如下：

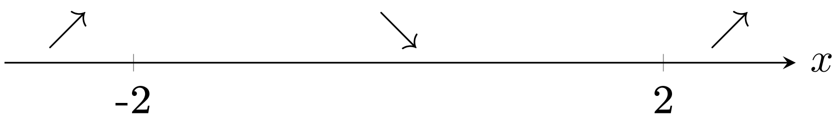


Figure 4.2: 函數 f 的遞增遞減區間示意：使用符號 $\nearrow$ 來簡易的表示函數在該區間為遞增；使用 $\searrow$ 來表示遞減

同樣，可以使用二階微分來判端凹凸性：

$$f''(x) = 6x$$

二階導函數 $f''(x)$ 在區間 $(-3,0)$ 為負，表示函數 $f(x)$ 在區間 $(-3,0)$ 為凹向下；二階導函數 $f''(x)$ 在區間 $(0,3)$ 為正，函數 $f(x)$ 在區間 $(0,3)$ 為凹向上；而在 $x=0$ 時，二階導函數 $f''(x)$ 為零，意味著 $(0,f(0))$ 是 $f(x)$ 的一個反曲點. 我們也可以在另一條數軸上標記出這些訊息：

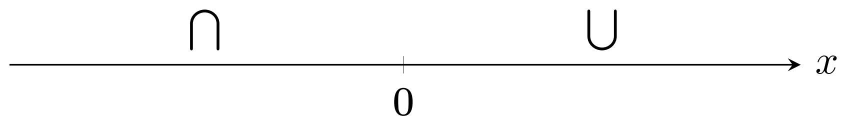


Figure 4.3: 函數 f 的凹凸區間示意：使用符號 $\bigcup$ 來簡易的表示函數在該區間為凹向上；使用 $\bigcap$ 來表示凹向下

有了臨界點 $(-2,f(-2))$ 、$(2,f(2))$ 、反曲點 $(0,f(0))$ 及以上兩條數軸的資訊之後，我們就可以繪製出函數圖形的大致模樣：

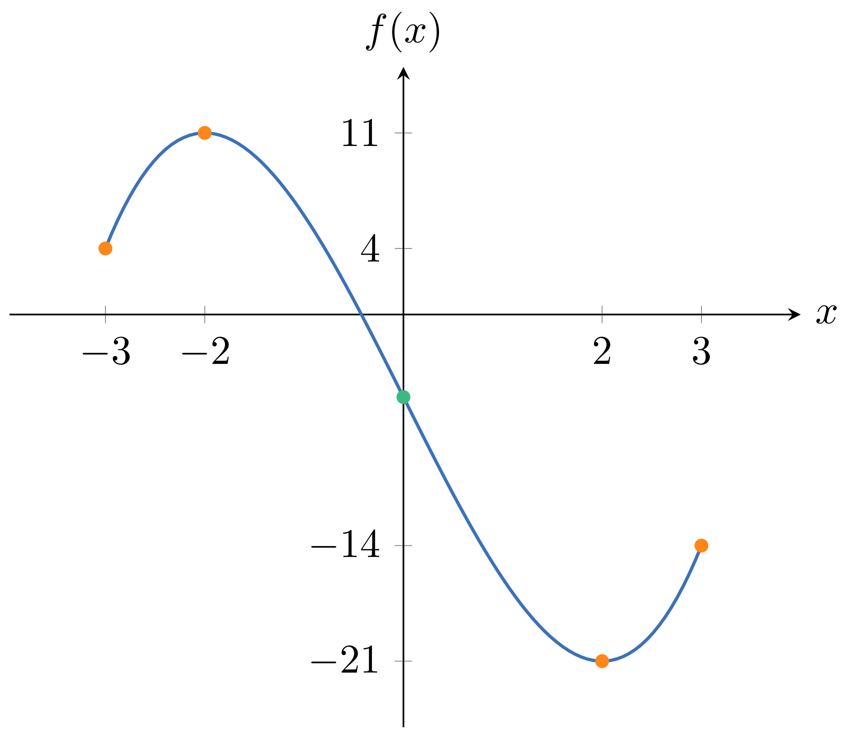


Figure 4.4: 函數 f 的圖形草圖：使用一階與二階導數的資訊來繪製出函數圖形的大致模樣

注意，除了臨界點之外，定義域的端點 (即 $f'(x)$ 不存在之處) 通常也是產生極值的地方. 因此在判斷哪些點是絕對極值時，也需要將端點一同放進來比較. 因此我們實際計算出兩端點為 $(-3,f(-3))=(-3,4)$ 與 $(3,f(3))=(3,-14)$；並且臨界點為 $(-2,f(-2))=(-2,11)$ 、$(2,f(2))=(2,-21)$，我們通過比較這四個點的函數值之後，就可以得出：定義在區間 $[-3,3]$ 上的函數 $f(x)$ 在 $x=-3$ 有相對極小值 4、在 $x=-2$ 有絕對大值 11、在 $x=2$ 有絕對極小值 -21、在 $x=3$ 有相對極大值 -14.

(3). 局部變化與整體性質的關係

直觀的從函數圖形了解完如何運用微分來分析函數行為之後，我們接著來看一些更嚴謹的理論作為支撐. 雖然它看起來比前面的應用更抽象，但它正是證明許多重要結論的基礎.

想像我們正在從台北開車到高雄，這趟旅程總共 400 公里，花了 4 小時開完. 這代表這趟旅程的平均速度是每小時 100 公里. 但實際每一個時刻的速度會一直變化、有時會高於平均速度到 110 km/h、又或者塞車時降速到 60 km/h 等等. 但無論如何，直觀來看，一定會有一個時刻的瞬時速度恰好與平均速度 100 km/h 相同.

這就是均值定理的核心概念：它將一段時間內的平均變化率，與某個瞬間的瞬時變化率連結起來. 它保證只要變化是平穩連續的，那麼在整個過程中，一定存在那麼一個點，它的瞬時變化率恰好等於整個區間的平均變化率.

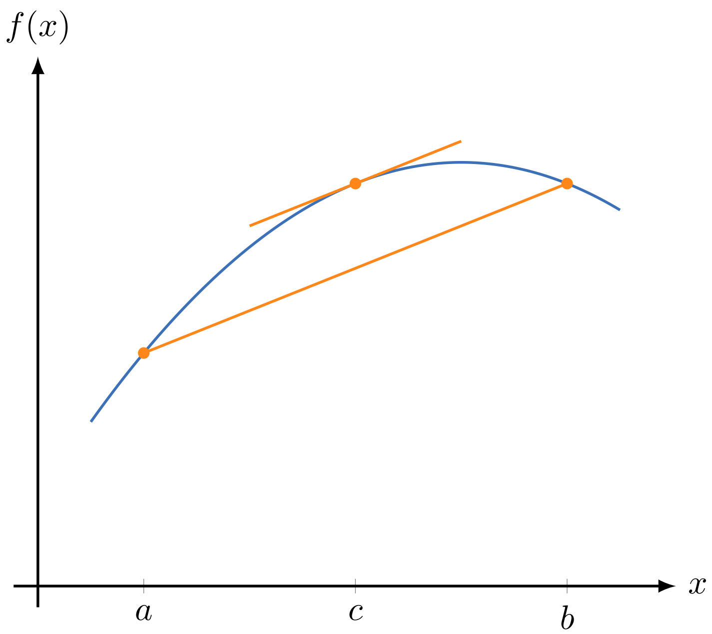


Figure 4.5: 瞬時變化與平均變化之間的關係：當給定一個在區間 $[a,b]$ 上連續可微的函數 $f(x)$，必定存在某一點 c 在 a、b 之中，使得在 c 的瞬間變化率等於 $[a,b]$ 上的平均變化率

結論 4.2 / 均值定理 (Mean Value Theorem, M.V.T.)

給定 f 是一個在區間 $[a,b]$ 上連續、在 (a,b) 上可微的函數，則存在 $c \in (a,b)$ 使得：

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

特別來說，當 $f(a)=f(b)=0$ 時，我們稱該特例為**洛爾均值定理 (Rolle's Mean Value Thm.)**. 在第 2 章：連續 (第41頁) 中學習過的中間值定理可以確定方程式解的存在性，而洛爾均值定理可以幫助我們確定方程式解的唯一性. 比如我們考慮方程式 $x^7+x^5+x^3+1=0$，可以找到 $f(0)=1>0$、$f(-1)=-2<0$，因此根據中間值定理，

在 $x=-1$ 至 $x=1$ 之間至少有一個根 $x=c$ 使得 $f(c)=0$. 但這個根不是唯一的，可能會有很多個根在這之間. 這時候我們就可以使用洛爾均值定理來說明僅有一個根.

要證明恰好只有一個，我們可以假設有兩個相異的 x_1、x_2 都是方程式的根，接著使用反證法以此推導出矛盾. x_1、x_2 都是方程式的根意味著 $f(x_1)=f(x_2)=0$，由於 $f(x)=x^7+x^5+x^3+1$ 在 $\mathbb{R}$ 上連續且可微，那麼 f 就分別在 $[0,1]$ 連續、在 $(0,1)$ 可微. 我們可以使用洛爾均值定理得到，存在 $c\in(0,1)$ 使得：

$$f'(c)=7x^6+5x^4+3x^2=0$$

但實際上對於區間 $(0,1)$ 中的所有 x 都會使 $f(x)\gneqq 0$，出現矛盾. 而矛盾是由於錯誤假設「有兩個相異的根 x_1、x_2」，那麼實際上並不會有兩個相異的實根，亦即解是唯一的.

以上的兩個均值定理都是針對只有一個函數的情況、只關注函數本身的變化，而若是我們想要描述一個函數相較於另一個函數的變化，可以使用以下定理：

結論 4.3 / 柯西均值定理 (Cauchy's Mean Value Theorem)

給定 f、g 是一個在區間 $[a,b]$ 上連續、在 (a,b) 上可微的函數，並且 $g'(x)\neq 0$，則存在 $c\in(a,b)$ 使得：

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

柯西均值定理相較於一般的均值定理與羅爾定理，其獨特之處在於它描繪了兩個函數的變化率比值. 特別來說，當我們考慮 b 趨近於 a 時，$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 會趨向 $\dfrac{0}{0}$，這是一個不定式，我們無法直接得出其極限值. 然而，柯西均值定理告訴我們，這個比值會等同於在區間 (a,b) 內某一點 c 的導數之比，即 $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. 正是基於這個等式，我們得到了一個處理不定式極限的有效工具，這即是**洛必達法則 (L'Hôpital's rule)**.

結論 4.4 / 洛必達法則 (L'Hôpital's rule)

給定 f、g 是一個在區間 $[a,b]$ 上連續、在 (a,b) 上可微的函數，並且 $g'(x)\neq 0$. 若：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$$

那麼不定式極限等同於：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. 逼近與迭代近似

在現實世界中，許多問題無法得到精確的解析解 (Analytical Solution). 這時，我們就需要藉助數值方法來尋找足夠精確的近似值. 本章節將展示微分的另一面，即如何

作為強大的估算工具，幫助我們解決那些看似無解的數學難題.

(1). 線性化與微分量

當我們想要快速估算一個複雜函數在某個點附近的數值變化時，有沒有比重新計算更簡單的方法呢？微分量正是這個問題的答案. 它將曲線在一個很小的範圍內視為一條直線，讓我們能利用切線的斜率來進行快速且準確的線性估算.

例如，在電磁學中，當我們想計算一個非均勻帶電物體產生的電場時，如果我們將這個物體切成無數個極小的帶電部分，每一個都可以被視為一個微小電荷量 $\mathrm{d}q$. 這個微小的 $\mathrm{d}q$ 所產生的電場 $\mathrm{d}E$ 就能被視為一個點電荷所產生的電場，其大小和方向都可以被精確地計算出來. 接著，我們只需要將所有這些微小的 $\mathrm{d}E$ 加總，就能得到整個物體在某個特定點產生的總電場 E. 這其中就要求我們計算出 $\mathrm{d}q$ 與 $\mathrm{d}E$ 的關係.

如下圖 4.6所示，當我們繪製出 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的切線 $L(x)$ 之後，我們將函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 附近的行為都以切線 $L(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ 近似. 這時我們稱 $L(x)$ 是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的**線性化 (Linearlization)**. 並且實際的變化量 Δy 就可以用 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$ 來近似.

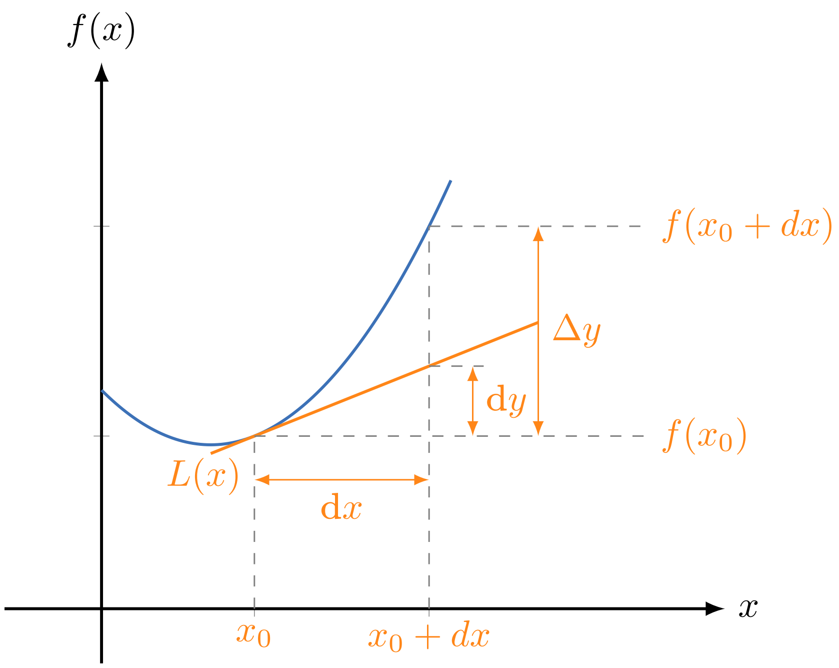


Figure 4.6: 使用微分量做估計：當 $\mathrm{d}x$ 很小時，變化量 Δy 可用 $\mathrm{d}y$ 近似

比如我們知道圓形面積的計算公式是 $A(r) = \pi r^2$，是一個關於半徑 r 的函數，像是當半徑為 2 時，面積即是 $A(2) = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$. 此時，若我們想得知當半徑增加一個微小量 $\mathrm{d}r$ 時，相應的面積會有多少變化 $\mathrm{d}A$，這時就可以將函數 $A(r)$ 線性化來做估計. 而函數 $A(r)$ 在 $r = 2$ 的增量即是：

$$\mathrm{d}A(r) = A'(2) \cdot \mathrm{d}r$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi r\Big|_{r=2} \cdot \mathrm{d}r \\
&= 4\pi \mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

這代表當半徑為 $r = 2$ 時，每當半徑增加一個微小的 $\mathrm{d}r$，相應的面積就會增加 $\mathrm{d}A = 4\pi\mathrm{d}r$. 與其實際計算出 $A(2)$ 與 $A(2+\mathrm{d}r)$ 再相減得到變化量 ΔA，線性化方法能快速的幫助我們了解變量之間的變化量關係.

(2). 牛頓法

考試不會考

習題

▲ Note：由於師大微乙 (一) 的期中考範圍不包含洛必達法則，並且期中考範圍的極限問題亦不能使用洛必達法則，因此有關洛必達法則的問題將出現在 第 5 章：積分 (第81頁) 之中.

► **切線問題**

1. (師大微乙 (一)112#3) Find an equation of tangent line to the graph of $\ln(xy) = \sin(x-y)$ at the point $(1,1)$.
2. (師大微乙 (一)111#4) Given $x\tan^{-1}(x^2) = e^y$. Find the tangent line at point $(1, \ln\frac{\pi}{4})$.
3. (師大微乙 (一)110#5) Given $x^3 + ye^{x+y} + y^3 = 2$. Find the tangent line at point $P = (0,1)$.
4. (師大微乙 (一)109#6) Find an equation of the tangent line (切線) to the graph of
$$3e^{x+y} + \ln(x/y^2) - \arcsin(x+y) = 3$$
at the point $(1,-1)$.
5. (師大微乙 (一)108#3) Find the tangent line to the graph of the equation at the given point
$$(x^2+y^2)^2 = 4x^2y, \quad (1,1).$$
6. (師大微乙 (一)107#6) Use the Logarithmic Differentiation (對數微分法) to find an equation of the tangent line (切線方程式) to the graph of $y = \dfrac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+1}}$ at the point $(0,4)$.

7. (師大微乙 (一)106#6) 試求 $x^y = y^x$ 在點 $(1,1)$ 處的切線方程式.

8. (師大微乙 (一)105 本部 #6) Find an equation of the tangent line (切線) to the graph of
$$x^2 + xy + y^2 = 4$$
at the point $(2,0)$.

► **極值與凹凸性分析問題**

9. (師大微乙 (一)113#6) Find the open intervals on which the function f is increasing and those on which is decreasing. 求以下函數遞增的區間和遞減的區間
$$f(x) = (x^2 - 2)e^{2x}.$$

10. (師大微乙 (一)112#6) For the function $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$, answer the following questions.

    (a) Determine the open intervals on which f is increasing(遞增) or decreasing(遞減).

    (b) Find the relative extrema(相對極值) for f.

    (c) Determine the open intervals on which the graph of f is concave upward(凹向上) or concave downward(凹向下).

11. (師大微乙 (一)111#7) Find all critical points and all local extrema (relative extrema) of the function
$$f(x) = x^{1/3}(x^2 - 7),$$
verify your answer by the first or the second derivative test.

12. (師大微乙 (一)111#8) Let $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6}{x + 1}$.

    (a) Determine the open intervals on which f is increasing(遞增) or decreasing(遞減).

    (b) Determine the open intervals on which f is concave upward(凹向上) or concave downward(凹向下).

13. (師大微乙 (一)110#8) Given a function $f(x) = x^4 - 2x^2$ on the interval $[-2, 3]$.

    (a) Find open intervals where f is increasing or decreasing.

    (b) Find the relative extrema of f.

    (c) Determine open intervals where f is concave upward or downward.

14. (師大微乙 (一)109#3) Let $g(x) = 5e^x - e^{2x} + 1$ for all $x \in \mathbb{R}$. Use the **Second Derivative Test** to find the relative extrema (相對極值) of g.

15. (師大微乙 (一)109#5) For $f(x) = \dfrac{2x^3 - 6x^2 + 4x}{x^2 - 1}$, answer the following questions.

    (a) Describe the domain (定義域) of f.

    (b) Find the critical numbers (臨界數) of f.

    (c) Determine the open intervals on which f is increasing (遞增) or decreasing (遞減).

    (d) Determine the open intervals on which the graph of f is concave upward (凹向上) or concave downward (凹向下).

16. (師大微乙 (一)108#5) Consider the function

$$f(x) = x^{2/3}(x^2 - 1).$$

    (a) Find the open intervals on which f is increasing (遞增) or decreasing (遞減).

    (b) Find the open intervals on which the graph of f is concave upward (凹向上) or concave downward (凹向下).

    (c) Locate the point of inflection (反曲點) if it exists.

17. (師大微乙 (一)107#4) For the real-valued function (實值函數) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, answer the following questions.

    (a) Determine the open intervals on which f is increasing (遞增) or decreasing (遞減).

    (b) Find the relative extrema (相對極值) for f.

    (c) Determine the open intervals on which the graph of f is concave upward (凹向上) or concave downward (凹向下).

    (d) Find the points of inflection (反曲點) of f.

18. (師大微乙 (一)106#3) 對於實值函數 $f(x) = \dfrac{-x}{x^2 - 4}$, 試回答下列問題.

    (a) f 的函數圖形在那些開區間上是遞增或遞減?

    (b) f 的函數圖形在那些開區間上是凹口向上或凹口向下?

    (c) 找出函數 f 所有的反曲點.

19. (師大微乙 (一)106#7) 找出函數 $f(x) = x\ln(x+3)$ 在閉區間 $[0,3]$ 上的絕對極值.

20. (師大微乙 (一)105#1) Find the absolute extrema (絕對極值) of $f(x) = 5e^x - e^{2x}$ on the closed interval $[-1,2]$.

21. (師大微乙 (一)105#3) For $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-2}$, answer the following questions.

    (a) Determine the open intervals on which f is increasing (遞增) or decreasing (遞減).

    (b) Find all relative extrema (相對極值) for f.

    (c) Determine the open intervals on which the graph of f is concave upward (凹向上) or concave downward (凹向下).

    (d) Find all points of inflection (反曲點) of the graph of f.

22. (師大微乙 (一)104#4) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$

    (a) (5 points) Find all the critical points (臨界點) of $f(x)$.

    (b) (10 points) Find the interval(s) on which $f(x)$ is increasing or decreasing.

    (c) (5 points) Find the extreme values.

23. (師大微乙 (一)104#5) $f(x) = x^3 - 9x^2$

    (a) (5 points) Find all the points of inflection (反曲點) of $f(x)$.

    (b) (10 points) Find the interval(s) on which the curve $f(x)$ is concave up or down.

    (c) (5 points) Find the extreme values.

24. (師大微乙 (一)103#4) Let $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$. Find all critical points (臨界點) of $f(x)$.

25. (師大微乙 (一)103#5) Let $g(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$ on $[-1,1]$.

    (a) (10 points) find local extreme values (區域極值) of $g(x)$.

    (b) (10 points) find the intervals $g(x)$ is concave up (凹向上) or concave down (凹向下).

    (c) (10 points) find absolute extreme values (絕對極值) of $g(x)$ on $[-1,1]$.

► **均值定理問題**

26. (師大微乙 (一)113#5) Show that the equation $x^5 + 4x + 1 = 0$ has exactly one solution. 請證明方程式 $x^5 + 4x + 1 = 0$ 只有一個實數解.

27. (師大微乙 (一)112#5) Show that the function $g(t) = \sqrt{t + \sqrt{t+2}} - 4$ has exactly one zero in the interval $(0, \infty)$.

28. (師大微乙 (一)111#6) Prove that the equation $x + e^{x^3} = 0$ has exactly one real root.

29. (師大微乙 (一)110#7) Prove that the equation $2x - 2 - \cos x = 0$ has exactly one real solution.

30. (師大微乙 (一)109#3) Let $g(x) = 5e^x - e^{2x} + 1$ for all $x \in \mathbb{R}$. Prove that the nonlinear equation $g(x) = 0$ has *exactly one* root (零根) in the closed interval $[0, \ln 10]$.

31. (師大微乙 (一)107#3) Does the nonlinear equation (非線性方程式) $e^{-3x} - x = 0$ have a unique solution (唯一解) in the interval $[0, 1]$? Give your reasons.

32. (師大微乙 (一)105#5) Use **Intermediate Value Theorem** and **Rolle's Theorem** to prove that the equation $2x^5 + 7x - 1 = 0$ has *exactly one* real solution.

33. (師大微乙 (一)103#3) Show that the equation $\cos(x) + 1 = 2x$ has exactly one real solution.

▶ **微分量問題**

34. (師大微乙 (一)110#6) Use differential to approximate $\sqrt[4]{626}$.

35. (師大微乙 (一)109#1) Use the differential to approximate (近似) the value of $\sqrt[3]{63.952}$.

36. (師大微乙 (一)107#2) Let $y = g(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ for $x > 0$.

    (a) Find the differential dy.

    (b) Use the part (a) to find the approximate value (近似值) of $g(4.16)$.

37. (師大微乙 (一)106#1) 試用 differential 估計 $\sqrt[3]{8.12}$ 的近似值.

38. (師大微乙 (一)105#8) Find the differential dy of the given function.

    (a) $y = \ln \sqrt{4 - x^2}$

    (b) $y = \arctan(x - 2)$

Chapter 5
積分

1. 定積分的直觀含義

相對於微分是在處理微小的變化率，**積分（Integral）**則是將這些微小的變化量累積起來. 考慮一個以 x 變數的函數 $f(x)$，我們的目標即是計算 $f(x)$ 從 $x = a$ 到 $x = b$ 累積的總量. 一個易於計算的方式是，我們將 $[a, b]$ 區間做 n 等分，每一等份稱作 Δx，那麼我們就能夠以 Δx 為步長做函數值 $f(x)$ 的總和：

$$f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上的總和} \approx \sum_{x=a}^{b} f(x)\Delta x$$

當 $[a, b]$ 區間上的每個等分 $\Delta x \to 0$ 時，子區間的數量會趨近於無限多. 此時，這個無窮級數的總和就是我們所稱的定積分，用符號 $\int_a^b$ 表示：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

在這裡，$\int$ 符號是拉長、變形的 S，代表「求和」（Summation）； $\mathrm{d}x$ 則代表無窮小的變化量，取代了 Δx.

因此，定積分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的意義就是將函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 區間內，每個點的函數值 $f(x)$ 乘上其對應的無窮小區間長度 $\mathrm{d}x$，再將所有這些無窮小的「累積量」加總起來.

這也解釋了為什麼我們常說積分是「曲線下的面積」，因為當 $f(x) \geq 0$ 時，$f(x)$ 扮演了長方形的「高」，而 $\mathrm{d}x$ 扮演了長方形的「寬」. 但更根本的理解是，積分是一種累積的過程，而面積只是這種累積過程在二維空間中的一個具體表現而已.

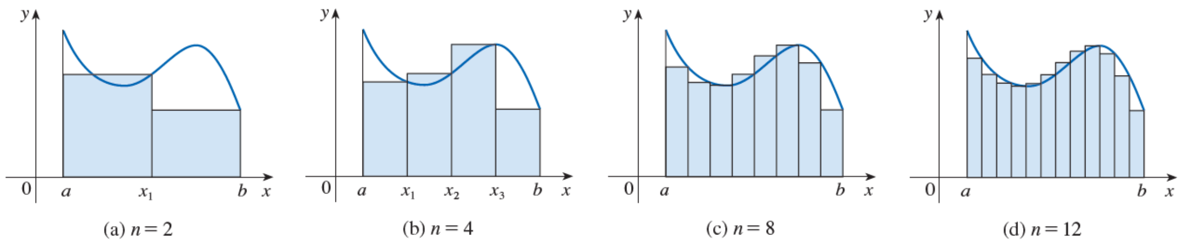


Figure 5.1: 定積分的直觀概念：當分割越來越細時，能夠被採樣的函數值越來越多，計算出的總和越趨近曲線下面積[1]

2. 定積分正式定義

上一個小節我們只直觀的認識了什麼是定積分，並沒有討論哪些函數是可以被如此定義定積分的，我們需要一套嚴格的定義來說明什麼樣的函數是「**可積的 (integrable)**」.

我們可以這樣思考，既然我們計算定積分是等同於計算該函數在曲線下的面積，那麼我們是不是可以找出該面積的上下界，並使用夾擠定理給出該面積的實際值呢？實際上確實如此，並且我們甚至可以要求分割不是 n 等分的.

當給定 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上是片段連續的 (Piecewice conti.)[2]，我們隨意挑出 a、b 之間的 $n-1$ 個點 $a=x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，作為 $[a,b]$ 上的一組分割 (Partition)，且 $\Delta_k=x_k-x_{k-1}$，則定義：

- 令 $x_k^\star\in[x_k-x_{k-1}]$，即 $x_k^\star$ 是 $[x_k-x_{k-1}]$ 上的任意值，
  稱 $R_{f,[a,b],P}=\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k^\star)\Delta x_k$ 為 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**黎曼和 (Riemann Sum)**
- 令 $M_k=\max\limits_{x\in[x_k,x_{k-1}]} f(x)$，
  稱 $U_{f,[a,b],P}=\sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$ 為 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**上和 (Upper Sum)**
- 令 $m_k=\min\limits_{x\in[x_k,x_{k-1}]} f(x)$，
  稱 $L_{f,[a,b],P}=\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$ 為 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**下和 (Lower Sum)**

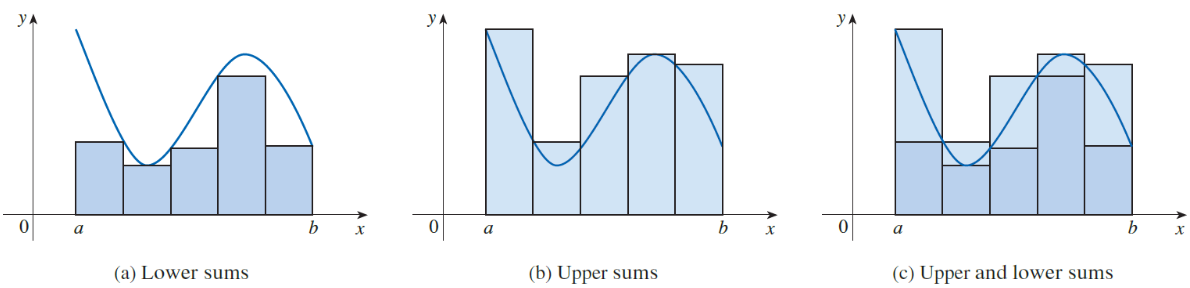


Figure 5.2: 上下和與黎曼和之間的關係：對於同一組分割 P，它們的寬度相同，區別僅在於長方形的高度：上和由區間的最大值決定，下和由最小值決定，而黎曼和則由任意值決定，因此大小關係為——下和 $\leq$ 黎曼和 $\leq$ 上和.[3]

當分割 P 上最長的一個區間 $||P||=\max\limits_{1\leq k\leq n}(x_k-x_{k-1})$ 趨近於零，即分割 P 越來越

[1]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.376)
[2]片段連續的 (Piecewice conti.) 指的是不連續點只有可數個.
[3]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.377)

細時，上和會遞減、下和會遞增. 因此若上下和的極限值相等於一個實數 A：

$$\lim_{||P||\to 0} L_{f,[a,b],P} = \lim_{||P||\to 0} U_{f,[a,b],P} = A$$

這時被夾在中間的黎曼和的極限也會趨向 A，那麼我們就稱函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上是 **可積的 (integrable)**，並定義積分值 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$.

定義 5.1 / 可積函數

給定一個定義在區間 $[a,b]$ 上函數 f，我們任取區間 $[a,b]$ 上的分割 $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ，並設 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ 為這些子區間中的任意取樣點，其中 x_i^* 位於第 i 個子區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 內. 若以下極限存在：

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

那麼稱該極限值為 f 從 a 到 b 的**定積分 (Definite Integral)**：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

並且我們就說 f 在 $[a,b]$ 上是**可積的 (integrable)**.

我們來實際計算一個簡單的例子，常數函數 $f(x) = 1$ 在區間 $[a,b]$ 上的積分. 依照定義，我們需要先任取一組分割 $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$，其中分割的起點與終點是區間的兩端點 $a = x_0$、$b = x_n$. 接著我們計算上下和. 計算上下和時，需要知道每一個 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的函數最大值與最小值，由於 $f(x)$ 是常數函數 1，因此每個區間上的最大值與最小值皆為 1：

$$\begin{cases} M_k = \displaystyle\max_{x\in[x_k, x_{k-1}]} f(x) = 1 \\ m_k = \displaystyle\min_{x\in[x_k, x_{k-1}]} f(x) = 1 \end{cases}, \ \forall\ 1 \le k \le n$$

那麼就可以寫出上下和分別是：

$$\begin{cases} U_{f,[a,b],P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a \\ L_{f,[a,b],P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a \end{cases}$$

我們發現無論取哪組分割 P，上下和的結果都是常數 $b-a$. 因此當分割 P 上最大的區

間 $||P||$ 趨近於零，即所有區間的長度都無窮小、分割越來越細時，我們有極限：

$$\begin{cases} \lim\limits_{||P||\to 0} U_{f,[a,b],P} = b-a \\ \lim\limits_{||P||\to 0} L_{f,[a,b],P} = b-a \end{cases}$$

既然作為面積的上下界都趨向同一個值 $b-a$，那麼被夾在中間的黎曼和也會趨向 $b-a$，並且函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上的積分值即是：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1\cdot\,\mathrm{d}x = \int_a^b \,\mathrm{d}x = b-a$$

積分的結果也很符合「曲線下面積」的直覺：常數函數 $f(x)=1$ 表示長方形的高是 1；而積分區間 $[a,b]$ 則意味著長方形的寬是 $b-a$，那麼該長方形面積則是 $b-a$.

對於一些不可積的函數，比如：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,\ x\in\mathbb{Q} \\ -1 & ,\ x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

由於有理數 $\mathbb{Q}$ 是稠密的，無論分割 P 有多細緻，每個分割出來的子區間 $[x_{k-1}x_k]$ 上的 x 都必定含有一些有理數與一些無理數，那麼每個區間上的最大值 $M_k = \max\limits_{x\in[x_k,x_{k-1}]} f(x) = 1$、最小值 $m_k = \min\limits_{x\in[x_k,x_{k-1}]} f(x) = -1$，由此可以給出函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上的上和是 $b-a$、下和是 $-(b-a)$，兩者的極限並不相等，因此函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間上是不可積的.

(1). 一些直觀的積分運算性質

在前一小節中，我們以上下和的夾擠過程來定義定積分，我們的稱之為**黎曼積分** **(Riemann Integral)**. 然而，若每次計算新函數的積分都必須依照定義，重新構造分割、尋找分割區間上的極大與極小值、計算上下和並利用夾擠求出積分值，這樣的過程既繁瑣又缺乏效率. 因此我們希望能從定義出發，推導出一些實用的運算性質，來幫助我們更有效率地計算積分.

讓我們先觀察一些基本的函數運算，如係數積、加法、乘法與除法等，看看它們在積分後會產生什麼變化. 舉例來說，給定函數 $f(x)$ 與常數 c，若先將函數乘上 c 再積分，其結果是否等同於先對 $f(x)$ 積分，再將結果乘上 c 呢？

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} c\cdot\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

我們可以從上下和的角度思考這個問題. 當函數 $f(x)$ 乘上 c 時，每一個分割區間

$[x_{k-1}, x_k]$ 上的最大值與最小值都會同時被放大為原來的 c 倍，因此上下和也會被放大為 c 倍. 由於黎曼積分正是上下和的極限值，這個極限自然也會被放大為 c 倍. 於是我們得到結論：

$$\int_a^b c \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

相似的，對於兩個函數 $f(x)$、$g(x)$ 相加後的積分也會等同於先積分後再相加：

$$\int_a^b f(x) + g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

積分同時對係數積與加法都有可以「拆開」的特性，我們統稱為這是積分的**線性性質 (Linearity)**.

接下來我們來思考函數相乘與相除的情況. 對於兩個可積函數 $f(x), g(x)$，我們可能會好奇：

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\ \mathrm{d}x \overset{?}{=} \left(\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\right)$$

若以上下和的角度觀察，當我們將 $f(x)$ 與 $g(x)$ 相乘時，每個分割區間上的最大值與最小值不再能簡單地用原來的上下和來表達. 換言之，$f(x) \cdot g(x)$ 的上下和與 $f(x)$、$g(x)$ 的上下和之間並沒有直接的倍數或加總關係. 因此，兩者的積分結果也就無法用簡單的「拆開」方式表達.

為了更清楚地看出這一點，來看一個具體的反例. 取區間 $[0, 1]$ 上的函數

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & ,\ x \in \mathbb{Q} \\ -1 & ,\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

則

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

那麼

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\ \mathrm{d}x = b - a$$

但函數 $f(x)$、$g(x)$ 的上下和極限並不相等，是不可積的. 因此積分無法對函數相乘、相除進行拆解.

除了被積分函數的運算，對於積分區間本身，也存在一個直觀且實用的性質. 想像我們要計算函數 $f(x)$ 在整個區間 $[a, c]$ 的面積，如果我們在中間某個點 b 將區間切開，那麼 $[a, c]$ 上的面積就應該等於 $[a, b]$ 與 $[b, c]$ 兩段面積的總和. 也就是說：

$$\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x.$$

這個性質其實也能從黎曼積分的定義來理解：當我們取分割 P 計算上下和時，如果在 $[a,c]$ 的某一點 b 切開，兩邊的上下和加總起來，正好就是整段 $[a,c]$ 的上下和. 隨著分割越來越細，夾擠出來的積分值自然也會滿足同樣的加法關係. 因此，我們不僅可以靈活運用被積函數的運算性質，還能透過這個「區間可加性」把積分拆成更簡單的小段來計算.

特別來說，對於奇函數 $(f(x) = -f(-x))$ 而言，函數圖形點對稱於原點，若積分區間是對稱的，如 $[-a,a]$，在區間 $[-a,0]$ 的積分與在區間 $[0,a]$ 的積分相互抵消了，我們有：

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

而對於偶函數 $(f(x) = f(-x))$ 而言，函數圖形是對稱於 y 軸，在區間 $[-a,0]$ 的積分與在區間 $[0,a]$ 的積分相同，因此：

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x$$

在了解區間可加性之後，我們可以更進一步思考：若把一個區間 $[a,b]$ 上的積分結果看成「曲線下的面積」，那麼這塊面積是否可以用某個矩形來取代？換句話說，是否存在一個點 $c \in [a,b]$，使得 $f(c)$ 剛好等於「平均高度」？

這正是**積分均值定理 (M.V.T. for Definite Integral)** 所告訴我們的結論：

結論 5.1 / 積分均值定理 (M.V.T. for Definite Integral)

若 f 在 $[a,b]$ 上連續，則必定存在某個 $c \in [a,b]$，使得

$$\int_{a}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x = f(c) \cdot (b-a).$$

註 從直觀上來看，左邊的積分代表曲線下的總面積，而右邊則是「高為 $f(c)$、寬為 $(b-a)$ 的矩形」的面積. 這就意味著，在整個區間內一定可以找到一個點 c，它的函數值剛好等於函數在 $[a,b]$ 上的平均值：

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x$$

□

要注意的是，積分均值定理與均值定理一樣要求函數 $f(x)$ 是要連續的. 我們可以來思考一個不連續的反例：

$$f(x) \begin{cases} 1 & , \ x \in [0,1) \\ 2 & , \ x \in [1,2] \end{cases}$$

該函數的積分，也就是 $f(x)$ 所包圍出的面積是 $1 \times 1 + 2 \times 1 = 3$，區間長度是 $2 - 0 = 2$. 但 $f(x)$ 的函數值只有 1 或 2，對於 $[0.2]$ 內的所有 x，我們都找不到一個 x_0 使得：

$$f(x_0) \cdot (2-0) = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$$

3. 微積分基本定理

在前幾個小節中，我們以上下和的方式嚴謹地定義了定積分. 雖然這樣的定義能確保積分的合理性，但若要依照定義進行實際計算，過程往往非常繁瑣：我們必須構造分割、尋找區間上的最大值與最小值、計算上下和，最後再取極限才能得到結果. 顯然，若僅憑定義來計算，幾乎不可能有效率地處理實際問題.

幸運的是，積分並非只能透過定義來計算. 積分與微分之間存在著一個深刻的聯繫，使我們能以微分的觀點來進行積分運算. 在這之間的橋樑就是**微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus, F.T.C.)**. 微積分基本定理的核心在於：變化率的加總恰好就是原函數的值：

為了更直觀地理解微積分基本定理，我們從一個在區間 $[a, b]$ 上連續的函數 f 出發，並設連續函數 $F(x)$ 的導函數 $F'(x) = f(x)$. 考慮 $[a, b]$ 的一組分割

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

由於 F 在每個小區間 $[x_{k-1}, x_k]$ 上連續，根據均值定理，存在某個 $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ 使得：

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$$

這對於每個分割區間都成立，於是我們將它們加總：

$$\sum_{k=1}^{n} \bigl(F(x_k) - F(x_{k-1})\bigr) = \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$$

左側的和在展開後，中間項會依次相消，只剩下 $F(b) - F(a)$；右側則是以 $F'(\xi_k) = f(\xi_k)$ 為高度、$(x_k - x_{k-1})$ 為寬度所組成的黎曼和. 當分割 P 越來越細 (即 $||P|| \to 0$)，這個和正是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的黎曼積分. 因此我們得到;

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

這正是微積分基本定理第一部分的內容：

結論 5.2 / 微積分基本定理第一部分 (F.T.C. I)

給定在區間 $[a,b]$ 上的可積函數 $f(x)$，若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，且 $F'(x)=f(x)$，那麼：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

並且我們稱滿足 $F'(x)=f(x)$ 的 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的**反導函數 (Anti-Derivative)**.

註 該定理正告訴我們導數（瞬時變化率）的積分（總和）等於函數的淨變化量，白話來說，就是把無數個小變化累加起來，就得到整體的變化. □

微積分基本定理的第一部分告訴我們：若 $F(x)$ 是函數 $f(x)$ 的一個反導函數（即 $F'(x)=f(x)$），那麼：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

這表示在實際計算定積分時，我們無需回到積分的定義去處理繁瑣的分割與和式，只要找到一個函數 $F(x)$，其導數正好是 $f(x)$，然後將積分的上下限代入 $F(x)$，做相減即可得到積分值.

舉例來說，在計算交流電於單個波峰的平均值時，我們需要知道 $\sin x$ 在半個週期內的「面積」，也就是積分：

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$$

若仍依照積分的定義去分割區間、計算上下和並取極限，過程將會十分繁瑣. 然而利用微積分基本定理，我們只需要找到一個導數為 $\sin x$ 的函數，也就是 $-\cos x$，再將積分上下限 0 與 π 分別代入，做相減即可：

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \big(-\cos\pi\big)-\big(-\cos 0\big)=2$$

註 要注意，要使用微積分基本定理第一部分來計算積分時，需要確保被積函數 $f(x)$ 在積分區間上是連續的. 若被積函數在積分區間上有不連續點，則不能直接使用微積分基本定理來做計算. 例子：$\frac{1}{x^2}$ 在 $[-1,2]$ 上的積分. □

我們從微積分基本定理的第一部分看出，微分與積分之間似乎存在著某種「互逆」的關係：先微分再積分，會回到與原函數相關的結果. 這樣一來，我們自然會好奇：若是先積分再微分，是否也能得到一個對應的關係呢？這正是微積分基本定理的第二部分所回答的問題.

設 $f(x)$ 為一個在區間 $[a,b]$ 上連續的函數，並定義它的「面積函數」為：

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

現在我們來觀察 $F(x)$ 的變化量：

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t=\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t$$

根據積分中間值定理，存在某個 $\xi\in(x,x+h)$，使得：

$$\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t=f(\xi)\cdot h$$

因此，$F(x)$ 的平均變化率可以寫成：

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi)$$

當 $h\to 0$ 時，$\xi\to x$，由於 f 在 x 處連續，我們得到：

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

這正是微積分基本定理的第二部分：若 f 在區間 $[a,b]$ 上連續，則由積分所定義的面積函數 $F(x)$ 不僅可微，且它的導數正好就是原函數 $f(x)$.

結論 5.3 / 微積分基本定理第二部分 (F.T.C. II)

給定在區間 $[a,b]$ 上的連續函數 $f(x)$ 以及 $a\in\mathbb{R}$，那麼：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t=f(x)$$

註 該定理告訴我們積分的變化率等於函數本身. 要特別注意每個函數的變數是誰. 若是針對積分的上下限是 x 的函數，則需要使用連鎖率：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\ \mathrm{d}t&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(h(x))-F(g(x))\right)\\&=f(h(x))\cdot h'(x)+f(g(x))\cdot g'(x)\end{aligned}$$

□

比如，對於容量為 C 法拉的電容，我們知道它的電壓與電流關係是：

$$v(t)=v(t_0)+\frac{1}{C}\cdot\int_0^t i(\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

其中 $v(t)$ 是的電容的跨壓、$i(t)$ 是流經電容的電流、$v(t_0)$ 是電容的初始電壓. 當我們在設計電路時，或許需要得知隨著電流 $i(t)$ 的變化，電容 C 的跨壓可能達到的極值.

這時就可以依照 第 4.1.2 節：極值與凹凸性分析 (第68頁)，將電壓 $v(t)$ 微分後找到臨界點進而得出極值. 而在對 $v(t)$ 微分的過程中，等式的右側即使用了微積分基本定理第二部分的結論.

4. 不定積分與反導函數

在前幾個小節中，我們已經學習了如何通過微積分基本定理來找到定積分的值：對於要計算函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上的積分，首先要找到一個函數 $F(x)$，它的反導函數是 $F'(x) = f(x)$，接著在代入積分的上下限得到積分值是 $F(b) - F(a)$.

在這之中，我們或許都忽略了一個細節. 例如對於 $f(x) = 2x$，我們通常都直接說 $F(x)$ 是 x^2，但仔細想想，實際上 x^2 加上任何常數 C，比如我們可以說 $F(x)$ 是 $x^2 + 5$、$F(x)$ 是 $x^2 - 100$，都可以使 $F(x) = x^2 + C$ 的導函數是 x^2.

因此，為了涵蓋所有可能性，我們使用**不定積分 (Indefinite Integral)** 來統一表達所有反導函數. 當我們寫下不定積分時，它表示的是包含一個任意常數的函數族：

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \iff f(x) = F'(x)$$

其中 C 被稱為積分常數. 這個積分常數 C 恰好代表了所有可能的反導函數，因此不定積分就是反導函數的通式.

註 應該注意定積分與不定積分的區別：定積分的結果是一個實數；而不定積分得結果是一個函數. □

常數函數與冪函數

$$\int 0\,\mathrm{d}x = C \qquad \int x^p\,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \ (p \neq -1)$$

絕對值函數

$$\int \frac{x}{|x|}\,\mathrm{d}x = |x| + C \ (\text{for } x \neq 0) \qquad \int \frac{f'(x)f(x)}{|f(x)|}\,\mathrm{d}x = |f(x)| + C \ (\text{for } f(x) \neq 0)$$

指對數函數

$$\int a^x \ln a\,\mathrm{d}x = a^x + C \qquad \int \frac{1}{x \ln a}\,\mathrm{d}x = \log_a |x| + C$$

三角函數

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C \qquad \int -\sin x\,\mathrm{d}x = \cos x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C \qquad \int -\csc^2 x \, dx = \cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C \qquad \int -\csc x \cot x \, dx = \csc x + C$$

反三角函數

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C \qquad \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C \qquad \int -\frac{1}{1+x^2} \, dx = \text{arccot } x + C$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \, dx = \text{arcsec } x + C \qquad \int -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \, dx = \text{arccsc } x + C$$

Table 5.1: 常見函數與其不定積分

註 該表格其實就是 Table 3.1 反過來寫而已，只要熟悉了每個基本函數的微分，那麼對於積分也能瞭如指掌. □

註 不定積分記得 $+C$、記得 $+C$、記得 $+C$、記得 $+C$、記得 $+C$、記得 $+C$. □

5. 常見積分方法

雖然微積分基本定理看似可以幫助我們找到許多函數的積分，但實際上還有許多函數的反導函數是我們到現在無法解決的，像是：

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} \, dx$$

我們很難直接找到一些函數 $F(x)$ 的導函數是 $F'(x) = f(x) = 2x\sqrt{1+x^2}$. 這時候我們就需要發展一些方法來協助我們簡化問題.

(1). 四大積分基本方法之變數變換 (Substitution Rule)

對於上述的不定積分 $\int 2x\sqrt{1+x^2} \, dx$ ，我們引入「額外變數」來解決它. 這裡的「額外變數」是一個新變數，我們希望通過某種變換變數的方法使不定積分變得更簡單. 例如我們將新變數 u 定義為：

$$u = 1 + x^2$$

除了變數 u 與 x 之間的關係，我們也需要找到微分量 $\mathrm{d}u$ 與 $\mathrm{d}x$ 的關聯. 這可以由 u 對 x 的導數得到：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x^2) = 2x$$

也就是：

$$\mathrm{d}u = 2x\ \mathrm{d}x$$

那麼我們就可以將該不定積分轉變為使用變數 u 來表示：

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{1+x^2}2x\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\ \mathrm{d}u$$

那麼該積分就變得非常簡單：

$$\int \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \int u^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

注意到，我們通常會將複合函數 $f(g(x))$ 裡面那一層函數 $g(x)$ 打包成一個新變數 u，並且為我們會將 u 對 x 微分來找到 $\mathrm{d}u$ 與 $\mathrm{d}x$ 的關係. 因此，一般來說，我們令變數 $u = g(x)$，可以得到：

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)\ \mathrm{d}x = \int f(u)\ \mathrm{d}u = F(u) + C = F(g(x)) + C}$$

反過來看，這也是連鎖率的必然結果：

$$f(g(x))\cdot g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F(g(x))\right)$$

而對於定積分而言，我們還要處理積分上下限的範圍. 有兩種可用的方法. 第一種是我們先單獨計算不包含範圍的不定積分，當使用變數變換方法計算完不定積分之後在將上下限代入：

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \sqrt{2x+1}\ \mathrm{d}x &= \left[\int \frac{1}{2}\sqrt{u}\ \mathrm{d}u\right]_{x=0}^{x=4}\text{, where } u = 2x+1 \\
&= \left[\frac{1}{3}u^{3/2}\right]_{x=0}^{x=4} \\
&= \left[\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\right]_{x=0}^{x=4} \\
&= \frac{1}{3}(2(4)+1)^{3/2} - \frac{1}{3}(2(0)+1)^{3/2} \\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

另一種方式則是一併將上下限變換到以 u 為變數的世界：當 $x=0$ 時，$u = 2\cdot 0+1 = 1$；

當 $x = 4$ 時，$u = 2 \cdot 4 + 1 = 9$，那麼：

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2}\right]_{u=1}^{u=9} \\
&= \frac{1}{3}\left(9^{3/2} - 1^{3/2}\right) \\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

無論如何，都要知道每一個式子中的上下限範圍是 x 的範圍或是新變數 u 的範圍.

例題 5.1 / 積分方法之變數變換

Evaluate the following indefinite integral:

(a) $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \sec x\,\mathrm{d}x$

(a)

$$\begin{aligned}
\int \tan x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int -\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \text{ , where } u = \cos x \\
&= -\ln|u| + C \\
&= -\ln|\cos x| + C \\
&= \ln|\sec x| + C
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int \sec x\,\mathrm{d}x &= \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \text{ , where } u = \sec x + \tan x \\
&= \ln|u| + C \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}$$

註 對於三角函數而言，常常題目本身不容易看出 $f(g(x)) \cdot g'(x)$ 的結構，需要多累積經驗、多嘗試才能夠知道如何湊項. □

(2). 四大積分基本方法之三角代換 (Trigonometric Substitution)

三角代換算式變數變換的一種特殊方法，但它與變數變換不同的是，變數變換是將一些變數是 x 的函數 $f(x)$ 打包成一個簡單的 $u=u(x)$；而三角代換則是為了使用一些三角恆等式將 x 直接替換成 $\sin\theta$、$\sec\theta$、$\tan\theta$：

積分中的表達式	代換方法	代換結果
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$	$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta,\ 0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ or $\pi\le\theta<\frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$

Table 5.2: 積分方法之三角代換的方法

註 為了容易記憶該代換方法，只要記住「根號內的數值必須大於等於零」即可. 比如對於 $\sqrt{a^2-x^2}$，其中的 x 不能超過 a，因此只能使用值域在 $[-1,1]$ 的 $\sin\theta$ 來將 x 代換為 $x=\sin\theta$. □

比如我們要計算積分：

$$\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

若我們嘗試使用單純的變數變換令 $u=9-x^2$，那將會多一個 x^2 在分母無法一併打包. 這時我們就應該考慮使用三角代換. 由於根號內的 $9-x^2=3^2-x^2$ 必須大於等於零，若是我們令 $x=3\tan\theta$ 或是 $x=3\sec\theta$ 都將使一部分的 θ 代入後會沒有定義. 因此依照 Table 5.2 的方法令 $x=3\sin\theta$，有 $\mathrm{d}x=3\cos\theta\ \mathrm{d}\theta$，那麼：

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\sqrt{3^2-(3\sin\theta)^2}}{(3\sin\theta)^2}(3\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\int\frac{9\cos^2\theta}{9\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=\int\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=\int\cot^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\int(\csc^2\theta-1)\,\mathrm{d}\theta\\&=-\cot\theta-\theta+C\end{aligned}$$

這並不是該積分的最終答案，原先積分是以變數為 x 給出的，我們最後也應該將變數換回 x. 由我們定義 $x=3\sin\theta$，亦即 $\sin\theta=\dfrac{x}{3}$，可以畫出以下這個直角三角形來表示

三角關係： 那麼根據此三角關係，就有：

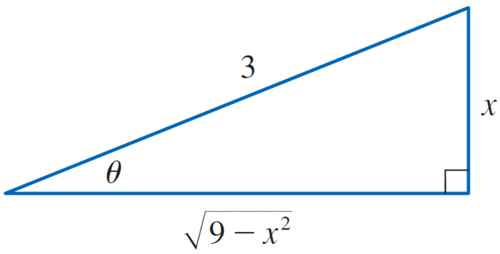


Figure 5.3: 當 $x = 3\sin\theta$ 時以直角三角形表示出的三角關係[4]

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\ ,\ \theta = \arcsin\frac{x}{3}$$

因此最終的積分結果即是：

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{3} + C$$

例題 5.2 / 積分方法之三角代換

Evaluate the following indefinite integral:

$$\int \frac{x}{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,\mathrm{d}x$$

令 $x+1 = 2\sin\theta$，則 $x = 2\sin\theta - 1$ 以及 $\mathrm{d}x = 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$：

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{2\sin\theta - 1}{\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}}(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int \frac{2\sin\theta - 1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int \frac{2\sin\theta - 1}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int \frac{2\sin\theta - 1}{2\sqrt{\cos^2\theta}}(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int \frac{2\sin\theta - 1}{2\cos\theta}(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

[4]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.501)

$$
\begin{aligned}
&= \int (2\sin\theta - 1)\,\mathrm{d}\theta \\
&= -2\cos\theta - \theta + C
\end{aligned}
$$

由 $x+1 = 2\sin\theta$ 可得 $\sin\theta = \frac{x+1}{2}$，所以 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2}$. 且 $\theta = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)$：

$$
\begin{aligned}
&= -2\left(\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C \\
&= -\sqrt{3-2x-x^2} - \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + C
\end{aligned}
$$

註 對於有一次項的二次式可以考慮配方法將其轉換為完全平方式. □

(3). 四大積分基本方法之部分分式 (Partial Fraction)

目前為止，我們學會了變數變換來處理複合函數的積分，也學了三角代換來解決帶有二次式的積分問題. 但對於多項式分式，我們還沒有一套系統性的方法，而部分分式法正是為此而生.

我們在高中時都知道，代數基本定理說明任何多項式在複數系中都至少有一個根. 這引出一個關於實係數多項式的重要推論：虛根成對定理. 該定理指出，如果一個實係數多項式有複數根 $a+bi$ $(b \neq 0)$，那麼它的共軛複數 $a-bi$ 也必定是它的根. 這兩個定理共同保證了任何一個實係數多項式，都可以被分解為一次因式與不可約的二次因式的乘積. 這正是部分分式法的理論基礎.

當我們遇到一個多項式分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的積分時，我們可以將其分解為多個最基本的分式形式，每種形式都對應著分母的因式：

$$
\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{or} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m}
$$

透過這種分解，一個看似複雜的積分就能被拆解為數個簡單、易於處理的積分組合. 部分分式法正是利用這個技巧，將複雜分式轉化為基本分式的組合.

在進行部分分式分解之前，我們必須確保被積分函數是真分式，也就是分子多項式的次數小於分母多項式的次數. 如果不是，我們需要先使用長除法來簡化.

以積分 $\displaystyle\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ 為例，分子次數大於分母，因此先進行長除法：

$$\begin{array}{r}
x^3 + x \\
x^2 - 1 \overline{\smash{\big)}\, x^5 \qquad\qquad + 2} \\
-\, x^5 + x^3 \\
\hline
x^3 \\
-\, x^3 + x \\
\hline
x + 2
\end{array}$$

根據長除法結果，該積分可以被拆解為：

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(x^3 + x + \frac{x+2}{x^2-1}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int (x^3+x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{x+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

前半部分可以直接積分，而後半部分的真分式則需要使用部分分式. 我們將分母 x^2-1 因式分解為 $(x-1)(x+1)$，並將分式拆解為：

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

兩側同乘以 x^2-1 得 $x+2 = A(x+1) + B(x-1) = (A+B)x + (A-B)$. 對照係數可得方程組 $A+B=1$ 與 $A-B=2$，解出 $A=\frac{3}{2}$、$B=-\frac{1}{2}$. 因此，後半部分的積分變為：

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C
\end{aligned}$$

最終的積分結果為：

$$\int \frac{x^5+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

一般而言，當我們對多項式分式 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 進行長除法，將其化為 $f(x) = S(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ 的形式後，若餘式分母 $Q(x)$ 仍是可分解的多項式，我們就需要使用部分分式法將其拆解為最基本的兩種形式. 因此，在應用部分分式法時，熟練掌握以下幾種基本積分至關重要：

- $\displaystyle\int \frac{A}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + C$
- $\displaystyle\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{a(1-n)}(ax+b)^{1-n} + C \quad (\text{當 } n \neq 1)$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

這些積分都可以透過變數變換或三角代換得到，它們是部分分式法不可或缺的基礎.

而一些非多項式分式的積分也能夠通過變數變換將其轉換為多項式分式，例如以下例題：

例題 5.3 / 積分方法之部分分式

Evaluate the following indefinite integral:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,\mathrm{d}x$$

令 $u=\sqrt{x+4}$，則有 $u^2=x+4$ 故 $x=u^2-4$ 且 $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$：

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{u}{u^2-4}(2u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{2u^2}{u^2-4}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

使用長除法可將被積分式簡化，其結果為 $2+\frac{8}{u^2-4}$：

$$\begin{aligned}&= \int \left(2+\frac{8}{u^2-4}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int 2\,\mathrm{d}u + \int \frac{8}{u^2-4}\,\mathrm{d}u \\ &= 2u + 8\int \frac{1}{(u-2)(u+2)}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

對 $\frac{1}{(u-2)(u+2)}$ 使用部分分式，有 $\frac{1}{(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u-2}+\frac{B}{u+2}$，得 $A=1/4$、$B=-1/4$：

$$\begin{aligned}&= 2u + 8\int \left(\frac{1/4}{u-2}-\frac{1/4}{u+2}\right)\mathrm{d}u \\ &= 2u + 2\int \frac{1}{u-2}\,\mathrm{d}u - 2\int \frac{1}{u+2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2u + 2\ln|u-2| - 2\ln|u+2| + C \\ &= 2u + 2\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C\end{aligned}$$

最後將 $u=\sqrt{x+4}$ 代回：

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

(4). 四大積分基本方法之分部積分 (Integration by part)

每條微分法則都有一條相對應的積分法則. 例如，積分的變數變換法對應於微分的連鎖律；而對應於微分乘法法則的積分法則，則稱為分部積分法. 微分乘法法則告訴我們：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x)\cdot g(x)) = F(x)g(x) + f(x)G(x)$$

其中 $F'(x)=f(x)$、$G'(x)=g(x)$. 同時對兩邊積分可以得到：

$$F(x)\cdot g(x) = \int F(x)g(x)\ \mathrm{d}x + \int f(x)G(x)\ \mathrm{d}x$$

移項後有：

$$\boxed{\int F(x)g(x)\ \mathrm{d}x = F(x)\cdot g(x) - \int f(x)G(x)\ \mathrm{d}x}$$

這即是分部積分的基礎，它幫助我們處理有關函數乘積的積分.

比如我們要計算：

$$\int t^2e^t\ \mathrm{d}t$$

這是我們過去無法使用變數變換、三角代換、部分分式處理的. 但在這裡，我們套用分部積分的結論就可以輕鬆得到：

$$\int t^2e^t\ \mathrm{d}t = t^2e^t - \int 2te^t\ \mathrm{d}t$$

對於等號右側的積分，我們先忽略係數 2，同樣可以在使用一次部分積分的結論：

$$\begin{aligned}\int te^t\ \mathrm{d}t &= te^t - \int e^t\ \mathrm{d}t\\ &= te^t - e^t + C\end{aligned}$$

帶回原來的積分式，我們得到：

$$\begin{aligned}\int t^2e^t\ \mathrm{d}t &= t^2e^t - \int 2te^t\ \mathrm{d}t\\ &= t^2e^t - 2(te^t - e^t + C)\end{aligned}$$

$$= t^2e^t - 2te^t + 2e^t + C$$

另一個例子是：

$$\int e^x \sin x \ \mathrm{d}x$$

對他使用部分積分得到：

$$\int e^x \sin x \ \mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \ \mathrm{d}x$$

同樣的，我們對右側的積分繼續使用：

$$\int e^x \cos x \ \mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \sin x \ \mathrm{d}x$$

將其帶回原式得到：

$$\int e^x \sin x \ \mathrm{d}x = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \ \mathrm{d}x$$

這可以看作是一個需要求解未知積分的方程式. 將 $\int e^x \sin x \ \mathrm{d}x$ 移項，可得：

$$2 \cdot \int e^x \sin x \ \mathrm{d}x = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

那麼：

$$\int e^x \sin x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x \left(\sin x - \cos x\right) + C$$

這兩個例子引出了分部積分法使用的兩個時機：

1. 例子 $\int t^2e^t \ \mathrm{d}t$ 告訴我們，當被積分函數的一部分經有限次微分後會變為零時. 這使得分部積分的疊代過程能夠終止，從而得到最終解.

2. 例子 $\int e^x \sin x \ \mathrm{d}x$ 則訴說當被積分函數的一部分經微分後會「循環」時 (例如 $\sin x$、$\cos x$ 或 e^x). 這類問題通常會導致一個包含原始積分的方程式，透過解這個方程式即可求出積分結果.

例題 5.4 / 積分方法之分部積分

Evaluate the following indefinite integral:

$$\int \sec^3 x \ \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x &= \int \sec x \cdot (\sec^2 x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int \sec x \cdot (1 + \tan^2 x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int \sec x \, \mathrm{d}x + \int \sec x \tan^2 x \, \mathrm{d}x \\
&= \int \sec x \, \mathrm{d}x + \int (\sec x \tan x) \tan x \, \mathrm{d}x \\
&= \int \sec x \, \mathrm{d}x + \left(\sec x \tan x - \int \sec^3 x \, \mathrm{d}x \right) \\
\Rightarrow \quad 2 \int \sec^3 x \, \mathrm{d}x &= \sec x \tan x + \int \sec x \, \mathrm{d}x \\
\Rightarrow \quad \int \sec^3 x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x \tan x| + C
\end{aligned}
$$

6. 瑕積分

(1). 第一類瑕積分

到目前為止，我們所討論的定積分，其積分區間和被積函數值皆為有限. 但在許多實際應用中，我們經常會遇到積分區間為無窮大，或函數在特定點上趨近於無窮大的情況比如當電容器對電阻放電時，若要計算電阻在整個放電過程中所消耗的總能量，我們需要對功率函數 $P(t)$ 在時間區間 $t \in [0, \infty)$ 上進行積分：

$$
\text{總能量} E = \int_0^{\infty} P(t) \, \mathrm{d}t
$$

或者在做頻譜分析時需要對信號函數做傅立葉變換，其定義式要求對信號函數 $f(t)$ 在整個時間軸 $(-\infty, \infty)$ 上積分：

$$
\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t
$$

這些例子都促使我們必須對此類「無窮積分」給出明確的定義. 我們將這類積分區間為無窮大的積分，稱為**第一類瑕積分 (Type I Improper Integrals)**：

定義 5.2 / 第一類瑕積分

1. 如果對所有 $t \geq a$，$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 皆存在，且極限 $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，則定義以下瑕積分等於該極限值：

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. 如果對所有 $t \leq a$，$\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 皆存在，且極限 $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，則定義以下瑕積分等於該極限值：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. 如果對於任意實數 a，瑕積分 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ 皆收斂，則定義：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

註 對於瑕積分，若其對應的極限存在，則稱為**收斂 (Convergent)**；若極限不存在，則稱為**發散 (Divergent)**. □

這個定義看起來很複雜，但核心思想很簡單. 我們無法直接計算從某一點到無窮大的「面積」，所以我們用一個變數 t 來代表一個「很遠很遠」的終點，先計算到 t 為止的定積分，然後再讓 t 趨近於無窮大. 如果這個極限存在，我們就說這個瑕積分是收斂的. 先來看一個常見的例子：

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

根據積分的定義，我們無法直接計算它，所以們將它寫成：

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

接著，我們只需要計算出後半段的定積分：

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{t}\right]_{x=1}^{x=t}\\ &= 1-\frac{1}{t}\end{aligned}$$

最後再代入極限得到：

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} 1-\frac{1}{t} = 1$$

該極限是一個有限值，因此我們稱該瑕積分是收斂的，並且積分值為 1.

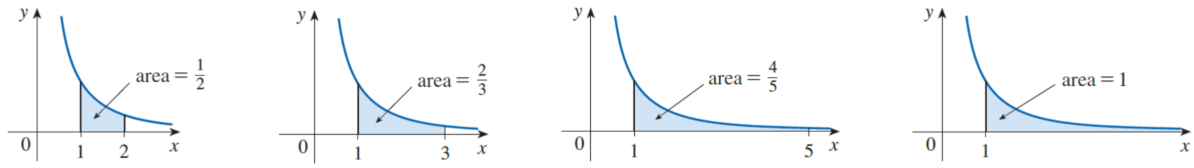


Figure 5.4: 計算第一類瑕積分的方法：先計算一個有限積分區間 $[1, t]$ 的定積分，再將 $t \to \infty$ 得到瑕積分結果[5]

另一個例子是：

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

所以們將它寫成：

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

接著，計算出後半段的定積分：

$$\begin{aligned} \int_1^{t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \Big[\ln|x|\Big]_{x=1}^{x=t} \\ &= \ln|t| - \ln|1| \\ &= \ln|t| \end{aligned}$$

最後代入極限得到：

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \ln|t|$$

該極限是無窮大，不是一個有限值，因此我們稱該瑕積分是發散的.

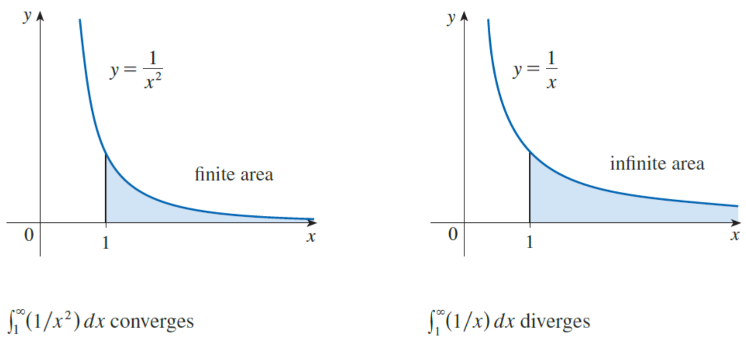


Figure 5.5: 第一類瑕積分的比較：即使被積分函數 $\frac{1}{x}$、$\frac{1}{x^2}$ 只差了一次方，但也能造成瑕積分有不同斂散結果[6]

而對於區間兩邊都趨向無窮的情況，比如：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

[5]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.542)
[6]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.544)

我們只需要任取一個點，將該瑕積分拆為兩個只有單邊趨向無窮的瑕積分，為了方便起見，我們從 $x = 0$ 拆分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{+}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

接著我們只需要分別計算這兩個瑕積分得到：

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\tan^{-1} x\right]_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(\tan^{-1} t - \tan^{-1} 0\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\tan^{-1} t = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left[\tan^{-1} x\right]_t^0 \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left(\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} t\right) \\
&= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

兩段瑕積分都收斂，因此我們可以推論出瑕積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 也是收斂的，並且：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{+}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

要注意的是，對於積分區間兩側都趨向無窮的瑕積分，其定義要求兩個單邊積分都必須收斂. 若其中任一邊發散，則整個積分發散. 這是因為若我們直接對稱地進行計算，可能會得到一個看似合理但實質錯誤的結果. 例如我們考慮以下積分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x$$

根據瑕積分的定義，我們必須將其拆解為兩個單邊積分並分別檢驗：

$$\int_{0}^{\infty} x\,\mathrm{d}x = \infty \quad \text{以及} \quad \int_{-\infty}^{0} x\,\mathrm{d}x = -\infty$$

由於這兩個單邊瑕積分都發散，因此整個積分 $\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}x$ 亦發散. 在瑕積分中，我們不能粗略的使用過去「奇函數在對稱區間上的定積分為零」的結論，像是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x \overset{\star}{=} \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-t}^{t} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{(-t)^2}{2}\right) = \lim_{t\to\infty} 0 = 0$$

但這並不代表原瑕積分收斂，其中的錯誤出在 $\stackrel{\star}{=}$ 不成立. 這種計算方式僅利用了函數在對稱區間上的抵銷，與瑕積分定義中的收斂性是不同的概念.

(2). 第二類瑕積分

相對第一類瑕積分是有無窮長度的區間範圍，第二類瑕積分則是在積分區間內有一些跑到無窮的函數值. 針對這些跑到無窮的不連續點，我們同樣是新增一個參數 t 來逼近該不連續點進而判斷瑕積分的斂散性：

定義 5.3 / 第二類瑕積分

1. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 連續，但在 b 點不連續，若極限 $\lim\limits_{t\to b^-}\displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，則定義以下瑕積分等於該極限值：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. 如果 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 連續，但在 a 點不連續，若極限 $\lim\limits_{t\to a^+}\displaystyle\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，則定義以下瑕積分等於該極限值：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. 若 $f(x)$ 在 a、b 之間的 c 點不連續，但瑕積分 $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$、$\displaystyle\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 皆收斂，則定義：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

註 對於瑕積分，若其對應的極限存在，則稱為**收斂 (Convergent)**；若極限不存在，則稱為**發散 (Divergent)**. □

比如當我們考慮計算：

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

很明顯的，被積函數 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 在 $x=1$ 會有趨向正負無窮的不連續點，並且 $x=1$ 是在我們的積分範圍 $[0,3]$ 之中的. 因此我們需要將該積分拆為兩部分計算：

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

但其中的：

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\Big[\ln|x-1|\Big]_{x=0}^{x=t}$$

$$= \lim_{t\to 1^-}\ln|1-t| = -\infty$$

該單邊極限發散，因此積分 $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$ 也是發散的. 同樣注意，我們並不能如以下方式計算這類帶有不連續點的積分：

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \overset{\star}{=} \Big[\ln|x-1|\Big]_{x=0}^{x=3} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

(3). 判斷瑕積分斂散性的比較方法

有時候我們很難找到一個積分的精確值，但我們卻需要知道它的斂散性，這時就可以通過以下這些比較方法得知：

結論 5.4 / 直接比較審斂法 (Direct Comparison Theorem)

給定連續函數 $f(x)$、$g(x)$，對於任意 $x \geq a$ 有 $f(x) \geq g(x) \geq 0$，那麼：

1. 若 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂，則 $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂.
2. 若 $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ 發散，則 $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 發散.

註 如下圖所示，若上方曲線 $f(x)$ 下方所圍成的面積是有限的，那麼在它之下的 $g(x)$ 所圍成的面積會被 $f(x)$ 「壓制」，也會是有限的；而若是較小的 $g(x)$ 面積是無窮大的，那麼 $f(x)$ 的面積也必須是無窮大的.

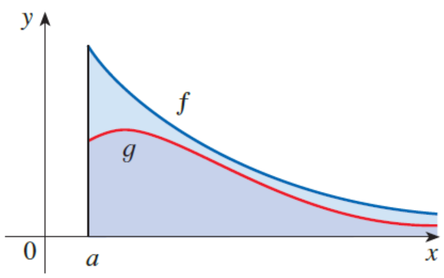


Figure 5.6: 判斷瑕積分斂散性的比較方法：使用 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x \geq a$ 的大小關係來互相判斷其瑕積分的斂散性[7]

[7]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.548)

注意，反過來並不一定成立：若較大的 $f(x)$ 積分發散，那較小的 $g(x)$ 可能發散也可能收斂，無法由 $f(x)$ 的積分確定；反之，若較小的 $g(x)$ 積分收斂，也不能確定 $f(x)$ 積分的斂散性. □

比如當我們想知道以下瑕積分的斂散性：

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

我們無法像過去由計算極限：

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

這是因為我們甚至積不出 $\int_1^t \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 的結果. 這時就可以考慮找一個比 $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ 大或者比他小的函數來只用直接比較審斂法來判斷該積分的收斂性. 由於 $\sin^2 x$ 小於等於 1，而 x^2 會趨向無窮，我們猜測 $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 可能會收斂. 那麼我們就要找一個比他大的函數 $f(x)$，並且驗證 $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 是收斂的：

$$\begin{aligned} & 0 \le \sin^2 x \le 1 && ,\forall x \le 1 \\ \implies & 0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} && ,\forall x \le 1 \end{aligned}$$

我們已經找到一個比 $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ 大的函數是 $\frac{1}{x^2}$，而我們在過去已經定瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 是收斂的. 因此，依照直接比較審斂法，瑕積分 $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 也會是收斂的.

習題

▲ Note：由於師大微乙 (一) 的期末考範圍包含洛必達法則，許多歷屆試題融合了洛必達法則與微積分基本定理，因此該章節習題包含一些洛必達法則的歷屆試題.

► **積分技巧與基本計算**

1. (師大微乙 (一)113 暑 #2) Evaluate the following integrals.

   (a) $\int \left(x+\sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$

   (b) $\int \left(x^2\sin x+\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x$

   (c) $\int \left(\tan^2 x+\tan^4 x\right)\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+3)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$

2. (師大微乙 (一)113 暑 #3) Let a be a real number and $a>0$.

   (a) Evaluate $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$

   (b) If a satisfies the equation $\displaystyle\int_0^a x\ln x\,\mathrm{d}x=0$, find the value of a.

3. (師大微乙 (一)113#2) Evaluate the integrals.

   (a) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{49-x^2}}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int \frac{2x^3+4}{(x-1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\tan x(\sec^2 x+4\sec x)}{\sec^2 x+5\sec x-6}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{x^{10}}+x^2\sec x\tan x+\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

4. (師大微乙 (一)113#6)

   (a) Evaluate $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$. (Note: this integral is an improper integral(瑕積分).)

   (b) Let a be a real number and $a>0$. If a satisfies the equation $\displaystyle\int_0^a \ln x\,\mathrm{d}x=0$, find a.

5. (師大微乙 (一)112#2) Evaluate the following integrals.

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_0^{e}\ln x\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \sec^5 x\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int \frac{\left(1-y^2\right)^{5/2}}{y^8}\,\mathrm{d}y$

6. (師大微乙 (一)111#1) Evaluate the integrals.

 (a) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

 (b) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$

 (c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$

 (d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$

 (e) $\displaystyle\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x\,\mathrm{d}x$

 (f) $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

 (g) $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^3\theta-\tan^2\theta}d\theta$

 (h) $\displaystyle\int_\infty^1 \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}}\,\mathrm{d}r$

7. (師大微乙 (一)110#1) 計算下列積分. (Evaluate the following integrals.)

 (a) $\displaystyle\int_1^4 (\frac{2}{x^3}-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

 (b) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

 (c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

 (d) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

 (e) $\displaystyle\int e^x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

 (f) $\displaystyle\int \frac{2}{16x^2-1}\,\mathrm{d}x$

 (g) $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

 (h) $\displaystyle\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{8x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

8. (師大微乙 (一)110#5) 計算以下瑕積分. (Evaluate the following improper integrals.)

 (a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$

 (b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$

9. (師大微乙 (一)109#1) Evaluate the integrals.

   (a) $\displaystyle\int \sqrt{16-4x^2}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int x^4\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \sin(7x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}\,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int \sec(2x)\tan^2(2x)\,\mathrm{d}x$

   (g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{(\sin^2(\theta)+4\cos^2(\theta))^{3/2}}d\theta$

   (h) $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x$

10. (師大微乙 (一)108#3)

   (a) Does the improper integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge or diverge? Give reasons for your answer.

   (b) Use the part (a) to evaluate $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x \frac{\ln t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$.

11. (師大微乙 (一)108#4) Find each integral.

   (a) $\displaystyle\int \frac{8x}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int \tan^4(5x)\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x+\cos^5 x}\,\mathrm{d}x$ (Hint: Use the substitution $u=\frac{\pi}{2}-x$.)

12. (師大微乙 (一)107#1) Evaluate the integrals.

   (a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{4-x}}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \dfrac{-x^3+5x^2-4x+9}{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}\,\mathrm{d}x$

(e) $\int \dfrac{x}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x$

(f) $\int \tan x\cdot\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

(g) $\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

(h) $\int \sqrt{1+x^{-1}}\,\mathrm{d}x$

13. (師大微乙 (一)107#5) Find the improper integral

$$\int_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

14. (師大微乙 (一)106#1) Evaluate the integrals.

(a) $\int (x+1)5^{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int \dfrac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int e^{\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

(e) $\int \sec^4 x\tan^3 x\,\mathrm{d}x$

(f) $\int \dfrac{\sin x}{\cos x-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int \dfrac{\ln\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$

15. (師大微乙 (一)106#5) 給定下列之瑕積分 (improper integral)，請做以下兩小題.

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{c}{x^2}-\frac{1}{3x}\right)\mathrm{d}x$$

(a) 找出使得上述瑕積分收斂 (converge) 的 c 值.

(b) 求 (1) 答案 c 值對應的之瑕積分值.

16. (師大微乙 (一)105#1) Evaluate the integrals.

(a) $\displaystyle\int_1^4 (3-|x-3|)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \sin^2\theta\tan\theta\sqrt{\cos\theta}d\theta$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sec x\tan x}{2\sec x-1}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x$

17. (師大微乙 (一)104#1) 計算下列積分：

(a) $\displaystyle\int_0^1 (x^3+2x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}y}{y(1+(\ln y)^2)}$

(e) $\displaystyle\int \sec^3(z)\,\mathrm{d}z$

(f) $\displaystyle\int_1^9 \frac{\log_3 x}{x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \sin\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}s}{1+e^s}$

18. (師大微乙 (一)104#5) 判斷下列瑕積分收斂或發散 (請標明使用何種檢定法).

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^6+1}}\,\mathrm{d}x$$

19. (師大微乙 (一)103#1) 底下共有 8 題積分計算題

(a) $\displaystyle\int_1^4 x^2+3x+1\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^4 x\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \tan^2 x \sec^3 x\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int \frac{2z}{\sqrt[3]{z^2+1}}\,\mathrm{d}z$

20. (師大微乙 (一)103#5)

(a) 驗算 $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 8$

(b) 求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \sin^{-1} x\,\mathrm{d}x$

(d) 判斷下列瑕積分收斂或發散，若收斂請計算其值.

$$\int_0^\infty \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

21. (師大微乙 (一)102#1) 計算下列積分:

(a) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+3x+2)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^{2/3} \sqrt{4-9x^2}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \tan^3 x \sec^4 x\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

22. (師大微乙 (一)102#5) 判斷下列瑕積分收斂或發散，若收斂，計算其值.

    (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

    (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx.$

▶ **洛必達法則與微積分基本定理**

23. (師大微乙 (一)113 暑 #1) Apply the L' Hôpital rule to evaluate the following limits.

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

    (b) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{\pi}{k}\right)^k.$

24. (師大微乙 (一)113 暑 #5) Let f be continuous on its domain. Suppose that

$$\int_0^{x^3} f(3t^2-6t)\ \mathrm{d}t = \ln x$$

    Find the value of $f(2025)$. ($\star$ Hint: $2025 = 27 \times 75$)

25. (師大微乙 (一)113#1) Find the limit if it exists.

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln\cos 2x}$

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(e^{2x}+2x\right)^{\frac{2}{x}}$

    (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{\sqrt{x}}^{0} \sin t^2\ \mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$

26. (師大微乙 (一)112#4) Let $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{0} \arctan(t)\ \mathrm{d}t$ for all $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Find the open intervals on which F is increasing or decreasing.

    (b) Evaluate $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x^2}.$

27. (師大微乙 (一)110#2) 使用羅畢達法則計算以下的極限. (Apply L'Hopital's rule to evaluate the following limits.)

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x-\frac{\pi}{2})}{x-1}$

28. (師大微乙 (一)109#2) Evaluate the limit.

(a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

(b) $\lim_{x\to 0^+} (\sin(2x))^{3x}$

29. (師大微乙 (一)107#2) Evaluate the limit

$$\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1}.$$

30. (師大微乙 (一)106#4) 請用羅必達法則 (L' Hôpital Rule) 求極限 $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}$.

31. (師大微乙 (一)105#2) 已知 $\displaystyle\int_0^{x^5} f(2t^2 - t + 1)\, \mathrm{d}t = \ln x$，求 $f(2017)$ 的值.

32. (師大微乙 (一)105#5) 求極限 $\lim_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{4} + \int_1^x t\ln t\, \mathrm{d}t}{x\ln x - x + 1}$ 的值.

33. (師大微乙 (一)104#4) 已知 $\displaystyle\int_{x^2}^{2} f(t^3)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)$, 求 $f(1)$.

34. (師大微乙 (一)103#5) 已知 $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\, \mathrm{d}t = \cos \pi x$, 求 $f(2) =?$

35. (師大微乙 (一)102#6) 令函數 $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \cos t^3 + 1\, \mathrm{d}t$, 求 $f'(x)$.

▶ **黎曼和與積分式分析**

36. (師大微乙 (一)113 暑 #6) Let the function $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ be defined on the interval $[0, 2]$. Now, divide (分割) the interval $[0, 2]$ into n equal sub-intervals (n 等份的子區間). For each(每個) $k = 1, 2, \ldots, n$, let the k-th sub-interval be

$$\left[\frac{2(k-1)}{n}, \frac{2k}{n}\right]$$

and choose an arbitrary point c_k within the k-th sub-interval (在第 k 個子區間中任意選擇一個點 c_k). Also, define the sequence S_n (數列 S_n) as

$$S_n = \frac{2}{n}[f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)].$$

(a) (3 pts) Is $S_1 > S_2$ always true? Give your reason!

(b) (3 pts) What is the maximum value of S_4?

(c) (4 pts) Find the value of $\lim_{n\to\infty} S_n$.

37. (師大微乙 (一)113 暑 #7) Let f be a function such that f is differentiable on $[a, b]$ and f' is continuous on $[a, b]$.

(a) Suppose f is one-to-one on $[a, b]$, prove that

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx = bf(b) - af(a)$$

($\star$ Hint: Let $y = f^{-1}(x)$, then $y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$)

(b) Evaluate the integral $\displaystyle\int_{11}^{30} \sqrt[3]{\sqrt{x} - 3} - 2\,dx$.

($\star$ Hint: Note that $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 3} - 2$ is one-to-one on $[11, 30]$)

38. (師大微乙 (一)113#7) Evaluate $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{7\cdot 2^k\cdot k^6}{n^7} - \frac{4\cdot 2^k\cdot k^3}{n^4} + \frac{2}{n}\right)\right)$.

(Hint: The question is about a limit of some Riemann sum (黎曼和). Find the definite integral that the limit represents and evaluate it.)

39. (師大微乙 (一)111#3) Solve the initial value problem for y as a function of x

$$\sqrt{x^2 - 9}\frac{dy}{dx} = 1, x > 3 \quad , y(5) = \ln 3.$$

40. (師大微乙 (一)111#4) Consider the well-known standard logistic function(標準型邏輯斯諦函數)

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

A typical(典型的) application is a model(模型) of population growth(人口成長), and the logistic functions are widely(廣泛地) used in probability(機率), statistics(統計), machine learning(機器學習), chemistry(化學), social science(社會科學) and so on.

(a) Find all antiderivatives of $f(x)$.

(b) Show that $f(x)$ is a solution of the first-order non-linear ordinary differential equation(一階非線性常微分方程)

$$\frac{dy}{dx} = y(1 - y)$$

with the initial value condition $y(0) = \frac{1}{2}$.

41. (師大微乙 (一)111#5) Consider the error function(誤差函數)

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

in areas(領域) of probability(機率) and statistics(統計).

(a) Is $F(x)$ continuous?

(b) Does the graph of $F(x)$ have horizontal tangent lines?

(c) Does the graph of $F(x)$ have inflection points(反曲點)?

(d) (Bonus) Does the graph of $F(x)$ have horizontal asymptotes(水平漸近線)? (Hint: The direct comparison test below will be useful.)

42. (師大微乙 (一)110#6) (Bonus) 證明下列積分值相等 (Prove the following identity.)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, \mathrm{d}x$$

其中 n 是正整數. (where n is a positive integer.)

43. (師大微乙 (一)108#2) Evaluate the following limit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+9}+\cdots+\sqrt{n^2+(n-1)^2}}{n^2}$$

by using an appropriate Riemann sum.

44. (師大微乙 (一)106#6) 證明下列積分值是相等的.

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^b(1-x)^a \, \mathrm{d}x$$

其中 $a, b > 0$.

45. (師大微乙 (一)104#6) 給一積分式，如下：

$$\int_a^b \sqrt{x-x^2} \, \mathrm{d}x$$

其中 $a, b \in [0,1]$. 式之最大值為何？請說明原因.

46. (師大微乙 (一)102#8) 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(1+\frac{k}{n}\right)}$ (將里曼和 (Riemann sum) 之極限表成定積分，再求出定積分的值.)

Chapter 6
積分應用

上一章我們學會了常用的積分技巧，也知道定積分在單變數函數下，其直觀意義是函數曲線與 x 軸所圍成的面積. 本章，我們將進一步探索積分的應用，包括：計算兩曲線之間的面積、求單一曲線繞特定軸線旋轉所產生的體積與表面積，以及計算函數在區間上的平均值等問題.

1. 計算面積

過去我們定義定積分時，是利用黎曼和的極限. 當我們需要計算曲線 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在區間 $[a,b]$ 之間所圍成的面積時，同樣可以套用這個概念. 我們將 $[a,b]$ 分割成許多小區間，每個小區間的寬度為 Δx，而長方形的高度則為 $f(x)-g(x)$. 如此一來，黎曼和：

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(x^\star)-g(x^\star)\right]\Delta x$$

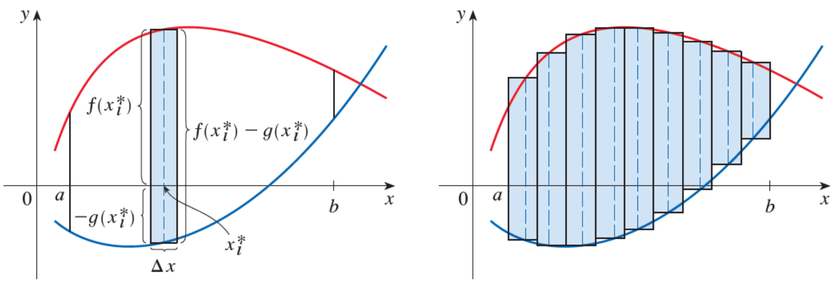
的極限，便是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在區間 $[a,b]$ 之間所圍成的面積：

結論 6.1 / 兩函數之間的面積

給定連續函數 $f(x)$、$g(x)$，並且 $f(x)\geq g(x)$，那麼由 $y=f(x)$、$y=g(x)$、$x=a$、$x=b$ 所圍成的區域面積為：

$$\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]\,\mathrm{d}x$$

註 要特別注意 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的大小關係，若 $f(x)\geq g(x)$，長方形的高是 $f(x)-g(x)$；反之，若 $f(x)\leq g(x)$，則長方形的高是 $g(x)-f(x)$. 或者當尚未確定 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的大小關係時，可以簡易的記為 $|f(x)-g(x)|$. □



(a) Typical rectangle (b) Approximating rectangles

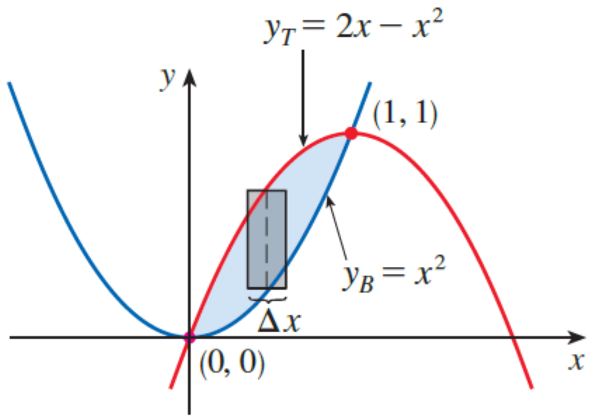
Figure 6.1: 兩函數間的面積計算：以類似黎曼和的過程逼近兩曲線之間的面積[1]

有時，我們需要自己找出積分區間 $[a,b]$：

例題 6.1 / 兩曲線圍成的面積-1[2]

Find the area of the region enclosed by the parabolas $y = x^2$ and $y = 2x - x^2$.

我們首先解聯立方程式來找出兩條拋物線的交點：這得到 $x^2 = 2x - x^2$，或 $2x^2 - 2x = 0$，因此 $2x(x-1) = 0$，所以 $x = 0$ 或 1，交點為 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.



從上圖中我們看到該區域的上下界是 $y_T = 2x - x^2$、$y_B = x^2$，並且該區域位於 $x = 0$ 和 $x = 1$ 之間，那麼每個分割出的小長方形會是：

$$(y_T - y_B)\Delta x = ((2x - x^2) - x^2)\Delta x = (2x - 2x^2)\Delta x$$

所以總面積將會是：

$$\int_0^1 (2x - 2x^2)\ \mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}$$

註 遇到這類積分問題時，可以先畫圖來輔助思考哪一個曲線在上、哪一個在下、積分區間為何. 當遇到兩曲線是交錯的，畫出圖形也能幫助我們思考該如何分割積分區間. □

以上我們討論的都是以 x 為變數的函數 y，但有時我們將 y 視為變數會更為容易計算曲線之間的面積. 類似地，由 $x = f(y)$、$x = g(y)$、$y = c$、$y = d$，其中 $f(y) \geq g(x)$，所圍成區域的面積是：

$$\boxed{\int_c^d [f(y) - g(y)]\ \mathrm{d}y}$$

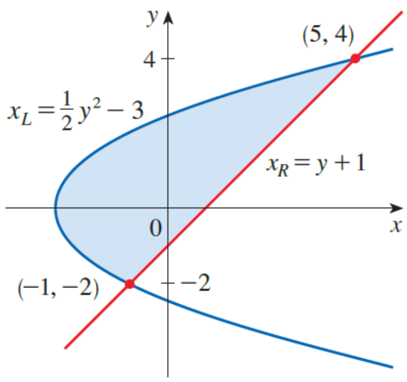
同樣需要注意，長方形的長需要是較大的函數值 $f(y)$ 減去較小的函數值 $g(y)$. 或者尚未確定時可以記為 $|f(y) - g(y)|$.

[1]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.436)
[2]出自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.437)

例題 6.2 / 兩曲線圍成的面積-2[3]

Find the area of the region enclosed by the parabolas $y^2 = 2x+6$ and $y = x-1$.

我們首先解聯立方程式來找出兩條拋物線的交點：這得到 $x^2 = 2x - x^2$，或 $2x^2 - 2x = 0$，因此 $2x(x-1) = 0$，所以 $x = 0$ 或 1，交點為 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.



從上圖中我們看到該區域「左右界」是 $x_L = \frac{1}{2}y^2 - 3$、$x_R = y+1$，並且該區域位於 $y = -2$ 和 $y = 4$ 之間，那麼每個分割出的小長方形會是：

$$(x_R - x_L)\Delta y = ((y+1) - (\frac{1}{2}y^2 - 3))\Delta y = (-\frac{1}{2}y^2 + y + 4)\Delta y$$

所以總面積將會是：

$$\int_{-2}^{4} (-\frac{1}{2}y^2 + y + 4)\ \mathrm{d}y = \left[\frac{-1}{6}y^3 + \frac{y^2}{2} + 4y\right]_{y=-2}^{y=4} = 18$$

註 這更顯示出畫圖這重要性，畫圖更能幫助我們思考要以哪個變數來做積分. □

2. 計算體積

當我們在計算體積時，面臨到與面積相同的小問題：即使我們對體積有一定的直觀概念，但我們尚未使用積分來嚴謹定義如何算體積. 我們國小時都學過，一個在任意高度的截面積都相同的立體稱為**柱體 (Cylinder)**，其體積計算方式是底面積 A 乘以該柱體的高 h. 比如一個半徑為 r、高為 h 的圓柱體體積即是 $A \times h = \pi r^2 \times h$.

而對於非柱體的立體 S，我們可以像用黎曼和近似面積那樣，將 S 沿著固定方向切割成許多小塊，每塊體積使用柱體來近似. 隨著塊數的增加，最終的極限值即是 S 的體積

如上圖 6.2 所示，我們沿著垂直於 x 軸的 $y-z$ 平面切割 S，並且每一分塊使用

[3]出自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.439)
[4]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.448)

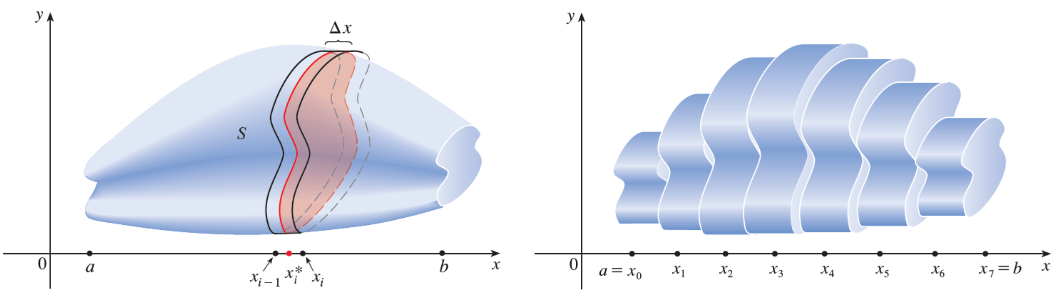


Figure 6.2: 使用積分來計算立體體積：將該立體沿著垂直於 x 方向切割成多塊，每塊體積使用柱體來近似[4]

高為分割寬度 Δx、底面積為在 $x_i^\star$ 的截面積 $A(x_i^\star)$ 來近似. 那麼每一個分塊的體積是：

$$V_i \approx A(x_i^\star) \cdot \Delta x$$

將所有分塊加總起來即是整個 S 的近似體積：

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^\star) \cdot \Delta x$$

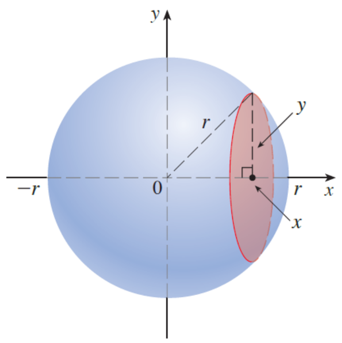
那麼當分割越來越細，即 $n \to \infty$ 時，近似的體積將越來越精確. 因此我們有以下定義：

定義 6.1 / 立體體積

設 S 是一個位於 $x = a$ 到 $x = b$ 之間的立體，且 S 在垂直於 x 處的截面積為 $A(x)$，其中 $A(x)$ 為連續函數，則 S 的體積為：

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^\star) \cdot \Delta x = \int_a^b A(x)\, \mathrm{d}x$$

比如我們來計算一個國小無法處理的體積問題：半徑為 r 的球體體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$. 我們將該球體放在 xyz 座標的圓點，那麼每個截面的半徑將會是 $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$、面積是：



$$A(x) = \pi y^2(x) = \pi(r^2 - x^2)$$

我們將範圍 $a = -r$、$b = r$ 代入上述體積的定義，得到：

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\, \mathrm{d}x$$

[4]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.449)

$$= 2\pi \int_0^r r^2 - x^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

圓盤法

我們發現，我們需要一個截面積函數 $A(x)$ 才能積分，對於不規則立體而言，我們很難找到表示截面積的函數 $A(x)$. 因此在這裡，我們主要討論**旋轉體 (Solod of Revolution)** 體積，其每個截面積都是一個圓形，我們只需知道圓形的半徑即可.

比如我們計算將 $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 區間上旋轉 x 軸後得到的立體體積 V. 我們同樣把 x 分割得到 $\mathrm{d}x$ 作為每個圓盤的寬、πy^2 作為底面積，那麼該立體體積 V 即是：

$$\int_0^1 \pi y^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= \pi \int_0^1 x \, \mathrm{d}x$$
$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]$$

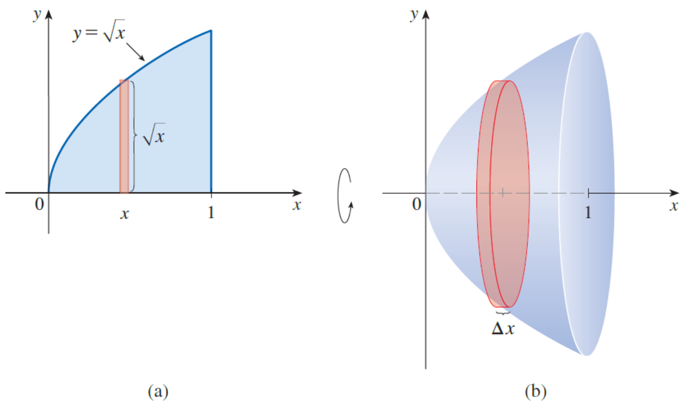


Figure 6.3: 將立體分為多個圓盤並使用柱體體積近似[5]

上述討論是關於曲線繞 x 軸一週的過程，若是繞 y 軸一週，或是兩曲線之間圍成的面積繞 x 軸或 y 軸一週形成有中空的立體，都是類似的方式：這類方法我們稱為**圓盤法 (Disk Method)**、**圓環法 (Washer Method)**：

結論 6.2 / 圓盤法計算旋轉體體積

設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是一個非負的連續函數，若將 $y = f(x)$ 圖形以 x 軸為中心軸

[5]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.450)

旋轉一圈，則所得柱體體積為：

$$V=\int_a^b \underbrace{\pi[f(x)]^2}_{\text{底面積}} \underbrace{\mathrm{d}x}_{\text{高}}$$

設 $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上是一個非負的連續函數，若將 $x=g(y)$ 圖形以 y 軸為中心軸旋轉一圈，則所得柱體體積為：

$$V=\int_c^d \underbrace{\pi[g(y)]^2}_{\text{底面積}} \underbrace{\mathrm{d}y}_{\text{高}}$$

設 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一個非負的連續函數，且 $f_1(x)\le f_2(x)$，若將 $y=f_1(x)$ 圖形為外，$y=f_2(x)$ 圖形為內，以 x 軸為中心軸旋轉一圈，則所得旋轉體體積為：

$$V=\int_a^b \underbrace{\pi([f_1(x)]^2-[f_2(x)]^2)}_{\text{底面積}} \underbrace{\mathrm{d}x}_{\text{高}}$$

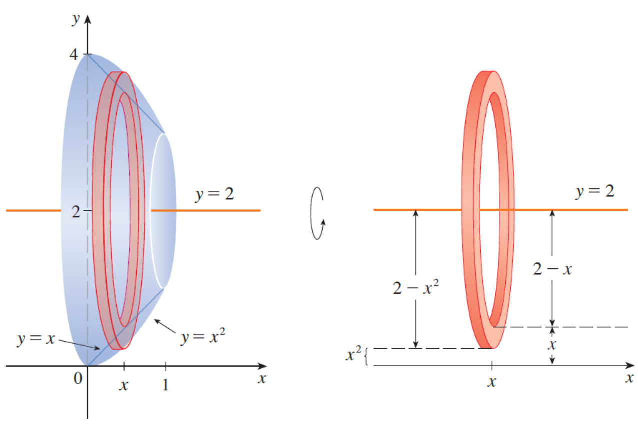
設 $g_1(y)$ 和 $g_2(y)$ 在 $[c,d]$ 上是一個非負的連續函數，且 $g_1(y)\le g_2(y)$，若將 $x=g_1(y)$ 圖形為外，$x=g_2(y)$ 圖形為內，以 y 軸為中心軸旋轉一圈，則所得旋轉體體積為：

$$V=\int_c^d \underbrace{\pi([g_1(y)]^2-[g_2(y)]^2)}_{\text{底面積}} \underbrace{\mathrm{d}y}_{\text{高}}$$

註 圓盤法即是由垂直於旋轉軸的方向切分旋轉體，並按照切割區間使用無數個柱體來近似，只需要畫圖確定好每一個小柱體的半徑與高即可列出積分式並求解. □

例題 6.3 / 圓盤法計算旋轉體體積[6]

Find the volume of the solid obtained by rotating the region enclosed by $y=x^2$ and $y=x$ about the line $y=2$.



沿著垂直於 y 軸做分割，分割出的圓環外半徑是 $r_o = 2-x^2$、內半徑是 $r_i = 2-x$，那麼截面積即是：

$$A(x) = \pi r_o^2 - \pi r_i^2 = \pi(2-x^2)^2 - \pi(2-x^2)$$

因此，該旋轉體體積為：

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\int_0^1 \left[(2-x^2)^2 - (2-x)^2\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

註 一般來說，當我們找到截面積函數 $A(x)$ 或 $A(y)$ 之後，使用積分 $\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$ 或 $\int_c^d A(y)\,\mathrm{d}y$ 即可得出旋轉體體積. 而對於截面積是單純的圓盤來說，直接使用 $A = \pi(\text{半徑})^2$；對於截面積是圓環，則使用 $A = \pi((\text{外半徑})^2 - (\text{內半徑})^2)$. □

剝殼法

有些體積問題很難用前一節的方法來處理. 舉例來說，考慮將 $y = 2x^2 - x^3$ 的曲線下面積繞 y 軸旋轉，以求其所得立體的體積. 如果我們垂直於 y 軸切割，會得到一個圓環但為了計算此圓環的內外半徑，我們必須解出三次函數 $y = 2x^2 - x^3$ 的反函數：

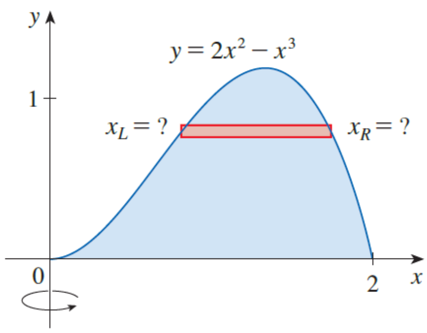
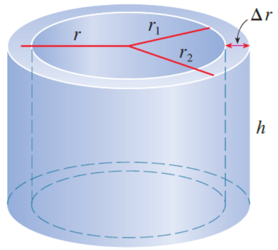


Figure 6.4: 函數 $y = 2x^2 - x^3$ 繞行 y 軸的圖示：若要使用上一小節的圓盤法，需要使用解出兩側的 x_L 與 x_R，這並不容易[7]

有一種方法，稱為**剝殼法 (Cylindrical Shells Method)**，在某些情況下比圓盤法更容易使用. 下圖中展示了一個圓柱殼，其內半徑為 r_1、外半徑為 r_2、高度為 h. 其體積 V 是透過外圓柱的體積 V_2 減去內圓柱的體積 V_1 來計算的：

[6]出自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.452)
[7]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.460)

$$
\begin{aligned}
V &= V_2 - V_1 \\
&= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\
&= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\
&= 2\pi \cdot \frac{r_2 + r_1}{2} \cdot h \cdot (r_2 - r_1)
\end{aligned}
$$



如果我們令殼的厚度 $\Delta r = r_2 - r_1$ 以及殼的平均半徑 $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$，那麼這個圓柱殼的體積公式就變成：

$$V = 2\pi r \cdot h \cdot \Delta r$$

並且可以記為：

$$V = [\text{圓周長}][\text{高}][\text{厚度}]$$

現在，設 S 是將 $y = f(x)$（其中 $f(x) \geq 0$）、$y = 0$、$x = a$ 和 $x = b$ 所圍成的區域（其中 $b > a \geq 0$）繞 y 軸旋轉所得到的立體. 我們將區間 $[a, b]$ 分成 n 個寬度為 Δx 的子

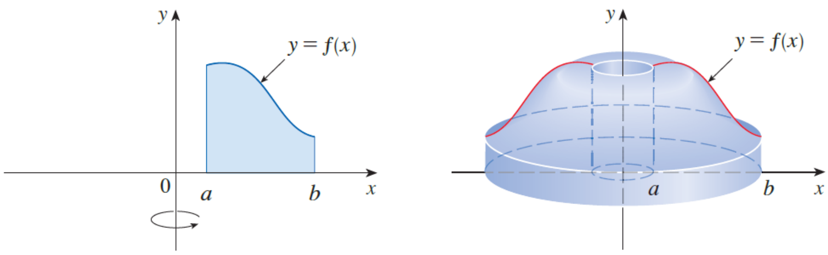


Figure 6.5: 曲線 $y = f(x)$ 繞行 y 軸一週的圖示[8]

區間 $[x_{i-1}, x_i]$，並令 $\bar{x}_i$ 為第 i 個子區間的中點. 如果將底邊為 $[x_{i-1}, x_i]$、高為 $f(\bar{x}_i)$ 的矩形繞 y 軸旋轉，則所得的結果是一個圓柱殼，其平均半徑為 $\bar{x}_i$，高為 $f(\bar{x}_i)$，厚度為 Δx. 那麼其體積為：

$$V_i = (2\pi \bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\,\Delta x$$

因此，立體 S 的體積 V 的近似值，可以由這些圓柱殼的體積總和給出：

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x$$

當 $n \to \infty$ 時，這個近似值會越來越精確. 根據積分的定義，我們知道：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$$

因此，我們有以下公式：

[8]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.460)
[9]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.461)

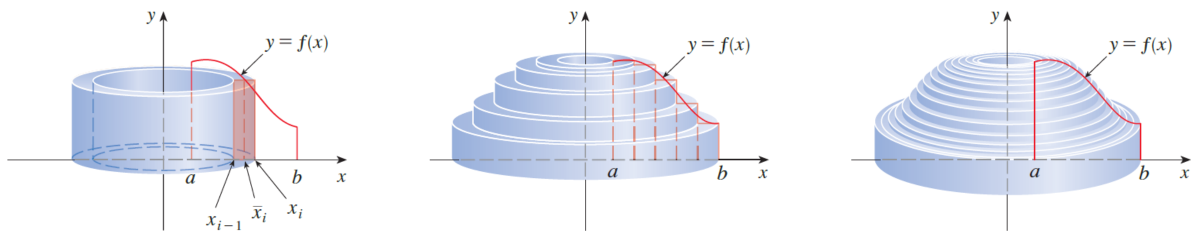


Figure 6.6: 撥殼法的圖示：將區間 $[a, b]$ 分割為無數個子區間，並使用無數的「殼」來近似每一塊的體積[9]

結論 6.3 / 剝殼法計算旋轉體體積

設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是一個非負的連續函數，若將 $y = f(x)$ 圖形以 y 軸為中心軸旋轉一圈，則所得柱體體積為：

$$V = \int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{圓周長}} \cdot \underbrace{(f(x))}_{\text{高}} \underbrace{\mathrm{d}x}_{\text{厚}}$$

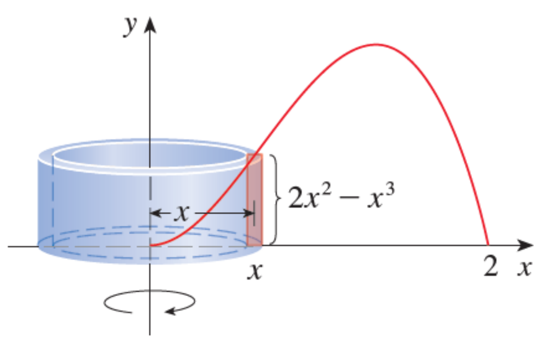
設 $g(y)$ 在 $[c, d]$ 上是一個非負的連續函數，若將 $x = g(y)$ 圖形以 x 軸為中心軸旋轉一圈，則所得柱體體積為：

$$V = \int_c^d \underbrace{(2\pi y)}_{\text{圓周長}} \cdot \underbrace{(g(y))}_{\text{高}} \underbrace{\mathrm{d}y}_{\text{厚}}$$

註 剝殼法即是將旋轉體由內到外一層一層加總，只要畫圖確定好範圍，依照每個殼的體積是圓周 $\times$ 高 $\times$ 厚度做積分即可. □

例題 6.4 / 剝殼法計算旋轉體體積[10]

Find the volume of the solid obtained by rotating the region enclosed by $y = 2x^2 - x^3$ and $y = 0$ about the line y-axis.



沿著垂直於 x 軸做環形分割，分割出每一個殼的圓周長是 $2\pi x$、高是 $2x^2 - x^3$、

厚度是 $\mathrm{d}x$. 因此，該旋轉體體積為：

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 \underbrace{(2\pi x)}_{\text{圓周長}} \cdot \underbrace{(2x^2 - x^3)}_{\text{高}} \underbrace{\mathrm{d}x}_{\text{厚}} \\
&= 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=0}^{x=2} \\
&= 2\pi \left(8 - \frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{16}{5}\pi
\end{aligned}
$$

註 比較此範例的解法與本節開頭的說明，我們發現對此問題而言，剝殼法遠比圓盤法來得容易. 我們不必找出局部極大值的座標，也不必將曲線方程式解成以 y 來表示 x 的形式. 然而在其他範例中，圓盤法可能會比較簡單 □

言簡意賅之，計算旋轉體體積時，選擇圓盤法或剝殼法的關鍵在於判斷哪種方法能讓積分變得更簡單. 核心原則是根據旋轉軸與積分變數的關係來決定：

- 圓盤法 (Disk/Washer Method)：將物體切成與旋轉軸垂直的圓盤或圓環.
  - 積分變數與旋轉軸相同.
    - 繞 x 軸旋轉 $\implies$ 使用 $\mathrm{d}x$ 積分.
    - 繞 y 軸旋轉 $\implies$ 使用 $\mathrm{d}y$ 積分.
  - 當函數容易寫成 $y = f(x)$ 且繞 x 軸旋轉，或寫成 $x = g(y)$ 且繞 y 軸旋轉時，適合使用圓盤法.
- 剝殼法 (Cylindrical Shell Method)：將物體切成與旋轉軸平行的圓柱殼.
  - 積分變數與旋轉軸相異.
    - 繞 x 軸旋轉 $\implies$ 使用 $\mathrm{d}y$ 積分.
    - 繞 y 軸旋轉 $\implies$ 使用 $\mathrm{d}x$ 積分.
  - 當函數容易寫成 $y = f(x)$ 且繞 y 軸旋轉，或寫成 $x = g(y)$ 且繞 x 軸旋轉時，適合使用剝殼法.

在計算前，務必先繪製圖形. 透過分析旋轉軸與函數形式的關係，選擇能讓積分式最簡潔的方法，這就是最適合的選擇.

[10]出自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.462)

3. 計算弧長

在前面的章節中，我們已經學會如何計算單一或多個曲線所圍成的區域面積，以及這些區域繞著特定軸心旋轉後所產生的旋轉體體積. 現在，我們要來處理一個相對簡單的問題：曲線的弧長

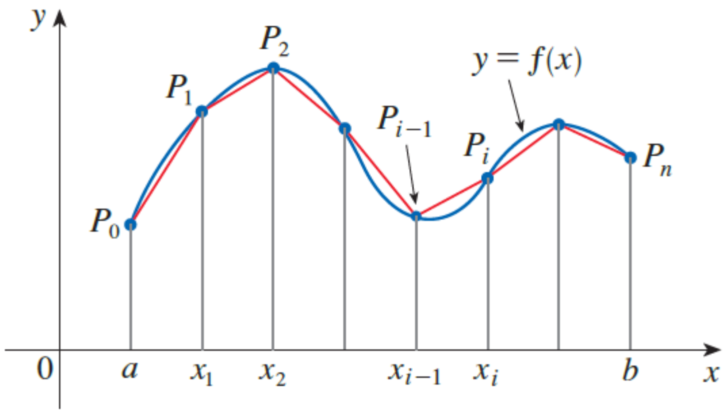


Figure 6.7: 曲線弧長的計算方式：使用多個直線段來逼近真實的曲線弧長[11]

類似的，當面對這類無法直接計算的問題時，我們通常會採取近似的方法. 對於曲線弧長，我們會將其分割成許多小段，並用每小段端點間的直線段來近似該段曲線的長度. 由畢氏定理，每一小段直線的長度都可以表示為;

$$L_k = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

那麼整個曲線的長度就可以用這些直線的總和來逼近

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} L_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x_k^\star)\cdot \Delta x)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_k^\star))^2}\,\Delta x \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

我們有：

[11]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.560)

定義 6.2 / 曲線弧長

給定定義在 $[a,b]$ 上的曲線 $y=f(x)$，若 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上是連續的，則我們說曲線 $y=f(x)$ 從 $(a,f(a))$ 到 $(b,f(b))$ 的弧長是：

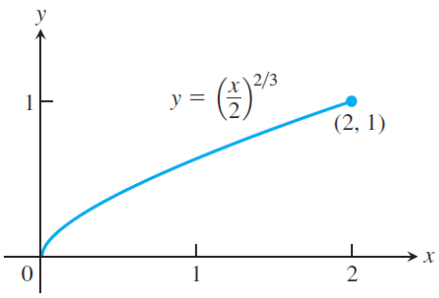
$$L=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

或是曲線可以等價的被表示為 $x=g(y)$，$c\leq y\leq d$，且 $g'(x)$ 是連續的，則曲線弧長也可以被表示為：

$$L=\int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\,\mathrm{d}y$$

例題 6.5 / 曲線弧長計算[12]

Find the length of the curve $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ from $x=0$ to $x=2$.



要使用弧長公式首先要保證 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 在 $x\in[0,2]$ 之間是連續的，我們計算 $f'(x)$ ：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{-1}{3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

發現 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 在 $x=0$ 沒有定義，所以我們不能使用公式 $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ 而是要改用公式 $L=\int_c^d\sqrt{1+(g'(y))^2}\,\mathrm{d}y$. 為了要使用該公式，我們需要將 x 使用 y 表示：

$$\begin{aligned} y&=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}\\ y^{3/2}&=\frac{x}{2}\\ x&=2y^{3/2}\end{aligned}$$

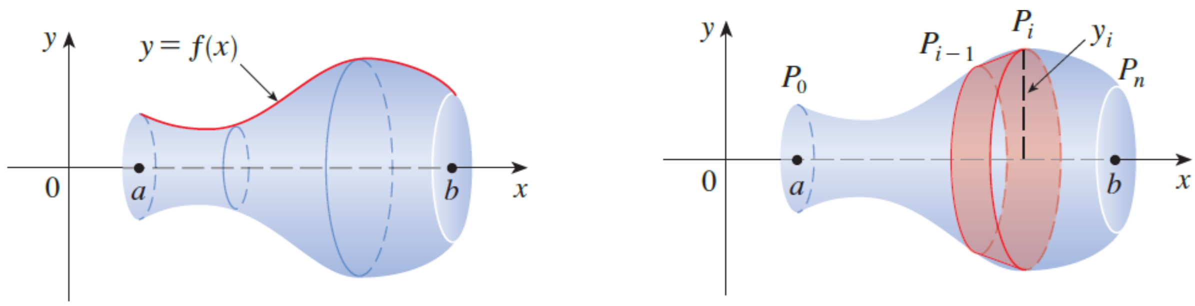
並且 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 3y^{1/2}$ 在 $x \in [0, 2]$ 之間都是連續的，那麼我們即可得到弧長：

$$
\begin{aligned}
L &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{1+9y}\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}(1+9y)^{3/2}\Big]_0^1 \\
&= \frac{2}{27}(10\sqrt{10} - 1) \approx 2.27.
\end{aligned}
$$

註 記得，弧長公式是微分量使用畢氏定理加總後得到的. 並且要注意使用這兩個公式時需要保證導函數是連續的，並且確認積分的上下限. □

4. 計算旋轉體表面積

如同計算曲線圍出的面積能得到旋轉體體積，當我們學會計算弧長後，同樣可以讓曲線繞著固定軸心旋轉，得到一個旋轉體的表面.



(a) Surface of revolution　　(b) Approximating band

Figure 6.8: 曲線旋轉而成的曲面: 每個分割出來的曲面可以用圓筒帶來近似[13]

這個表面積的計算方法，與弧長的概念緊密相連. 我們將曲線分割成許多小段，每一小段都可以看作是一個小直線段. 當這條小直線段繞著旋轉軸旋轉時，它會形成一個圓台的側面. 透過將這些小圓台的側面面積相加，並取其極限，我們就能得到整個旋轉體的表面積：

$$
\begin{aligned}
S &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^\star) \cdot \sqrt{1 + f'(x_i^\star)}\Delta x \\
&= \int_a^b 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

我們有以下結論：

[12]出自 Joel R. Hass, et al., *University Calculus — Early Transcendentals in SI Units* (4 ed. p.396) example 4

結論 6.4 / 旋轉體表面積

給定函數 $f(x) \geq 0$ 在 $[a,b]$ 上可微並導函數連續，曲線 $y = f(x)$ 繞行 x 軸一週後形成的曲面面積為：

$$\int_a^b \underbrace{2\pi f(x)}_{\text{圓周長}} \cdot \underbrace{\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x}_{\text{寬}}$$

給定函數 $g(y) \geq 0$ 在 $[c,d]$ 上可微並導函數連續，曲線 $x = f(y)$ 繞行 y 軸一週後形成的曲面面積為：

$$\int_c^d \underbrace{2\pi g(y)}_{\text{圓周長}} \cdot \underbrace{\sqrt{1+(g'(y))^2}\,\mathrm{d}y}_{\text{寬}}$$

註 這兩個公式可以想像成曲線上點 (x,y) 繞 x 軸或 y 軸旋轉所繪出的圓的周長，在乘上寬度後的加總. □

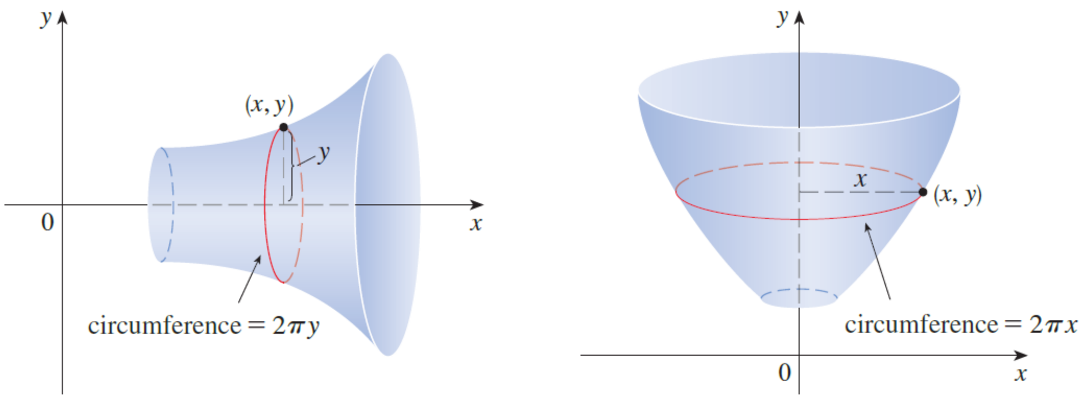


Figure 6.9: 曲線上的點繞行旋轉軸後的結果：曲線上每個點 (x,y) 繞行 x 軸或 y 軸一週後所得到的圓周長是 $2\pi x$ 或 $2\pi y$ [14]

例題 6.6 / 旋轉體表面積計算[15]

The line segment $x = 1-y$, $0 \leq y \leq 1$, is revolved about the y-axis to generate the cone. Find its lateral surface area (which excludes the base area).

要計算曲線 $x = 1-y$ 繞行 y 軸一週後的曲面面積，我們首先要保證計算曲線弧長的公式是可以使用的，亦即需要確認 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$ 在 $y \in [0,1]$ 上連續. 實際計算其導數為：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -1$$

[14]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.570)

在 $y \in [0,1]$ 上連續. 因此該曲面面積為：

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \underbrace{2\pi(1-y)}_{\text{圓周長}} \cdot \underbrace{\sqrt{1+(-1)^2}\,\mathrm{d}y}_{\text{寬}} \\
&= 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 (1-y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2\sqrt{2}\pi \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

註 由於旋轉體表面積公式是出自計算弧長的公式，使用旋轉體表面積公式時要確保導函數是連續的. □

5. 計算函數的平均值

對於有限筆資料 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 而言，我們定義這組資料的**平均值 (Average value)** 為所有資料的總和除以資料的數量：

$$y_{\text{avg}} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

然而，在許多實際應用中，我們面對的是連續變化的數值，例如一天中不斷變動的溫度. 在這種情況下，由於數值是無限多個，我們該如何計算某一段時間內的平均溫度呢？下圖展示了一個溫度函數 $T(t)$，其中 t 以小時為單位，T 以攝氏度為單位，以及對平均溫度 T_{avg} 的估計：

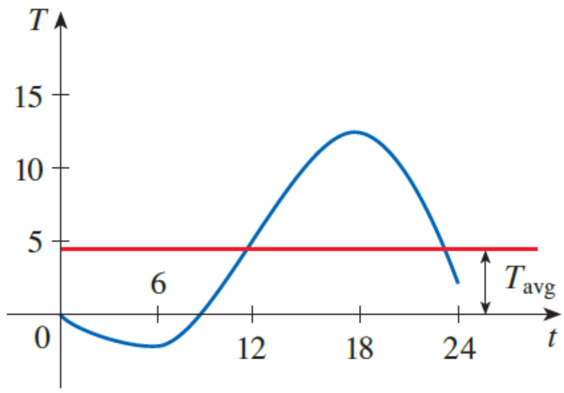


Figure 6.10: 一天之中溫度變化的曲線：藍色曲線記錄了溫度如何變化、紅色高度為我們猜測的溫度平均值[16]

一般來說，讓我們試著計算函數 $y = f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上的平均值. 一個直觀的

[15]出自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.402)
[16]圖片源自 James Stewart, *Calculus Early Transcendentals* (9 ed., p.473)

方法是將區間 $[a,b]$ 分割成 n 個等長的小區間，每個區間的長度為 $\Delta x = (b-a)/n$. 接著，我們在每個小區間中選取一個點 $x_1^*, \ldots, x_n^*$，並計算這些點上函數值的平均：

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

舉例來說，如果 f 是一個溫度函數且 $n = 24$，這表示我們每小時測量一次溫度，然後取其平均. 由於 $\Delta x = (b-a)/n$，我們可以將 n 替換為 $n = (b-a)/\Delta x$，因此平均值變為：

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{(b-a)/\Delta x} &= \frac{1}{b-a}[f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)]\Delta x \\ &= \frac{1}{b-a}[f(x_1^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x] \\ &= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x\end{aligned}$$

當我們讓 n 趨近於無窮大時，我們將計算密集且連續的函數值的平均，例如每分鐘甚至每秒都測量一次溫度並取平均. 根據定積分的定義，這個極限值就是：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

因此我們有：

定義 6.3 / 函數平均值

函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間上的平均值定義為：

$$f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

比如，在台灣的家用市電大多為 110 伏特[17]的 60 **Hz** 交流電：

$$V(t) = 110\sqrt{2}\sin 2\pi\omega t = 110\sqrt{2}\sin 120\pi t$$

當我們想要計算該交流電在一個正半波 (0 至 1/120 秒) 內的平均值，即是：

$$\begin{aligned}V_{avg} &= \frac{1}{\frac{1}{120}}\int_0^{\frac{1}{120}} 110\sqrt{2}\sin(120\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= 120 \cdot 110\sqrt{2}\left[-\frac{\cos(120\pi t)}{120\pi}\right]_0^{\frac{1}{120}}\end{aligned}$$

[17] 110 伏特指的是有效值而非最大值，有效值 110 伏特對應著有 $110\sqrt{2} \approx 155$ 伏特的最大值

$$
\begin{aligned}
&= 120 \cdot 110\sqrt{2}\left(-\frac{\cos(\frac{120\pi}{120})}{120\pi} - \left(-\frac{\cos(0)}{120\pi}\right)\right) \\
&= \frac{220\sqrt{2}}{\pi} \approx 99.02\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

對應著微分有均值定理，在這裡我們也能給出積分的表達方式：

結論 6.5 / 積分均值定理 (The Mean Value Thm. for Integrals)

給定在區間 $[a, b]$ 上的連續函數 $f(x)$，那麼一定存在 $c \in [a, b]$ 使得：

$$f(c) = f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

也就是說：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)$$

註 事實上與微分均值定理是等價的，可以通過微積分基本定理相互轉換. □

習題

► **計算面積或體積問題**

1. (師大微乙 (一)113#3) Find the volume of solid generated by revolving the region bounded by the semicircle $y = \sqrt{4-x^2}$ and the x-axis about the line $y = -1$.

2. (師大微乙 (一)113#4) Let D be the plane region enclosed by $y = -\sqrt{x}$, $x = y$, $y = -2$.

   (a) Sketch the region D.

   (b) Find the volume of the solid generated by revolving the region D about the x-axis.

3. (師大微乙 (一)113#5) Find the area of the surface generated by revolving the curve $x = 2\sqrt{8-y}$, $0 \le y \le 5$, about y-axis.

4. (師大微乙 (一)112#3) Let $\mathcal{R}$ be the region bounded by the curves $x^3 - x + y = 0$, $y = 0$, $x = 0$ and $1 - x = 0$. Use the Shell Method to find the volume of the solid generated by revolving R about the y-axis.

5. (師大微乙 (一)112#6) Let Ω be the region bounded by the curves $y = x^2$ and $y = x + 2$.

   (a) Find the area of the plane region Ω.

   (b) Use the Washer Method to find the volume of the solid generated by revolving Ω about the x-axis.

6. (師大微乙 (一)111#2) Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by the curve $y = x^2$ and the line $y = x + 2$ about the line $x = 2$.

7. (師大微乙 (一)110#3) 計算由 $y = 2 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$ 和 $y = 0$ 所圍的區域，繞 y-軸所得旋轉體的體積. (Find the volume of the solid formed by revolving the region bounded by the graphs of $y = 2 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$ and $y = 0$ about y-axis.)

8. (師大微乙 (一)109#4) Let D be the region bounded by the graphs of $y = x^2+1$, $x = 0$, $y = x$ and $x = 1$.

   (a) Find the volume of the solid generated by revolving the region D about the y-axis.

   (b) Find the volume of the solid generated by revolving the region D about the line $y = -1$.

9. (師大微乙 (一)108#5) Let Ω be the plane region bounded by the graphs of $x + y^2 - 6y + 5 = 0$ and $x - y + 1 = 0$.

   (a) Find the area of the region Ω.

   (b) Find the volume of the solid formed by revolving Ω about the x-axis.

   (c) Find the volume of the solid formed by revolving Ω about the y-axis.

10. (師大微乙 (一)107#4) Let D be the plane region bounded by $y = -\sqrt{x+2}$, $y = x$, $y = 0$. Plot the region D and use the shell method to find the volume of the solid generated by revolving the region D about the x-axis.

11. (師大微乙 (一)106#2) 求由 $y = 4x^2$, $x = 0$ 及 $y = 4$ 在第一象限 (first quadrant) 所圍成的封閉區域對 x 軸旋轉所得到的旋轉體體積 (volume).

12. (師大微乙 (一)105#3) 給定由曲線 $y = x\sqrt{x+1}$ 與 x 軸所圍成的區域，試做下列各題：

    (a) 求該封閉區域的面積。

    (b) 求該區域對 x 軸旋轉所得到的旋轉體體積。

(c) 求該區域對 y 軸旋轉所得到的旋轉體體積。

13. (師大微乙 (一)104#2) 函數 $y = \ln x$ 和 x-軸在區間 $1 \leq x \leq e^3$ 所圍出區域.

    (a) 繞 x-軸旋轉的體積.

    (b) 繞 y-軸旋轉的體積.

14. (師大微乙 (一)104#7) 函數 $y = \ln x$ 和 x-軸在區間 $1 \leq x \leq e^3$ 所圍出區域，繞 $x = 1$ 旋轉的旋轉體積.

15. (師大微乙 (一)103#2) 求兩條曲線 $y = 7 - 2x^2$ 和 $y = x^2 - 2$ 所圍出區域的面積.

16. (師大微乙 (一)103#3) 令曲線 $y = \sin x$ 和 x-軸在區間 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 所圍出的區域，繞 x-軸旋轉所得出的實體為 V，求 V 的體積.

17. (師大微乙 (一)102#2) 求函數 $y = \ln x$ 與 x-軸在 $1 \leq x \leq 3$ 圍出的區域面積 (如圖).

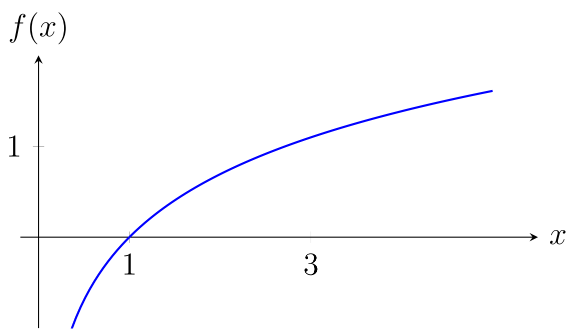


Figure 6.11

18. (師大微乙 (一)102#2) 令曲線 $y = \sin x$ 和 x-軸在區間 $0 \leq x \leq \pi$ 所圍出的區域，繞 y-軸旋轉所得的旋轉體為 V. 求旋轉體 V 的體積.

19. (師大微乙 (一)102#7) 曲線 $y = x^2$ 和 $y = 4$ 圍出的區域繞 $y = 4$ 旋轉. 求旋轉體體積.

► **計算弧長或表面積**

20. (師大微乙 (一)112#1) Find the area of the surface generated by revolving the following curve
$$x = 2\sqrt{4 - y}, \quad 0 \leq y \leq \frac{15}{4}$$
about the y-axis.

21. (師大微乙 (一)110#4) 求曲線 $y^2 = \frac{4}{9}(x + 1)^3$ 由 $x = 2$ 到 $x = 7$ 的弧長.

22. (師大微乙 (一)109#3) Find the arc length the graph of $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $0 \leq x \leq 2$.

23. (師大微乙 (一)107#3) Find the arc length of the graph of the function

$$y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}, \quad 1 \leq x \leq 3.$$

24. (師大微乙 (一)106#3) 求曲線 $y = \displaystyle\int_{\pi/4}^{x} \cot t \, \mathrm{d}t$ 在 $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{4}$ 範圍內的長度 (arc length).

25. (師大微乙 (一)105#4) 求線段 $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}$, $0 \leq x \leq 2$ 對 y 軸旋轉所得到的旋轉體表面積.

26. (師大微乙 (一)104#3) 線段 $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$ 對 x-軸旋轉的表面積.

27. (師大微乙 (一)103#4) 求曲線 $y = \displaystyle\int_{0}^{x} \tan t \, \mathrm{d}t$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 的長度.

28. (師大微乙 (一)102#4) 求曲線 $y = \displaystyle\int_{0}^{x} \sqrt{(\cos 4t)} \, \mathrm{d}t$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 的長度.

▶ **計算平均值**

29. (師大微乙 (一)113 暑 #4) Find the average value of $g(x) = |x| - 1$ on the interval $[-1, 3]$.

30. (師大微乙 (一)112#5) Find the average value of $g(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ on the interval $[-\ln 3, 0]$.

31. (師大微乙 (一)108#1) Find the average vale of $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 7}$ on the interval $[1, 2]$.

CHAPTER 7
數列與級數

1. 數列與其極限

(1). 數列極限的運算性質

(2). 數列連續化求極限法

(3). 夾擠定理

(4). 單調數列與有界數列

2. 級數

(1). 級數的運算性質

3. 絕對收斂和條件收斂

(1). 級數審斂法

(2). 級數審斂法之一：等比級數

(3). 級數審斂法之二：p-級數

(4). 級數審斂法之三：比較審斂法

(5). 級數審斂法之四：極限比較審斂法

(6). 級數審斂法之五：比值審斂法

(7). 級數審斂法之六：根值審斂法

(8). 級數審斂法之七：積分審斂法

(9). 級數審斂法之八：交錯級數審斂法

4. 函數列級數

(1). 冪級數與其運算

(2). 泰勒級數與泰勒定理

(3). 傅立葉級數

Chapter 8
多變數函數微分

1. 多變數函數

(1). 二變數函數極限

(2). 二變數函數極限特殊求法

(3). 二變數函數極限運算定理

(4). 二變數函數的連續

2. 多變數函數的微分

(1). 方向導數與偏微分

高階偏微分

偏微分運算律

(2). 全微分

3. 應用

(1). 梯度與等高線、等值面與切平面

(2). 相對極值、絕對極值和鞍點

4. 拉格朗日乘數法

5. 二變數函數的積分：二重積分

6. 二重積分的極座標轉換

7. 二重積分的應用

8. 三變數函數的積分：三重積分

9. 柱座標與球座標

10. 三重積分的應用

Chapter 9
多變數函數的積分

1. 二重積分

(1). 二維座標轉換

(2). 二重積分的應用

2. 三重積分

(1). 三維座標轉換

(2). 三重積分的應用

Chapter 10
向量函數微積分

1. 向量函數的定義

2. 向量函數的極限、連續與微分

3. 向量函數的積分

(1). 曲線分析

(2). 旋轉體分析

(3). 向量場與保守場

(4). 線積分

(5). 微積分基本定理 for 線積分

(6). 格林定理

(7). 梯度、旋度、散度

(8). 曲面

(9). 曲面分析與面積分

(10). Gauss-Divergence 定理

(11). Stock 定理