10901 微積分乙期中考評分標準

負責題號 1

要用微分法，若用其他方式則不算分。
(斜率方法求解也是算微分法一種)

$y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{48}$ (1分)

$x=64$ (2分) , $dx=-0.048$ (1分) (若答案對，但 dx 為 0.048 則扣一分)

$$\sqrt[3]{63.952}=f(x+dx)\approx f(x)+dy=f(x)+f'(x)dx \text{ (2分)}$$

$$=64^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3(64)^{\frac{2}{3}}}(-0.048)$$

$$=4-0.001=3.999 \text{ (1分)}$$

若計算過程無誤，但參考點並非64，而是63，則整題得3分

10901 微積分乙期中考評分標準

負責題號 2. (a) (b)

2、

(a)、(共5分)

$$f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right),\ x \neq 0$$

$\because$ $\underline{-|x| \le f(x) \le |x|}$ for $x \neq 0$ (1分)

By $\underline{\text{Squeeze Theorem}}$, (1分) (沒用夾擠整題不算分)

$$0 = \lim_{x\to 0}(-|x|) \le \lim_{x\to 0} f(x) \le \lim_{x\to 0}|x| = 0$$

$$\therefore \underline{\lim_{x\to 0} f(x) = 0} \quad (2分)$$

So, f can be made continuous at $x=0$ by redefining

$$\underline{f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0} \quad (1分)$$

#

(b) $\because$ $f(0)=0$ is defined as in (a),

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ doesn't exist. } (5分)$$

#

(※直接微分後寫 $f'(0)$ 不存在只給1分。)

$\underline{\text{要微對}} + \underline{f'(0)\text{不存在}}$

10901 微積分乙期中考評分標準

負責題號 3, 1(a)

$g(x)=5e^{x}-e^{2x}+1$

$g'(x)=5e^{x}-2e^{2x}$

$\quad =e^{x}(5-2e^{x})$ (1分)

$g'(x)=0 \Rightarrow x=\ln\frac{5}{2}$ (1分) $\rightarrow$ is the only critical number in $\mathbb{R}$

$g''(x)=5e^{x}-4e^{2x}$ (1分)

$g''(\ln\frac{5}{2})=5\times\frac{5}{2}-4\times(\frac{5}{2})^{2}=-\frac{25}{2}<0$ (1分)

By Second Derivative Test

$\Rightarrow g(\ln\frac{5}{2})=\frac{29}{4}$ is a relative maximum value (1分)

* critical number 若有寫出 $\ln\frac{5}{2}$ 但同時求出其他值就不給分
* 答案正確，但不是用 Second Derivative Test 不給分 (題目有要求)
* $\ln\frac{5}{2}$ 如果以 $\ln 5-\ln 2$ 表示不給分
* 未明確寫出 $g''(\ln\frac{5}{2})<0$ 就不給分 (i.e. 以區間表示不給分)
* 寫 relative extrema 不給分，需寫出 relative "maximum"
* 寫 relative maximum 出現在 $x=\ln\frac{5}{2}$，但未算出值就不給分

10901 微積分乙期中考評分標準

負責題號 3(b)

法1 3 (b) $g(0)=5e^0-e^0+1=5-1+1=\underline{5}$ 沒寫-1分

存在性 $g(\ln 10)=5e^{\ln 10}-e^{2\ln 10}+1$

$=5\times 10-100+1$

$=\underline{-49}$ 沒寫-1分

$g(0)\,g(\ln 10)<0$ By I.V.T(或勘根或 Intermediate value Thm) 沒寫-3分
在$[0,\ln 10]$必有實根

唯一性 令 $g'(x)=5e^x-2e^{2x}=0$

$\Rightarrow e^x(5-2e^x)=0$

$e^x=\frac{5}{2}$

$x=\ln\frac{5}{2}\quad g(\ln\frac{5}{2})=\frac{29}{4}$

在$[0,\ln\frac{5}{2})$ $\because g(0)=5$ 且 $g'(x)>0$

$\therefore$ 恆正無根 排除$[0,\ln\frac{5}{2})$沒寫-

設 有2根 $r_1\neq r_2\in(\ln\frac{5}{2},\ln 10]$ 使得 $g(r_1)=g(r_2)=0$
符合 Rolle's Thm 使得 $g'(d)=0$, $d\in(\ln\frac{5}{2},\ln 10]$
但 $g'(x)<0$, for $x>\ln\frac{5}{2}$ $\rightarrow\leftarrow$ 故解唯一

沒寫-5分

法2. $g(x)=5e^x-e^{2x}+1=0$

$e^{2x}-5e^x-1=0$

$e^x=\frac{5\pm\sqrt{29}}{2}$ (負不合)

$x=\ln\frac{5+\sqrt{29}}{2}$ 用法2 寫出此x 10分

10901 微積分乙期中考評分標準

負責題號 4(a), (b)

(a) 若無 lim 扣一分

$$原 = \lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2+1})\cdot\frac{(2x-\sqrt{4x^2+1})}{(2x-\sqrt{4x^2+1})}$$ (觀念 5分)

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{2x-\sqrt{4x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{2x-2|x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{2x+2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}$$

(過程 1分)

寫 "−" 扣一分

$= 0$ 此步可直接寫 Ans.

(答案 1分)

* 直接拆成 $\lim_{x\to-\infty} 2x + |2x|$ 等, 直接 0分. "$\infty-\infty$ 不定型"

(b)

〈法一〉 $$原 = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+1}}\right)\cdot\frac{(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)}\cdot\frac{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x+1})}$$

有一項 3分, 兩項 5分. (觀念)

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x+1})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+1)} = -1$$

(1分) (1分)

〈法二〉 $\because \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0}$ 不定型 $\Rightarrow$ By L'Hôpital rule (3分)

$$原 \overset{L}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x)-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}} = -1$$

(3分) (1分)

0

* 未標明不定型 or 使用羅必達 扣3分.

* 使用方法錯誤, 答案正確也不計分. * 無 lim 扣一分

10901 微積分乙期中考評分標準

負責題號 4(C)

標準過程：

$$\lim_{\theta\to 0}\theta^2\cot(7\theta)\csc(4\theta)=\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos 7\theta}{28}\cdot\frac{7\theta}{\sin 7\theta}\cdot\frac{4\theta}{\sin 4\theta}=\frac{1}{28}$$

$$\left(\text{or }=\lim_{\theta\to 0}\frac{7\theta}{\tan 7\theta}\cdot\frac{4\theta}{\sin 4\theta}\cdot\frac{1}{28}\right)$$

以下事項 −7：

錯用夾擠

$0\cdot\infty=0$ or ∞

算錯 $\lim\frac{4\theta}{\sin 4\theta}$、$\lim\frac{7\theta}{\sin 7\theta}$、$\lim\frac{\cos 7\theta}{7\theta}$ etc.

cscx 寫成 $\frac{\cos}{\sin}$、$\frac{\theta}{\sin\theta}$、$\frac{1}{\cos\theta}$ etc.

乘號莫明變加號

$\lim_{\theta\to 0}\theta^2\cot 7\theta\csc 4\theta=\lim_{\theta\to 0}\theta^2\lim_{\theta\to 0}\cot 7\theta\lim_{\theta\to 0}\csc 4\theta$

只有純粹的分式整理，且無答案或錯誤

$\cos 7\theta\cdot 4\theta=\cos 28\theta^2$ etc.

以下事項 ~~−5~~ −3：

未明確說明「因 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 所以使用羅必達」

$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=\theta$　$\lim_{\theta\to 0}\tan\theta=\theta$ etc.

以下事項 −2（次）：

筆誤，且前後計算邏輯無誤

e.g.: $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{49}$

抄題抄錯（只錯一個）

10901 微積分乙期中考評分標準

負責題號 4 (d)

(d) (7分) 已知 $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$，求 $\lim_{t\to 0}\ln\sqrt{(1+t)^{\frac{1}{3t}}}$

$$\lim_{t\to 0}\ln\sqrt{(1+t)^{\frac{1}{3t}}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\ln\left\{\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\ln\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{6}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\boxed{\frac{1}{6}}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \quad (1分)$$

$$=\frac{1}{6}\boxed{\ln}\left[\boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\ln\boxed{e} \quad (1分)$$

$$=\boxed{\frac{1}{6}} \quad (1分)$$

#

不能少寫 $\lim_{t\to 0}$ 少寫扣1分

次方提錯扣1分

少寫扣1分

不能再有 $\lim_{t\to 0}$，多寫扣1分

如過程中有使用羅必達需表示 by 羅必達 (by L'Hospital rule)，沒寫扣1分。

這題要考的概念為 $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$，若沒使用到且最後答案不正確，則視為全錯！

10901 微積分乙期中考評分標準

負責題號 5.(a)(b)

5.(a) (5分)

The domain of f is given by

$$\text{domain}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\} \overset{\text{or}}{=} (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

寫∩扣1分

少寫各扣1分

少一區間扣1分

5.(b) (5分)

$$f(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 4x}{x^2 - 1} = \frac{(2x^2-4x)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2-4x}{x+1} \quad \text{(化簡)}$$

for all $x \neq \pm 1$. Since the first derivative of f is

$$f'(x) = \frac{(4x-4)(x+1) - (2x^2-4x)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x-4}{(x+1)^2} = \frac{2(x^2+2x-2)}{(x+1)^2}$$

Let $x^2+2x-2=0$, $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ $x = -1+\sqrt{3}$ and $x = -1-\sqrt{3}$ are the critical numbers of f.

只寫出"正確"的 $f'(x)$ 扣3分 ⟶ (C小題才寫不算!)

少寫或多寫一個 critical number 都扣一分.

(-1 並不在 Domain 裡面)

10901 微積分乙期中考評分標準

負責題號 5(c)(d)

5(c)

$$f(x)=\frac{2x^3-6x^2+4x}{x^2-1}$$

$f'(x)=\frac{2(x^2+2x-2)}{(x+1)^2}$ and Critical numbers of f is $x=-1-\sqrt{3}$ and $x=-1+\sqrt{3}$

一次微分和 Critical numbers 都寫對得 1 分

$f'(x)>0\ \forall\ x\in(-\infty,-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3},\infty)$
$f'(x)<0\ \forall\ x\in(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$

So,

f is increasing on $(-\infty,-1-\sqrt{3})$ and $(-1+\sqrt{3},\infty)$ 全對才得 2 分
*寫成$(-\infty,-1-\sqrt{3})$，$(-1+\sqrt{3},1)$，and $(1,\infty)$ 也可以

f is decreasing on $(-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3})$ 全對才得 2 分
*寫成$(-1-\sqrt{3},-1)$ and $(-1,-1+\sqrt{3})$也可以

5(d)

$f''(x)=\frac{12}{(x+1)^3}$ 二次微分寫對得 1 分

$f''(x)>0\ \forall\ x>-1$
$f''(x)<0\ \forall\ x<-1$

So,

f is concave downward on $(-\infty,-1)$ 全對才得 2 分

f is concave upward on $(-1,\infty)$ 全對才得 2 分
*寫成$(-1,1)$ and $(1,\infty)$也可以

備註：寫成閉區間每一個扣 1 分

10901 微積分乙期中考評分標準

負責題號 5(e)(f)

5(e)

Since f is not weill-defined at $x = 1$, it follows that the line $x = -1$ (1 分)
is the only vertical asymptote of the graph of f by considering

$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$ or $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \infty$ (4 分)

*註

- 答案寫成 $x = \pm 1$ 且有說明過程得 3 分，寫其他答案得 0 分
- 有過程但沒有答案得 4 分
- 沒有過程但答案正確得 1 分
- 沒有過程且答案錯誤得 0 分

5(f)

From the long division, we see that

$f(x) = \frac{2x^2-4x}{x+1} = (2x\text{-}6) + \frac{6}{x+1}$ (4 分)

So, the line $y = 2x - 6$ (1 分) is a slant asymptote for f

Because $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (2x - 6)] = 0$

*註

- 過程錯誤，例如綜合除法除錯、極限找錯、方程式代錯等，導致答案錯誤者得 0 分
- 有過程但沒有答案得 4 分
- 沒有過程但答案正確得 1 分
- 沒有過程且答案錯誤得 0 分

10901 微積分乙期中考評分標準

負責題號 6.

6. (10分)

$3e^{x+y}+\ln\left(\frac{x}{y^2}\right)-\arcsin(x+y)=3$ 在 $(1,-1)$ 的切線方程式.

$\Rightarrow$ 微分. $3e^{x+y}\cdot\frac{d}{dx}(x+y)+\frac{1}{\frac{x}{y^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y^2}\right)-\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}\cdot\frac{d}{dx}(x+y)=0$.

$\Rightarrow \underbrace{3e^{x+y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)}_{①}+\underbrace{\frac{y^2}{x}\cdot\frac{y^2-x\,2y\frac{dy}{dx}}{y^4}}_{②}-\underbrace{\frac{1+\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1-(x+y)^2}}}_{③}=\underbrace{0}_{④}$ (共3分, 1個寫錯扣1分)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(3e^{x+y}-\frac{2}{y}-\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}-3e^{x+y}-\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\underline{\frac{\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}-3e^{x+y}-\frac{1}{x}}{3e^{x+y}-\frac{2}{y}-\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}}}$ (共2分, 只要有整理有錯就沒分數)

・若是微分完直接代點亦可, 但只要斜率或方程式求錯這部分沒分數)

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-1)}=\underline{\frac{-3}{4}}$ (共2分)

$\Rightarrow \underline{(y+1)=\frac{-3}{4}(x-1)}$ (共3分)