

## 1. Find the Area

**Theorem.** (兩函數之間的面積) 給定連續函數  $f(x)$ 、 $g(x)$ ，並且  $f(x) \geq g(x)$ ，那麼由  $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 、 $x = a$ 、 $x = b$  所圍成的區域面積為：

$$A =$$

而由  $x = f(y)$ 、 $x = g(y)$ 、 $y = c$ 、 $y = d$ ，其中  $f(y) \geq g(y)$ ，所圍成區域的面積則是：

$$A =$$

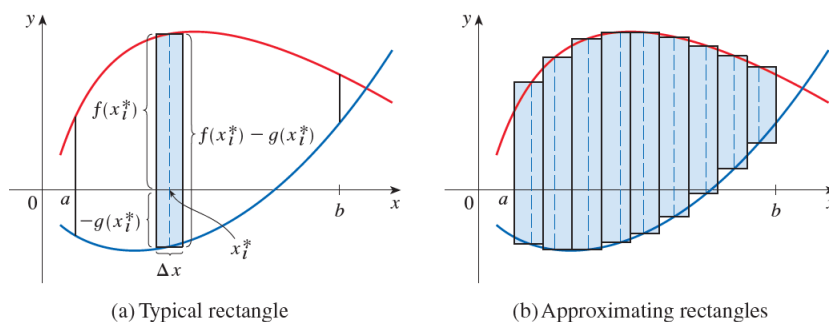


Figure 1: 兩函數間的面積計算：以類似黎曼和的過程逼近兩曲線之間的面積

**Remark** 只要畫圖確定好兩函數的大小關係，再依照黎曼和的觀點累積每個分割出的長方形即可。

**Question** Solve the following question.

- ▷ Find the area of the region enclosed by the parabolas  $y = x^2$  and  $y = 2x - x^2$ .

- Find the area of the region enclosed by the parabolas  $y^2 = 2x + 6$  and  $y = x - 1$ .

## 2. Find the Volume

### 2.1. Disk Method

**Theorem.** (圓盤法計算旋轉體體積) 設  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是一個非負的連續函數，若將  $y = f(x)$  圖形以  $x$  軸為中心軸旋轉一圈，則所得柱體體積為：

$$V =$$

設  $g(y)$  在  $[c, d]$  上是一個非負的連續函數，若將  $x = g(y)$  圖形以  $y$  軸為中心軸旋轉一圈，則所得柱體體積為：

$$V =$$

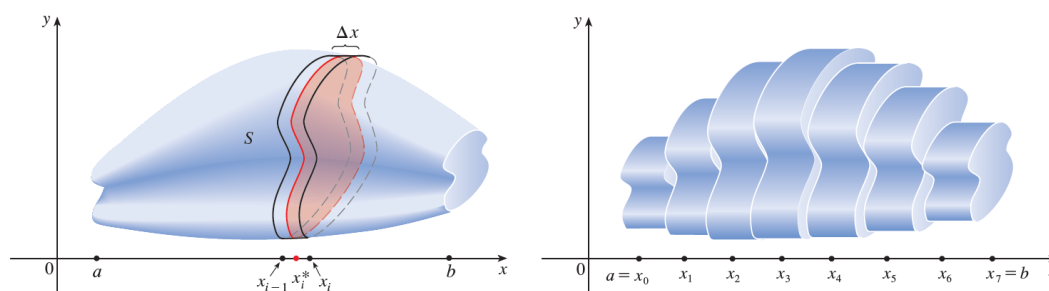


Figure 2: 使用積分來計算立體體積：將該立體沿著垂直於  $x$  方向切割成多塊，每塊體積使用柱體來近似

**Remark** 圓盤法即是由垂直於旋轉軸的方向切分旋轉體，並按照切割區間使用無數個柱體來近似，只需要畫圖確定好每一個小柱體的半徑與高即可列出積分式並求解.

**Question** Solve the following question.

- ▷ Find the volume of the solid obtained by rotating the region enclosed by  $y = x^2$  and  $y = x$  about the line  $y = 2$ .

- (師大微乙 (一)112#6) Let  $\Omega$  be the region bounded by the curves  $y = x^2$  and  $y = x + 2$ . Find the volume of the solid generated by revolving  $\Omega$  about the  $x$ -axis.

## 2.2. Shells Method

**Theorem.** (剝殼法計算旋轉體體積) 設  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是一個非負的連續函數，若將  $y = f(x)$  圖形以  $y$  軸為中心軸旋轉一圈，則所得柱體體積為：

$$V =$$

設  $g(y)$  在  $[c, d]$  上是一個非負的連續函數，若將  $x = g(y)$  圖形以  $x$  軸為中心軸旋轉一圈，則所得柱體體積為：

$$V =$$

**Remark** 剝殼法即是將旋轉體由內到外一層一層加總，只要畫圖確定好範圍，依照每個殼的體積是圓周  $\times$  高  $\times$  厚度做積分即可。

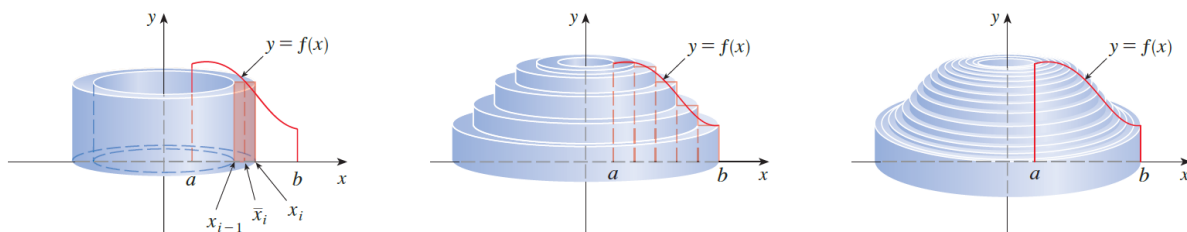


Figure 3: 撥殼法的圖示：將區間  $[a, b]$  分割為無數個子區間，並使用無數的「殼」來近似每一塊的體積

**Question** Solve the following question.

- ▷ Find the volume of the solid obtained by rotating the region enclosed by  $y = 2x^2 - x^3$  and  $y = 0$  about the line  $y$ -axis.

- (師大微乙 (一)112#3) Let  $\mathcal{R}$  be the region bounded by the curves  $x^3 - x + y = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  and  $1 - x = 0$ . Find the volume of the solid generated by revolving  $\mathcal{R}$  about the  $y$ -axis.

計算旋轉體體積時，選擇圓盤法或剝殼法的關鍵在於判斷哪種方法能讓積分變得更簡單。核心原則是根據旋轉軸與積分變數的關係來決定：

- 圓盤法 (Disk/Washer Method)：將物體切成與旋轉軸垂直的圓盤或圓環。
  - 積分變數與旋轉軸相同。

- 當函數容易寫成  $y = f(x)$  且繞  $x$  軸旋轉，或寫成  $x = g(y)$  且繞  $y$  軸旋轉時，適合使用圓盤法.
- 剝殼法 (Cylindrical Shell Method)：將物體切成與旋轉軸平行的圓柱殼.
  - 積分變數與旋轉軸相異.
  - 當函數容易寫成  $y = f(x)$  且繞  $y$  軸旋轉，或寫成  $x = g(y)$  且繞  $x$  軸旋轉時，適合使用剝殼法.

在計算前，務必先繪製圖形. 透過分析旋轉軸與函數形式的關係，選擇能讓積分式最簡潔的方法，這是最適合的選擇.

### 3. Find the Arc Length

**Theorem. (曲線弧長)** 給定定義在  $[a, b]$  上的曲線  $y = f(x)$ ，若  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上是連續的，則我們說曲線  $y = f(x)$  從  $(a, f(a))$  到  $(b, f(b))$  的弧長是：

$$L =$$

或是曲線可以等價的被表示為  $x = g(y)$ ， $c \leq y \leq d$ ，且  $g'(x)$  是連續的，則曲線弧長也可以被表示為：

$$L =$$

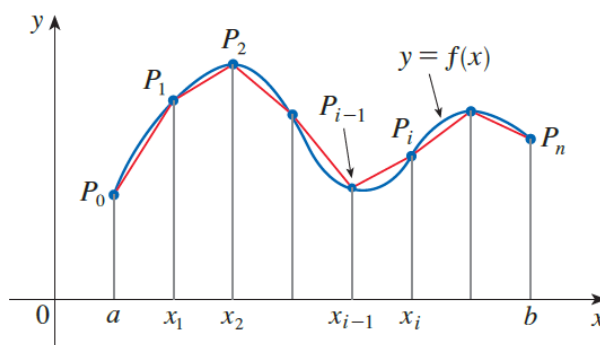


Figure 4: 曲線弧長的計算方式：使用多個直線段來逼近真實的曲線弧長

**Question** Solve the following question.

▷ 求曲線  $y = \int_{\pi/4}^x \tan t \, dt$  在  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  範圍內的長度 (arc length).

- (師大微乙 (一)110#4) 求曲線  $y^2 = \frac{4}{9}(x+1)^3$  由  $x=2$  到  $x=7$  的弧長.

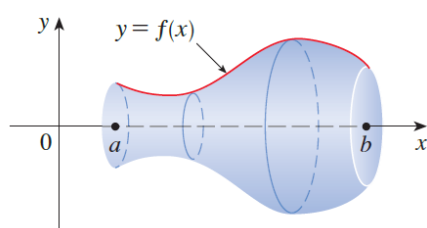
## 4. Find the Surface Area

**Theorem.** (旋轉體表面積) 給定函數  $f(x) \geq 0$  在  $[a, b]$  上可微並導函數連續，曲線  $y = f(x)$  繞行  $x$  軸一週後形成的曲面面積為：

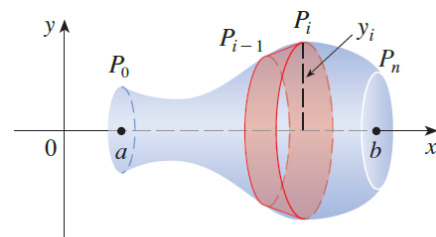
$$A =$$

給定函數  $g(y) \geq 0$  在  $[c, d]$  上可微並導函數連續，曲線  $x = f(y)$  繞行  $y$  軸一週後形成的曲面面積為：

$$A =$$



(a) Surface of revolution



(b) Approximating band

Figure 5: 曲線旋轉而成的曲面: 每個分割出來的曲面可以用圓筒帶來近似

**Question** Solve the following question.

▷ (師大微乙 (一)105#4) 求線段  $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ ,  $0 \leq x \leq 2$  對  $y$  軸旋轉所得到的旋轉體表面積.

▶ (師大微乙 (一)104#3) 線段  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $1 \leq x \leq 2$  對  $x$ -軸旋轉的表面積.

## 5. Find the Average Value

**Theorem.** (函數平均值) 函數  $f(x)$  在  $[a, b]$  區間上的平均值定義為：

$$f_{avg} =$$

**Question** Solve the following question.

▷ (師大微乙 (一)112#5) Find the average value of  $g(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$  on the interval  $[-\ln 3, 0]$ .

- (師大微乙 (一)113 暑 #4) Find the average value of  $g(x) = |x| - 1$  on the interval  $[-1, 3]$ .

---

## overview

---

- 定積分與微積分基本定理

- 定積分定義-黎曼和:  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i$
- 微積分基本定理 (F.T.C. I):  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$
- 微積分基本定理 (F.T.C. II):  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x)$

- 積分技巧

- 變數代換: 設  $u = g(x)$ , 則  $du = g'(x)dx$
- 三角代換: 遇到  $a^2 \pm x^2$  依情形設  $x = \sin x$ 、 $x = \tan x$ 、 $x = \sec x$
- 部分分式: 多項式除法拆分成基本分式
- 分部積分: 依據微分除法規則有  $\int \text{小} \text{大} = \text{大大} - \int \text{另一組}$

- 積分應用

- 算面積:  $A = \int_a^b \underbrace{[f(x) - g(x)]}_{\text{高}} \underbrace{dx}_{\text{底}}$
- 旋轉體體積-圓盤法:  $V = \int_a^b \underbrace{\pi[f(x)]^2}_{\text{底面積}} \underbrace{dx}_{\text{高}}$
- 旋轉體體積-剝殼法:  $V = \int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{圓周長}} \cdot \underbrace{(f(x))}_{\text{高}} \underbrace{dx}_{\text{厚}}$
- 曲線弧長:  $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
- 旋轉體表面積:  $A = \int_a^b \underbrace{2\pi f(x)}_{\text{圓周長}} \cdot \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}_{\text{寬}}$
- 函數平均值:  $f_{avg} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$