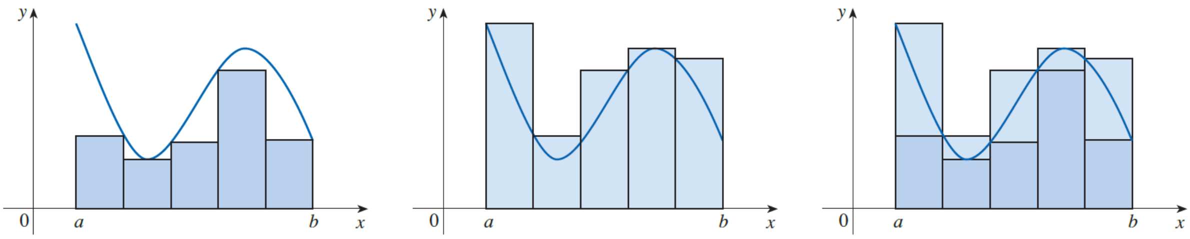
1. Definite Integral

微分描述函數的變化率，而積分則累積函數隨變量的量. 對單變數函數 $f(x)$，在閉區間 $[a, b]$ 上的定積分可視為曲線下與 x 軸圍成的面積.

若 f 在 $[a, b]$ 上片段連續[1]，選任意分割 $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$，$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$，則：

- $R_{f,[a,b],P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ 為 **黎曼和 (Riemann Sum)**，其中 $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$
- $U_{f,[a,b],P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$ 為 **上和 (Upper Sum)**，其中 $M_k = \displaystyle\max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$
- $L_{f,[a,b],P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$ 為 **下和 (Lower Sum)**，其中 $m_k = \displaystyle\min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$



(a) Lower sums (b) Upper sums (c) Upper and lower sums

Figure 1: 上下和與黎曼和關係：上和由最大值決定，下和由最小值決定，黎曼和由任意取樣值決定，因此 $L_{f,[a,b],P} \le R_{f,[a,b],P} \le U_{f,[a,b],P}$.

當分割最長區間 $||P|| \to 0$，若上、下和極限相等為 A，則黎曼和極限亦趨向 A. 此時稱 f 在 $[a, b]$ 上**可積**，定義：

$$\int_a^b f(x)\, dx = A$$

Definition 給定 f 在 $[a, b]$ 上，取任意分割 $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$，$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$，若極限存在：

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

則稱其為 f 的**定積分 (Definite Integral)**：

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i =$$

並說 f 在 $[a, b]$ 上**可積 (integrable)**。

[1]片段連續 (Piecewise continuous) 指不連續點只有可數個

Question Sketch the graphs of the following functions and calculate their definite integrals if they are integrable.

- ▷ $f(x) = 1$, on $x \in [a, b]$
- ▷ $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in \mathbb{Q} \\ -1 & , \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, on $x \in [a, b]$

Question Rewrite the following limit as an integral equivalent using the Riemann sum.

- ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)} =$
- ► $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+4} + \sqrt{n^2+9} + \cdots + \sqrt{n^2+(n-1)^2} + \sqrt{n^2+n^2}}{n^2}$

Property 給定 $f(x)$, $g(x)$ 皆是在 $[a, b]$ 上可積的函數，且係數 $c \in \mathbb{R}$ 為一常數. 那麼：

- $\displaystyle\int_a^b c \cdot f(x) \, \mathrm{d}x =$
- $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big) \, \mathrm{d}x =$
- $\displaystyle\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x =$
- $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} \, \mathrm{d}x =$
- $\displaystyle\int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x =$
- 若 $f(x)$ 為奇函數，$\displaystyle\int_{-a}^a f(x) \, \mathrm{d}x =$
- 若 $f(x)$ 為偶函數，$\displaystyle\int_{-a}^a f(x) \, \mathrm{d}x =$

2. Fundamental Theorem of Calculus, F.T.C.

Theorem. (**微積分基本定理第一部分, F.T.C. I**) 給定在區間 $[a,b]$ 上的可積函數 $f(x)$，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，且 $F'(x)=f(x)$，那麼：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} =$$

並且我們稱 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的**反導函數 (Anti-Derivative)**.

Question Calculate the folloing integral.

- ▷ $\displaystyle\int_a^b x^p\,\mathrm{d}x$
- ► $\displaystyle\int_0^5 2x+5\,\mathrm{d}x$
- ▷ $\displaystyle\int_0^1 2^x\ln 2\,\mathrm{d}x$
- ► $\displaystyle\int_0^1 3^x\,\mathrm{d}x$
- ▷ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$
- ► $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$

Theorem. (**微積分基本定理第二部分, F.T.C. II**) 給定在區間 $[a,b]$ 上的連續函數 $f(x)$，那麼：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t =$$

更一般的，我們有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t =$$

Question Calculate the following expression.

- ▷ $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x^2} e^{5y}\,\mathrm{d}y$

- ▶ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{e^1}^{e^x} \ln u \, \mathrm{d}u$

- ▷ Given $\displaystyle\int_{x^2}^{2} f(t^3)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$, find $f(1)$.

- ▶ Given $\displaystyle\int_{0}^{x^5} f(2t^2 - t + 1)\, \mathrm{d}t = \ln x$, find $f(2)$.

3. Indefinite Integral & Anti-Derivative

為了表示所有反導函數，我們使用 **不定積分（Indefinite Integral）**：

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = F(x) + C \quad \Longleftrightarrow \quad F'(x) = f(x),$$

其中 C 為積分常數.

Remark 定積分的結果是數值、不定積分的結果是一系列的函數、而反導函數是不定積分之中的單一個函數.

Remark 不定積分記得 $+C$、記得 $+C$、記得 $+C$、記得 $+C$、記得 $+C$、記得 $+C$.

Question Calculate the following integral.

- ▷ $\displaystyle\int \mathrm{d}x$

- ▶ $\displaystyle\int t^5 + \sqrt{t}\, \mathrm{d}t$

- ▷ $\displaystyle\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x$

- ▶ $\displaystyle\int \sec x \tan x \, \mathrm{d}x$

▷ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

▶ $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

▷ $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

▶ $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

4. L'Hôpital's rule

Theorem. (洛必達法則, L'Hôpital's rule) 設 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續、在 (a,b) 上可微，若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$，且 $g(x) \neq 0$ 則：

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Question Calculate the following limit.

▷ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

▶ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

▷ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

▶ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x$

▷ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\pi}{x}\right)^x$

▶ $\lim_{x\to 0^+}\left(e^{2x}+2x\right)^{\frac{2}{x}}$

▷ $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\sqrt{x}}^{0}\sin^2 t\ \mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}}$

▶ $\lim_{x\to -\infty}\frac{\int_{x^2}^{0}\tan^{-1} t\ \mathrm{d}t}{x^2} =$

Next week: 變數變換、三角代換、部分分式、分部積分、瑕積分