11101 微積分乙期中考評分標準

題號 1.

$\sin(2\sin^{-1}(-\frac{3}{5}))$

Let $y=\sin^{-1}(-\frac{3}{5})$, $y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ($\because -\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}x\le\frac{\pi}{2}$)

$\sin y=-\frac{3}{5}$. $\therefore \underline{y\in[-\frac{\pi}{2},0]}$ 1分 (未註明 cos y 取正之原因扣1分)

$\therefore \cos y=\frac{4}{5}$

$\therefore \sin(2\sin^{-1}(-\frac{3}{5}))=\underline{\sin(2y)=2\sin y\cos y}$ 1分

$=2\cdot(-\frac{3}{5})(\frac{4}{5})=\underline{-\frac{24}{25}}$ 1分 (寫 $\frac{24}{25}$ 不給分)

註：若是寫出確切角度時 ex: -37°… 即便答案對也不給分，但過程中有寫出倍角公式，得1分

11101 微積分乙期中考評分標準

題號 2、(a)

(法一) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3x + x^2}{\sin x \sin 2x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{L'}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x - 3 + 2x}{\cos x \sin 2x + \sin x \cdot 2\cos 2x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ (L'對得1分)

(知道用L'得1分)

$\overset{L'}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{-9\sin 3x + 2}{-\sin x \sin 2x + \cos x \cdot 2\cos 2x + \cos x \cdot 2\cos 2x + \sin x \cdot (-4\sin 2x)}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

(知道用L'得1分) (L'對得1分)

$= \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$ (代對並求出正解得2分)

(法二) 非直接用L'之解法

整理計算過程(5分,一項錯誤扣2分)及答案(1分)

出現 $\pm\infty$ 之極限,將其視為0計算
或將極限任意拆開者

錯誤過程
範例：$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{2x} - \frac{3}{2x}\right) \neq \lim_{x\to 0}\frac{3}{2x} \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x} - \lim_{x\to 0}\frac{3}{2x}$

個別極限為定值才可拆,此處不可拆!

為不定式不一定為0 $\neq \lim_{x\to 0}\frac{3}{2x} \cdot 1 - \lim_{x\to 0}\frac{3}{2x}$ $(\infty - \infty)$

$\stackrel{?}{=} 0$

則即使答案對仍全不給分!

11101 微積分乙期中考評分標準

題號 2(b)(c)

2(b) 6分

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{5x+2\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{5+2\frac{\sin x}{x}}=\frac{3}{5+2\cdot 0}=\frac{3}{5}$$ 佔3分

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, $\because$ $0\le\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|$ By 夾擠定理 佔3分

* 不可以使用 L'Hôpital Rule

2(c) 6分

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1+x}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right)$$ 佔3分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-x)}{x\sqrt{1+x}\,(1+\sqrt{1+x})}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$ 佔3分

11101 微積分乙期中考評分標準

題號 3(a),(b)

(a) $y=\sec^{-1}(\sqrt{x^2+4})+\cot(3^x)$

$$\frac{dy}{dx}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+4}\,(\sqrt{(x^2+4)-1}}}_{2分}\cdot\frac{2x}{\underbrace{2\sqrt{x^2+4}}_{1分}}\underbrace{-\csc^2(3^x)}_{2分}\underbrace{(\ln 3)\cdot 3^x}_{1分}$$

△沒有化簡，微分對即給分

△ ln3 寫 In3 扣1分

(b) $y=\ln(e^{2x}+e^{\sin 3x})$

$$\frac{dy}{dx}=\underbrace{\frac{1}{e^{2x}+e^{\sin 3x}}}_{2分}(\underbrace{2\cdot e^{2x}}_{2分}+\underbrace{3\cos(3x)\cdot e^{\sin 3x}}_{2分})$$

△若 cos3x 寫成 cosx · cos2x …… → 扣1分

11101 微積分乙期中考評分標準

題號 3(c)

$y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$

$\ln y=\sqrt{x}\ln(\sin x)$ 2分

(*) $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}\frac{1}{\sin x}\cos x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\sin x)$ 2分 (寫錯1項扣1分)

$\frac{dy}{dx}=(\sin x)^{\sqrt{x}}\left[\sqrt{x}\cot x+\frac{\ln(\sin x)}{2\sqrt{x}}\right]$ 2分 (沒代換 $y=(\sin x)^{\sqrt{x}}$ 不扣分)

註：若(*)已被扣一次，不再扣

若 $\frac{dy}{dx}$ 用其他方式寫成 $\frac{dy}{dx}=\sin x^{\sqrt{x}}\sqrt{x}\cot x$ or $\frac{dy}{dx}=\sin x^{\sqrt{x}}\frac{\ln\sin x}{2\sqrt{x}}$ 扣3分

若最後代 y 寫成 $\ln y$、… 扣2分

$y=e^{\ln(\sin x)^{\sqrt{x}}}=e^{\sqrt{x}\ln(\sin x)}$ 2分

$\frac{dy}{dx}=\underbrace{e^{\sqrt{x}\ln(\sin x)}}_{2分}\left(\underbrace{\frac{\ln(\sin x)}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\frac{\cos x}{\sin x}}_{2分}\right)$

11101 微積分乙期中考評分標準

題號 4.

sol:

$$x\tan^{-1}x^2 = e^y$$

微分

$$\underline{1\cdot\tan^{-1}x^2 + x\cdot\frac{2x}{1+x^4} = e^y\cdot\frac{dy}{dx}}$$ ① ① ②

代點 $(1, \ln\frac{\pi}{4})$ ①

$$1\cdot\tan^{-1}1 + 1\cdot\frac{2}{1+1} = e^{\ln\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\underline{\frac{dy}{dx} = 1+\frac{4}{\pi}}$$ ①

line: $\underline{y-\ln\frac{\pi}{4} = (1+\frac{4}{\pi})(x-1)}$ # ①

11101 微積分乙期中考評分標準

題號 5.

$f(x) = x - \pi + \cos x$

(a) $f'(x) = 1 - \sin x$ 1 point , $x \in (-2\pi, 2\pi)$

Since $-1 \le \sin x \le 1$, $0 \le \sin x + 1 \le 2$, $f'(x) = 0$ only if $x = \frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2}\pi$

$\Rightarrow f'(x) \ge 0$, f is increasing on $(-2\pi, 2\pi)$ 1 point

$\Rightarrow f$ is 1-1 on $(-2\pi, 2\pi)$ 1 point. No point without explaination.

$\Rightarrow f$ has an inverse on $(-2\pi, 2\pi)$

(b) $f(\pi) = \pi - \pi + \cos\pi = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = \pi$ 1 point

$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-1))} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{1 - \sin\pi} = 1$ 3 points

1 point

Alternatively, $(f^{-1})'(f(\pi)) = \frac{1}{f'(\pi)} = 1$ 3 points

1 point

Note 1: inverse: 反函數 / 反元素

reflection point: 反曲點 root: 根

$(-2\pi, 2\pi)$: -2π 到 2π 的開區間

Note 2: $x = f^{-1}(x) - \pi + \cos f^{-1}(x)$ is true if $f^{-1}(x)$ exists,

but it does not imply the existence of $f^{-1}(x)$.

Continuity and onto, also doesn't imply it.

11101 微積分乙期中考評分標準

題號 6

存在性 (4分)

Let $f(x)=x+e^{x^3}$

$f(0)=0+e^0=1>0$ 1分.

$f(-1)=-1+\frac{1}{e}<0$. 1分

$\because$ $f(x)$ is cont. on $(-\infty,\infty)$ 一定要寫！1分

$\therefore$ By the intermediate value Thm, (I.V.T) By__Thm 要寫！

there exist at least one root on $(-\infty,\infty)$. 1分.

唯一性 (4分)

解一 Suppose $f(x)=0$. has two roots a, b. $a\neq b$

$\because$ f is cont. on $[a,b]$, f is diff on (a,b) 一定要寫！1分.

and $f(a)=f(b)=0$.

By the Rolle's Thm, $\exists\, c\in(a,b)$ s.t. $f'(c)=0$. By__Thm, 要寫！1分.

But $f'(x)=1+3x^2e^{x^3}>0$. $\forall x\in\mathbb{R}$. $\rightarrow\leftarrow$ 未說明清楚扣1分.

$\therefore$ $f(x)$ has exactly one real root. $f'(x)$ 寫錯扣1分.

解二 $\because$ $f'(x)=1+3x^2e^{x^3}>0$. $\forall x\in\mathbb{R}$ 如果 $f'(x)$ 寫錯後面不給分！

$f(x)$ is increasing on $(-\infty,\infty)$

$\therefore$ $f(x)$ has exactly one real root. 未說明遞增.扣2分

✱若存在性和唯一性的順序寫反.扣1~2分.

(依照敘述的完整性和合理性斟酌扣分)

11101 微積分乙期中考評分標準

題號 7.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x^2-7) = x^{\frac{7}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x^2-1) = \boxed{\frac{7}{3}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x^{\frac{2}{3}}}}$ 佔2分.

$f'(x)=0 \Rightarrow \underline{x=1,-1}$

$f'(x)$ not exist $\Rightarrow \underline{x=0}$

$\therefore$ critical point: $\boxed{0}$ $\boxed{1,-1}$

$\downarrow$ 1分 $\downarrow$ 1分.

f': $+$ on $(-\infty,-1)$, $-$ on $(-1,0)$, $-$ on $(0,1)$, $+$ on $(1,\infty)$

f: $\uparrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\uparrow$

$\Rightarrow$ ☆ 沒有 f, f', f'' 做為判斷依據，直接寫出 local extreme 不給分!

$\therefore$ f has relative max at $\underline{x=-1}$ 1分

$\Rightarrow \underline{f(-1)=6}$. 1分

f has relative min at $\underline{x=1}$ 1分

$\Rightarrow \underline{f(1)=-6}$. 1分

11101 微積分乙期中考評分標準

題號 8.

(a) 垂直漸近線：
(6分)

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{2x^2+6}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{2x^2+6}{x+1} = -\infty$$

$\Rightarrow f(x)$ is not defined at $x=-1$

過程 2分，（沒區分左右極限，只寫 $x\to-1$ 沒分段，給 1分）

$\Rightarrow$ vertical asymptote : $x=-1$ （漸近線寫對，給 1分）

斜漸近線：

$$\frac{2x^2+6}{x+1} = (2x-2) + \frac{8}{x+1} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(2x-2)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{8}{x+1} = 0$$

（過程 2分，計算錯誤但漸近線對，給 1分）

$\Rightarrow$ slant asymptote : $y=2x-2$ （漸近線寫對，給 1分）

(b)
(6分)

$$f'(x) = \frac{2(x^2+2x-3)}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{2(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}}$$

（$f'(x)$ 算出來，給 2分，沒化簡不扣分）

f is increasing on $(-\infty,-3)$, $(1,\infty)$

f is decreasing on $(-3,-1)$, $(-1,1)$

共四個區間，一個區間 1分.

(c)
(6分)

$$f''(x) = \frac{(4x+4)(x+1)^2-2(x+1)(2x^2+4x-6)}{(x+1)^4} = \boxed{\frac{16}{(x+1)^3}}$$

（$f''(x)$ 算出來給 2分，沒化簡不扣分）

f is concave upward on $(-1,\infty)$

f is concave downward on $(-\infty,-1)$

（共兩個區間，一個區間 2分）

11101 微積分乙期中考評分標準

題號 9. (a)(b)

6分 (a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$$

$0 \le |x^2 \sin(\frac{1}{x})| \le x^2$, By Squeeze Thm 得1分

$\lim_{x \to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$ 得1分

$f(0) = 0$ 得1分

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ 得3分 $\therefore$ f is cont at 0

6分 (b)

$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ 得1分 $= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \sin\frac{1}{h}$. 得1分

$0 \le |h \sin(\frac{1}{h})| \le |h|$, By Squeeze Thm 得1分

$\lim_{h \to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0$ 得2分

$\therefore$ f is diff at 0 得1分 (只有答案沒過程得0分)