1. Differential Rule

1.1. scalar product, add, multiplication, division, compose

Remark 目前為止我們對微分的掌握僅有微分的極限定義式，但若是每見到一個新函數都使用極限定義式來計算其導函數的話，會顯得非常沒有效率. 因此我們將從定義推論出一些導函數的運算定理.

Theorem. **(Differential Rule)** 給定 $f(x)$、$g(x)$ 在 $x = x_0$ 可微，我們有：

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c \cdot f)(x_0) = c \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x_0))$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f + g)(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x_0)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x_0))$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g)(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x_0)) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x_0))$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x_0)) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x_0))}{g^2(x_0)}$

給定 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可微、$g(x)$ 在 $x = f(x_0)$ 可微，我們有：

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g \circ f)(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(f(x_0)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f(x_0)}g(f(x_0)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x_0)$

Remark 前兩點表示微分對於係數積與加法可以直接拆開，但三四點則表示對於乘法與除法並不能直接「拆開」($(fg)' \neq f' \cdot g'$)；最後一點是微分對於複合運算的特性，其表明對於複合函數的微分需要「一層一層」微進去. 因此它又被稱為**連鎖率 (Chain Rule)**.

Question Suppose that $f(4) = 2$, $f'(4) = 5$, $g(4) = 6$, and $g'(4) = -3$. Find $h'(4)$ for some h defined below.

- ☐ $h(x) = 3f(x) + 8g(x)$
- ☐ $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
- ☐ $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- ☐ $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x) + g(x)}$

Question Find the derivative $y' = dy/dx$ of following function.

- ☐ $y = (2x + 5)^{\pi}$

- ☐ $y = \sin^2(x)$ and $y = \sin(x^2)$
- ☐ $y = \tan(\sec(\cos(x)))$
- ☐ $y = 2^{3^{4^x}}$

Remark 要對複合函數形如 ${\color{green}\blacksquare}({\color{blue}\blacksquare}(x))$ 微分，需要先不動內層的 ${\color{blue}\blacksquare}(x)$、先微外面的 ${\color{green}\blacksquare}'({\color{blue}\blacksquare}(x))$ 後，再乘上內層的微分 ${\color{blue}\blacksquare}'(x)$，最後得到 ${\color{green}\blacksquare}'({\color{blue}\blacksquare}(x)) \cdot {\color{blue}\blacksquare}'(x)$. 當然，若遇到更多層的複合函數，就需要一層一層微進去.

若是使用萊布尼茲符號系統來看，即 $\dfrac{\mathrm{d}{\color{green}\blacksquare}}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}{\color{green}\blacksquare}}{\mathrm{d}{\color{blue}\blacksquare}} \cdot \dfrac{\mathrm{d}{\color{blue}\blacksquare}}{\mathrm{d}x}$，可以簡單記為等號右側分子分母的 $\mathrm{d}{\color{blue}\blacksquare}$ 互相「抵消」了.

1.2. inverse function

若函數 f 是將變數 x 映射到 y（表示為 $x \longmapsto y$），那麼它的反函數 f^{-1} 則是把 y 當作輸入變數，反過來映射變成 $y \longmapsto x$，也就是說，它將 x 表示成 y 的函數 $f^{-1}(y)$. 那麼我們就有：

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

同時兩邊對 x 微分得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(f^{-1}(x)) = 1$$

等號左邊運用連鎖率：

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = 1$$

移項後我們就得到了反函數的微分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

因此可以給出以下結論：

Theorem. (Differentiation of Inverse Function) 給定函數 f，若其導函數存在且不為零，那麼其反函數 f^{-1} 存在，並且：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

其中 $y = f(x)$.

Question

- ☐ Given a function $f(x) = x^2$ defined on $x > 0$, find $(f^{-1})'(4)$. More generally, find $(f^{-1})'(x)$.
- ☐ Show that $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

☐ Show that $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1.3. implicit functions

隱函數是由方程式隱含表示的函數關係，雖然整體上未必一對一，但在局部區域可化為顯函數來處理.

- 顯函數 Explicit Function: $y = f(x) = \cdots$一些只有 x 的式子$\cdots$
- 隱函數 Implicit Function: $F(x,y) = \cdots$一些有 x, y 的式子$\cdots = 0$

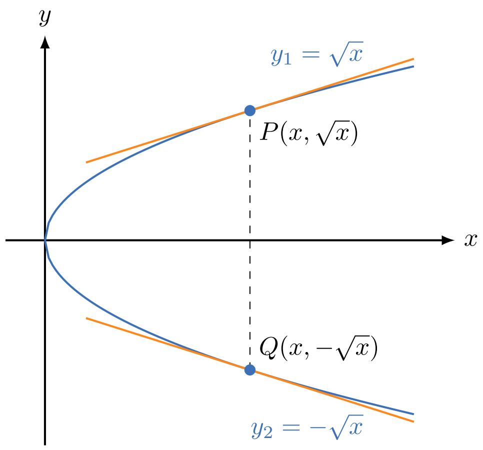

Figure 1: 隱函數 $f(x,y) = y^2 - x = 0$ 的圖形

Question Find the derivative $y' = dy/dx$ of following function at the given point.

☐ $x^2 + \sqrt{xy} + y^2 = 72$ at $(x_0, y_0) = (2, 8)$

Question Show that $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Question Use **Logarithmic Differentiation** to find the derivative $y' = dy/dx$ of following function.

☐ $y = \dfrac{(x^2+1)(x-3)^2}{(x+2)(x^2+4)}$

☐ $y = x^x$

2. Extreme Value Analysis

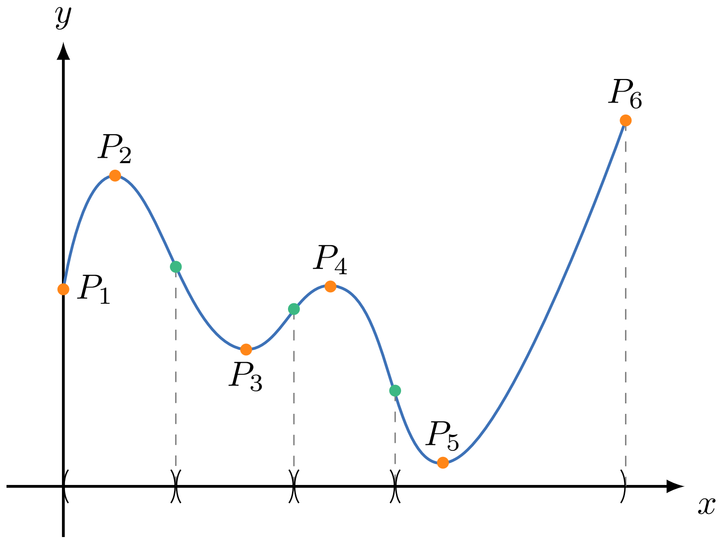

Figure 2: 函數的性狀分析：橘色點為極值、綠色點為反曲點

- 一階測試
  - 遞增 Incresing $\Rightarrow f'(x) > 0$
  - 臨界點 Critical Point $\Rightarrow f'(x) = 0$
  - 遞減 Decresing $\Rightarrow f'(x) < 0$
- 二階測試
  - 凹向上 Concave Upward $\Rightarrow f'(x) > 0$
  - 反曲點 Inflection Point $\Rightarrow f'(x) = 0$
  - 凹向下 Concave Downward $\Rightarrow f'(x) < 0$

Question Sketch the graph of $f(x) = x^3 - 12x - 5$ on $[-3, 3]$.

Theorem. (**均值定理 (Mean Value Theorem, M.V.T.)**) 給定 f 是一個在區間 $[a, b]$ 上連續、在 (a, b) 上可微的函數，則存在 $c \in (a, b)$ 使得：

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

特別地，當 $f(a) = f(b) = 0$ 時，稱為洛爾均值定理 (Rolle's Mean Value Thm).

Question Show that the equation $2x^5 + 7x = 1$ has exactly one real solution.

3. Tangent Line & Linearization

要確定一條直線，只需要給定它通過的一點 (x_0, y_0) 與它的斜率 m. 而對於切線而言，切線斜率就恰好是函數在該點的導數 $f'(x_0) = m$. 因此，若函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可微，那麼 $f(x)$ 的函數圖形在 $x = x_0$ 的切線方程式 $L(x)$ 即是：

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Question 試求 $x^y = y^x$ 在點 $(1, 1)$ 處的切線方程式.

當我們繪製出 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的切線 $L(x)$ 之後，我們將函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 附近的行為都以切線 $L(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ 近似. 這時我們稱 $L(x)$ 是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的**線性化 (Linearlization)**. 並且實際的變化量 Δy 就可以用 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$ 來近似.

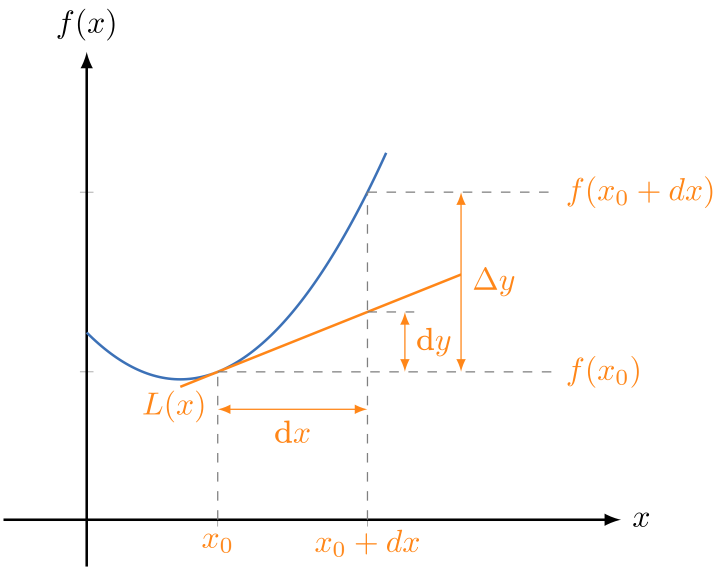

Figure 3: 使用微分量做估計：當 $\mathrm{d}x$ 很小時，變化量 Δy 可用 $\mathrm{d}y$ 近似

Question 試用 differential 估計 $\sqrt[3]{8.12}$ 的近似值.

常數函數與冪函數	
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0$	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^p) = p \cdot x^{p-1}$
絕對值函數	
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lvert x\rvert) = \dfrac{x}{\lvert x\rvert}$ (for $x \neq 0$)	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lvert f(x)\rvert) = \dfrac{f(x)}{\lvert f(x)\rvert} \cdot f'(x)$ (for $f(x) \neq 0$)
指對數函數	
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \ln a$	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
三角函數	
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = \sec^2 x$	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) = -\csc^2 x$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) = -\csc x \cot x$
反三角函數	
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\text{arccot } x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\text{arcsec } x) = \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\text{arccsc } x) = -\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

Table 1: 常見函數與其導函數

Midterm Exam：10/22