

微積分乙期中考評分標準

負責題號 1. (a) (b)

a) 1) $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \operatorname{arccot}(\frac{1}{\theta}) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} \theta = 0$

... 求出此極限 1pt.

2) $-1 \leq \sin \frac{1}{\theta} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 \frac{1}{\theta} \leq 1$

... 求出此範圍 1pt.

由 1) 2) 得 $0 \cdot 0 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \operatorname{arccot}(\frac{1}{\theta}) \sin^2(\frac{1}{\theta}) \leq 0 \cdot 1$

$\Rightarrow 0 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \operatorname{arccot}(\frac{1}{\theta}) \sin^2(\frac{1}{\theta}) \leq 0$

... 寫出夾擊 2pt.

$\Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \operatorname{arccot}(\frac{1}{\theta}) \sin^2(\frac{1}{\theta}) = 0$ #

... 正解 1pt.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{3})(\sqrt{2+x} + \sqrt{3})}{(1-x)(\sqrt{2+x} + \sqrt{3})}$

... 同乘 $\sqrt{2+x} + \sqrt{3}$ 2pt.

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2+x) - (3)}{(1-x)(\sqrt{2+x} + \sqrt{3})}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(1-x)(\sqrt{2+x} + \sqrt{3})}$

... 化簡完成 1pt.

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1-x)}{(1-x)(\sqrt{2+x} + \sqrt{3})}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{3}}$

... 約分 1pt.

$= \frac{-1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{6}$

... 正解 1pt.

※ 無計算過程僅有答案不給分.

※ 由不合理過程得到答案不給分

※ 由合理猜測但未給正確過程得正解給答案分.

微積分乙期中考評分標準

負責題號 1.(c)(d)

$$1.(c) \langle \text{法} \rangle \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 5x^{\frac{2}{3}}}{2x^{\frac{4}{5}} + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}(4x^{\frac{2}{3}} - 5)}{x^{\frac{4}{5}}(2 + 3x^{-\frac{4}{5}})} \quad (2\text{pts})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{2x^{\frac{2}{15}}} \quad (2\text{pts})$$

$$= 0 \quad (1\text{pt})$$

$$\langle \text{法} \rangle \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 5x^{\frac{2}{3}}}{2x^{\frac{4}{5}} + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{-\frac{4}{5}}(4 - 5x^{\frac{2}{3}})}{x^{-\frac{4}{5}}(2x^{\frac{4}{5}} + 3)} \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^{-\frac{4}{5}} - 5x^{-\frac{2}{15}}}{2 + 3x^{-\frac{4}{5}}} \quad (4\text{pts})$$

$$= 0 \quad (1\text{pt})$$

$$1.(d) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5 - 5e^{2z}}{1 - e^z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5(1 + e^z)(1 - e^z)}{1 - e^z} \quad (2\text{pts})$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} 5(1 + e^z) \quad (2\text{pts}) \quad (\text{可跳過此步驟})$$

$$= 10 \quad (1\text{pt})$$

註1. 過程中若使用羅必達法則整題不給分

註2. 過程沒加 \lim 扣一分

註3. (c) 若說因為 $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$ 所以極限為 0 整題不給分

微積分乙期中考評分標準

負責題號 1 (e)

$$6x \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = 2 \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \cos 3x$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} 6x \cot 3x &= \lim_{x \rightarrow 0} 6x \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{只寫這樣 給1分} \\ \text{(有寫)} \end{array} \right. \\ &\quad \downarrow \text{"可"直接跳} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6x}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{出題老師} \\ \text{就是要考} \\ \text{會不會配這個} \end{array} \right. \\ &= \underbrace{2 \cdot 1 \cdot 1}_{\text{可不寫. 其中一個算錯}} = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{"可"以跳} \\ \text{扣一分, 最多扣兩分.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

3分

用 l'Hôpital's Rule 不給分. (By 出題老師)

亂套 Thm. 亂算 亂拆. 不給分.

直接在極限裡面做類似約分的事情. 不扣分.

$$6x \cot 3x = \frac{6x}{\tan 3x} = 2 \frac{3x}{\tan 3x}$$

$\frac{6x}{3x} \Rightarrow \frac{3x}{\tan 3x}$

但寫 $\lim_{x \rightarrow 0} 6x \cos 3x \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{3x}$ 扣1分.

用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\tan 3x} = 1$. 不給分. (By 出題老師)

↑
不是我們有的定理.

$\lim_{x \rightarrow 0}$ 沒寫扣一分. 只有答案. 1分

微積分乙期中考評分標準

負責題號 2 (a) (b)

$$(a) \quad dy = g'(x) dx = \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{x-1}{2x^{\frac{3}{2}}} dx$$

(4 pts) (1 pt)

$$(b) \quad dx = 0.16 \quad (1 \text{ pt})$$

$$g(4.16) \approx g(4) + g'(4)(0.16) = \boxed{2.5} + \boxed{\frac{4-1}{2 \cdot (4)^{\frac{3}{2}}}} (0.16) = 2.5 + 0.03 = 2.53$$

(1 pt) (1 pt) (4 pts)

前面都对，每错扣1分

直接估计 $\frac{1}{2} + \sqrt{4.16}$ 不得分

微積分乙期中考評分標準

負責題號 3

Let $f(x) = e^{-3x} - x$

(1) Existence:

$\therefore f$: continuous on $[0, 1]$ (1分)
and

$$f(0) = 1 > 0, f(1) = \frac{1}{e^3} - 1 < 0 \quad (2分)$$

\therefore By Intermediate Value Theorem, (1分)

$$\exists c \in (0, 1) \text{ s.t. } f(c) = 0 \quad (1分)$$

$\Rightarrow f$ has at least one zero in the interval $[0, 1]$.

(2) Uniqueness:

(1分) Suppose that there are distinct $c_1, c_2 \in (0, 1)$ with $c_1 < c_2$ such that $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

(1分) $\therefore f$: continuous on $[0, 1]$ and differentiable on $(0, 1)$

(2分) \therefore By Rolle's Theorem, $\exists d \in (c_1, c_2)$ s.t. $f'(d) = 0$

$$\text{But, } f'(x) = -3e^{-3x} - 1 < 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}. \rightarrow \leftarrow$$

(1分) Thus, from (1), (2), $f(x) = e^{-3x} - x = 0$ has a unique solution $c \in (0, 1)$.

備注: 不可用圖形去說明, 且要用到

Intermediate value Theorem and Rolle's Theorem.

微積分乙期中考評分標準

負責題號 4 (a), (b)

$$(a) f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \quad (2\text{分})$$

critical numbers of f : $x = -\sqrt{3}, (-1), 0, (1), \sqrt{3}$ (1分)
↑ 沒寫不扣分

$\because f'(x) > 0$ for $-\infty < x < -\sqrt{3}, \sqrt{3} < x < \infty$
 $\therefore f$ is increasing on $(-\infty, -\sqrt{3})$ and $(\sqrt{3}, \infty)$ (1分)

$\because f'(x) < 0$ for $-\sqrt{3} < x < -1, -1 < x < 0, 0 < x < 1, 1 < x < \sqrt{3}$
 $\therefore f$ is decreasing on $(-\sqrt{3}, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \sqrt{3})$ (1分)

(b)

Relative max value: $f(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$ (2分)

Relative min value: $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2分)

↓
1分

\because 要由(a)判斷, 故(a)錯, 則(b)不給分

的遞增遞減範圍

* 沒寫 max, min 扣 1 分

* max, min 判斷相反, 但(a)對, 扣 2 分

微積分乙期中考評分標準

負責題號 4 (c), (d)

4. (c) From the part (a), we further obtain the second derivative of f

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - 4x(x^4 - 3x^2)(x^2 - 1)^4}{(x^2 - 1)^4} \\ &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1) - 4x(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \quad (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

So, $f''(x) = 0$ when $x = 0$ and $f''(x)$ does not exist when $x = \pm 1$.

Since $f''(x) > 0$ for $-1 < x < 0$ and $1 < x < \infty$, the graph of f is concave upward (C.U.) on the open intervals $(-1, 0)$ and $(1, \infty)$, respectively.

In addition, since $f''(x) < 0$ for $-\infty < x < -1$ and $0 < x < 1$, that the graph of f is concave downward (C.D.) on the open intervals $(-\infty, -1)$ and $(0, 1)$, respectively. (3 分)

(d) Since f is not well-defined at $x = -1$ and $x = 1$ respectively, ^(2 分) it follows from the part (c) that the only point of inflection to the graph of f is $(0, 0)$. (3 分)

備註：以上配分均由出題老師同意許可而實施之，謝謝包含！！

微積分乙期中考評分標準

負責題號 4(e) (此題答案容易求出, 故老師相當重視過程)

法1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty \quad (1/2) \quad (1/2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \quad (1/2) \quad (1/2)$$

$\therefore x=1$ & $x=-1$ are vertical asymptotes for f (1/2) #

法2

$$\text{令 } A(x) = x^3, \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{A(x)}{B(x)}$$

If $A(c) \neq 0, B(c) = 0$, f has a vertical asymptote $x=c$
分子不為零 (2分) 分母為0 (3分)

$C = \pm 1 \rightarrow x=1, x=-1$ are vertical asymptote for f #

註：以下是針對幾種常見的作答情況, 和出題老師討論後的給分準則

情況1: 無過程者 不給分 (只有圖形且正確者酌給1分)

情況2: 使用 $f(x)$ 為理由者 不給分 (一微不存在 or 無定義不一定是鉛直漸近線)

情況3: 無清楚說明原因者 不給分 (如: 「由上可知」, 但不知是為什麼)

情況4: 以下寫法 給3分

① $x^2-1=0$ or $(x+1)(x-1)=0 \rightarrow x=\pm 1$ (未說明分子)

② $f(1), f(-1)$ 不存在 or 未定義 (不完整)

情況5: 有利用極限說明, 但不完整者, 給4分

(如: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \dots$ 等)

微積分乙期中考評分標準

負責題號 4cf)

(Sol): From the Long Division $\rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$ (3分)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

取極限(1分)

說明此項取極限後為0(1分)

$\Rightarrow y=x$ is the only slant asymptote for f #

註：以下是針對幾種常見的作答情況，和出題老師討論後的給分準則

情況1：無過程者不給分

情況2：若將斜漸近線假設為「直線」的做法，皆不給分

非常多同學
屬於此情況

如：令 $y = mx + b$

(3分) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ or $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(2分) $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$

令 $y = mx + b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

...

不給分

(原因：老師認為此類型之做法完全將漸近線視為「直線」，但其漸近線亦有可能為「曲線」，應以長除法才可看出關係，故不給分！)

情況3：只完成長除法，未取極限且說明 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$ ，給3分

1/3更新：情況2可給分

斜率 m 給3分，截距 b 給2分

微積分乙期中考評分標準

負責題號 5 (a) 共 5 分 $\left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \text{ 說明 } f \text{ 在 } -1 \leq x < 0 \text{ or } 0 < x \leq 1 \text{ 連續 (2分)} \\ 2^\circ \text{ 說明 } f \text{ 在 } x=0 \text{ 連續 (3分).} \end{array} \right.$
 ※ 只有 "Yes", 沒過程, 不計分.

1° (i) $\operatorname{arcsec}(x)$ 在 $x \leq -1$ 或 $x \geq 1$ 連續 } 1分
 (ii) $\frac{1}{x}$ 在 $-1 \leq x < 0$ or $0 < x \leq 1$ 連續

\Rightarrow 由 (i)(ii), $\operatorname{arcsec}(\frac{1}{x})$ 在 $-1 \leq x < 0$ or $0 < x \leq 1$ 連續 } 1分.
 $\Rightarrow f(x) = x \operatorname{arcsec}(\frac{1}{x})$ 在 $-1 \leq x < 0$ or $0 < x \leq 1$ 連續

- (其他) ① 用可微說明連續, 但微分結果錯誤, 扣1分.
 ② 只寫可微必連續, 無過程, 扣1分.
 ③ 只寫 $x \in [-1, 1]$ 皆有對應值, 不計分 (2° 亦同).
 ④ 只有圖解, 不計分 (2° 亦同).
 ⑤ 只有說明 $x = \pm 1$ 的狀況, 不計分.

2°

<法 I>.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \operatorname{arcsec}(\frac{1}{x}) = 0 \cdot (\frac{\pi}{2}) = 0 - 1 \text{分} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \operatorname{arcsec}(\frac{1}{x}) = 0 \cdot (\frac{\pi}{2}) = 0 - 1 \text{分} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \quad \text{1分} \\ \Rightarrow f &\text{ is continuous at } x=0 \end{aligned}$$

<法 II>.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arcsec}(\frac{1}{x}) = 0 \cdot (\frac{\pi}{2}) = 0 \quad 2 \text{分} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) \\ \Rightarrow f &\text{ is continuous at } x=0 \quad \text{1分} \end{aligned}$$

- ① \lim 值正確但過程錯, 扣1分.
 ② \lim 值錯誤, 不計分.
 ③ 只寫 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 未寫 " $= f(0)$ ", 扣1分.
 ④ 結論寫成 " f is continuous on $[-1, 1]$ ", 不扣分.
 ⑤ 用 Squeeze THM, 但只考慮 $x > 0$ 的狀況, 扣1分 (即未找左極限).
 ⑥ 用 Squeeze THM, 但過程錯誤, 扣1分.
 ex: ① 寫 " \leq " 寫成 " $<$ "
 ② 沒有寫 $\lim_{x \rightarrow 0}$

微積分乙期中考評分標準

負責題號 5, 6

$$f(x) = x \cdot \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 1 \times \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + \underbrace{\frac{x}{\frac{1}{|x|}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \left(\frac{-1}{x^2}\right)}_{2\text{分}} \quad -4\text{分}$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{\frac{1}{x^2}\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (1) 會使用 chain rule 給 2 分
- (2) $\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$ 微分“全對” 給 2 分
- (3) 要求化簡分母至 $\sqrt{1-x^2}$, 有則 給 1 分
- (4) 化簡時, 絕對值分開討論 但討論錯 扣 1 分

微積分乙期中考評分標準

負責題號 5, C.

「是否可微 \rightarrow 找導數是否存在」

[法-]

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin(\frac{1}{x}) - 0}{x} \quad \text{—— 寫出定義 2分}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{—— 3分}$$

\downarrow
 \emptyset *

\emptyset 可用 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arcsin(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arcsin(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ 找 ans

(1) 一邊極限直求錯 \rightarrow 給 1 分

[法=]

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0+\Delta x) \arcsin(\frac{1}{0+\Delta x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \arcsin(\frac{1}{\Delta x}) = \frac{\pi}{2} \quad *$$

常見錯誤：

(1) 只寫可微, 或 寫可微但理由錯 —— 0 分

(2) 用連續推到可微 —— 0 分

(3) 証 $f'(x)$ 的極限 就說可微 —— 0 分

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \quad (\text{左導數} = \text{右導數})$$

微積分乙期中考評分標準

負責題號 第6題

6. 用對數微分法找 $y = \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+1}}$ 在 (0,4) 的切線方程式

(4分) ① 取對數 $\ln y = \ln \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+1}} = 2 \ln(x+2) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$

(4分) ② 微分 $\frac{1}{y} y' = \frac{2}{x+2} - \frac{2x}{2(x^2+1)} = \frac{2}{x+2} - \frac{x}{x^2+1}$

$$y' = y \left(\frac{2}{x+2} - \frac{x}{x^2+1} \right)$$

(2分) ③ 求切線斜率得切線方程式

$$\text{切線斜率 } m_{(0,4)} = 4 \left(\frac{2}{0+2} - \frac{0}{0^2+1} \right) = 4$$

$$\text{切線方程式: } y - 4 = 4(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = 4x + 4$$

* 沒有使用對數微分法 0分!!