

微積分乙期中考評分標準

負責題號 1. (a) (b)

$$(a) \text{ i) } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \arccot\left(\frac{1}{\theta}\right) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \arccot \theta = 0$$

... 求出此極限 1pt.

$$\text{ii) } -1 \leq \sin \frac{1}{\theta} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 \frac{1}{\theta} \leq 1$$

... 求出此範圍 1pt.

$$\text{由 i) ii) 得 } 0 \cdot 0 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \arccot\left(\frac{1}{\theta}\right) \sin^2\left(\frac{1}{\theta}\right) \leq 0 \cdot 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \arccot\left(\frac{1}{\theta}\right) \sin^2\left(\frac{1}{\theta}\right) \leq 0$$

... 寫出來擊 2pt.

$$\Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \arccot\left(\frac{1}{\theta}\right) \sin^2\left(\frac{1}{\theta}\right) = 0 \quad *$$

... 正解 1pt.

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{3})(\sqrt{2+x} + \sqrt{3})}{(1-x)(\sqrt{2+x} + \sqrt{3})}$$

... 同乘 $\sqrt{2+x} + \sqrt{3}$ 2pt.

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2+x) - 3}{(1-x)(\sqrt{2+x} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(1-x)(\sqrt{2+x} + \sqrt{3})}$$

... 化簡完成 1pt.

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1-x)}{(1-x)(\sqrt{2+x} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{3}}$$

... 約分 1pt.

$$= \frac{-1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{6}$$

... 正解 1pt.

* 無計算過程僅有答案不給分。

* 由不合理過程得到答案不給分

* 由合理猜測但未給正確過程得正解給答案分。

微積分乙期中考評分標準

負責題號 1.(c)(d)

$$1.(c) \text{~~法~~} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 5x^{\frac{2}{3}}}{2x^{\frac{4}{3}} + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}(4x^{-\frac{2}{3}} - 5)}{x^{\frac{4}{3}}(2 + 3x^{-\frac{4}{3}})} \quad (2pts)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{2x^{\frac{2}{3}}} \quad (2pts)$$

$$= 0 \quad (1pt)$$

$$\text{~~法~~} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 5x^{\frac{2}{3}}}{2x^{\frac{4}{3}} + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{-\frac{4}{3}}(4 - 5x^{\frac{2}{3}})}{x^{-\frac{4}{3}}(2x^{\frac{4}{3}} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^{-\frac{4}{3}} - 5x^{-\frac{2}{3}}}{2 + 3x^{-\frac{4}{3}}} \quad (4pts)$$

$$= 0 \quad (1pt)$$

$$1.(d) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5 - 5e^{2z}}{1 - e^z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5(1 + e^z)(1 - e^z)}{1 - e^z} \quad (2pts)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} 5(1 + e^z) \quad (2pts) \text{ (可跳過此步驟)}$$

$$= 10 \quad (1pt)$$

註1、過程中若使用羅比達法則整題不給分

註2、過程沒加 \lim 扣一分

註3、(c)若說因為 $\frac{4}{3} > \frac{2}{3}$ 所以極限為 0 整題不給分

微積分乙期中考評分標準

$$6x \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = 2 \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \cos 3x.$$

負責題號 | (e)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} 6x \cot 3x &= \lim_{x \rightarrow 0} 6x \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \quad \checkmark \text{只寫這樣 級1分} \\ &\quad \text{(有寫)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6x}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \right) \quad \boxed{3\text{分}} \\ &\quad \text{(或2)} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \quad \text{"可"以跳} \\ &\quad \text{出題老師} \\ &\quad \text{就是要考} \\ &\quad \text{會不會配這個} \\ &\quad \text{可不寫，其中一個算錯} \\ &\quad \text{扣一分，最多扣兩分。} \end{aligned}$$

用 四維畢達 不給分. (由出題老師)

亂套 Thm. 亂算 亂拆 不給分.

直接在極限裡面做類似約分的事情 不扣分.

$$6x \cot 3x = \frac{6x}{\tan 3x} = 2 \frac{3x}{\tan 3x} \quad \cancel{\frac{6x}{3x}} \Rightarrow \frac{3x}{\sin 3x} \quad \text{但寫 } \lim_{x \rightarrow 0} 6x \cos 3x \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{3x} \quad \text{扣1分.}$$

用 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\tan 3x} = 1$. 不給分. (由出題老師)
 ↑
 不是我們有的定理.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0}}$$

沒寫扣一分

只有答案. 1分

微積分乙期中考評分標準

負責題號 2 (b)

(a) $dy = g'(x) dx = \left(\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}} \right) dx = \frac{x-1}{2x^{\frac{3}{2}}} dx$
(4 pt) (1 pt)

(b) $dx \approx 0.16$ (1 pt)

$$g(4.16) \approx g(4) + g'(4)(0.16) = 2.5 + \left[\frac{4-1}{2 \cdot (4)^{\frac{3}{2}}} \right] (0.16) = 2.5 + 0.03 = 2.53$$

(1 pt) (1 pt) (4 pt) 前面都對，最後和 1 分

直接估 $\frac{1}{6} + \sqrt{4.16}$ 不得分

微積分乙期中考評分標準

負責題號 3

Let $f(x) = e^{-3x} - x$

(1) Existence:

$\because f$ continuous on $[0, 1]$ (1分)
and

$$f(0)=1>0, f(1)=\frac{1}{e^3}-1<0 \quad (2分)$$

\therefore By Intermediate Value Theorem, (1分)

$$\exists c \in (0, 1) \text{ s.t. } f(c)=0 \quad (1分)$$

$\Rightarrow f$ has at least one zero in the interval $[0, 1]$.

(2) Uniqueness:

(1分) Suppose that there are distinct $c_1, c_2 \in (0, 1)$ with $c_1 < c_2$
such that $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

(1分) $\because f$ continuous on $[0, 1]$ and differentiable on $(0, 1)$

(2分) \therefore By Rolle's Theorem, $\exists d \in (c_1, c_2)$ s.t. $f'(d) = 0$
But, $f'(x) = -3e^{-3x} - 1 < 0$ for all $x \in \mathbb{R}$. $\rightarrow \leftarrow$

(1分) Thus, from (1), (2), $f(x) = e^{-3x} - x = 0$ has a unique solution
 $c \in (0, 1)$.

備註: 不可用圖形去說明, 且要用到

Intermediate value Theorem and Rolle's Theorem.

微積分乙期中考評分標準

負責題號

4(a)、(b)

$$(a) f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

Critical numbers of f : $x = -\sqrt{3}, (-1), 0, (1), \sqrt{3}$ (1分) □ 沒寫不扣分

$\because f'(x) > 0$ for $-\infty < x < -\sqrt{3}, \sqrt{3} < x < \infty$] (1分)

$\therefore f$ is increasing on $(-\infty, -\sqrt{3})$ and $(\sqrt{3}, \infty)$

$\because f'(x) < 0$ for $-\sqrt{3} < x < -1, -1 < x < 0, 0 < x < 1, 1 < x < \sqrt{3}$] (1分)

$\therefore f$ is decreasing on $(-\sqrt{3}, -1) (-1, 0) (0, 1) (1, \sqrt{3})$] (1分)

(b)

Relative max value: $f(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$ (2分)

Relative min value: $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2分)

\because 要由(a)判斷，故(a)錯，則(b)不給分

的遞增遞減範圍

* 沒寫 max, min 扣 1 分

* max, min 判斷相反，但(a)對，扣 2 分

微積分乙期中考評分標準

負責題號 4(c), (d)

4. (c) From the part (a), we further obtain the second derivative of f

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - 4x(x^4 - 3x^2)(x^2 - 1)^4}{(x^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1) - 4x(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \quad (2\text{分})$$

So, $f''(x) = 0$ when $x=0$ and $f''(x)$ does not exist when $x=\pm 1$.

Since $f''(x) > 0$ for $-1 < x < 0$ and $1 < x < \infty$, the graph of f is concave upward (C.U.) on the open intervals $(-1, 0)$ and $(1, \infty)$, respectively.

In addition, since $f''(x) < 0$ for $-\infty < x < -1$ and $0 < x < 1$, the graph of f is concave downward (C.D.) on the open intervals $(-\infty, -1)$ and $(0, 1)$, respectively. (3分)

(d) Since f is not well-defined at $x=-1$ and $x=1$ respectively, it follows from the part (c) that the only point of inflection to the graph of f is $(0, 0)$. (3分) (2分)

備註：以上配分均由出題老師同意許可而實施之，謝謝包含!!

微積分乙期中考評分標準

負責題號 4(e) (此題答案容易求出,故老師相當重視過程)

法1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty \quad (1分)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \quad (1分)$$

$\therefore x=1$ & $x=-1$ are vertical asymptotes for f (1分)*

法2

$$\begin{aligned} \text{令 } A(x) = x^3, \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{A(x)}{B(x)} \\ B(x) = x^2 - 1 \end{aligned}$$

If $A(c) \neq 0$, $B(c) = 0$, f has a vertical asymptote $x=c$
分子不為零 (2分) 分母為0 (3分) #

$c = \pm 1 \rightarrow x=1, x=-1$ are vertical asymptotes for f (1分) #

註：以下是針對幾種常見的作答情況，和出題老師討論後的給分準則

情況1：無過程者不給分 (只有圖形且正確者酌給1分)

情況2：使用 $f(x)$ 為理由者不給分 (-微不存在 or 無定義不一定是鉛直漸近線)

情況3：無清楚說明原因者不給分 (如：「由上可知」但不知是哪個)

情況4：以下寫法給3分

① $x^2-1=0$ or $(x+1)(x-1)=0 \rightarrow x=\pm 1$ (未說明分子)

② $f(1), f(-1)$ 不存在 or 未定義 (不完整)

情況5：有利用極限說明，且不完整者，給4分

(如： $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \dots$ 等)

微積分乙期中考評分標準

負責題號

4(f)

(Sol): From the Long Division $\rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$ (3分)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

→ 取極限(1分)

↳ 論明此項取極限後為0 (1分)

$\Rightarrow y = x$ is the only slant asymptote for f .

註：以下是針對幾種常見的作答情況，和出題老師討論後的給分準則

情況1：無過程者不給分

情況2：若將斜漸近線假定為「直線」的做法，皆不給分

非常多同學
屬於此情況

如：令 $y = mx + b$

$$(3\text{分}) m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{or} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$(12\text{分}) b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

令 $y = mx + b$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

⋮

等

(原因：老師認為此類型之做法完全將漸近線視為直線，但其實漸近線亦有可能為曲線，應以長除法才可看出關係，故不給分！)

情況3：只完成長除法，未取極限且說明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$ ，給3分

11/13 更新：情況2可給分

斜率 m 級 3 分，截距 b 級 2 分

微積分乙期中考評分標準

負責題號 5 (a) 共 5 分 1° 說明 f 在 $-1 \leq x < 0$ or $0 < x \leq 1$ 連續 (2 分)
2° 說明 f 在 $x=0$ 連續 (3 分).
※ 只有 "Yes", 沒過程, 不計分.

$$\left. \begin{array}{l} 1^\circ \text{ (i) } \arcsin(x) \text{ 在 } x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1 \text{ 連續} \\ \text{(ii) } \frac{1}{x} \text{ 在 } -1 \leq x < 0 \text{ or } 0 < x < 1 \text{ 連續} \\ \Rightarrow \text{由(i)(ii), } \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ 在 } -1 \leq x < 0 \text{ or } 0 < x \leq 1 \text{ 連續} \\ \Rightarrow f(x) = x \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ 在 } -1 \leq x < 0 \text{ or } 0 < x \leq 1 \text{ 連續} \end{array} \right] 1 \text{ 分}$$

- (其他) ① 用可微說明連續, 但微分結果錯誤, 扣1分.
 ② 只寫可微必連續, 無過程, 扣1分.
 ③ 只寫 $x \in [-1, 1]$ 皆有對應值, 不計分 (2°亦同).
 ④ 只有圖解, 不計分 (2°亦同).
 ⑤ 只有說明 $x=\pm 1$ 的狀況, 不計分.

2°

<法I>.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 & 1 \text{ 分} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 & 1 \text{ 分} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 & 1 \text{ 分} \\ \Rightarrow f \text{ is continuous at } x=0 & \end{aligned}$$

<法II>.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 & 2 \text{ 分} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) \\ \Rightarrow f \text{ is continuous at } x=0 & \end{aligned}$$

- ① \lim 值正確但過程錯, 扣1分.

- ② \lim 值錯誤, 不計分

- ③ 只寫 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 未寫 " $= f(0)$ ", 扣1分.

- ④ 結論寫成 " f is continuous on $[-1, 1]$ ", 不扣分.

- ⑤ 用 Squeeze THM, 但只考慮 $x > 0$ 的狀況, 扣1分 (即未找左極限)

- ⑥ 用 Squeeze THM, 但過程錯誤, 扣1分.

ex: ① 將 " \leq " 寫成 " $<$ "

② 沒有寫 $\lim_{x \rightarrow 0}$

微積分乙期中考評分標準

負責題號 5, b

$$f(x) = x \cdot \arcsin(\frac{1}{x})$$

$$f'(x) = 1 \times \arcsin(\frac{1}{x}) + \frac{x}{\frac{1}{|x|} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} (\frac{-1}{x^2}) \quad \text{— 4分}$$

$$= \arcsin(\frac{1}{x}) + \frac{x}{\frac{1}{x^2} \sqrt{1-x^2}} (\frac{-1}{x^2}) \quad \text{2分}$$

$$= \arcsin(\frac{1}{x}) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(1) 會使用 chain rule 紿 2分

(2) $\arcsin(\frac{1}{x})$ 微分“全對” 紿 2分

(3) 要求化簡分母至 $\sqrt{1-x^2}$, 有則 紿 1分

(4) 化簡時, 絶對值分開討論但討論錯 扣 1分

微積分乙期中考評分標準

負責題號 5. C.

「是否可微 → 找導數是否存在」

[法一]

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin(\frac{1}{x}) - 0}{x}$$
— 寫出定義 2 分

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{\downarrow \text{①}}{=} \frac{\pi}{2} \quad — 3 \text{ 分}$$

① 可用 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ 找 ans

(1) 一邊極限值求錯 → 給 1 分

[法二]

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x) \arcsin\left(\frac{1}{0 + \Delta x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \arcsin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) = \frac{\pi}{2}$$
※

常見錯誤：

(1) 只寫可微 or 寫可微但理由錯 — 0 分

(2) 用連續推到可微 — 0 分

(3) 証 $f'(x)$ 的極限 就說可微 — 0 分

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \quad (\text{左導數} = \text{右導數})$$

微積分乙期中考評分標準

負責題號

第 6 題

6. 用對數微分法找 $y = \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+1}}$ 在 $(0,4)$ 的切線方程式

(4分) ① 取對數 $\ln y = \ln \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+1}} = 2 \ln(x+2) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$

(4分) ② 微分 $\frac{1}{y} y' = \frac{2}{x+2} - \frac{2x}{2(x^2+1)} = \frac{2}{x+2} - \frac{x}{x^2+1}$

$$y' = y \left(\frac{2}{x+2} - \frac{x}{x^2+1} \right)$$

(2分) ③ 求切線斜率得切線方程式

$$\text{切線斜率 } m_{(0,4)} = 4 \left(\frac{2}{0+2} - \frac{0}{0^2+1} \right) = 4$$

$$\text{切線方程式: } y - 4 = 4(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = 4x + 4$$

* 沒有使用對數微分法 0 分 !!