1(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{e^{2x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{(e^x+1)(e^x-1)}$$

→ 有拆成這樣給2分，其他拆法
(ex：分子分母同 $\times(1+e^{-x})$ 之類的)
導致答案錯不給分.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}(e^x-1)}{(e^x+1)(e^x-1)}$$

有拆出此條給2分，未拆出答案對不給分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(e^x+1)\,e^x}$$

or $\dfrac{e^{-x}}{e^x+1}$ 皆得2分.

$$=\frac{1}{2}$$

→ 結果得2分.

利用其它拆法全對得滿分，但用羅必達，或亂湊 $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{2}$
者不給分，若用其他拆法約分約錯或答案算錯斟酌給分

10801 微積分乙期中考評分標準

負責題號 1.(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3(2x)+x^4\sin\frac{1}{x}}{x^3}$$

$$=\overset{①}{\lim_{x\to 0}}\frac{\tan^3(2x)}{x^3}+\overset{②}{\lim_{x\to 0}}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$=8+0$$

$$=8$$

→ ① 和 ② 各4分
(可以不用說明，直接給分)

(可略)
$\boxed{\text{若要說明}}$:

① $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3(2x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\right)^3}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^3(2x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{8\sin^3(2x)}{(2x)^3}$$

→ 如答案不對，寫到這，給2分.

$$=8$$

②
$\because -|x|\le x\sin\frac{1}{x}\le |x|$

and $\lim_{x\to 0}|x|=0$.

By Squeeze Thm, $\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$

$\boxed{\text{其他}}$:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\frac{8}{\cos^2 2x}}^{1}+\cancel{x\cdot\sin\frac{1}{x}}^{0}}{1}=9$$

因①,②算對，但最後答案錯誤
→ 給 7分

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3(2x)}{x^3}\times\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$=8\times 0$$

$$=0$$

並未弄清楚題目要的答案，
→ 不予計分(0分)

10801 微積分乙期中考評分標準

負責題號 1(c).

1.(c) $\lim_{x\to\infty}(2x^2+3x+1)\cdot\sin\left(\frac{1}{5x^2+4x+2}\right)$

$= \lim_{x\to\infty}\left[(2x^2+3x+1)\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{5x^2+4x+2}\right)}{(5x^2+4x+2)\cdot\left(\frac{1}{5x^2+4x+2}\right)}\right]$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{5x^2+4x+2}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{5x^2+4x+2}\right)}{\frac{1}{5x^2+4x+2}}$

$= \frac{2}{5}\times 1 = \frac{2}{5}$ #

* 其他：i) 答案錯 → 不給分.

ii) 答案對,但 ① $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{5x^2+4x+2}\right)}{\frac{1}{5x^2+4x+2}}=1$ 的觀念錯 → 扣4分

② 直接題目寫完就跳到 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{5x^2+4x+2}$ → 扣6分.

③ 把 $2x^2+3x+1$ 和 $\frac{1}{5x^2+4x+2}$ 換成 $2x^2$ 和 $\frac{1}{5x^2}$ → 不給分

④ 若寫出 $\sin\left(\frac{1}{5x^2+4x+2}\right)\cdot(5x^2+4x+2)$

(1) 但把它們撇掉且沒寫原因 → 扣4分.

(2) 有表達出趨近於 1 → 不扣分

⑤ $\lim_{x\to\infty}(2x^2+3x+1)\sin\left(\frac{1}{5x^2+4x+2}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{5}\frac{\sin t}{t}\right)+\lim_{t\to0^+}\left(\frac{7x+1}{5}\right)\sin t$

$=\frac{2}{5}+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x+1}{5}\right)\sin\left(\frac{1}{5x^2+4x+2}\right)=\frac{2}{5}$ → 不給分

沒回答到題目的東西

⑥ 沒有 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{5x^2+4x+2}$ 直接跳到 $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{\frac{5}{2}t}$ → 扣4分.

⑦ 使用到非本次考試範圍之內容且無給予證明

→ 扣4分.

10801 微積分乙期中考評分標準

負責題號 2. (a).

8%　$y = \ln(2x+\sqrt{x}+1)$, $x>0$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1}{2x+\sqrt{x}+1}}_{4\%} \cdot \underbrace{\left(2+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}_{4\%}.$$

計算錯誤扣 1 分.

10801 微積分乙期中考評分標準

負責題號 2(b).

題目：$y=\cos[\tan^{-1}(e^{3x})]$, find y' $(\frac{dy}{dx})$.(8分).

解1.

$$y' = \underset{3}{-\sin[\tan^{-1}(e^{3x})]}\ \underset{3}{\frac{1}{1+e^{6x}}}\cdot \underset{2}{3e^{3x}} \quad -①$$

$$y' = \underset{3}{\frac{-e^{3x}}{\sqrt{1+e^{6x}}}}\ \underset{3}{\frac{1}{1+e^{6x}}}\cdot \underset{2}{3e^{3x}} \quad -②$$

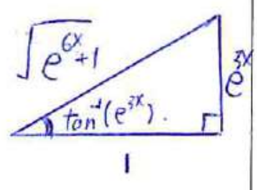
$$y' = \frac{-3e^{6x}}{(1+e^{6x})^{\frac{3}{2}}} \quad -③$$

解2. Let $a=\tan^{-1}(e^{3x})$

$$\Rightarrow y=\cos a=(e^{6x}+1)^{\frac{-1}{2}} \quad 2.$$

$$\Rightarrow y' = \underset{2}{\frac{-1}{2}(e^{6x}+1)^{\frac{-3}{2}}}\cdot \underset{2}{e^{6x}}\cdot \underset{2}{6}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-3e^{6x}}{(1+e^{6x})^{\frac{3}{2}}}$$



1. 先判斷學生用何種方式作答(解1 or 解2).
2. 解1老師公告的ANS為①，注意下面NOTE!
3. 解2按上面紅字配分給分.

NOTE!

1. ANS寫 $-\sin(\frac{3e^{3x}}{1+e^{6x}})$，本題直接0分
2. 若cos微分-sin的「負號」沒寫 or $\frac{-e^{3x}}{\sqrt{1+e^{6x}}}$ 的「負號」沒寫，本題扣3分(i.e.微分出錯).
3. 若「負號」是計算過程整理出錯沒寫 or 其餘的答案整理出錯，本題得7分
4. 若從①開始且①完全正確，但繼續書寫ANS，且只有 $-\sin(\tan^{-1}(e^{3x}))$ 變成 $\frac{-e^{3x}}{\sqrt{1+e^{6x}}}$ 出錯，本題得8分
5. 若從②開始且②完全正確，但繼續書寫ANS，但最後答案整理出錯，本題得7分
6. ANS寫 $-\sin[\tan^{-1}(e^{3x})]+\underline{P(x)}$，本題得3分
7. 若 $\tan^{-1}(e^{3x})=\arctan(e^{3x})$ 寫成 $\tan^{-1}(e^{3x})=\frac{1}{\tan(e^{3x})}$ or $\arctan(e^{3x})=\frac{\arcsin(e^{3x})}{\arccos(e^{3x})}$，本題扣3分
8. ANS寫 $-\sin[\tan^{-1}(e^{3x})]\ \frac{3e^{3x}}{1+e^{6x}}\cdot 3e^{3x}$，本題得5分
9. ANS寫 $-\sin[\tan^{-1}(e^{3x})]\ \frac{3xe^{3x}}{1+e^{6x}}$，本題得6分.
10. 若已算出 $\frac{dy}{dx}$(導數)，卻又寫 $dy=\cdots dx$(微分)，本題也得8分
11. 若ANS過程寫 $-\sin(\ldots\ldots)\cdot 3\cdot e^{3x}=-\sin(\ldots\cdot 3e^{3x})$，本題得2分
12. 若①完全正確，卻用一些奇怪方法讓式子而ANS出錯，本題得7分
13. 其餘狀況斟酌給分.

10801 微積分乙期中考評分標準

負責題號 2(c)

方法I (共8分)

$y = x^{\frac{2}{x}},\ x>0$

$\ln y = \frac{2}{x}\ln x$ 全對 3分 (取 log 也3分)

$\frac{d}{dx} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-2}{x^2}\ln x + \frac{2}{x^2}$ → 全對 3分

$\Rightarrow y'(x) = y\left(\frac{-2\ln x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)$

$= x^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{(-2\ln x + 2)}{x^2}$ → 2分 (沒化簡也可)

方法II

$y = x^{\frac{2}{x}},\ x>0$

$= e^{\ln x^{\frac{2}{x}}} = e^{\frac{2}{x}\ln x}$ 全對 3分

chain rule

$\frac{dy}{dx} = \left(e^{\frac{2}{x}\ln x}\right)' = e^{\frac{2}{x}\ln x}\left(-2x^{-2}\ln x + \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)$ → 全對 5分 (沒化簡也可)

$= x^{\frac{2}{x}} \cdot \left(\frac{-2\ln x + 2}{x^2}\right)$

常見錯誤

1. 直接 chain rule → 0分
2. 用 a^x 微分 → 0分
3. 前面都寫對，單純最後(化簡時)數字抄錯 or 正負號抄錯 → 扣1分

10801 微積分乙期中考評分標準

負責題號 3.

$$(x^2+y^2)^2 = 4x^2y \quad , \quad (1,1)$$

$$\frac{d}{dx} \Rightarrow \underline{2(x^2+y^2)(2x+2y\cdot y') = 8xy + 4x^2y'} \quad ⑤$$

微分微錯(不論任何方法, e.g. 取ln微分、令 $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ 等等), 扣5分

(若用 $y' = -\frac{F_x}{F_y}$, 沒寫 F = ◯, 扣 2分)

代入 $(x,y)=(1,1) \Rightarrow 4(2+2y'(1)) = 8+4y'(1)$

$\Rightarrow y'(1) = 0$ ③

兩者至少寫1個
都沒寫扣 3分

$\Rightarrow$ tangent line at (1,1) is $y=1$ ②

以上部分寫錯(小錯誤), 扣 1~2分

10801 微積分乙期中考評分標準

負責題號 4.

4.(a)

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{4}{x^2} \quad x > 0.$$

(1分)

$\Rightarrow f'(x)$ 恆正. (1分).

$\Rightarrow f(x)$ 為 increasing function. (1分).

3

* 運用 Mean Value thm. / Intermediate thm. 請詳細才給分.
* 反證法說明詳細才給分, 意含有反推導過程
* 勿直接寫"水平檢驗法"而未說明其定義.
* (奇, 偶函) (one-one 和) 請先分別說明 $3x^2$, $4x^{-2}$ 為(奇/偶), (one-one) 由定義說明之.
* 使用反函數定義請詳述其定義, 勿直接寫 "$f^{-1}(x)$ exist".

(b).

$$f^{-1}(6) = 2 \quad (f(2) = 6 \text{ 成立})$$

(2分)

$$\boxed{[f^{-1}(6)]' = \frac{1}{f'(2)}}$$

(4分)

$$= \frac{1}{13}$$

(1分).

* 請先求出(2,6), 再代入.
* 若最後一步計算錯僅扣1分.
* 使用錯誤的公式計算不給分, ex $g'(x) = \frac{1}{3x^2+\frac{4}{x^2}}$, $g(x) = f^{-1}(x)$.
* 若觀念正確, 4分中給2分.

10801 微積分乙期中考評分標準

負責題號 5(a)

共 10%

$f(x)= x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)$

$f'(x)= \underline{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^2-1)+x^{\frac{2}{3}}(2x)}$ …… ① (2%)

$= \underline{\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}$ …… ② *寫成這三種表示法，皆給分

$= \underline{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(4x^2-1)}$ …… ③ **只算到①，也給分

critical number: $0, \pm\frac{1}{2}$

f': $-$ | $+$ | $-$ | $+$ at $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$

increasing open intervals: $\underline{(-\frac{1}{2}, 0)}$ (2%), $\underline{(\frac{1}{2}, \infty)}$ (2%)

decreasing open intervals: $\underline{(-\infty, -\frac{1}{2})}$ (2%), $\underline{(0, \frac{1}{2})}$ (2%)

* 也可以表示成: (皆給分)
increasing: $-\frac{1}{2}<x<0$, $\frac{1}{2}<x<\infty$ $(\frac{1}{2}<x)$
decreasing: $-\infty<x<-\frac{1}{2}$, $0<x<\frac{1}{2}$ $(x<-\frac{1}{2})$

** 因為題目(a)已說明為 open intervals，
因此若寫 $[-\frac{1}{2}, 0]$, $[\frac{1}{2}, \infty]$ 等…之答案，皆完全不給分。
$[-\infty, -\frac{1}{2}]$, $[0, \frac{1}{2}]$, $(-\frac{1}{2} \sim 0)$, $[-\frac{1}{2} \sim 0]$

** 沒有寫出區間，僅用圖示表示也不給分。

$-\infty \sim -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \sim 0$	$0 \sim \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \sim \infty$
↘	↗	↘	↗

10801 微積分乙期中考評分標準

負責題號 5.(b)(c)

(b)

$$f''(x)=\frac{40}{9}x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(20x^2+1)$$

(2分)

$$f'' \quad \begin{array}{ccc} + & & + \\ \hline & 0 & \end{array}$$

concave upwards open intervals: $(-\infty,0)$ (2分) $(0,\infty)$ (2分)

1° 未用開區間表示不給分.
- $-\infty \sim 0$ 不給分.
- $-\infty<x<0$ 給分(2分)
- $(-\infty,0]$ 不給分.

2° $f''(x)$ 錯誤以下不給分.

3° $(-\infty,\infty)$ 皆凹向上 不給分.

*不可含 $x=0$ 這點.

(c)

由5(b) $f''(x)=\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(20x^2+1)$ 知. $f''(x)$ 恆正.

反曲點不存在.

1° 若 5(b) $f''(x)$ 錯誤 5(c) 不給分.

2° 學生在 5(c) 求出正確 $f''(x)$ 但回答有反曲點.
5(b), 5(c) 皆不給分.

10801 微積分乙期中考評分標準

負責題號 6 (a)

$$f(x)=\frac{x}{(x-\sqrt{x^2+x})(x+1)}$$

(a) $\begin{cases} x+1\neq 0 \\ x-\sqrt{x^2+x}\neq 0 \\ x^2+x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq 0 \\ x\leq -1 \text{ or } x\geq 0. \end{cases} \Rightarrow x<-1 \text{ or } x>0$

$\therefore$ domain $=\underbrace{(-\infty,-1)\cup(0,\infty)}_{2pt}$

* 若答案為 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,\infty)$ 或其等價答案，則給 1 分，其餘答案給 0 分.

* 若過程錯誤或沒有計算過程，即使答案正確，仍給 0 分.

10801 微積分乙期中考評分標準

負責題號 6(b)

$$f(x) = \frac{x}{(x-\sqrt{x^2+x})(x+1)}$$

* 寫出 $x\to -1$, $x \to 0$ 扣 1 分
* 寫單邊極限但多寫 $x\to -1^+$ or $x\to 0^-$, 多一個扣 1 分
* 判斷 $x=-1$ 為 V.A. 可使用課本定理.
(只寫分母為 0, 沒 check 分子不為 0 不給分)

(b) $\because \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ — 2pt

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ — 3pt

$\therefore$ vertical asym. : $x=-1$ 1pt

$$\because \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x+\sqrt{x^2+x})}{(-x)(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}})}{1+\frac{1}{x}} = -2 \text{ — 2pt}$$

(P.S. 分子=分母=0 $\not\Rightarrow$ 有 V.A.)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(x+\sqrt{x^2+x})}{(-x)(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}})}{1+\frac{1}{x}} = 0 \text{ — 2pt}$$

$\therefore$ horizontal asym. : $y=-2$ (1pt), $y=0$ (1pt)

* 除了上述列舉的部分扣分, 其餘若 f(x) 極限有誤, 即使答案正確也不給分.