1. Infinite Limit

Remark 過去介紹的極限運算規則 (係數積、加法、乘法、除法可以拆開)，需要確認 $\lim_{x\to a} f(x)$、$\lim_{x\to a} g(x)$ 皆存在，特別注意到「極限值 $=\infty$」不是極限存在，因為 ∞ 並不是一個實數值，而只是一個「概念」，用來描述一個值會趨向無窮大.

Question Calculate and sketch the following limits.

- ☐ $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$
- ☐ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$
- ☐ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-x}} = 2$
- ☐ $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-x}} = -2$
- ☐ $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} 2x+\sqrt{4x^2+3x-2} = \frac{-3}{4}$

(1). Asympototes

垂直漸近線 (Vertical Asymptotes) 指的是當 x 趨近一個定值 x_0 時，$f(x)$ 會趨向正無窮或負無窮. 但函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 並沒有定義，因此函數圖形會非常靠近但始終不會碰到 $x=x_0$：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \tag{1}$$

而**水平漸近線 (Horizontal Asymptotes)** 指的是當 x 趨向正負無窮時，函數值趨向一個定值 L：

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = L \tag{2}$$

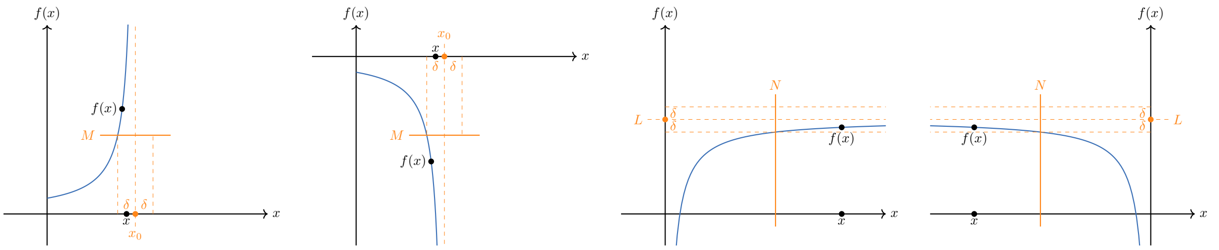

Figure 1: 垂直漸近線與水平漸近線：$\epsilon-\delta$ 定義示意圖

Remark 垂直漸進線在 $x=x_0$ 的左右端 (左右極限) 可能會一邊趨向正無窮、一邊趨向負無窮，只要有一邊趨向無窮，就可以說它有垂直漸進線；水平漸進線在 $x\to+\infty$ 與 $x\to-\infty$ 的值也可能不一樣.

Question

- ☐ Find the vertical asymptote of $y = \frac{1}{x}$
- ☐ Find the horizontal asymptote of $y = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 - x}}$

Remark 這類含有無窮的極限，諸如 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ 並不是表示實際的一個點，而只是函數的行為、趨勢.

最後四種情況是當 x 趨向正無窮或負無窮時，函數值 $f(x)$ 也趨向正無窮或負無窮：

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \tag{3}$$

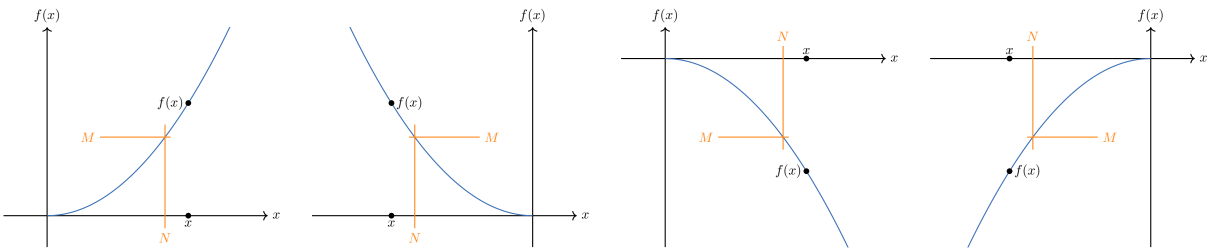

Figure 2: 趨向無窮的極限：$\epsilon - \delta$ 定義示意圖

Question Sketch the graphs of $y = 1 - \frac{1}{x}$ and $y = \ln x$, for $x > 0$. When $x \to \infty$, which one will go to infinity? and which one will converge to a real number?

2. Squeeze Thm. & Some Special Limit

Theorem. **(The Squeeze Theorem)** If $L(x) \le f(x) \le U(x)$ when x is near a but $x \neq a$ and $\lim\limits_{x\to a} L(x) = \lim\limits_{x\to a} U(x) = L$, then we have $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Question Show that $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} e^{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} = 0$

Question Solve $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$ by inequation $\sin x \le x \le \tan x$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Moreover, find $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Question Find the following limit.

- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5}$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{x \cdot \tan 2x} = \frac{9}{2}$

3. Continuity

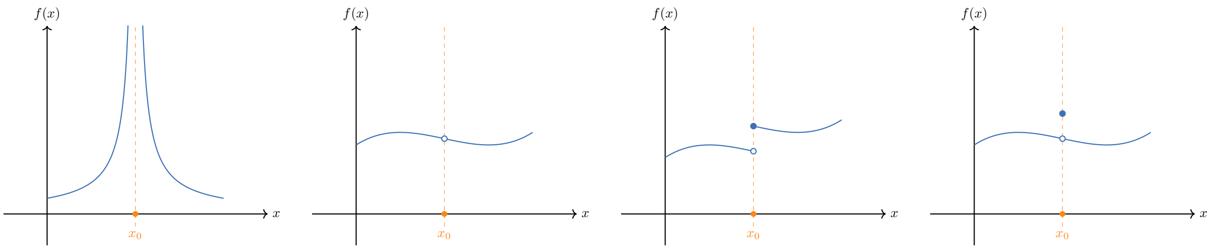

Figure 3: 不連續點的例子：其中第 2. 與第 4. 個函數的左右極限存在且相等，可以透過重新定義該點的函數值使函數在該點連續，這類不連續點被稱為可移除不連續點 (removable discontinuous point)；第 3. 個函數的左右極限存在但不相等，被稱為跳躍不連續點 (jump discontinuous point).

從圖形中我們觀察到，不連續的可能性有：

1. 極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 與函數值 $f(x_0)$ 皆不存在
2. 極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在但函數值 $f(x_0)$ 不存在
3. 極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在但函數值 $f(x_0)$ 存在
4. 極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 與函數值 $f(x_0)$ 不相等

Definition 給定函數 $f(x)$ 以及一點 $x_0 \in \text{Dom } f$，我們說「$f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續」等價於以下條件同時成立：

1. 極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在
2. 函數值 $f(x_0)$ 存在
3. 極限值 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 與函數值 $f(x_0)$ 相等

當我們稱一個函數是連續函數時，指的是該函數在定義域上的所有點都連續，亦即：

$$\forall x_0 \in \text{Dom } f,\ \ f(x) \text{ is conti. at } x = x_0$$

Remark 「$f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續」常常簡寫為「$f(x)$ is conti. at $x = x_0$」. 並且我們經常定義集合 C^0 為所有連續函數所構成的集合，因此說一個函數是連續函數可以簡記為 $f \in C^0$.

Remark 冪函數、指對數函數、三角函數、反三角函數在各自的定義域上皆連續. 連續函數經過係數積、加法、乘法、除法、複合過後依然是連續的.

- 函數連續：函數值存在 and 極限值存在 and 極限值等於函數值

- 函數不連續：函數值不存在 or 極限值不存在 or 極限值不等於函數值

Question Find the point at which $f(x)$ is NOT continuous:

☐ $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-3x-10}$

☐ $f(x) = \dfrac{x+2}{\cos x}$

☐ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$

☐ $f(x) = \begin{cases} 1-x & ,x<0 \\ e^x & ,0 \le x \le 1 \\ x^2+2 & ,x>1 \end{cases}$

Theorem. **(Intermedia Value Thm., I.V.T.)** 給定 $f(x)$ 是一個在 閉區間 $[a,b]$ 上的 連續函數，對於任意介在 $f(a)$ 與 $f(b)$ 的實數 C，我們有：

$$\exists\ c \in [a,b] \text{ s.t. } f(c) = C$$

Question 舉出反例，說明當定義域不是閉區間，或當函數不連續時，中間值定理的結論可能不再成立.

Question Show that the equation $2x^5 + 7x = 1$ has at least one real solution.

4. Differential

對於函數 $f(x)$，變數 x 的微小改變會造成 $f(x)$ 的變化. 描述這種變化比例的方法是：

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

當變化量 $\Delta x \to 0$ 時，記作：

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

稱為 $f(x)$ 的 **導函數 (Derivative)**. 其中 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}f(x)$ 稱為 **微分 (Differential)**.

Definition 給定函數 $f(x)$，其**導函數 (Derivative)** 定義為：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

特別地，在定義域上特定一點 x_0 的導函數值 $f'(x_0)$ 稱為 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的**導數**. 當極限 $f'(x_0)$ 存在，我們稱 $f(x)$ 在 $x = x_0$ **可微 (Differentiable)**. 並且，若 $f(x)$ 在其定義域上的每個點皆可微，那麼稱他是可微函數.

Question Find the derivative of following function at $x = 0$ by definition.

- ☐ $f(x) = 3$
- ☐ $f(x) = x^2$
- ☐ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Question

- ☐ 使用定義說明：可微 $\Rightarrow$ 連續 $\Rightarrow$ 極限存在
- ☐ 找到例子說明：可微 $\not\Leftarrow$ 連續 $\not\Leftarrow$ 極限存在

常數函數與冪函數	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c) = 0$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^p) = p \cdot x^{p-1}$
絕對值函數	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lvert x\rvert) = \frac{x}{\lvert x\rvert}$ (for $x \neq 0$)	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lvert f(x)\rvert) = \frac{f(x)}{\lvert f(x)\rvert} \cdot f'(x)$ (for $f(x) \neq 0$)
指對數函數	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \ln a$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$
三角函數	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = \sec^2 x$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) = -\csc^2 x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) = -\csc x \cot x$
反三角函數	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{arccot}\ x) = -\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{arcsec}\ x) = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{arccsc}\ x) = -\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

Table 1: 常見函數與其導函數

Next week: 微分運算定理、微分應用