

1. Find the Area

Theorem. (兩函數之間的面積) 紿定連續函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ ，並且 $f(x) \geq g(x)$ ，那麼由 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 、 $x = a$ 、 $x = b$ 所圍成的區域面積為：

$$A =$$

而由 $x = f(y)$ 、 $x = g(y)$ 、 $y = c$ 、 $y = d$ ，其中 $f(y) \geq g(y)$ ，所圍成區域的面積則是：

$$A =$$

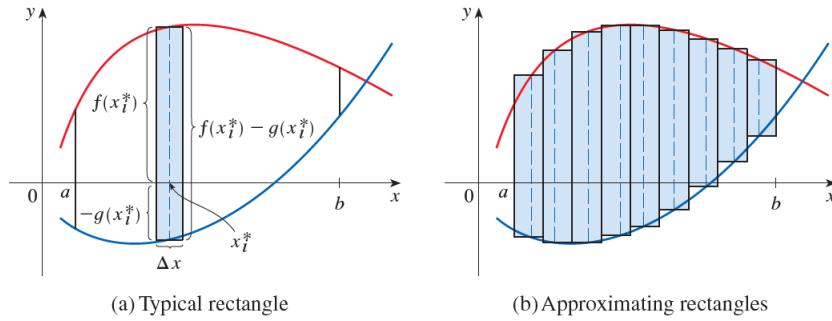


Figure 1: 兩函數間的面積計算：以類似黎曼和的過程逼近兩曲線之間的面積

Remark 只要畫圖確定好兩函數的大小關係，再依照黎曼和的觀點累積每個分割出的長方形即可。

Question Solve the following question.

- ▷ Find the area of the region enclosed by the parabolas $y = x^2$ and $y = 2x - x^2$.

- Find the area of the region enclosed by the parabolas $y^2 = 2x+6$ and $y = x-1$.

2. Find the Volume

2.1. Disk Method

Theorem. (圓盤法計算旋轉體體積) 設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是一個非負的連續函數，若將 $y = f(x)$ 圖形以 x 軸為中心軸旋轉一圈，則所得柱體體積為：

$$V =$$

設 $g(y)$ 在 $[c, d]$ 上是一個非負的連續函數，若將 $x = g(y)$ 圖形以 y 軸為中心軸旋轉一圈，則所得柱體體積為：

$$V =$$

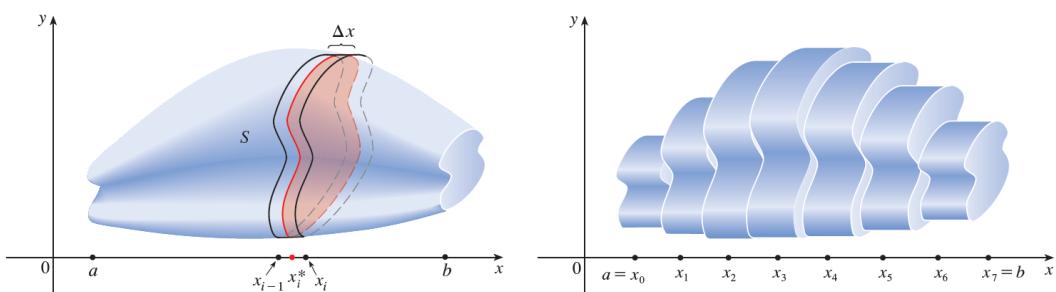


Figure 2: 使用積分來計算立體體積：將該立體沿著垂直於 x 方向切割成多塊，每塊體積使用柱體來近似

Remark 圓盤法即是由垂直於旋轉軸的方向切分旋轉體，並按照切割區間使用無數個柱體來近似，只需要畫圖確定好每一個小柱體的半徑與高即可列出積分式並求解。

Question Solve the following question.

- ▷ Find the volume of the solid obtained by rotating the region enclosed by $y = x^2$ and $y = x$ about the line $y = 2$.

 - ▶ (師大微乙 (一)112#6) Let Ω be the region bounded by the curves $y = x^2$ and $y = x + 2$. Find the volume of the solid generated by revolving Ω about the x -axis.

2.2. Shells Method

Theorem. (剝殼法計算旋轉體體積) 設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是一個非負的連續函數，若將 $y = f(x)$ 圖形以 y 軸為中心軸旋轉一圈，則所得柱體體積為：

$V =$

設 $g(y)$ 在 $[c, d]$ 上是一個非負的連續函數，若將 $x = g(y)$ 圖形以 x 軸為中心軸旋轉一圈，則所得柱體體積為：

$V =$

Remark 剝殼法即是將旋轉體由內到外一層一層加總，只要畫圖確定好範圍，依照每個殼的體積是圓周 \times 高 \times 厚度做積分即可。

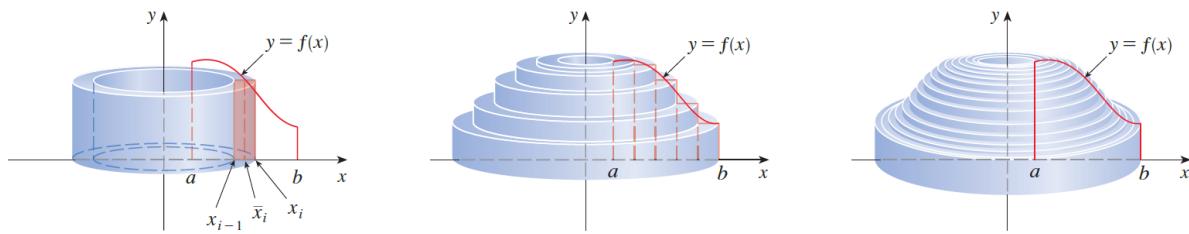


Figure 3: 攏殼法的圖示：將區間 $[a, b]$ 分割為無數個子區間，並使用無數的「殼」來近似每一塊的體積

Question Solve the following question.

- ▷ Find the volume of the solid obtained by rotating the region enclosed by $y = 2x^2 - x^3$ and $y = 0$ about the line y -axis.

- ▶ (師大微乙(一)112#3) Let \mathcal{R} be the region bounded by the curves $x^3 - x + y = 0$, $y = 0$, $x = 0$ and $1 - x = 0$. Find the volume of the solid generated by revolving \mathcal{R} about the y -axis.

計算旋轉體體積時，選擇圓盤法或剝殼法的關鍵在於判斷哪種方法能讓積分變得更簡單。核心原則是根據旋轉軸與積分變數的關係來決定：

- 圓盤法 (Disk/Washer Method)：將物體切成與旋轉軸垂直的圓盤或圓環。
 - 積分變數與旋轉軸相同。

- 當函數容易寫成 $y = f(x)$ 且繞 x 軸旋轉，或寫成 $x = g(y)$ 且繞 y 軸旋轉時，適合使用圓盤法.
- 剝殼法 (Cylindrical Shell Method)：將物體切成與旋轉軸平行的圓柱殼.
 - 積分變數與旋轉軸相異.
 - 當函數容易寫成 $y = f(x)$ 且繞 y 軸旋轉，或寫成 $x = g(y)$ 且繞 x 軸旋轉時，適合使用剝殼法.

在計算前，務必先繪製圖形。透過分析旋轉軸與函數形式的關係，選擇能讓積分式最簡潔的方法，這就是最適合的選擇。

3. Find the Arc Length

Theorem. (曲線弧長) 紿定定義在 $[a, b]$ 上的曲線 $y = f(x)$ ，若 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上是連續的，則我們說曲線 $y = f(x)$ 從 $(a, f(a))$ 到 $(b, f(b))$ 的弧長是：

$$L =$$

或是曲線可以等價的被表示為 $x = g(y)$ ， $c \leq y \leq d$ ，且 $g'(y)$ 是連續的，則曲線弧長也可以被表示為：

$$L =$$

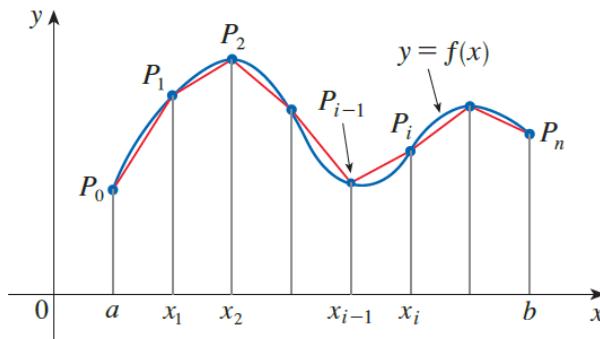


Figure 4: 曲線弧長的計算方式：使用多個直線段來逼近真實的曲線弧長

Question Solve the following question.

▷ 求曲線 $y = \int_{\pi/4}^x \tan t dt$ 在 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 範圍內的長度 (arc length).

- (師大微乙 (一)110#4) 求曲線 $y^2 = \frac{4}{9}(x+1)^3$ 由 $x=2$ 到 $x=7$ 的弧長.

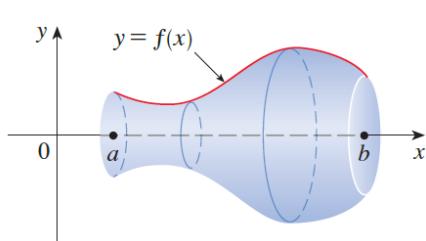
4. Find the Surface Area

Theorem. (旋轉體表面積) 紿定函數 $f(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 上可微並導函數連續，曲線 $y = f(x)$ 繞行 x 軸一週後形成的曲面面積為：

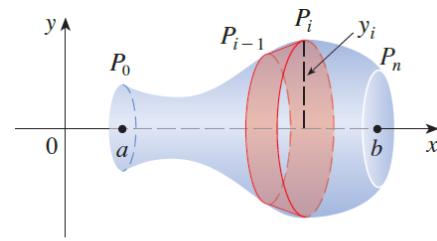
$$A =$$

給定函數 $g(y) \geq 0$ 在 $[c, d]$ 上可微並導函數連續，曲線 $x = f(y)$ 繞行 y 軸一週後形成的曲面面積為：

$$A =$$



(a) Surface of revolution



(b) Approximating band

Figure 5: 曲線旋轉而成的曲面: 每個分割出來的曲面可以用圓筒帶來近似

Question Solve the following question.

- ▷ (師大微乙 (一)105#4) 求線段 $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, $0 \leq x \leq 2$ 對 y 軸旋轉所得到的旋轉體表面積.
- ▶ (師大微乙 (一)104#3) 線段 $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$ 對 x -軸旋轉的表面積.

5. Find the Average Value

Theorem. (函數平均值) 函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 區間上的平均值定義為：

$$f_{avg} =$$

Question Solve the following question.

- ▷ (師大微乙 (一)112#5) Find the average value of $g(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ on the interval $[-\ln 3, 0]$.

- (師大微乙 (一)113 暑 #4) Find the average value of $g(x) = |x| - 1$ on the interval $[-1, 3]$.

overview

- 定積分與微積分基本定理

- 定積分定義-黎曼和: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i$
- 微積分基本定理 (F.T.C. I): $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$
- 微積分基本定理 (F.T.C. II): $\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x)$

- 積分技巧

- 變數代換：設 $u = g(x)$, 則 $du = g'(x)dx$
- 三角代換：遇到 $a^2 \pm x^2$ 依情形設 $x = \sin x$ 、 $x = \tan x$ 、 $x = \sec x$
- 部分分式：多項式除法拆分成基本分式
- 分部積分：依據微分除法規則有 $\int \text{小大} = \text{大大} - \int \text{另一組}$

- 積分應用

- 算面積： $A = \int_a^b \underbrace{[f(x) - g(x)]}_{\text{高}} \underbrace{dx}_{\text{底}}$
- 旋轉體體積-圓盤法： $V = \int_a^b \underbrace{\pi [f(x)]^2}_{\text{底面積}} \underbrace{dx}_{\text{高}}$
- 旋轉體體積-剝殼法： $V = \int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{圓周長}} \cdot \underbrace{(f(x))}_{\text{高}} \underbrace{dx}_{\text{厚}}$
- 曲線弧長： $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
- 旋轉體表面積： $A = \int_a^b \underbrace{2\pi f(x)}_{\text{圓周長}} \cdot \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}_{\text{寬}} dx$
- 函數平均值： $f_{avg} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$