1. Representations of Functions as Power Series

在工程計算與數值分析中，許多超越函數 (如 $e^x, \sin x, \ln x$) 的性質難以直接處理，且對計算機而言，計算這些函數的成本遠高於基本的加減乘除. 我們希望尋找一種等價表示法，將這些複雜函數轉化為無窮項的多項式. 由等比級數公式，我們知道當 $|x| < 1$ 時：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

更一般的，若 $|f(x)| < 1$，我們也有：

$$\frac{g(x)}{1-f(x)} = g(x) \cdot (1 + f(x) + f(x)^2 + \cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x)(f(x))^n$$

Question Find a power series representation for $\dfrac{3}{x+2}$.

Note that, if $\left|-\frac{x}{2}\right| < 1 \iff \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$, then:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$$

Hence, $\dfrac{1}{x+2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$ converges on $(-2, 2)$.

不過對於更一般的函數，我們很難直接湊出 $\frac{g(x)}{1-f(x)}$ 的形式. 此時，我們需要一種更普適的方法：

Theorem. **(Taylor Series)** 設函數 $f(x) \in C^\infty$ 在包含 a 的某開區間內具有各階導數，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 處的**泰勒級數** **(Taylor Series)** 定義為：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

特別地，當中心點 $a = 0$ 時，此級數特稱為**馬克勞林級數** **(Maclaurin Series)**.

由此，我們可以得到 $\sin x$、$\cos x$、e^x 等函數的馬克勞林級數為：

- $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
- $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

2. Fourier Series

2.1. Supplement: Inner Product & Orthogonal

觀察二維平面 $\mathbb{R}^2$ 的任意向量 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ 都可以寫成**基底 (Basis)** $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 的**線性組合 (Linear Combination)**：

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

並且線性組合的係數 v_1、v_2 恰好分別為 $\mathbf{v}$ 與基底的**內積 (Inner Product)**：

$$v_1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle, \qquad v_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

要注意的是，上述性質僅在基底為**單範正交基底 (Orthonormal Basis)** 時成立. 也就是說，基底向量必須滿足：

- 正交性 (Orthogonality)：兩兩互垂直，內積為 0.
- 單位性 (Unit length)：每個向量的長度（**範數 (Norm)**）皆為 1.

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ 0, & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

反過來說，只要我們在空間中找到任意一組正交基底，我們就可以將空間中的向量使用這組正交基底的線性組合表示：

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_n \rangle \mathbf{u}_n = \sum_{i_1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i$$

而對於函數而言，若 $f(t), g(t)$ 是定義在 $[-l, l]$ 上的函數，則定義它們的內積為：

$$\langle f, g \rangle = \int_{-l}^{l} f(\tau) g(\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

並且選取正交基底：

$$\begin{aligned} \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi t}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi t}{l} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{on } [-l, +l] \\ &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi t}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi t}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{2\pi t}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{2\pi t}{l}, \cdots \right\} \end{aligned}$$

值得注意的是，雖然這組基底最初定義在 $[-l, l]$ 區間，但由於 sin 與 cos 函數天生具備週期性，這使得展開後的結果能「自動延伸」至整個實數軸. 因此，我們可以利用這組基底來展開任何週期為 $T = 2l$ 的函數 $f(t)$. 將向量空間的正交投影公式套用到這裡，我們將 $f(t)$ 拆解為常數項、無窮多個 cos 項與無窮多個 sin 項：

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f,\ \varphi_i \rangle \varphi_i \\ &= \underbrace{\frac{1}{2l}\langle f,\ 1\rangle}_{\text{常數項}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l}\left\langle f,\ \cos\frac{n\pi t}{l}\right\rangle \cos\frac{n\pi t}{l}}_{\text{無窮多個}\cos x} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l}\left\langle f,\ \sin\frac{n\pi t}{l}\right\rangle \sin\frac{n\pi t}{l}}_{\text{無窮多個}\sin x} \end{aligned}$$

這即是著名的**傅立葉級數 (Fourier Series)**. 是法國數學家傅立葉在解熱傳導方程式時研究出來的方法，能夠將週期函數用三角函數展開. 以下給出較常見的敘述方式：

Definition 若函數 $f(t)$ 有週期 $T = 2l$. 則 $f(t)$ 的**傅立葉級數 (Fourier Series)** 為：

$$f(t) = c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{l}$$

其中，係數 c、a_n、b_n 為：

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2l}\langle f,\ 1\rangle &&= \frac{1}{2l}\int_T f(t)\ \mathrm{d}t \\ a_n &= \frac{1}{l}\left\langle f,\ \cos\frac{n\pi t}{l}\right\rangle &&= \frac{1}{l}\int_T f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\ \mathrm{d}t \\ b_n &= \frac{1}{l}\left\langle f,\ \sin\frac{n\pi t}{l}\right\rangle &&= \frac{1}{l}\int_T f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

這裡列出計算傅立葉係數時常使用的三角函數積分公式：

- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\ \mathrm{d}x = 0 \quad (n \neq 0)$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\ \mathrm{d}x = 0$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\ \mathrm{d}x = 0$

Question Find the Fourier Series of following functions.

▷ $f(t) = t$ defined on $t \in (-\pi, \pi]$ with periodic $T = 2\pi$.

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\ \mathrm{d}t = 0 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\ \mathrm{d}t = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin(nt)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\left[t\left(\frac{-\cos(nt)}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-\cos(nt)}{n}\ \mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{-\pi\cos(n\pi)}{n} - 0\right) + \frac{1}{n}\,\frac{\sin(nt)}{n}\Bigg|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \\
\therefore f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nt) = 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \dots\right)
\end{aligned}
$$

▶ $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \le \pi \\ -1, & -\pi < t \le 0 \end{cases}$ defined on $t \in [-\pi, \pi]$ with periodic $T = 2\pi$.

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (1)\sin(nt)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \\
&= \frac{2}{n\pi}[1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \\
\therefore f(t) &= \sum_{\text{odd } n}\frac{4}{n\pi}\sin(nt) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \dots\right)
\end{aligned}
$$

2.2. Properties of Odd and Even Functions

利用函數的對稱性可以大幅簡化傅立葉係數的計算.

- 偶函數 (Even Function): 滿足 $f(-t) = f(t)$. 其圖形對稱於 y 軸 (如 $\cos t, t^2, |t|$).
- 奇函數 (Odd Function): 滿足 $f(-t) = -f(t)$. 其圖形對稱於原點 (如 $\sin t, t, t^3$).

Theorem. **(Fourier Series of Odd and Even Functions)** 給定一個週期為 $T = 2l$ 的週期函數 $f(t)$.

1. 若 $f(t)$ 是偶函數，那麼其傅立葉級數簡化為 **Fourier Cosine Series**：

$$f(t) = c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{l}$$

2. 若 $f(t)$ 是奇函數，那麼其傅立葉級數簡化為 **Fourier Sine Series**：

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{l}$$

Remark 任意函數皆可以分解為唯一的奇函數與偶函數的和：

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{偶部} f_{\text{even}}(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{奇部} f_{\text{odd}}(x)}$$

2.3. Convergence of Fourier Series

Theorem. **(Dirichlet Conditions)** 若週期函數 $f(t)$ 同時滿足以下條件，則 $f(t)$ 的傅立葉級數收斂.

1. $f(t)$ 在一個週期內絕對可積 (absolutely integrable).
2. $f(t)$ 在一個週期內只有有限個極值點 (maxima and minima).
3. $f(t)$ 在一個週期內只有有限個不連續點 (finite discontinuities).

Theorem. **(Convergence Theorem)** 設 $S_n(t)$ 為傅立葉級數的部份和：

1. 若 $f(t)$ 在 t_0 處連續，則級數收斂到 $f(t_0)$.
2. 若 $f(t)$ 在 t_0 處不連續，則級數收斂到該點左右極限的平均值：

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

比如對於函數 $f(t)=t+\pi$ 定義在 $t\in(-\pi,\pi]$，它的傅立葉級數 $f_s(t)$ 表示為：

$$f_s(t)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nt=\pi+2\sin t-\sin 2t+\frac{2}{3}\sin 3t+\cdots$$

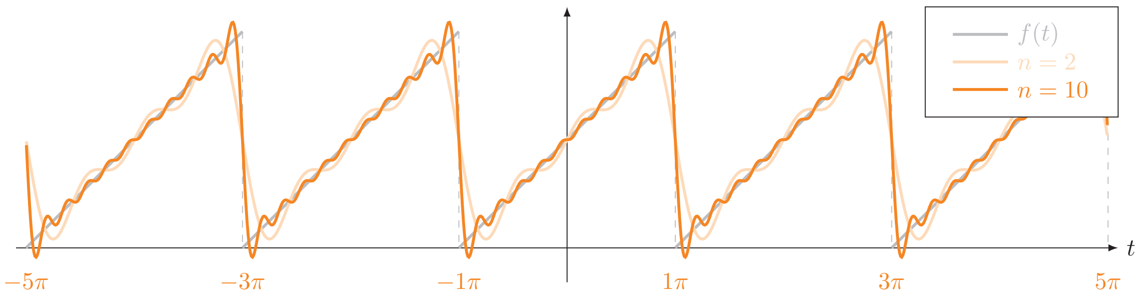


Figure 1: 比較 $f(t)$ 的圖形與其傅立葉展開圖形在項數為 $n=2$ 和 $n=10$ 時的差異

2.4. Fourier Series in Complex Form

在歐拉公式中，我們用 e^x 來表達 $\sin x$、$\cos x$. 嘗試把它應用到傅立葉級數上：

$$\begin{aligned}
f(t)&=c+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\\
&=c+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{e^{i\frac{n\pi t}{l}}+e^{-i\frac{n\pi t}{l}}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{e^{i\frac{n\pi t}{l}}-e^{-i\frac{n\pi t}{l}}}{2i}\\
&=c+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}\cdot e^{i\frac{n\pi t}{l}}+\frac{a_n+ib_n}{2}\cdot e^{-i\frac{n\pi t}{l}}\right]\\
&=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_ne^{i\frac{n\pi t}{l}}+c_{(-n)}e^{i\frac{(-n)\pi t}{l}}\right]\\
&=c_0e^{i\frac{0\pi t}{l}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_ne^{i\frac{n\pi t}{l}}+c_{(-n)}e^{i\frac{(-n)\pi t}{l}}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{n\pi t}{l}}
\end{aligned}$$

Theorem. **(Fourier Series in Complex Form)** 若函數 $f(t)$ 具有最小週期 $T=2l$. 則 $f(t)$ 的**傅立葉級數之複數型 (Complex form of Fourier Series)** 為：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{n\pi t}{l}}\qquad\text{，其中係數 } c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-i\frac{n\pi t}{l}}\,\mathrm{d}t$$

這個建立在歐拉公式上的形式，巧妙的將三角函數融入在 $e^{-i\omega t}$ 之中，看起來就像是把函數在複數的空間中展開到基底 $e^{-i\omega t}$ 之上.

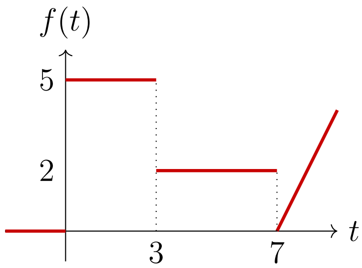
3. Supplement: Common Signal and Operation

Definition **單位步階函數 (Unit Step Function)** $u(t)$ 定義為：

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}$$

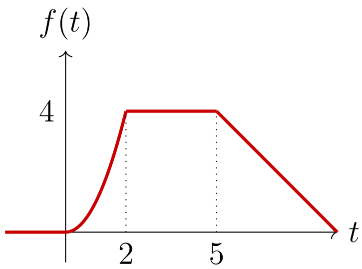
Question Express the piecewise function $f(t)$ in terms of the unit step function.

▷ $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 5 & \text{if } 0 \leq t < 3 \\ -2 & \text{if } 3 \leq t < 7 \\ 2t - 14 & \text{if } 7 \leq t \end{cases}$$



$$\begin{aligned} f(t) &= 5[u(t) - u(t-3)] + (-2)[u(t-3) - u(t-7)] + (2t-14)u(t-7) \\ &= 5u(t) - 7u(t-3) + (2t-12)u(t-7) \end{aligned}$$

► $$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq 0 \\ t^2 & \text{if } 0 \leq t < 2 \\ 4 & \text{if } 2 \leq t < 5 \\ 9 - t & \text{if } t \geq 5 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} f(t) &= t^2[u(t) - u(t-2)] + 4[u(t-2) - u(t-5)] + (9-t)u(t-5) \\ &= t^2u(t) + (4-t^2)u(t-2) + (5-t)u(t-5) \end{aligned}$$

Definition **單位脈衝函數 (Dirac Delta Function)** $\delta(t)$ 定義為：

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases}$$

並且同時滿足：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\ \mathrm{d}t = 1$$

Remark $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\ \mathrm{d}t = f(t_0)$, $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t-t_0)) = \delta(t-t_0)$

Definition 函數 $f(t)$ 與函數 $g(t)$ 的**卷積 (Convolution)** $(f*g)(t)$ 定義為：

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

若對於 $t<0$ 時，$f(t)=g(t)=0$，則卷積可簡化為：

$$(f*g)(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

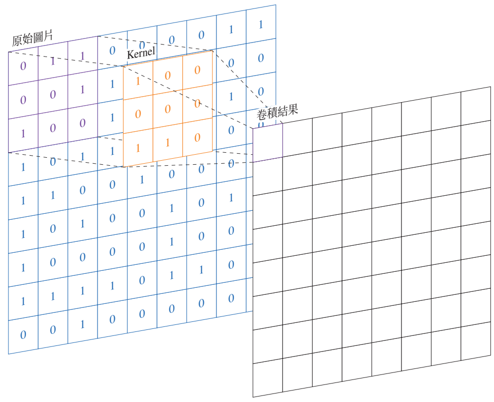


Figure 2: 卷積過程示意圖：t 軸視角

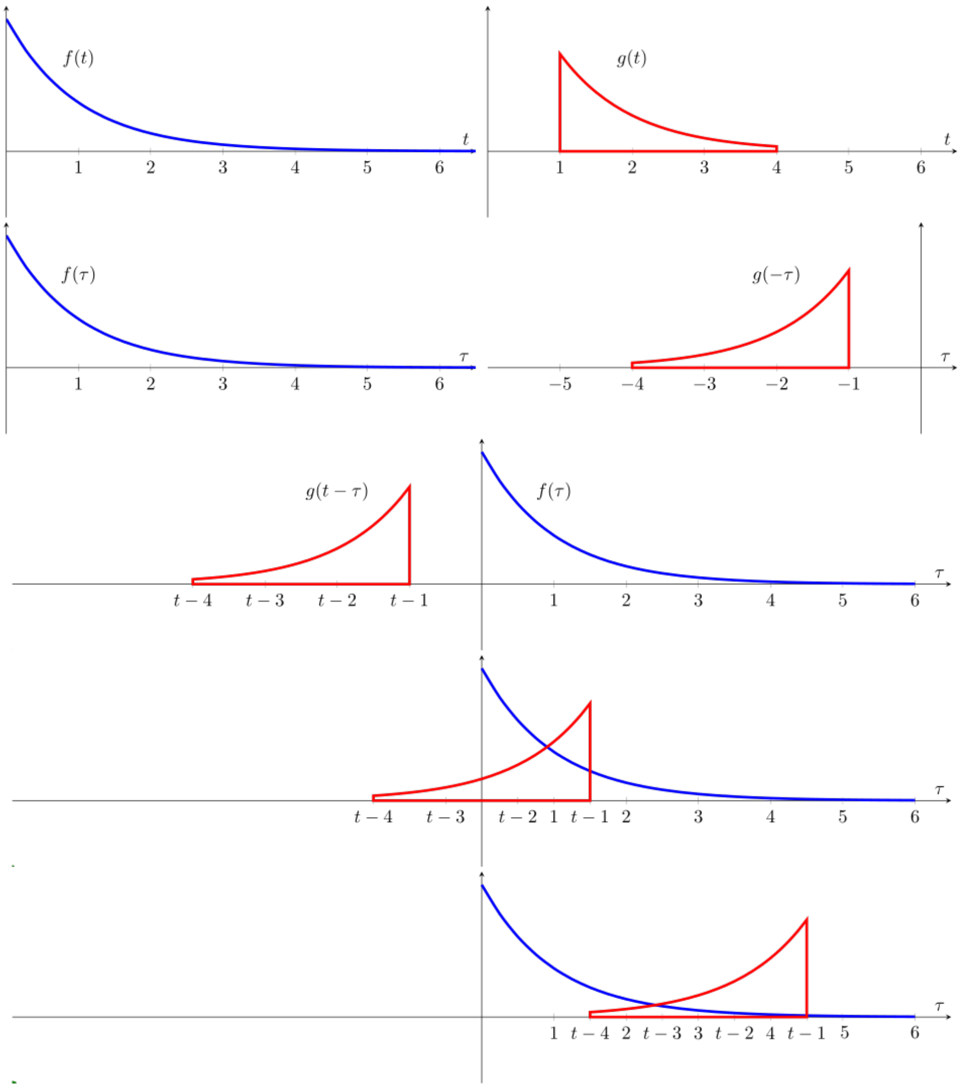


Figure 3: 卷積過程示意圖：τ 軸視角

Next Week: Fourier Transform, Laplace Transform.