1. What is the Differential Equation?

- 微分方程式從何而來？

Question 對於右側 RLC 電路，加上電源 $V_s(t) = 5\text{V}$ 後，迴路電流 $I(t)$ 該如何表示？

$$\text{Note}: V_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int I(t)\,\mathrm{d}t,\; V_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

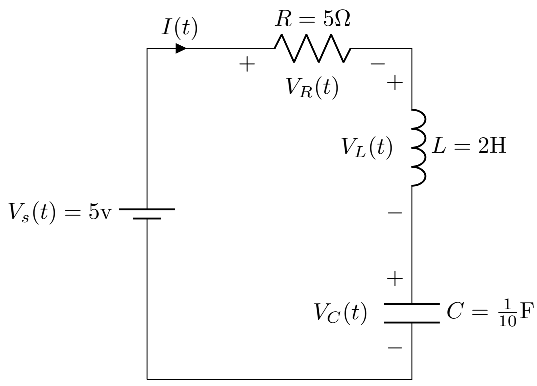


Figure 1: a RLC circuit

- 微分方程式與我們過去學過的方程式有何不同？

Question Solve $t^2 - 2 = 0$

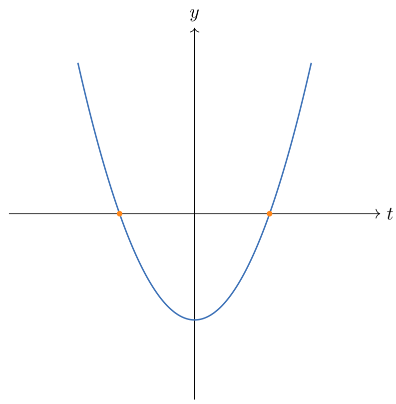


Figure 2: 代數方程式：$y = t^2 - 2$

Question Solve $y' = 2t,\; y(0) = -2$

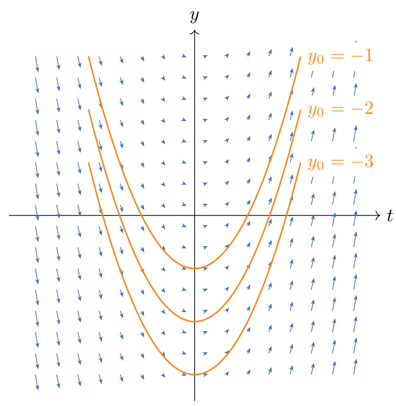


Figure 3: 微分方程式：$y' = 2t$

1.1. Classification of DEs

n 階 ∕非齊次 ∕非線性 常∕偏微分方程

1.「n **階** (n**-th order**)」：微分方程式的階數是指方程式中最高次微分項的次數. 例如，微分方程式 $y''' + 3y' - 2 = 0$ 是三階微分方程式，因為最高次的微分項是三次微分 y'''.

2.「**齊次** (**Homogeneous**)[1]」：指的是方程式中除了包含未知函數 y 和其導數項 $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 以外的項都為零. 例如，$y'' + x^2y' + 3xy = 0$ 是齊次的. 相對地，**非齊次** (**non-homogeneous**) 方程式則包含 $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 以外組成的項，例如 $y'' + x^2y' + 3xy = 5$，因為在等號右側多了一個不相干的 5.

3.「**線性** (**Linear**)」：指的是微分方程式是由 $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 的線性組合所組成. 例如，$3y'' + xy' + x^2y = 2x + 5$ 是線性的. 相對地，如果方程式中包含未知函數及其導數的乘積或其他非線性項，例如 $y \cdot y' + y^2 = 0$，則是**非線性的** (**non-linear**).

4.「**常微分方程式** (**Ordinary Differential Equations, ODEs**)」：是由變數 x、未知的單變數函數 $y = f(x)$、及其導數 y'、y'' 等等所組成. 例如，$y' = 3x$ 是常微分方程式，因為它只涉及一個自變數 x 和未知函數 y 的導數.

5.「**偏微分方程式** (**Partial Differential Equations, PDEs**)」：是涉及多變數函數及其偏導數的微分方程式. 例如，波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 就是個著名偏微分方程，因為它涉及多變數函數 $u(t, x)$ 以及兩個自變數相應的偏導數.

例如，$y' + 2x + y = 0$ 是一階非齊次線性常微分方程，因為最高次微分項 y' 是一階；除了 y', y 之外還多了 $2x$、y, y' 是線性組合；只涉及 $y = y(x)$ 這個單變數函數. 而 $y'' + y^2 = 0$ 是二階齊次非線性常微分方程等等. 或者微分方程也能像聯立方程組那般出現，稱為**微分方程組** (**System of DEs**).

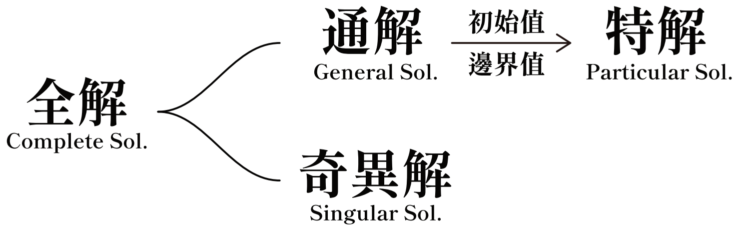
Question 試說明以下微分方程式的類型：

- $y' + 5y = 0$ ________________
- $y'' + 8yy' = 2x^3$ ________________
- $y^{(5)} + 2y = e^{2x} + \cos x$ ________________
- $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$ ________________
- $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ________________

[1]「齊次」一詞出現在許多不同的情境中，雖然它們代表相似的概念，但具體含義略有不同. 因此，在閱讀文章時，遇到「齊次」一詞時應仔細考慮上下文，以準確理解其含義.

1.2. Solutions of DEs

微分方程的解不再是一個數字，而是一個或一些函數. 我們將其分為：



1.「**通解 (General Solution)**」：包含與階數等量的未知常數 C_n. 它代表了方向場中「整群」符合規則的路徑.

2.「**特解 (Particular Solution)**」：是由通解代入指定的 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 得到的一個解. 透過**初始值問題 (Initial Value Problem, IVP)** 或**邊界值問題 (Boundary Value Problem, BVP)** 得到未知變數 C_n 之後的單一解.

3.「**奇異解 (Singular Solution)**」：是不能由通解得到的解，通常會出現在非線性常微分方程中. 有趣的是，幾何上常表現為通解曲線族的「包絡線 (Envelope)」.

4.「**全解 (Complete Solution)**」：是能表示所有解的解通式. 對於沒有奇異解的微分方程而言，其全解與通解相同；有奇異解的微分方程而言，則無全解.

最後，我們通過各種方法得出的解不一定是熟悉的顯函數 $y = y(x)$ 的形式，也有可能是隱函數 $f(x, y) = 0$ 的樣子. 並且我們稱形式為顯函數的解為**顯解 (Explicit Solution)**；反之，形式為隱函數的解為**隱解 (Implicit Solution)**.

2. Separable ODEs

Question Try to solve $y' = y$.

Definition 若一個微分方程式（或許需經由代數整理）能寫成：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x)G(y)$$

則稱該方程為**可分離變數 (separable)** 微分方程式.

Question Solve the following DEs.

▷ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x)G(y)$

▶ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x(1-y^2)}{1+x^2}$

Remark 遇到**齊次**[2]ODEs，嘗試整理出 $y' = f(\frac{y}{x})$，接著令 $u = \frac{y}{x}$ 做變數變換，那麼可以得到 $\mathrm{d}y = x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x$，最後再帶回原方程式求解.

Question Solve the following DEs.

▷ $x^2y' = y^2 + xy$

▶ $(y^2 - x^2)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y = 0$

[2]這裡指的齊次與 P.2 介紹的齊次是不同概念. P.2 介紹的齊次指的是方程式中沒有 $y^{(n)}$ 以外的項，即 $L(y) = 0$；這裡的齊次指的是方程式中每個項的 x 與 y 次方和相同，即 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$

3. Exact ODEs

3.1. Supplement: Partial Derivatives & Total Differential

Definition 二元函數 $z = f(x, y)$ 之 **偏導數 (Partial Derivatives)** f_x, f_y 定義為：

$$f_x(x, y) = \qquad\qquad\qquad\qquad , \quad f_y(x, y) =$$

偏導數有許多不同的表示符號. 例如，我們可以用 f_x 表示對變數 x 微分，或者寫成 $\partial f/\partial x$. 但在這裡，$\partial f/\partial x$ 不能被解釋為微分的比值. f 的微分量被定義為：

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}f(x, y) =$$

Notations: 若 $z = f(x, y)$，我們將其一階偏導數記作：

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = D_y f$$

Notations: 若 $z = f(x, y)$，我們將其二階偏導數記作：

對 x 微兩次：$f_{xx}(x, y) = (f_x)_x = f_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_{xx} f$

對 y 微兩次：$f_{yy}(x, y) = (f_y)_y = f_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D_{yy} f$

對 x 再對 y：$f_{xy}(x, y) = (f_x)_y = f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{xy} f$

對 y 再對 x：$f_{yx}(x, y) = (f_y)_x = f_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_{yx} f$

• 當 f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} 皆連續時，二階偏導數次序可交換：$f_{xy} = f_{yx}$.

Question Find the partial derivatives f_x, f_y of following functions.

- $f(x, y) = x^4 + 10x^2y^3 + ye^{2x}$ ________________________________
- $f(x, y) = (x^2 + xy)^5$ ________________________________

Question Find the total differential $\mathrm{d}z = \mathrm{d}f(x, y)$ of following functions.

- $f(x, y) = x^4 + 10x^2y^3 + ye^{2x}$ ________________________________
- $f(x, y) = (x^2 + xy)^5$ ________________________________

Definition 對於一階 ODEs $M \cdot \mathrm{d}x + N \cdot \mathrm{d}y = 0$，若滿足：

則稱該 ODEs 是**正合的 (Exact)**. 並且存在 $u = u(x, y)$ 使得：

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

解出 $u = u(x, y)$ 後，通解則為 .

Question Solve the following DEs.

- ▷ $(y^3 + 2x)\mathrm{d}x + (3xy^2 + 1)\mathrm{d}y = 0$

- ► $y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$

Question Solve the following DEs.

▷ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{2xy^3+2}{3x^2y^2+8e^{4y}}$

▶ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{e^x\cos y+1}{e^x\sin y-2x}$

有時我們原方程式並不是正合的，但經過恰當處理後即可使方程式變為正合：

Theorem. (**非正合 DE 之積分因子**) 對於一階 ODEs $M\cdot\mathrm{d}x+N\cdot\mathrm{d}y=0$，若存在 $\mu=\mu(x,y)$ 使得方程式 $\mu M\cdot\mathrm{d}x+\mu N\cdot\mathrm{d}y=0$ 為正合，亦即：

則稱 $\mu=\mu(x,y)$ 為**積分因子 (integrating Factor)**. 常見的非正合 DE 之積分因子：

- 若 $\dfrac{M_y-N_x}{N}=f(x)$，則積分因子
- 若 $\dfrac{M_y-N_x}{M}=g(y)$，則積分因子

Question Solve the following DEs.

- ▷ $(x^2 + y^2)\mathrm{d}x = 2xy\mathrm{d}y$

- ► $2y\mathrm{d}x + (3y - 2x)\mathrm{d}y = 0$

Next Week: 1-st order ODEs, Reduction of order.