1. How about n-th order linear ODEs ?

對於二階或更高階的線性微分方程式 (n-th order linear ODEs)：

$$L[y] = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x)y = r(x)$$

我們無法單靠積分求解. 核心觀念在於理解「解的結構」與「如何組成通解」.

1.1. Structure of General Solution

我們利用簡單的聯立方程組 (System of Linear Equations) 來類比理解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + s \\ x_2 = 2 - 2s \\ x_3 = s \\ x_4 = 0 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

用矩陣與向量可以更清楚的表示為：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_p} + s\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_h}, \quad s \in \mathbb{R}$$

因此對於線性方程組而言，通解 $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ 將解拆為兩部分：

- 齊次解 (Homogeneous Solution) y_h: 滿足 $L[y] = 0$ 的 $y = y_h$
- 特解 (Particular Solution) y_p: 滿足 $L[y] = r(x)$ 的 $y = y_p$

1.2. Structure of Homogeneous Solution

Question 考慮二階齊次方程式 $y'' + y = 0$，已知 $y_1 = \cos x$、$y_2 = \sin x$ 皆是該齊次方程式的解，說明以下函數亦是該齊次方程式的解：

- $y = 2\sin x$
- $y = 5\cos x$
- $y = 2\sin x + 5\cos x$
- $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

因此對於齊次方程式 $L[y]=0$，有一個非常重要的性質：

Theorem. **(Fundamental Theorem for Homogeneous Linear ODEs)** 若 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 皆為齊次方程式 $L[y]=0$ 的解，則它們的線性組合 (Linear Combination)：

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

也是該方程式的解 (其中 c_1, c_2 為任意常數).

Linear Independence & Wronskian

Question 我們知道 $y = c_1y_1 + c_2y_2$ 是解，但這樣就夠了嗎？說不定 $c_1y_1 + c_2y_2$ 可以被化簡為 cy_1，我們怎麼確定 y_1 和 y_2 沒有「重複」？

為了判斷函數是否獨立，我們使用**朗斯基行列式 (Wronskian)**，定義為：

$$W(y_1, y_2) = \det\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

- 當 $W(y_1, y_2) = 0$，我們說這兩個解是 **線性相依 (Linearly Dependent)** 的.
- 當 $W(y_1, y_2) \neq 0$，我們說這兩個解是 **線性獨立 (Linearly Independent)** 的.

Question Determine whether the following sets of functions are L.I.

▷ $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = e^{2x}$

計算其 Wronskian 行列式：

$$\begin{aligned} W(e^x, e^{2x}) &= \det\begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ (e^x)' & (e^{2x})' \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} \\ &= (e^x)(2e^{2x}) - (e^{2x})(e^x) = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \end{aligned}$$

由於 $e^{3x} \neq 0$ 對所有實數 x 均成立，故 $\{e^x, e^{2x}\}$ 為線性獨立.

► $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = xe^x$

計算其 Wronskian 行列式：

$$\begin{aligned} W(e^x, xe^x) &= \det\begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ (e^x)' & (xe^x)' \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{bmatrix} \\ &= (e^x)(x+1)e^x - (xe^x)(e^x) = (x+1)e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \end{aligned}$$

由於 $e^{2x} \neq 0$ 對所有實數 x 均成立，故 $\{e^x, xe^x\}$ 為線性獨立.

Characteristic Equation & Eigenfunctions

Question 我們已經知道齊次解的結構，但為何我們要猜解的形式是 $y = e^{\lambda x}$？

這是源於特徵值 (Eigenvalue) 的概念. 尋找特徵函數，即是尋找在變換中能保持形式完整的物件. 有別於其他函數微分後面目全非，$e^{\lambda x}$ 是唯一在微分算子 D 作用下，仍與自身有關的函數：

$$D(e^{\lambda x}) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$$

正因為它能將複雜的微分作用，內化為單純的數值特徵，展現了算子最原始的規律，故稱之為「特徵函數 (Eigenfunction)」.

Question Try to find the solution form of $y'' - 5y' + 6y = 0$.
我們假設基底解的形式為 $y = e^{\lambda x}$，將其代入原微分方程式：

$$(\lambda^2 e^{\lambda x}) - 5(\lambda e^{\lambda x}) + 6(e^{\lambda x}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda^2 - 5\lambda + 6)e^{\lambda x} = 0$$

由於 $e^{\lambda x}$ 在任何情況下皆不為 0，故必滿足以下特徵方程式 (Characteristic Eq.)：

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

解得特徵根為 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. 因此通解為基底 e^{2x} 與 e^{3x} 的線性組合 (Span)：

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

2. 2-nd order linear homogeneous ODEs

給定一個二階線性齊次方程式：

$$L[y] = ay'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

解其對應的特徵方程式：

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

得到兩個特徵根：

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

依據特徵根 $\lambda_{1,2}$ 情況不同，對應的通解可分為以下三種形式：

- Case 1：相異實根 $(\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R})$ $\quad$ $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
- Case 2：重根 $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R})$ $\quad$ $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$
- Case 3：共軛複根 $(\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta)$ $\quad$ $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Question Find the general solution of following homogeneous equations.

- ▷ $y'' + y' - 6y = 0$
  特徵方程式為：$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-2) = 0$
  $\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda_{1,2} = -3,\ 2$
  $\Rightarrow$ 通解為：$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$

- ▶ $y'' - 4y' + 3y = 0$
  特徵方程式為：$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-3) = 0$
  $\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda_{1,2} = 1,\ 3$
  $\Rightarrow$ 通解為：$y = C_1e^{x} + C_2e^{3x}$

- ▷ $y'' - 4y' + 4y = 0$
  特徵方程式為：$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2 = 0$
  $\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda_{1,2} = 2,\ 2$ (重根)
  $\Rightarrow$ 通解為：$y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$

- ▶ $y'' + 6y' + 9y = 0$
  特徵方程式為：$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda+3)^2 = 0$
  $\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda_{1,2} = -3,\ -3$ (重根)
  $\Rightarrow$ 通解為：$y = (C_1 + C_2x)e^{-3x}$

- ▷ $y'' + 4y = 0$
  特徵方程式為：$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4$
  $\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda_{1,2} = 0 \pm 2i$ (純虛根)
  $\Rightarrow$ 通解為：$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

- ▶ $y'' - 2y' + 2y = 0$
  特徵方程式為：$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}$
  $\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
  $\Rightarrow$ 通解為：$y = e^{x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$

3. n-th order linear homogeneous ODEs

- Case 1：相異實根 $(\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R})$ $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_ne^{\lambda_n x}$
- Case 2：第 k 重實根 $(\lambda_k = \lambda)$ $y = C_kx^{k-1}e^{\lambda x}$
- Case 3：相異共軛複根 $(\lambda = \alpha \pm i\beta)$ $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$
- Case 4：第 k 重共軛複根 $(\lambda_k = \lambda)$ $y = x^{k-1}e^{\alpha x}[C_{2k}\cos\beta x + C_{2k+1}\sin\beta x]$

Question Find the general solution of following homogeneous equations.

▷ $y''' - 7y' + 6y = 0 \Leftrightarrow (D-1)(D-2)(D+3)y = 0$
特徵方程式為：$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+3) = 0$
$\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda = 1,\ 2,\ -3$
$\Rightarrow$ 通解為：$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}$

▶ $y''' - 3y'' - 4y' = 0 \Leftrightarrow D(D+1)(D-4)y = 0$
特徵方程式為：$\lambda(\lambda+1)(\lambda-4) = 0$
$\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda = 0,\ -1,\ 4$
$\Rightarrow$ 通解為：$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{4x}$

▷ $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0 \Leftrightarrow (D-2)^3 y = 0$
特徵方程式為：$(\lambda-2)^3 = 0$
$\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda = 2,\ 2,\ 2$ (三重根)
$\Rightarrow$ 通解為：$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} x + C_3 x^2 e^{2x}$

▶ $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0 \Leftrightarrow (D+1)^2(D-3)y = 0$
特徵方程式為：$(\lambda+1)^2(\lambda-3) = 0$
$\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda = -1,\ -1,\ 3$
$\Rightarrow$ 通解為：$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{3x}$

▷ $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0 \Leftrightarrow (D^2+1)(D^2+9)y = 0$
特徵方程式為：$(\lambda^2+1)(\lambda^2+9) = 0$
$\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda = \pm i,\ \pm 3i$
$\Rightarrow$ 通解為：$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + (C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x)$

▶ $y^{(4)} - 3y''' + 6y'' - 12y' + 8y = 0 \Leftrightarrow (D-1)(D-2)(D^2+4)y = 0$
特徵方程式為：$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2+4) = 0$
$\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda = 1,\ 2,\ \pm 2i$
$\Rightarrow$ 通解為：$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$

▷ $y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \Leftrightarrow (D^2+1)^2 y = 0$
特徵方程式為：$(\lambda^2+1)^2 = 0$
$\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda = \pm i,\ \pm i$ (二重共軛複根)
$\Rightarrow$ 通解為：$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$

▶ $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0 \Leftrightarrow (D^2 - 2D + 2)^2 y = 0$
特徵方程式為：$(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = 0 \Rightarrow [(\lambda-1)^2+1]^2 = 0$
$\Rightarrow$ 特徵根為：$\lambda = 1 \pm i,\ 1 \pm i$ (二重共軛複根)
$\Rightarrow$ 通解為：$y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x e^{x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x)$

4. Initial Value Problem(IVP) & Boundary Value Problem(BVP)

- 初始值問題 (Initial Value Problem, IVP)：所有的輔助條件皆設定在自變數的同一點（如 $x = x_0$）．對於二階 ODE，通常給定：

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$$

- 邊界值問題 (Boundary Value Problem, BVP)：輔助條件設定在自變數的不同點（如區間的兩端 $x = a$ 與 $x = b$）．常見形式如：

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

Question Solve the following IVP or BVP.

▷ In a source-free series RLC circuit with $R = 3\Omega, L = 1\text{H}$, and $C = 0.5\text{F}$, the current $i(t)$ satisfies $i'' + 3i' + 2i = 0$ with initial conditions $i(0) = 1$ A and $i'(0) = 0$ A. Find the current $i(t)$.

特徵方程式為：$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1, \ -2$

通解為：$i(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

代入初始條件：

$i(0) = C_1 + C_2 = 1$

$i'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} \Rightarrow i'(0) = -C_1 - 2C_2 = 0$

解得：$C_1 = 2, \ C_2 = -1$

$\Rightarrow$ 電流解為：$i(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$

▶ Consider a circuit where the current $i(t)$ satisfies $i'' + 5i' + 6i = 0$ (RLC circuit with $R = 5\Omega, L = 1\text{H}, C = 1/6\text{F}$). Given that current measurements are taken at two distinct times such that $i(0) = 0$ A and $i(\ln 2) = \frac{1}{8}$ A, determine the current function $i(t)$.

特徵方程式為：$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2, -3$

通解為：$i(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$

代入邊界條件：

$i(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$

$i(\ln 2) = C_1 e^{-2\ln 2} - C_1 e^{-3\ln 2} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow C_1(\frac{1}{4}) - C_1(\frac{1}{8}) = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{8}C_1 = \frac{1}{8}$

解得 $C_1 = 1, \ C_2 = -1$

$\Rightarrow$ 電流解為：$i(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$

Next Week: n-th order linear NON-homogeneous ODEs with Constant Coeff.