# 10701 微積分乙期末考評分標準

負責題號 1、(1)

$$\int xe^x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{令 } u=x & dv=e^x dx \\ du=dx & v=e^x \end{array}}$$ (2分)

$$=xe^x-\int e^x\,dx$$ (4分)

$$=xe^x-\underbrace{e^x}_{(1.5分)}+\underbrace{C}_{(0.5分)}$$ #

註1：未寫 C 扣 0.5分

註2：變數變換未換回 $x$ 扣 1分

# 10701 微積分乙期末考評分標準

負責題號 1(2)

參考解法

$$\int \sin x \cdot e^x \, dx$$

令 $u = \sin x$, $dv = e^x dx$ ← 2分

$\Downarrow$ $du = \cos x \, dx$, $\Downarrow$ $v = e^x$

$$= \sin x \cdot e^x - \int \cos x \cdot e^x \, dx$$ ← 4分

令 $\bar{u} = \cos x$, $d\bar{v} = e^x dx$

$\Downarrow$ $d\bar{u} = -\sin x \, dx$, $\Downarrow$ $\bar{v} = e^x$

$$= \sin x \cdot e^x - \left[ \cos x \cdot e^x - \int (-\sin x) e^x \, dx \right]$$

$$= \sin x \cdot e^x - \cos x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \, dx$$ ← 7分

$$\therefore \int \sin x \cdot e^x \, dx = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) e^x + C$$ ← 8分

---

沒有+C、扣0.5 ; 分部積分項弄錯 扣2

沒有dx酌予扣分

# 10701 微積分乙期末考評分標準

負責題號 1. (3)

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{4-x}}\,dx$$

令 $u=4-x$ , $du=-dx$ , $x=4-u$ , $2x+1=9-2u$

(2分)

$$=\int \frac{-(9-2u)}{\sqrt{u}}\,du \quad \text{— (4分)}$$

$$=\int -9u^{-\frac{1}{2}}+2u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$=\underbrace{-18u^{\frac{1}{2}}}_{(1.5分)}+\underbrace{\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}}_{(1.5分)}+\underbrace{C}_{(0.5分)} \quad \text{— (7.5分)}$$

$$=-18(4-x)^{\frac{1}{2}}+\frac{4}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}}+C \quad \text{— (8分)}$$

以上配分由出題老師指定，拜託包含，謝謝各位！

# 10701 微積分乙期末考評分標準

負責題號 1(4)

法一：（變數變換）

能確保算對的話，直接跳4分全給。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx$$

Let $u=\sqrt{x}$ $du=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ —— 2分

（有的人進一步 $u^2=x$，$2u\,du=dx$ 亦可）

（Let $u=\sqrt{x}+1$ 亦可）

$= \int \frac{1}{1+u}\cdot 2\,du$ —— 2分

$= 2\ln|1+u|+C$ —— 3.5分

$= 2\ln(1+\sqrt{x})+C$ —— 0.5分

也就是"u 換回 $\sqrt{x}$" 0.5分，"+C" 0.5分。

會積 $\frac{1}{1+u}$ 3分。

法二：（直接積，不寫出變換）

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx$$

$(1+\sqrt{x})'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ —— 2分

沒寫的話會不知道你在做什麼，除非有整理"清楚" $\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}$

$= 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx$ —— 2分

$= 2\ln|1+\sqrt{x}|+C$ —— 4分

$= 2\ln(1+\sqrt{x})+C$

"這一題" ln|  | 還是 ln(  ) 直接都可！不列入評分中

法三：先拆開 or 其他方式，過程正確，答案正確，8分全給。

計算錯誤 酌扣 1分（前提是助教能確定只是算錯）

沒寫 $\int$ —— dx 扣 0.5分

只有答案給2分。

# 10701 微積分乙期末考評分標準

負責題號 1、(5)

$$\int \frac{-x^3+5x^2-3x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,dx$$

[法一]

* $$\frac{-x^3+5x^2-3x+5}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$ —得1分

$$= \frac{-1}{(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+1}$$ —得5分

$A=-1$, $B=3$, $C=0$, $D=1$

(A, B, C, D 對, 各得 1分)

$$= \int \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\ln|x-1| - 3(x-1)^{-1} + \arctan x + C$$ —得8分

(三個積分, 對一個得 1分) (沒 +C 扣 0.5)

[法二]

*設成 $\frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ —得1分

$$= \int \frac{-x+4}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+1}\,dx$$ —得3分

$\frac{1}{x^2+1}$ ↳ 得2分

$$= \int \frac{-(x-1)+3}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$ —得5分

$$= -\ln|x-1| - 3(x-1)^{-1} + \arctan x + C$$ —得8分

# 10701 微積分乙期末考評分標準

負責題號 1.(b)

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2}\,dx$$

① 其中一步錯，後面不給分。

② 沒有 "+C"，扣 0.5 分，沒有 "dx"，扣 0.5 分

〈法I〉

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2}\,dx = \int \frac{x}{(x-1)^2+1}\,dx \text{ —— } (*)$$ 1分

令 $x-1=\tan\theta,\ \frac{-\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$dx = \sec^2\theta\,d\theta$ 2分

$$(*) = \int \frac{1+\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta = \int \frac{1+\tan\theta}{\sec^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta = \underbrace{\int (1+\tan\theta)\,d\theta}_{(2分)}$$

$$= \int 1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta = \underbrace{\theta + \int \frac{-1}{\cos\theta}\,d(\cos\theta)}_{(1分)}$$

$$= \theta - \ln|\cos\theta| + C = \underbrace{\arctan(x-1)}_{(1分)} \underbrace{- \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\right)}_{(1分)} + C$$

〈法二〉

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2}\,dx = \overbrace{\int \frac{x}{(x-1)^2+1}\,dx}^{(1分)} = \overbrace{\int \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2+1}\,dx}^{(2分)}$$

$$= \int \frac{(x-1)}{(x-1)^2+1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx \text{ —— } (1分)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)}_{(2分)} + \underbrace{\arctan(x-1)}_{(2分)} + C$$

※ 沒整理完，沒換回以 x 表示，扣 1 分 → ex: $\cos(\arctan\theta)$ 等.
$\cos(\arctan(x-1))$

# 10701 微積分乙期末考評分標準

負責題號 1. (7)

$$\int \tan x \cdot \cos(2x)\,dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x}(2\cos^2 x - 1)\,dx \quad \text{—— ②}$$

令 $u = \cos x$

$du = -\sin x\,dx$

$$= \int \frac{-(2u^2-1)}{u}\,du \quad \text{—— ⑥}$$

$$= \int \left(-2u + \frac{1}{u}\right) du$$

$$= -u^2 + \ln|u| + C \quad \text{—— ⑦}$$

$$= -(\cos x)^2 + \ln|\cos x| + C \quad \text{—— ⑧}$$

(或 $(\sin x)^2 + \ln|\cos x| + C$ 或 $-\frac{1}{2}\cos(2x) + \ln|\cos x| + C$ 也對)

# 10701 微積分乙期末考評分標準

負責題號 1.(8)

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$$

令 $x=2\sin\theta$ , $0\le x\le\sqrt{3} \Rightarrow 0\le\sin\theta\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

(or $x=2\cos\theta$) (1分) $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ (1分)

$dx = 2\cos\theta\,d\theta$ (1分)

$$原式 = \int_0^{\pi/3} \frac{4\sin^2\theta}{(4\cos^2\theta)^{3/2}}\,2\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \frac{4\sin^2\theta}{8\cos^3\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta \quad (\because \cos\theta>0)$$

$$= \int_0^{\pi/3} \tan^2\theta\,d\theta$$ — — — — 到此能得5分

$$= \int_0^{\pi/3} (\sec^2\theta-1)\,d\theta$$ (1分)

$$= (\tan\theta-\theta)\Big|_{\theta=0}^{\pi/3}$$ (1分)

$$= \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$ (1分)

# 10701 微積分乙期末考評分標準

負責題號 2.

令 $y=\lim_{x\to 1^+}(\ln x)^{x-1}$

$$\ln y=\ln\left(\lim_{x\to 1^+}(\ln x)^{x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\ln(\ln x)^{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln(\ln x) \text{ —— } ④$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} \quad (\text{L'Hôpital's Rule}) \text{ — } ⑥$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)^2}{x\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-2(x-1)}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}} \quad (\text{L'Hôpital's Rule}) \text{ — } ⑧$$

$$=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}(\ln x)^{x-1}=y=e^0=1 \text{ —— } ⑨$$

Note 1. 若知道第一步要取 ln 但取後結果錯誤得 2 分

2. 若使用羅必達法則後微分錯誤錯一個扣 1 分

# 10701 微積分乙期末考評分標準

負責題號 3

$|3\sin t - t|$ is a continuous function of $t$.

By F.T.C (微積分基本定理)

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} |3\sin t - t|\,dt = |3\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}|\,\frac{d\sqrt{x}}{dx} \text{ — ⑥分}$$

$$= |3\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}|\,\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ — ⑧分}$$

* 一開始就沒絕对值 ⇒ 0分
* 有用FTC，也幾乎算对，最後才把絕对值拿掉 ⇒ 6分
* 計算方面的輕理錯誤 ⇒ 7分
* 沒有用FTC（包含先積後微）⇒ 0分
* 写 $|3\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}|$，沒写 $\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ⇒ 0分（部分給分）
* 写 $|3\sin t - t|\frac{1}{2\sqrt{x}}$，沒代入 $\sqrt{x} = t$ ⇒ 0分
* 自行"$+C$"，前面都对 ⇒ 8分
* 「分段」答案为 $F'(x) = (3\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$ if $3\sin\sqrt{x} - \sqrt{x} \geq 0$

  $(-3\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$ if $3\sin\sqrt{x} - \sqrt{x} < 0$

  而非 $F'(x) = (3\sin\sqrt{x} - \sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$ if $3\sin t - t \geq 0$

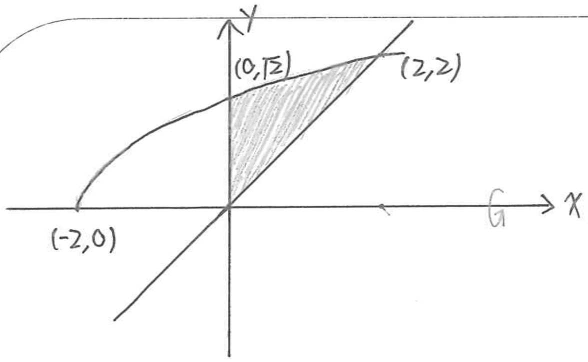
  $(-3\sin\sqrt{x} + \sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$ if $3\sin t - t < 0$

* 老師給写 $|3\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}|$ 的同学 2~3分(看情況)

  但写 $|3\sin t - t|\Big|_0^{\sqrt{x}} = |3\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}|$ 不給分

# 10701 微積分乙期末考評分標準

負責題號 4、




(plot, 2pt)

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (y)(y-0)\,dy + 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{2} (y)\left((y)-(y^2-2)\right) dy$$ (6pt)

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} y^2\,dy + 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{2} (-y^3+y^2+2y)\,dy$$

$$= 2\pi \left(\tfrac{1}{3}y^3\right)\Big]_0^{\sqrt{2}} + 2\pi \left(-\tfrac{1}{4}y^4+\tfrac{1}{3}y^3+y^2\right)\Big]_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}-0\right) + 2\pi\left(\left(-4+\tfrac{8}{3}+4\right)-\left(-1+\tfrac{2\sqrt{2}}{3}+2\right)\right)$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{5}{3}\right)$$

$$= \tfrac{10}{3}\pi$$

(process, 2pt)

# 10701 微積分乙期末考評分標準

負責題號 5.

5. Find the improper integral. $\int_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

Sol 1.

$$\int_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_e^a \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx \quad , \quad \text{令 } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx, \quad dV = \frac{1}{\sqrt{x}}dx \Rightarrow V(x) = 2\sqrt{x}$$ 寫出 limit 2pt. 變數變換 2pt.

$$= \lim_{a\to\infty}\left[ (\ln x \cdot 2\sqrt{x})\Big|_{x=e}^{a} - \int_e^a 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx \right]$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left[ \ln x \cdot 2\sqrt{x} - 4\sqrt{x}\Big|_{x=e}^{a} \right]$$ 積分完成 2pt.

$$= \lim_{a\to\infty}\left[ 2\sqrt{a}\cdot\ln a - 4\sqrt{a} + 2\sqrt{e} \right]$$ 值代入 1pt.

$$= +\infty$$

故 $\int_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ 發散. 正解 2pt.

Sol 2

$\because 0 \le \frac{1}{\sqrt{x}} \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ for $x \ge e$ 2pt.

$\Rightarrow 0 \le \int_e^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \le \int_e^a \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ for any $a \ge e$ 1pt.

$\Rightarrow \int_e^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_e^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \le \lim_{a\to\infty}\int_e^a \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ 2pt.

Note that $\int_e^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = +\infty$ 2pt.

$\Rightarrow \int_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = +\infty$ 發散 2pt.