1. What is the Differential Equation?

- 微分方程式從何而來？

Question 對於右側 RLC 電路，加上電源 $V_s(t) = 5\text{V}$ 後，迴路電流 $I(t)$ 該如何表示？

$$\text{Note}: V_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int I(t)\ \mathrm{d}t,\ V_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

由 KVL，單一迴路上總電壓升與電壓降相同：

$$V_s(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t)$$

$$\Rightarrow \quad 5 = R \cdot I(t) + \frac{1}{C} \cdot \int I(t)\ \mathrm{d}t + L \cdot \frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = R \cdot I'(t) + \frac{1}{C} \cdot I(t) + L \cdot I''(t)$$

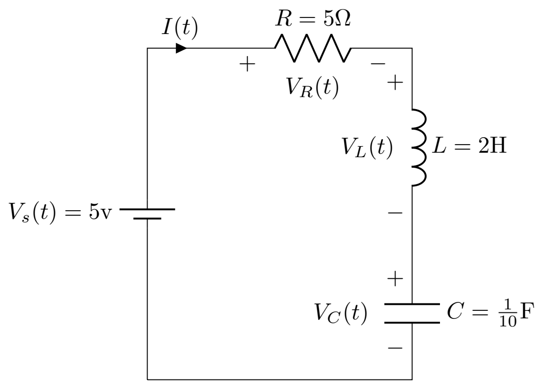


Figure 1: a RLC circuit

- 微分方程式與我們過去學過的方程式有何不同？

Question Solve $t^2 - 2 = 0$

我們令縱軸 $y = t^2 - 2$，依據每個 t 計算出對應的 y 值並描點至坐標平面上. 那麼方程式 $t^2 - 2 = 0$ 的解，即曲線與 $y = 0$ 之交點.

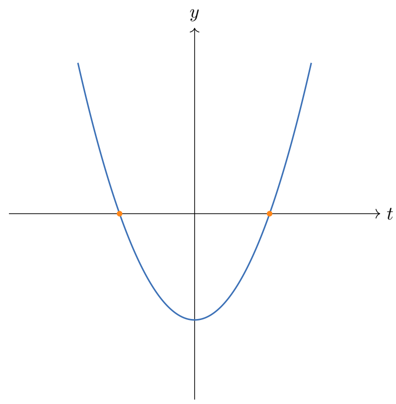


Figure 2: 代數方程式：$y = t^2 - 2$

Question Solve $y' = 2t,\ y(0) = -2$

方程式 $y' = 2t$ 定義了平面上各點的斜率規律，據此可繪製出「方向場」. 其「解」即為順著這些斜率延伸的曲線路徑. 若未指定起點，存在無窮多條符合規律的路徑（通解，如 $y = t^2 + C$）；一旦給定初始條件 $y(0) = -2$，便能唯一確定其中一條路徑（特解）.

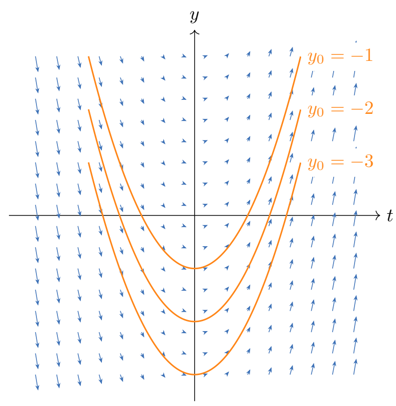


Figure 3: 微分方程式：$y' = 2t$

1.1. Classification of DEs

n 階 ∕非齊次 ∕非線性 常∕偏微分方程

1. 「n **階** (**n-th order**)」：微分方程式的階數是指方程式中最高次微分項的次數. 例如，微分方程式 $y''' + 3y' - 2 = 0$ 是三階微分方程式，因為最高次的微分項是三次微分 y'''.

2. 「**齊次** (**Homogeneous**)[1]」：指的是方程式中除了包含未知函數 y 和其導數項 $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 以外的項都為零. 例如，$y'' + x^2y' + 3xy = 0$ 是齊次的. 相對地，**非齊次** (**non-homogeneous**) 方程式則包含 $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 以外組成的項，例如 $y'' + x^2y' + 3xy = 5$，因為在等號右側多了一個不相干的 5.

3. 「**線性** (**Linear**)」：指的是微分方程式是由 $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 的線性組合所組成. 例如，$3y'' + xy' + x^2y = 2x + 5$ 是線性的. 相對地，如果方程式中包含未知函數及其導數的乘積或其他非線性項，例如 $y \cdot y' + y^2 = 0$，則是**非線性的** (**non-linear**).

4. 「**常微分方程式** (**Ordinary Differential Equations, ODEs**)」：是由變數 x、未知的單變數函數 $y = f(x)$、及其導數 y'、y'' 等等所組成. 例如，$y' = 3x$ 是常微分方程式，因為它只涉及一個自變數 x 和未知函數 y 的導數.

5. 「**偏微分方程式** (**Partial Differential Equations, PDEs**)」：是涉及多變數函數及其偏導數的微分方程式. 例如，波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 就是個著名偏微分方程，因為它涉及多變數函數 $u(t, x)$ 以及兩個自變數相應的偏導數.

例如，$y' + 2x + y = 0$ 是一階非齊次線性常微分方程，因為最高次微分項 y' 是一階；除了 y', y 之外還多了 $2x$、y, y' 是線性組合；只涉及 $y = y(x)$ 這個單變數函數. 而 $y'' + y^2 = 0$ 是二階齊次非線性常微分方程等等. 或者微分方程也能像聯立方程組那般出現，稱為**微分方程組** (**System of DEs**).

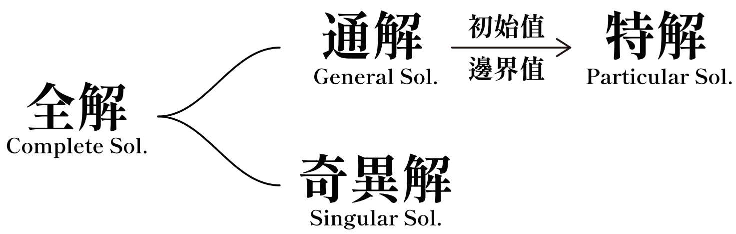
Question 試說明以下微分方程式的類型：

- $y' + 5y = 0$ 一階線性齊次常微分方程式
- $y'' + 8yy' = 2x^3$ 二階非線性非齊次常微分方程式
- $y^{(5)} + 2y = e^{2x} + \cos x$ 五階線性非齊次常微分方程式
- $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$ 一階線性常微分方程組
- $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 二階線性偏微分方程式 (拉普拉斯方程)

[1]「齊次」一詞出現在許多不同的情境中，雖然它們代表相似的概念，但具體含義略有不同. 因此，在閱讀文章時，遇到「齊次」一詞時應仔細考慮上下文，以準確理解其含義.

1.2. Solutions of DEs

微分方程的解不再是一個數字，而是一個或一些函數. 我們將其分為：



1.「**通解 (General Solution)**」：包含與階數等量的未知常數 C_n. 它代表了方向場中「整群」符合規則的路徑.

2.「**特解 (Particular Solution)**」：是由通解代入指定的 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 得到的一個解. 透過**初始值問題 (Initial Value Problem, IVP)** 或**邊界值問題 (Boundary Value Problem, BVP)** 得到未知變數 C_n 之後的單一解.

3.「**奇異解 (Singular Solution)**」：是不能由通解得到的解，通常會出現在非線性常微分方程中. 有趣的是，幾何上常表現為通解曲線族的「包絡線 (Envelope)」.

4.「**全解 (Complete Solution)**」：是能表示所有解的解通式. 對於沒有奇異解的微分方程而言，其全解與通解相同；有奇異解的微分方程而言，則無全解.

最後，我們通過各種方法得出的解不一定是熟悉的顯函數 $y = y(x)$ 的形式，也有可能是隱函數 $f(x, y) = 0$ 的樣子. 並且我們稱形式為顯函數的解為**顯解 (Explicit Solution)**；反之，形式為隱函數的解為**隱解 (Implicit Solution)**.

2. Separable ODEs

Question Try to solve $y' = y$.

$$
\begin{aligned}
y' = y \quad &\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \quad \ln|y| = x + C \quad \Rightarrow \quad y = e^{x+C} = C_1 e^x
\end{aligned}
$$

Definition 若一個微分方程式（或許需經由代數整理）能寫成：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x)G(y)$$

則稱該方程為**可分離變數 (separable)** 微分方程式.

Question Solve the following DEs.

▷ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x)G(y)$

$$\Rightarrow \frac{1}{G(y)}\mathrm{d}y = F(x)\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{G(y)}\,\mathrm{d}y = \int F(x)\,\mathrm{d}x$$

▶ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x(1-y^2)}{1+x^2}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{1}{1-y^2}\mathrm{d}y = \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{1-y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \\
&\Rightarrow \quad \frac{1+y}{1-y} = C(1+x^2)
\end{aligned}$$

Remark 遇到**齊次**[2]ODEs，嘗試整理出 $y' = f(\frac{y}{x})$，接著令 $u = \frac{y}{x}$ 做變數變換，那麼可以得到 $\mathrm{d}y = x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x$，最後再帶回原方程式求解.

Question Solve the following DEs.

▷ $x^2y' = y^2 + xy$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} \\
&\Rightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = u + u^2, \quad \text{Let} u = \frac{y}{x},\ \mathrm{d}y = x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \quad -\frac{1}{u} = \ln|x| + C \\
&\Rightarrow \quad -\frac{x}{y} = \ln|x| + C
\end{aligned}$$

▶ $(y^2 - x^2)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2-x^2}{2xy} = \frac{1}{2}\left[\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^{-1}\right] \\
&\Rightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \frac{u^2-1}{2u}, \quad \text{Let } u = \frac{y}{x},\ \mathrm{d}y = x\mathrm{d}u + u\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u^2-1-2u^2}{2u} = -\frac{u^2+1}{2u} \\
&\Rightarrow \quad \frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \quad \ln(u^2+1) = -\ln|x| + C \\
&\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = -\ln|x| + C
\end{aligned}$$

[2]這裡指的齊次與 P.2 介紹的齊次是不同概念. P.2 介紹的齊次指的是方程式中沒有 $y^{(n)}$ 以外的項，即 $L(y) = 0$；這裡的齊次指的是方程式中每個項的 x 與 y 次方和相同，即 $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$

3. Exact ODEs

3.1. Supplement: Partial Derivatives & Total Differential

Definition 二元函數 $z = f(x, y)$ 之 **偏導數 (Partial Derivatives)** f_x, f_y 定義為：

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}, \quad f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

偏導數有許多不同的表示符號. 例如，我們可以用 f_x 表示對變數 x 微分，或者寫成 $\partial f/\partial x$. 但在這裡，$\partial f/\partial x$ 不能被解釋為微分的比值. f 的微分量被定義為：

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}f(x,y) = f_x \cdot \mathrm{d}x + f_y \cdot \mathrm{d}y$$

Notations: 若 $z = f(x, y)$，我們將其一階偏導數記作：

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = D_x f$$

$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = D_y f$$

Notations: 若 $z = f(x, y)$，我們將其二階偏導數記作：

對 x 微兩次：$f_{xx}(x,y) = (f_x)_x = f_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D_{xx} f$

對 y 微兩次：$f_{yy}(x,y) = (f_y)_y = f_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = D_{yy} f$

對 x 再對 y：$f_{xy}(x,y) = (f_x)_y = f_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D_{xy} f$

對 y 再對 x：$f_{yx}(x,y) = (f_y)_x = f_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D_{yx} f$

- 當 f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} 皆連續時，二階偏導數次序可交換：$f_{xy} = f_{yx}$.

Question Find the partial derivatives f_x, f_y of following functions.

- $f(x,y) = x^4 + 10x^2y^3 + ye^{2x}$ $f_x = 4x^3 + 20xy^3 + 2ye^{2x},\ f_y = 30x^2y^2 + e^{2x}$
- $f(x,y) = (x^2 + xy)^5$ $f_x = 5(x^2+xy)^4 \cdot (2x+y),\ f_y = 5(x^2+xy)^4 \cdot (x)$

Question Find the total differential $\mathrm{d}z = \mathrm{d}f(x, y)$ of following functions.

- $f(x,y) = x^4 + 10x^2y^3 + ye^{2x}$ $\mathrm{d}z = (4x^3 + 20xy^3 + 2ye^{2x})\mathrm{d}x + (30x^2y^2 + e^{2x})\mathrm{d}y$
- $f(x,y) = (x^2 + xy)^5$ $\mathrm{d}z = (5(x^2+xy)^4 \cdot (2x+y))\mathrm{d}x + (5(x^2+xy)^4 \cdot (x))\mathrm{d}y$

Definition 對於一階 ODEs $M\cdot \mathrm{d}x+N\cdot \mathrm{d}y=0$，若滿足：

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

則稱該 ODEs 是**正合的 (Exact)**. 並且存在 $u=u(x,y)$ 使得：

$$\begin{cases} u_x=M \\ u_y=N \end{cases}$$

解出 $u=u(x,y)$ 後，通解則為 $u(x,y)=C$.

Question Solve the following DEs.

▷ $(y^3+2x)\mathrm{d}x+(3xy^2+1)\mathrm{d}y=0$

由於 $\dfrac{\partial}{\partial y}(y^3+2x)=3y^2=\dfrac{\partial}{\partial x}(3xy^2+1)$，因此該 DE 為正合. 即存在 $u=u(x,y)$ 使得：

$$\begin{cases} u_x=y^3+2x & \cdots(1) \\ u_y=3xy^2+1 & \cdots(2) \end{cases}$$

由 (1) 我們有 $u(x,y)=\displaystyle\int y^3+2x\ \mathrm{d}x=xy^3+x^2+\varphi(y)$，

那麼 $u_y(x,y)=3xy^2+0+\varphi'(y)\overset{(2)}{=}3xy^2+1$，

也就是說 $\varphi'(y)=1$，亦即 $\displaystyle\int\varphi(y)\ \mathrm{d}y=\int 1\ \mathrm{d}y=y+C$，

因此通解為 $u(x,y)=xy^3+x^2+y=C$

▶ $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$

由於 $\dfrac{\partial}{\partial y}(y)=1=\dfrac{\partial}{\partial x}(x)$，因此該 DE 為正合. 即存在 $u=u(x,y)$ 使得：

$$\begin{cases} u_x=y & \cdots(1) \\ u_y=x & \cdots(2) \end{cases}$$

由 (1) 我們有 $u(x,y)=\displaystyle\int y\ \mathrm{d}x=xy+\varphi(y)$，

那麼 $u_y(x,y)=x+\varphi'(y)\overset{(2)}{=}x$，

也就是說 $\varphi'(y)=0$，亦即 $\displaystyle\int\varphi(y)\ \mathrm{d}y=\int 0\ \mathrm{d}y=C$，

因此通解為 $u(x,y)=xy=C$

Question Solve the following DEs.

▷ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{2xy^3+2}{3x^2y^2+8e^{4y}}$

方程式等價於 $(2xy^3+2)\mathrm{d}x + (3x^2y^2+8e^{4y})\mathrm{d}y = 0$

由於 $\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy^3+2) = 6xy^2 = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2+8e^{4y})$，因此該 DE 為正合. 即存在 $u = u(x,y)$ 使得：

$$\begin{cases} u_x = 2xy^3+2 & \cdots(1) \\ u_y = 3x^2y^2+8e^{4y} & \cdots(2) \end{cases}$$

由 (1) 我們有 $u(x,y) = \displaystyle\int (2xy^3+2)\,\mathrm{d}x = x^2y^3+2x+\varphi(y)$，

那麼 $u_y(x,y) = 3x^2y^2+0+\varphi'(y) \overset{(2)}{=} 3x^2y^2+8e^{4y}$，

也就是說 $\varphi'(y) = 8e^{4y}$，亦即 $\varphi(y) = \displaystyle\int 8e^{4y}\,\mathrm{d}y = 2e^{4y}+C$，

因此通解為 $u(x,y) = x^2y^3+2x+2e^{4y} = C$

▶ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{e^x\cos y+1}{e^x\sin y-2x}$

方程式等價於 $(e^x\sin y-2x)\mathrm{d}x + (e^x\cos y+1)\mathrm{d}y = 0$

由於 $\dfrac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y-2x) = e^x\cos y = \dfrac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y+1)$，因此該 DE 為正合. 即存在 $u = u(x,y)$ 使得：

$$\begin{cases} u_x = e^x\sin y-2x & \cdots(1) \\ u_y = e^x\cos y+1 & \cdots(2) \end{cases}$$

由 (1) 我們有 $u(x,y) = \displaystyle\int (e^x\sin y-2x)\,\mathrm{d}x = e^x\sin y-x^2+\varphi(y)$，

那麼 $u_y(x,y) = e^x\cos y+\varphi'(y) \overset{(2)}{=} e^x\cos y+1$，

也就是說 $\varphi'(y) = 1$，亦即 $\varphi(y) = \displaystyle\int 1\,\mathrm{d}y = y+C$，

因此通解為 $u(x,y) = e^x\sin y-x^2+y = C$

有時我們原方程式並不是正合的，但經過恰當處理後即可使方程式變為正合：

Theorem. (**非正合 DE 之積分因子**) 對於一階 ODEs $M\cdot\mathrm{d}x + N\cdot\mathrm{d}y = 0$，若存在 $\mu = \mu(x,y)$ 使得方程式 $\mu M\cdot\mathrm{d}x + \mu N\cdot\mathrm{d}y = 0$ 為正合，亦即：

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

則稱 $\mu = \mu(x,y)$ 為**積分因子 (integrating Factor)**. 常見的非正合 DE 之積分因子：

- 若 $\dfrac{M_y-N_x}{N} = f(x)$，則積分因子 $\mu(x,y) = e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
- 若 $\dfrac{M_y-N_x}{M} = g(y)$，則積分因子 $\mu(x,y) = e^{\int -g(y)\,\mathrm{d}y}$

Question Solve the following DEs.

▷ $(x^2+y^2)\mathrm{d}x = 2xy\mathrm{d}y$
方程式等價於 $(x^2+y^2)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y = 0$
由於 $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = 2y \neq -2y = \dfrac{\partial}{\partial x}(-2xy)$，因此該 DE 並不是正合. 並且注意到 $\dfrac{(2y)-(-2y)}{-2xy} = -\dfrac{2}{x} = f(x)$，可得積分因子應為 $\mu(x,y) = e^{\int -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x^2}$，那麼原方程式乘上積分因子後即為正合：

$$\frac{1}{x^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{x^2}2xy\mathrm{d}y = 0$$

即存在 $u = u(x,y)$ 使得：

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{x^2}(x^2+y^2) = 1 + \frac{y^2}{x^2} & \cdots(1) \\ u_y = -\frac{1}{x^2}2xy = -\frac{2y}{x} & \cdots(2) \end{cases}$$

由 (1) 我們有 $u(x,y) = \displaystyle\int 1 + \frac{y^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = x - \frac{y^2}{x} + \varphi(y)$，
那麼 $u_y(x,y) = 0 - 2\frac{y}{x} + \varphi'(y) \overset{(2)}{=} -2\frac{y}{x}$，
也就是說 $\varphi'(y) = 0$，亦即 $\varphi(y) = C$，因此通解為 $u(x,y) = x - \frac{y^2}{x} = C$

▶ $2y\mathrm{d}x + (3y-2x)\mathrm{d}y = 0$
由於 $\dfrac{\partial}{\partial y}(2y) = 2 \neq -2 = \dfrac{\partial}{\partial x}(3y-2x)$，因此該 DE 並不是正合. 並且注意到 $\dfrac{M_y - N_x}{M} = \dfrac{2-(-2)}{2y} = \dfrac{2}{y} = g(y)$，可得積分因子應為 $\mu(x,y) = e^{\int -g(y)\,\mathrm{d}y} = e^{\int -\frac{2}{y}\,\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{y^2}$，那麼原方程式乘上積分因子後即為正合：

$$\frac{2}{y}\mathrm{d}x + \left(\frac{3}{y} - \frac{2x}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0$$

即存在 $u = u(x,y)$ 使得：

$$\begin{cases} u_x = \frac{2}{y} & \cdots(1) \\ u_y = \frac{3}{y} - \frac{2x}{y^2} & \cdots(2) \end{cases}$$

由 (1) 我們有 $u(x,y) = \displaystyle\int \frac{2}{y}\,\mathrm{d}x = \frac{2x}{y} + \varphi(y)$，
那麼 $u_y(x,y) = -\frac{2x}{y^2} + \varphi'(y) \overset{(2)}{=} \frac{3}{y} - \frac{2x}{y^2}$，
也就是說 $\varphi'(y) = \frac{3}{y}$，亦即 $\varphi(y) = 3\ln|y| + C$，
因此通解為 $u(x,y) = \frac{2x}{y} + 3\ln|y| = C$

Next Week: 1-st order ODEs, Reduction of order.