

## 1. Substitution Rule

將被積函數的一部分打包成一個新變數  $u = u(x)$ ，有機會使積分難度降低。打包時，若成功湊出  $u'(x) \, dx$  則積分會變得更加容易。而定積分在使用變數變換時，需要注意上下限範圍。最後記得換回最一開始的變數。

**Question** Calculate the following integral.

$$\triangleright \int 2x\sqrt{x^2+1} \, dx$$

$$\blacktriangleright \int x^2\sqrt{x^3+1} \, dx$$

$$\triangleright \int \sec x \, dx$$

$$\blacktriangleright \int \tan x \, dx$$

$$\triangleright \int x^2 e^{x^3+1} \, dx$$

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

## 2. Trigonometric Substitution

三角代換算式變數變換的一種特殊方法，三角代換是為了使用一些三角恆等式將  $x$  直接替換成  $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ 、 $\sec \theta$ ：

| 積分中的表達式            | 代換方法 | 代換結果                                |
|--------------------|------|-------------------------------------|
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ |      | $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ |
| $\sqrt{a^2 + x^2}$ |      | $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ |
| $\sqrt{x^2 - a^2}$ |      | $\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$ |

**Remark** 只要記住「根號內的數值必須大於等於零」

**Question** Calculate the following integral.

$$\triangleright \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$\triangleright \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}} \, dx$$

$$\blacktriangleright \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \, dx$$

### 3. Partial Fraction

將複雜的分式函數  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  使用長除法與因式分解化簡成：

$$f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

其中  $S(x)$  為多項式 (若  $\deg P \geq \deg Q$  才會有  $S(x)$  這一項)，而  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  為真分式 ( $\deg R < \deg Q$ )。對於真分式，可依據  $Q(x)$  的因式分解進一步拆分為一次因式與不可分解的二次因式：

$$\frac{A_1}{x - a_1} + \cdots + \frac{A_m}{(x - a_m)^m} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \cdots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + b_nx + c_n)^n}$$

拆分後，每一項的積分通常簡單許多，從而簡化計算。

**Question** Decompose the following fractions into partial fractions.

$$\triangleright \frac{2x^4 + 3x^3 + 7x^2 - 5x - 3}{x^3 - x}$$

$$\blacktriangleright \frac{3x^4 + x^3 + 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x}$$

**Question** Calculate the following integral.

$$\triangleright \int \frac{2x^4 + 3x^3 + 7x^2 - 5x - 3}{x^3 - x} \, dx$$

$$\blacktriangleright \int \frac{3x^4 + x^3 + 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x} \, dx$$

## 4. Integration by part

微分乘法法則告訴我們：

$$\frac{d}{dx}(F(x) \cdot G(x)) = F(x)g(x) + f(x)G(x)$$

其中  $F'(x) = f(x)$ 、 $G'(x) = g(x)$ . 同時對兩邊積分可以得到：

$$F(x) \cdot G(x) = \int F(x)g(x) \, dx + \int f(x)G(x) \, dx$$

移項後有：

$$\int F(x)g(x) \, dx =$$

這即是分部積分的基礎，它幫助我們處理有關函數乘積的積分.

**Question** Calculate the following integrals by parts.

▷  $\int x \ln x \, dx$

▶  $\int \ln x \, dx$

▷  $\int x e^x \, dx$

▶  $\int x^2 e^x \, dx$

$$\triangleright \int e^x \sin x \, dx$$

$$\blacktriangleright \int e^x \cos x \, dx$$

## 5. Improper Integrals

**Definition** 若積分上、下限中有一端為無窮，則稱該積分屬於第一類瑕積分：

- $\int_a^\infty f(x) \, dx =$
- $\int_{-\infty}^b f(x) \, dx =$
- $\int_{-\infty}^\infty f(x) \, dx =$

**Remark** 對應的極限若存在，稱該積分收斂 (Convergent)；若不存在，則稱發散 (Divergent).

**Question** Calculate the following improper integrals.

$$\triangleright \int_1^\infty 2x^{-3} \, dx$$

$$\blacktriangleright \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx$$

$$\triangleright \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \, dx$$

$$\blacktriangleright \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 9} \, dx$$

**Definition** 若被積函數在積分區間內某點不連續或無界，則稱該積分屬於**第二類瑕積分**：

- $\int_a^b f(x) \, dx =$  (當  $f(x)$  在  $x = b$  不連續)
- $\int_a^b f(x) \, dx =$  (當  $f(x)$  在  $x = a$  不連續)
- $\int_a^b f(x) \, dx =$  (當  $f(x)$  在  $(a, b)$  內某點  $c$  不連續)

**Question** Calculate the following improper integrals.

$$\triangleright \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx$$

$$\blacktriangleright \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx$$

**Theorem.** (直接比較審斂法 (Direct Comparison Theorem)) 給定連續函數  $f(x)$ 、 $g(x)$ ，對於任意  $x \geq a$  有  $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ，那麼：

1. 若  $\int_a^\infty f(x) dx$  收斂，則  $\int_a^\infty g(x) dx$  收斂.
2. 若  $\int_a^\infty g(x) dx$  發散，則  $\int_a^\infty f(x) dx$  發散.

**Question** Determine whether the following integrals converge.

$$\triangleright \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \text{ (Hint: } 0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R})$$

$$\blacktriangleright \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3} dx \text{ (Hint: } \ln x \leq x, \forall x \geq 1)$$

Next week: 算面積、算體積、算弧長、算表面積、算函數平均值