



RAPPORT DE PROJET
Filtrage linéaire et non linéaire

Estimation de la Trajectoire d'un Missile Guidé

Auteurs :

Léo PLOQUIN
Sonokoli SORO
Yasmine TARCHOUNA

Enseignante :

Salima EL KOLEI

Année académique : 2024-2025

Table des matières

Table des matières

Table des figures

1	Filtrage	1
1.1	Initialisation du filtre	1
1.2	Étape de prédiction	2
1.3	Mise à jour du filtre	3
2	Mise en place du filtre	5
2.1	Simulation des données	5
2.2	Estimation de la trajectoire du missile	6
2.3	Méthode alternative	9
2.4	Effet du changement de position du capteur	9
2.5	Boîte à outils	11
2.6	Propriétés additionnelles	11
2.6.1	Proposition 1	11

Table des figures

2.1	Trajectoires mesurée et réelle du missile. La position est représentée par la valeur de θ_n	6
2.2	Trajectoires estimées via le filtre de Kalman, réelle et mesurée. <i>Nota bene</i> : La position représente la valeur de θ_n^{bis} à chaque instant de mesure n . Les coordonnées X_n et Z_n sont représentées sur la figure 2.3.	8
2.3	Trajectoire réelle vs estimée avec la position $(s_1^x, s_1^z) = (-1.5, 0.5)$	10
2.4	Trajectoire réelle vs estimée avec la position $(s_1^x, s_1^z) = (-1, 1)$	10

Chapitre 1

Filtrage

1.1 Initialisation du filtre

Déterminer la loi de $X_0|Y_0$. En déduire \hat{X}_0 et P_0

Cherchons la loi de $Y_0|X_0$:

On sait que :

$$Y_0 = X_0 + V_0$$

avec $X_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $V_0 \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$.

Comme $X_0 \perp V_0$, alors Y_0 est également gaussien. Calculons son espérance et sa variance.

Espérance de $Y_0|X_0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_0|X_0] &= \mathbb{E}[X_0 + V_0|X_0] \\ &= \mathbb{E}[X_0|X_0] + \mathbb{E}[V_0|X_0] \quad (\text{par linéarité de l'espérance}) \\ &= X_0 \quad (\text{d'après la propriété 2.6.1})\end{aligned}$$

Variance de $Y_0|X_0$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[Y_0|X_0] &= \mathbb{V}[X_0 + V_0|X_0] \\ &= \mathbb{V}[X_0|X_0] + \mathbb{V}[V_0|X_0] \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \tau^2\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$Y_0|X_0 \sim \mathcal{N}(X_0, \tau^2)$$

Loi de $X_0|Y_0$

D'après la proposition 2.1 de l'annexe, avec $U = X_0$, $Z = Y_0$, ainsi que les paramètres suivants :

$$\alpha = 1, \quad \mu = \beta = 0, \quad \gamma^2 = \sigma^2, \quad \delta^2 = \tau^2,$$

on obtient la loi conditionnelle de $X_0|Y_0$:

$$X_0|Y_0 \sim \mathcal{N}\left(\frac{Y_0 \cdot \sigma^2}{\tau^2 + \sigma^2}, \frac{\sigma^2 \cdot \tau^2}{\tau^2 + \sigma^2}\right)$$

Estimation de \hat{X}_0 et P_0

L'estimation \hat{X}_0 est donnée par l'espérance de $X_0|Y_0$:

$$\hat{X}_0 = \mathbb{E}[X_0|Y_0] = \frac{Y_0 \cdot \sigma^2}{\tau^2 + \sigma^2}$$

La variance P_0 est donnée par :

$$P_0 = \mathbb{E}[(X_0 - \hat{X}_0)^2] = \mathbb{E}[(X_0 - \mathbb{E}[X_0|Y_0])^2] = \mathbb{V}[X_0|Y_0] = \frac{\sigma^2 \cdot \tau^2}{\tau^2 + \sigma^2}$$

1.2 Étape de prédiction

Détermination de la loi de $X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}$

Étape 1 : X_n est gaussien

On sait que $(X_n, Y_0, \dots, Y_{n-1})$ est un vecteur gaussien. Par hypothèse de récurrence, X_n est une variable gaussienne. D'après la proposition 1 de l'annexe, la loi conditionnelle $X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}$ est également gaussienne.

Étape 2 : Calcul de l'espérance conditionnelle

L'espérance conditionnelle est donnée par :

$$\mathbb{E}[X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}]$$

$$X_n = aX_{n-1} + W_n$$

On prend l'espérance conditionnelle des deux côtés :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}] &= \mathbb{E}[aX_{n-1} + W_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}] \\ &= a\mathbb{E}[X_{n-1}|Y_0, \dots, Y_{n-1}] + \mathbb{E}[W_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}] \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance.

Or, W_n est un bruit blanc indépendant des observations Y_0, \dots, Y_{n-1} , donc :

$$\mathbb{E}[W_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}] = 0$$

D'où :

$$\mathbb{E}[X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}] = a\hat{X}_{n-1}$$

avec $\hat{X}_{n-1} = \mathbb{E}[X_{n-1}|Y_0, \dots, Y_{n-1}]$.

Étape 3 : Calcul de la variance conditionnelle

La variance conditionnelle est donnée par :

$$\mathbb{V}(X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1})$$

En utilisant la relation :

$$X_n = aX_{n-1} + W_n$$

On obtient :

$$\mathbb{V}(X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}) = a^2 \text{Var}(X_{n-1}|Y_0, \dots, Y_{n-1}) + \mathbb{V}(W_n|Y_0, \dots, Y_{n-1})$$

Or, W_n est indépendant des observations et suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, donc :

$$\mathbb{V}(W_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}) = \sigma^2$$

Finalement, en posant $P_{n-1} = \mathbb{V}(X_{n-1}|Y_0, \dots, Y_{n-1})$, on obtient :

$$\mathbb{V}(X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}) = a^2 P_{n-1} + \sigma^2$$

Conclusion

On en déduit que :

$$X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1} \sim \mathcal{N}\left(a\hat{X}_{n-1}, a^2 P_{n-1} + \sigma^2\right)$$

et on pose :

$$\hat{X}_n^- = a\hat{X}_{n-1}, \quad P_n^- = a^2 P_{n-1} + \sigma^2$$

1.3 Mise à jour du filtre

Après avoir observé Y_n , on met à jour l'estimation de X_n en utilisant la loi conditionnelle de $X_n|Y_n$.

On sait que $Y_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n$ est gaussien. Son espérance est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] &= \mathbb{E}[X_n + V_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] \\ &= \mathbb{E}[X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] + \mathbb{E}[V_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] \end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}[V_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] = 0$ et $\mathbb{E}[X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] = X_n$ (d'après la propriété en annexe 2.6.1)

D'où $\mathbb{E}[Y_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] = X_n$.

De même on a

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[Y_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] &= \mathbb{V}[X_n + V_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] \\ &= \mathbb{V}[X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] + \mathbb{V}[V_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] \end{aligned}$$

avec $\mathbb{V}[X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] = 0$ et $\mathbb{V}[V_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n] = \tau^2$

D'où $Y_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, X_n \sim \mathcal{N}(X_n, \tau^2)$

D'après la proposition 2.5 en annexe, on a :

$$X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1} \sim \mathcal{N}\left(\frac{aX_{n-1}\tau^2 + a^2P_{n-1}Y_n}{\tau^2 + a^2P_{n-1}}, \frac{a^2P_{n-1}\tau^2}{\tau^2 + a^2P_{n-1}}\right)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{a\hat{X}_{n-1}\tau^2 + a^2P_{n-1}Y_n}{\tau^2 + a^2P_{n-1}} &= \frac{\hat{X}_n^-\tau^2 + P_n^-Y_n}{\tau^2 + P_n^-} \\ &= \frac{\hat{X}_n^-\tau^2 + P_n^-Y_n + P_n^-\hat{X}_n^- - P_n^-\hat{X}_n^-}{\tau^2 + P_n^-} \\ &= \frac{\hat{X}_n^-(\tau^2 + P_n^-) + P_n^-(Y_n - \hat{X}_n^-)}{\tau^2 + P_n^-} \\ &= \hat{X}_n^- + \frac{\tau^2P_n^-(Y_n - \hat{X}_n^-)}{\tau^2(\tau^2 + P_n^-)} \\ &= \hat{X}_n^- + \frac{P_n(Y_n - \hat{X}_n^-)}{\tau^2} \\ &= \hat{X}_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{a^2P_{n-1}\tau^2}{\tau^2 + a^2P_{n-1}} &= \frac{\tau^2P_n^-}{\tau^2 + P_n^-} \\ &= P_n \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}, Y_n \sim \mathcal{N}(\hat{X}_n, P_n)$$

Chapitre 2

Mise en place du filtre

2.1 Simulation des données

On cherche à simuler les données $\theta_{1:T}^1$ tel que

$$\theta_{1:T}^1 = \tan^{-1}\left(\frac{Z_{1:T} - s_z^1}{X_{1:T} - s_x^1}\right) + V_{1:T}$$

où

Étape 1 : Génération du vecteur d'état \mathbf{X}_n

Générer le vecteur \mathbf{X}_n avec une fonction qui prend en entrée les valeurs initiales \mathbf{X}_1 , les paramètres Δ , T , q_1^c et q_2^c .

- **Initialisation** : Définir les valeurs initiales de l'état $\mathbf{X}_1 = [X_0, Z_0, \dot{X}_0, \dot{Z}_0]^T$.

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Matrice de transition** : Construire la matrice de transition d'état F qui décrit l'évolution du système.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $\Delta = 0.01$ est la période d'échantillonnage.

- **Matrice de covariance** : Définir la matrice de covariance du bruit de processus Q en fonction des coefficients de diffusion q_1^c et q_2^c .

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{q_1^c \Delta^3}{3} & 0 & \frac{q_1^c \Delta^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{q_2^c \Delta^3}{3} & 0 & \frac{q_2^c \Delta^2}{2} \\ \frac{q_1^c \Delta^2}{2} & 0 & q_1^c \Delta & 0 \\ 0 & \frac{q_2^c \Delta^2}{2} & 0 & q_2^c \Delta \end{bmatrix}$$

avec $q_1^c = q_2^c = 0.1$.

- **Génération du bruit** : Générer le bruit de processus \mathbf{W}_n à partir de la distribution normale multivariée avec moyenne nulle et covariance Q .
- **Propagation de l'état** : Pour chaque instant n de 2 à T , propager l'état en utilisant la relation :

$$\mathbf{X}_n = F\mathbf{X}_{n-1} + \mathbf{W}_n$$

Étape 2 : Calcul des observations $\theta_{1:T}^1$

Utiliser le vecteur d'état \mathbf{X}_n pour calculer les observations $\theta_{1:T}^1$.

- **Position du capteur** : Définir la position du capteur $s^1 = [s_x^1, s_z^1]$.

$$s^1 = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

- **Calcul de l'angle** : Pour chaque instant n , calculer l'angle θ_n en utilisant la relation :

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{Z_n - s_z^1}{X_n - s_x^1} \right) + V_n$$

où V_n est le bruit de mesure, généralement tiré d'une distribution normale avec moyenne nulle et écart-type $\sigma_v = 0.05$.

2.2 Estimation de la trajectoire du missile

Diagnostic et linéarisation

La trajectoire dont la simulation est explicitée précédemment n'est pas linéaire mais nous pouvons considérer qu'elle est faiblement non-linéaire comme l'indique sa tendance plutôt rectiligne et ses variations d'accroissement faibles (figure 2.1). De plus, les bruits étant gaussiens, nous pouvons procéder à une extension via les séries de Taylor pour linéariser le modèle. Nous serons ensuite en mesure d'appliquer le filtre de Kalman simple en vue d'estimer le modèle linéarisé.

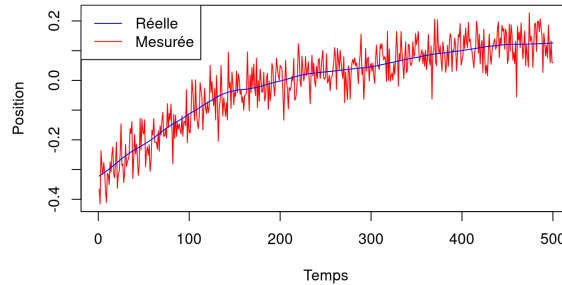


FIGURE 2.1 – Trajectoires mesurée et réelle du missile. La position est représentée par la valeur de θ_n .

Nous posons $f_\theta(u, x, w) = Fx + w$ et $h_\theta(d, X, v) = \tan^{-1} \left(\frac{z - s_z^1}{x - s_x^1} \right) + V_n$ avec $X = [x, z, \dot{x}, \dot{z}]^T$

Nous avons alors :

$$\mathbf{X}_n = f_\theta(u_n, \mathbf{X}_{n-1}, W_{n-1}) = F\mathbf{X}_{n-1} + W_{n-1}$$

et

$$\theta_n = h_\theta(d_n, \mathbf{X}_n, V_n) = \tan^{-1} \left(\frac{Z_n - s_z^1}{X_n - s_x^1} \right) + V_n$$

avec pour tout n , $u_n = 0$ et $d_n = s^1 = [s_x^1, s_z^1]$. Les fonctions f_θ et h_θ sont différentiables en x et w (respectivement en x et v).

L'extension de Taylor au voisinage de $\hat{\mathbf{x}}_{n-1}$ et $W_n = 0$ donne :

$$\mathbf{x}_n = A_\theta \mathbf{x}_{n-1} + \bar{u}_n(\theta) + G_\theta W_n$$

avec :

$$A_\theta = \left. \frac{\partial f_\theta}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{n-1}} = F, \quad G_\theta = \left. \frac{\partial f_\theta}{\partial w} \right|_{\hat{x}_{n-1}} = I, \quad \text{et} \quad \bar{u}_n(\theta) = f_\theta(u_n, \mathbf{X}_{n-1}, W_{n-1}) - A_\theta \hat{x}_{n-1} = 0$$

Nous considérons le modèle de mesure suivant :

$$\theta_n^{bis} = C_\theta \mathbf{X}_n + \bar{d}_n(\theta) + M_\theta V_n$$

où :

- La matrice jacobienne C_θ de $h_\theta(d_n, \mathbf{X}, V_n)$ évaluée en X est donnée par :

$$C_\theta = \left. \frac{\partial h_\theta(d_n, \mathbf{X}, V_n)}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{n-1}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\hat{Z}_{n-1} - s_z^1}{\hat{X}_{n-1} - s_x^1} \right)^2} \cdot \left(-\frac{\hat{Z}_{n-1} - s_z^1}{(\hat{X}_{n-1} - s_x^1)^2} \right)$$

- La matrice M_θ est donnée par :

$$M_\theta = \left. \frac{\partial h_\theta(d_n, \mathbf{X}, V_n)}{\partial V_n} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{n-1}} = 1$$

- Le terme $\bar{d}_n(\theta)$ est donné par :

$$\bar{d}_n(\theta) = h_\theta(d_n, \mathbf{X}_n, V_n) - C_\theta \hat{\mathbf{x}}_{n-1}$$

En utilisant ces linéarisations, nous pouvons appliquer le filtre de Kalman étendu pour estimer la trajectoire. Les matrices A_θ , G_θ , C_θ , et M_θ sont alors utilisées dans les étapes de prédiction et de mise à jour du filtre. Les paramètres de ces équations sont en effet connus par les lanceurs du missile, ce qui ne veut pas dire que les trajectoires réalisées, qui contiennent une part d'aléatoire, sont connues. $(\mathbf{x}_n)_n$ représente la trajectoire linéarisée (ou espace d'état du système linéarisé) et θ_n^{bis} représente les mesures associées dans l'espace.

Filtre de Kalman étendu : l'algorithme d'estimation de la trajectoire

Une fois la trajectoire ainsi que les mesures linéarisées, nous initialisons le modèle puis prédisons et mettons à jour, à chaque instant n , l'état et la covariance.

Initialisation Initialiser l'état $\hat{\mathbf{x}}_0$ et la covariance de l'erreur d'estimation P_0 .

Prédiction

— État prédit :

$$\hat{\mathbf{x}}_n^- = A_\theta \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \bar{u}_n(\theta)$$

— Covariance prédite :

$$P_n^- = A_\theta P_{n-1} A_\theta^T + G_\theta Q G_\theta^T$$

Mise à jour

— Gain de Kalman :

$$K_n = P_n^- C_\theta^T (C_\theta P_n^- C_\theta^T + M_\theta R M_\theta^T)^{-1}$$

— État mis à jour :

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_n^- + K_n (\theta_n^{bis} - h_\theta(d_n, \hat{\mathbf{x}}_n^-, 0))$$

— Covariance mise à jour :

$$P_n = (I - K_n C_\theta) P_n^-$$

Nous répétons ainsi les étapes de prédiction et de mise à jour pour chaque instant n . Nous obtenons ainsi pour chaque instant n , la position estimée $\hat{\mathbf{x}}_n$ et la covariance associée. Cette dernière quantifie l'incertitude de l'estimation de l'état mis à jour à l'instant n .

Résultats de l'approche : qualité d'ajustement

Nous appliquons alors le filtre de Kalman aux observations linéarisées pour estimer la trajectoire réelle. Cette estimation apparaît pour chaque instant de mesure sous la forme des petits points sur la figure 2.2.

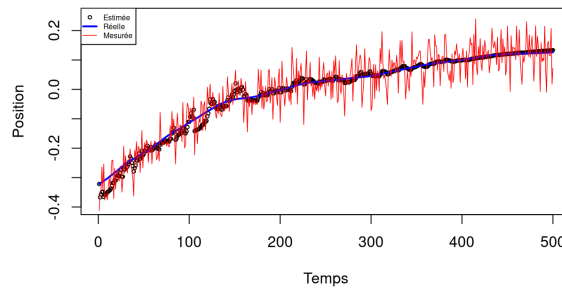


FIGURE 2.2 – Trajectoires estimées via le filtre de Kalman, réelle et mesurée. *Nota bene* : La position représente la valeur de θ_n^{bis} à chaque instant de mesure n . Les coordonnées X_n et Z_n sont représentées sur la figure 2.3.

Nous voyons que l'estimation est beaucoup moins lisse au début, laissant suggérer une plus grande sensibilité au bruit de θ_n^{bis} . Cette estimation est de moins en moins volatile à

mesure que le temps avance. Elle se confond ensuite avec la véritable trajectoire du missile représentée par la courbe bleue. Les fortes oscillations de θ_n^{bis} sont liées au creusement progressif de l'écart entre les trajectoires réelles et estimées à la figure 2.3.

2.3 Méthode alternative

Si nous avons plus de temps à consacrer au problème, nous pourrions utiliser une méthode basée sur Monte Carlo, telle que le **Filtre Particulaire** (aussi appelé Sequential Monte Carlo - SMC). Cette approche est particulièrement adaptée aux systèmes non linéaires et non gaussiens. Dans notre cas, où l'équation de mesure est non linéaire, l'utilisation du filtre particulaire devient pertinente, car il permet de gérer la non-linéarité sans recourir aux approximations qui sont nécessaires dans des méthodes comme le Filtre de Kalman étendu. De plus, bien que les bruits de mesure et de processus soient gaussiens dans notre modèle, la non-linéarité de l'équation de mesure (basée sur la fonction \tan^{-1}) pourrait rendre les méthodes classiques moins précises.

Le Filtre Particulaire repose sur une approche Monte Carlo pour approximer la distribution *a posteriori* de l'état du système, étant donné les observations. Contrairement aux filtres de Kalman, qui se basent sur une approximation de la distribution par une gaussienne, le filtre particulaire représente la distribution de probabilité par un ensemble de particules (ou échantillons) qui évoluent au fil du temps. Chaque particule représente une hypothèse possible pour l'état du système à un instant donné.

2.4 Effet du changement de position du capteur

Lorsque l'on déplace la position du capteur, on ne s'attend pas à obtenir exactement les mêmes résultats pour l'estimation de la position du missile. Le changement de position du capteur modifie l'équation de mesure, qui relie la position du missile à l'angle mesuré. L'équation de mesure est donnée par :

$$\theta_i^n = \tan^{-1} \left(\frac{Z_n - s_i^z}{X_n - s_i^x} \right) + V_n$$

Lorsque la position du capteur change de $(s_1^x, s_1^z) = (-1.5, 0.5)$ à $(s_1^x, s_1^z) = (-1, 1)$, cela modifie directement la relation entre la position du missile et les mesures angulaires θ_1^n . Le terme $\frac{Z_n - s_1^z}{X_n - s_1^x}$ va changer en fonction de la nouvelle position du capteur, ce qui affecte la fonction de mesure et donc l'estimation de la position du missile.

Ce changement dans les observations influence la mise à jour du filtre de Kalman, qui ajuste sa prédiction en fonction des nouvelles mesures. Puisque l'information fournie par le capteur est différente, l'estimation de la trajectoire du missile évolue en conséquence. Une mauvaise configuration du capteur peut ainsi réduire la précision de l'estimation et amplifier les écarts avec la trajectoire réelle.

Ceci est confirmé par les résultats obtenus (voir figures 2.3 et 2.4) où l'on observe que,

suite au déplacement du capteur, la trajectoire estimée s'éloigne davantage de la trajectoire réelle. Cela illustre l'importance du positionnement des capteurs dans les systèmes de suivi et d'estimation de trajectoire.

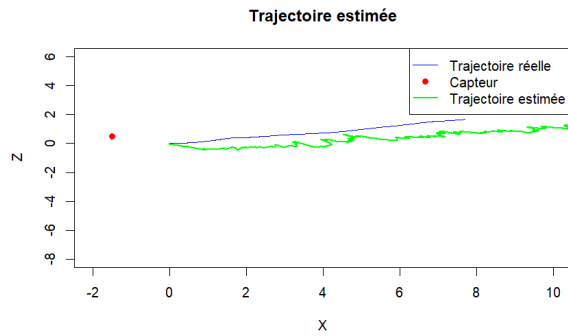


FIGURE 2.3 – Trajectoire réelle vs estimée avec la position $(s_1^x, s_1^z) = (-1.5, 0.5)$

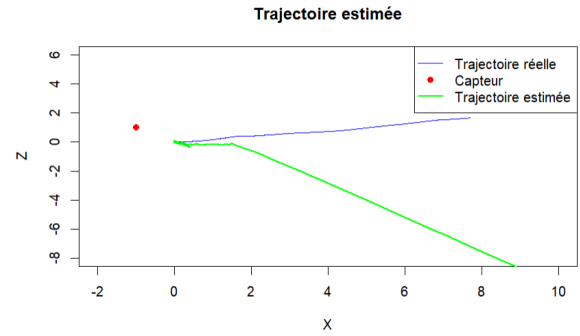


FIGURE 2.4 – Trajectoire réelle vs estimée avec la position $(s_1^x, s_1^z) = (-1, 1)$

2.5 Boîte à outils

On commence par donner la définition d'un vecteur gaussien.

Définition 1. Un vecteur aléatoire U sur \mathbb{R}^d est dit **gaussien** si et seulement si pour tout z dans \mathbb{R}^d , la v.a. $\langle z, U \rangle$ est gaussienne. En particulier, U est de carré intégrable.

On a les propriétés suivantes.

Proposition 1.

Soit $d \geq 0$ et (Z_0, \dots, Z_d, U) un vecteur gaussien de \mathbb{R}^{d+1} . Alors :

- (i) La v.a. $\mathbb{E}[U|Z_0, \dots, Z_d]$ est (p.s.) la projection orthogonale de U sur $\text{vect}(1, Z_0, \dots, Z_d)$.
- (ii) La loi conditionnelle $\text{Loi}(U|Z_0, \dots, Z_d)$ est une loi normale, de moyenne $\mathbb{E}[U|Z_0, \dots, Z_d]$ et de variance $\text{Var}(U|Z_0, \dots, Z_d)$.

Proposition 2.

1. **Un premier résultat :** soit (U, Z) un vecteur gaussien de \mathbb{R}^2 tel que

$$\text{Loi}(U) = \mathcal{N}(\mu, \gamma^2), \quad \text{Loi}(Z|U) = \mathcal{N}(\alpha U + \beta, \delta^2).$$

Alors :

$$\text{Loi}(U|Z) = \mathcal{N}\left(\frac{\rho^2}{\gamma^2}\mu + \frac{\alpha(Z - \beta)}{\delta^2}, \rho^2\right),$$

avec :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2}{\delta^2}.$$

2. **Une extension :** soit $(U, Z, Z_0, \dots, Z_{d-1})$ un vecteur gaussien de \mathbb{R}^{d+2} , $d \geq 1$, tel que

$$\text{Loi}(U|Z_0, \dots, Z_{d-1}) = \mathcal{N}(\mu, \gamma^2), \quad \text{Loi}(Z|Z_0, \dots, Z_{d-1}, U) = \mathcal{N}(U, \delta^2).$$

Alors :

$$\text{Loi}(U|Z_0, \dots, Z_{d-1}, Z) = \mathcal{N}\left(\frac{\rho^2}{\gamma^2}\mu + \frac{Z}{\delta^2}, \rho^2\right),$$

avec :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2}.$$

2.6 Propriétés additionnelles

2.6.1 Proposition 1

Soit X une variable aléatoire et \mathcal{G} une tribu contenant X (c'est-à-dire un ensemble d'informations qui inclut la connaissance de X). Alors, on a :

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}, X] = X.$$

et

$$\mathbb{V}(X|\mathcal{G}, X) = 0$$