Bài 1:

$$f(x) = \sqrt{\ln(x) - 5}$$

Tập xác định của hàm số:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) - 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \geq 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq e^5 \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số f(x) là

$$D = \{e^5; +\infty\}$$

Bài 2:

Ta có đồ thị ~~f(x)~~ C của hàm số $f(x)$

$\Leftrightarrow$ đồ thị C dịch qua trái 5 đơn vị ứng với $f(x+5)$

$\Rightarrow$ đồ thị C tiếp tục dịch chuyển lên trên 5 đơn vị ứng với $f(x+5)+5$

Vậy đồ thị hàm $y = f(x+5)+5$ là đồ thị C của $f(x)$ khi dịch chuyển qua trái 5 đơn vị và lên trên 5 đơn vị.

Bài 3:

Qua đồ thị, ta thấy $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$ do

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1$ và $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$

Bài 4:

$$h(x) = f(g(x))$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = f'(g(x)) . g'(x)$$

$$\Leftrightarrow h'(-1) = f'(g(-1)) . g'(-1)$$

$$\Leftrightarrow h'(-1) = f'(2) . (-1)$$

$$= 2 . (-1) = -2$$

Bài 5:

$$x^3 + xy^2 = 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + xy^2 - 2x - 2 = 0$$

Đạo hàm 2 vế: $\Rightarrow \cancel{3x^2 + xy^2 - 2x + 2}$

$$\Rightarrow 3x^2 + y^2 + x2yy' - 2 = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2 - 3x^2 + y^2}{2xy}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{(-6x + 2yy')2xy - 2(2 - 3x^2 + y^2)(y + xy')}{4x^2y^2}$$

Bài 6:

$$f(x) = \sqrt{2x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Linear approximation for $f(x)$ at $x = 4$:

$$L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= f'(4)(x-4) + f(4)$$

$$= \frac{1}{3}(x-4) + 3$$

Vậy $L(x) = \frac{1}{3}(x-4) + 3$

Bài 7:

- $x_1 = 1$
- $x^3 + 3x = 1 \Leftrightarrow x^3 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + 3x - 1$
- Newton's method: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- $f'(x) = 3x^2 + 3$

$$\Rightarrow x_2 = \cancel{1}\ x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{5}{8}}{\frac{15}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{27}}{\frac{10}{3}} = \frac{29}{90}$$

Bài 8:

$$\int f(x)\,dx = \int \cot g(x)\,dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

Đặt $t = \sin x \Leftrightarrow dt = \cos x\,dx$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \ln t + c$$

$$= \ln|\sin x| + c$$

Bài 9: $f(1) = 4$

$1 \leq f'(x) \leq 8$ for all x

How large can $f(5)$ possible be?

Ta có:

Áp dụng Mean value theorem trên đoạn $[1; 5]$ ta có:

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = f'(c) \text{ với } c \in (1, 5)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(5) - 4}{4} = f'(c)$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{f(5) - 4}{4} \leq 8$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq f(5) - 4 \leq 32$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq f(5) \leq 36$$

Bài 10: Gọi 2 số cần tìm là a, b sao cho

$$\begin{cases} a.b = 4 \Leftrightarrow a = \dfrac{4}{b} \\ a+b \min \end{cases} \quad (a, b > 0)$$

$\cdot\ a + b = \dfrac{4}{b} + b$

Ta khảo sát hàm số $f(b) = \dfrac{4}{b} + b$

$$f'(b) = \frac{-4}{b^2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{4}{b^2}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \text{ (nhận)} \\ b = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

b		-2		0		2	
f'(b)	+	0	-	‖	-	0	+
f(b)	↗	-4	↘	‖	↘	4	↗

Với $a, b > 0$ thì $f(b) = \dfrac{4}{b} + b$ min $\Leftrightarrow a + b$ min

khi và chỉ khi $b = 2 \Leftrightarrow f(b) = 4 \Leftrightarrow a + b = 4$

$\Leftrightarrow a = 2$

Vậy 2 số cần tìm là $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$

Bài 11:

$$v(t) = 8t^2 - 20t + 3$$

Find the displacement từ giây thứ 1 tới giây thứ 10:

$$s(10) - s(1) = \int_1^{10} v(t)\,dt$$

$$= \int_1^{10} 8t^2 - 20t + 3 \; dt$$

$$= \frac{8}{3}t^3 - 10t^2 + 3t \Big|_1^{10}$$

$$= 1701$$

Vậy the displacement of the particle ~~of~~ during $1 \to 10$ là 1701 (m)

Bài 12:

$$g(x) = \int_{x}^{x+2x^2} \sqrt{1+t}\, dt \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{1+t} = u \Leftrightarrow 1+t = u^2 \Leftrightarrow dt = 2u\,du$

Đổi cận:

t	x	$x+2x^2$
u	$\sqrt{1+x}$	$\sqrt{1+x+2x^2}$

$$(1) \Leftrightarrow g(x) = \int_{\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x+2x^2}} u \cdot 2u\, du$$

$$= \frac{2}{3} u^3 \Big|_{\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x+2x^2}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2u^2 \cdot u' \Big|_{\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x+2x^2}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2\left[(1+x+2x^2) \cdot \frac{4x+1}{2\sqrt{1+x+2x^2}} - (1+x)\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right]$$

$$= (4x+1)\sqrt{1+x+2x^2} - \sqrt{1+x}$$

Được quét bằng CamScanner

Bài 13:

$$f(x) = -3x + 2x^2 \text{ on } [1,3]$$

Giá trị trung bình của f(x) trên [1,3]

$$f_{avg} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 -3x + 2x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}x^2 + x^3 \Big|_1^3\right)$$

$$= \frac{8}{3}$$

Bài 14:

We have the line: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ the plane: $3(-1-3t)+5(2+5t)-2(3+2t)+1=0$

$\Rightarrow t = \frac{-1}{6}$

$\Rightarrow$ the point $M\left(-1-3\left(\frac{-1}{6}\right), 2+5\left(\frac{-1}{6}\right), 3+2\left(\frac{-1}{6}\right)\right)$

$\Rightarrow M\left(\frac{-1}{2}; \frac{7}{6}; \frac{8}{3}\right)$

Bài 15:

$P(1,2,1)$; $Q(5,3,1)$ và $R(2,-3,1)$

$\vec{PQ}(4,1,0)$

$\vec{PR}(1,-5,0)$

$[\vec{PQ};\vec{PR}] = (0,0,-21)$

Mặt phẳng đi qua 3 điểm P, Q, R có vector pháp tuyến $\vec{n}(0,0,-21)$

Vậy mặt phẳng đó phương trình:

$0(x-1)+0(y-2)-21(z-1)=0$

$\Leftrightarrow -21z+21=0$

Bài 16:

$u = (2, -1, 1)$

$v = (-1, x, 2)$

$u.v = 2(-1) + (-1)x + 1.2$

$= -x \quad (1)$

$u.v = |u||v| \cos\theta$

$= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{(-1)^2 + x^2 + 2^2} \cos\frac{\pi}{4}$

$= \sqrt{6} . \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{5 + x^2} \quad (2)$

$(1)(2) \Rightarrow -x = \sqrt{6} . \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{5 + x^2} \quad (x < 0)$

$\Leftrightarrow x^2 = 6 . \frac{2}{4} (5 + x^2) = 15 + 3x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 = -15$ (vô lý)

Vậy không tồn tại giá trị x để $u(2, -1, 1)$ và $v(-1, x, 2)$ tạo thành 1 góc $\pi/4$.

CHÍNH ⓔX XƯƠNG

Được quét bằng CamScanner

Bài 17:

$u(-1, 2, 1)$

$v(2, -2, 3)$

$\vec{uv}(3, -4, 2)$

$|uv| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

Vậy khoảng cách giữa $u(-1,2,1)$ và $v(2,-2,3)$ là $\sqrt{29}$

Bài 18:

$u = (-1, 1, 5)$

$v = (3, -2, 1)$

$u.v = (-1).3 + 1.(-2) + 5.1$

$= -3 - 2 + 5 = 0$

$|u| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 5^2}$

$= 3\sqrt{3}$

$|v| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}$

$= \sqrt{14}$

$$\cos\theta = \frac{u.v}{|u|.|v|} = \frac{0}{3\sqrt{3}.\sqrt{14}} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Vậy góc tạo bởi u và v là $\frac{\pi}{2}$

Bài 19:

$$\begin{cases} x + ay + z = 3 \\ bx + 5y - 3z = 23 \\ x - 7y + cz = 9 \end{cases}$$ has the solution $(1, 2, -3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2a - 3 = 3 \\ b + 10 + 9 = 23 \\ 1 - 14 - 3c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 4 \\ c = \frac{-22}{3} \end{cases}$$

Được quét bằng CamScanner

Bài 20:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 5r_1]{r_2 \to r_2 + 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & -4 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to r_2/5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & -9 & -4 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + 9r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{102}{5} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{-11}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{102}{5} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{}_{\vec{r_1}} \quad \underbrace{}_{\vec{r_2}}$$

$\{\vec{r_1}, \vec{r_2}\}$ độc lập tuyến tính

$\Rightarrow$ Rank$(A) = 2$.

Bài 21:

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ System of linear equation:

$$\begin{cases} a + 3b = 0 \\ 3a + 3b + c = 1 \\ 7a = 0 \\ 3c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 0 & (1) \\ 3a + 3b + c = 1 & (2) \\ a = 0 & (3) \\ c = 2 & (4) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)(3)(4) \Rightarrow b = 0 \\ (2)(3)(4) \Rightarrow b = \frac{-1}{3} \end{array}\right\} \text{vô lý}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm

Bài 22:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cofactor of } a_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (4 + 7) = -11$$

Bài 23:

$$S = \{(4, -2, a), (1, 2, -7), (9, 1, 3)\}$$

~~det~~ $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & 2 & 1 \\ a & -7 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det A = \left|\begin{matrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & 2 & 1 \\ a & -7 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ a & -7 \end{matrix}$$

$$= (24 + a + 126) - (18a - 28 - 6)$$

$$= 184 - 17a$$

Để S độc lập tuyến tính thì $\det A \neq 0$

$\Leftrightarrow 184 - 17a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq \dfrac{184}{17}$

Bài 24:

$$T: R^2 \to R^2$$

$T(1,2) = (-1,1) \Leftrightarrow 2 \cdot T(1,2) = (-2,2)$

$T(1,-1) = (2,3)$

$\Rightarrow T(2,4) + T(1,-1) = (-2,2) + (2,3)$

$\Leftrightarrow \quad T(3,3) = (0,5)$