

## 베지어 곡선을 이용한 궤도전이 궤적 설계 방법 연구

정현용<sup>1\*</sup>, 이수원<sup>1</sup>국민대학교<sup>1</sup>

## Orbital Transfer Trajectory Design Method Using Bézier Curves

Hyun-Yong Jeong<sup>\*</sup>, Suwon Lee<sup>1</sup>

**Key Words** : Bézier Curve(베지어 곡선), Orbital Transfer(궤도 전이), Trajectory Optimization(궤도 최적화), Constraint Linearization(제약 조건 선형화)

## 서론

위성 궤도전이는 제한된 연료와 주어진 시간 내에서 임무 수행을 위해 필수적으로 해결해야 하는 문제이다. Hohmann Transfer와 같은 전통적 방법은 명확한 해석적 해법을 제공하나, 다양한 제약 조건 반영에는 한계가 있다.

본 연구에서는 궤도를 3차원 Bézier 곡선으로 표현하고, 등식 제약 조건 (출발·도착 위치/속도) 및 부등식 제약 조건(장애물 회피)을 동시에 반영할 수 있는 궤도전이 궤적 설계 방법론을 제시한다. 특히, *De Casteljau* 알고리즘을 이용하여 곡선을 세분화하고, 이를 통해 비볼록 부등식 제약 조건을 선형 제약조건으로 변형시키는 방법론을 제시한다.

## 본론

## 1. Bézier 곡선의 정의

3차원 Bézier 곡선은  $N$ 차 제어 점 집합  $\{P_0, P_1, \dots, P_N\}$ 으로 정의된다.

$$B(\tau) = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (1-\tau)^{N-i} \tau^i P_i, \quad \tau \in [0, 1] \quad (1)$$

본 연구에서는 이해와 구현 용이성을 위해 2차 곡선(quadratic curve)을 사용하였다.

## 2. De Casteljau 알고리즘 기반 곡선 분할

*De Casteljau* 알고리즘을 이용해  $[0, 1]$ 을  $M$ 개의 구간으로 분할하면, 각 구간  $j$ 는 다시 차수가 동일한 소곡선(세그먼트) Bézier로 표현된다. 전역제어점  $\{P_i\}$ 와 세그먼트 제어점  $\{Q_k^{(j)}\}_{k=0}^N$  사이에는 선형

(정확히는 아핀affine) 관계가 성립한다:

$$Q_k^{(j)} = \sum_{i=0}^N s_{k,i}^{(j)} P_i \quad (2)$$

이 성질 덕분에 세그먼트 단위 제약을 전역 변수  $\{P_i\}$ 에 대한 선형 부등식으로 바꿀 수 있다.

또한 세그먼트  $j$ 의 제어다각형 중심(centroid)을

$$z_j = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N Q_k^{(j)} \quad (3)$$

로 정의한다. 이는 후술할 구체(지구) 회피에서 국소 법선 방향을 정하는 대표점으로 쓰인다

## 3. 등식 및 부등식 제약 조건 정식화

## 3.1 등식 제약 (경계 위치·속도)

출발점/도착점에서의 위치와 속도(크기 또는 벡터)를 경계조건으로 둔다. 시간 스케일  $T$ 를 두면

$$B(0) = r_A, B(1) = r_B, B'(0) = T v_A, B'(1) = T v_B \quad (4)$$

이는  $\{P_i\}$ 에 대해 선형 등식이다.

3.2 부등식 제약 (지구 회피; 비볼록  $\rightarrow$  선형 근사)

장애물로 구 중심 구체를 둔다.

$$B = \{p: |p - c| \leq r_E\}, \quad \forall \tau \in [0, 1] \quad (5)$$

그리고 각 세그먼트  $j$ 에서 중심점  $z_j$ 을 기준으로 지구 중심 방향의 단위벡터

$$n_j = \frac{z_j - c}{|z_j - c|} \quad (6)$$

를 잡고, 구의 접평면이 만드는 지지 반공간(supporting half-space)을 이용해 선형 부등식을 구성한다. Bézier의 볼록 갭질 성질상, 세그먼트의 모든 제어점이 반공간을 만족하면 해당 세그먼트 전체 곡선도 만족한다. 따라서

$$n_j^T Q_k^{(j)} \geq r_E + \epsilon, \quad k = 0, \dots, N \quad (7)$$

( $\epsilon > 0$ 은 수치적 여유/안전여유). (2)을 대입하면 (7)은 전역 변수  $\{P_i\}$ 에 대한 선형 부등식으로 변환된다.

세그먼트 개수  $M$  을 늘릴수록 (5)의 비볼록 경계에 대한 근사가 조밀해져 위반 위험이 단조 감소한다.

#### 4. 목적함수: 가속도 노름 최소화(곡률 에너지형)

선택한 목적함수는 가속도 제곱 적분이다.

$$J = \int_0^T |\ddot{\mathbf{r}}(t)|^2 dt = \frac{1}{T^3} \int_0^1 \| \mathbf{B}''(\tau) \|^2 d\tau \quad (8a)$$

2차 Bézier에서는  $\mathbf{B}''(\tau)$ 가 상수이므로

$$J = \frac{1}{T^3} |2(\mathbf{P}_2 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_0)|^2 = \frac{4}{T^3} |\Delta^2 \mathbf{P}|^2 \quad (8b)$$

으로 제어점에 대한 노름으로 정리된다(축별로 합산). 일반  $N$ 에 대해서는  $\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{P})$ 에 대해

$$J = \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$$

이며  $\mathbf{H} \geq 0$ 는 사전계산 가능하다.

#### 5. 최적화 문제(QP)와 해법

경계조건과 모든 세그먼트의 제약조건을 모아

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}_{eq} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}, \mathbf{A}_{ineq} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_{ineq}. \quad (9)$$

여기서  $\mathbf{H}$  는 (8b)/(8c)로부터 구성되고,  $\mathbf{A}_{eq}, \mathbf{b}_{eq}$  는 (5)에서,  $\mathbf{A}_{ineq}, \mathbf{b}_{ineq}$ 는 (7)에서 유도된다. 선택적으로 속도 일치 항을

$$J + \lambda \|\mathbf{B}'(0) - T\mathbf{v}_A\|^2 + \lambda \|\mathbf{B}'(1) - T\mathbf{v}_B\|^2 \quad (10)$$

꼴로 흡수하여 동일한 QP 형태를 유지할 수 있다.

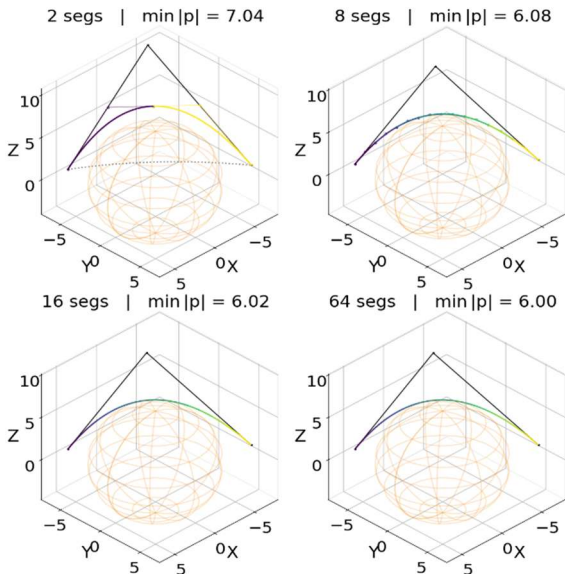


Fig. 1. Optimized quadratic Bezier trajectories for  $M=2, 8, 16, 64$

#### 6. 시뮬레이션 결과

Python/NumPy-SciPy 환경에서 3차원 2차 Bézier( $N=2$ ) 곡선을 사용하였다. 출발도착점의 위치/속도를 경계(등식/소프트)로 주고, 장애물은 원점 중심 구체  $\mathbf{B} = \{\mathbf{p} : \|\mathbf{p}\| \leq r_E\} (r_E = 6.0)$ 로 설정하였다. 곡선은 De Casteljau로  $M \in \{2, 8, 16, 64\}$  분할하며, 각 세그먼트의 중심에서 외향 단위벡터  $\mathbf{n}_j$ 를 정의해, 지지 반공간  $\mathbf{n}_j^T \mathbf{Q}_k^{(j)} \geq r_E$ 를 모든 세그먼트 제어점에 적용하였다. 목적함수는

$$J = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} \quad (\lambda \approx 10^{-6}) \quad (11)$$

이고, 양 끝 제어점은 Bounds로 고정하였다.

해법은 외부 고정점 반복으로, (i) 현 곡선에서  $\mathbf{n}_j$  갱신  $\rightarrow$  (ii) 그때의 선형 부등식을 모아 SLSQP로 QP 풀이  $\rightarrow$  (iii) 제어점 갱신을 수행하며,  $\|\Delta \mathbf{P}\| < 10^{-8}$  또는 120회 이내에서 종료한다(중심이 원점에 매우 가까운 경우 이전 법선을 유지). 그림 1은  $M$  증가에 따라 최소 반경  $\min \|\mathbf{p}\|$  이 7.04  $\rightarrow$  6.00으로 단조 감소하며  $r_E$ 에 수렴함을 보인다. 모든 경우  $\min \|\mathbf{p}\| \geq r_E$ 로 관통이 없었고,  $M=64$ 에서 구 표면과 근접 접촉(near-tangent) 형상이 나타났다. 외부 반복은 전 사례에서 수 회 내 수렴하였다.

#### 7. 결론

본 연구는 De Casteljau 분할 $\rightarrow$ 세그먼트별 부등식 검사 $\rightarrow$ 지지 반공간 선형화 $\rightarrow$ 전역 QP 보정으로 이루어진 경량 곡선 보정 절차를 제안한다. 분할 수를 늘리면 비볼록 회피 제약에 대한 실용적 충분조건에 근접하며, 2차 곡선에서도 경계 조건 보존·매끄러움·장애물 회피를 동시에 달성한다. 또한 가속도 노름(에너지) 최소화는 구현이 간단하면서 형상 왜곡을 효과적으로 억제한다. 향후 연료/시간 목적함수, 다중 장애물·다중 구간, 동역학·추력 제약을 동일한 선형화-QP 골격에 통합해 실용 범위를 확장할 것이다.

#### 후 기

이 논문은 2025년도 정부(방위사업청)의 재원으로 국방기술진흥연구소의 지원을 받아 수행된 연구임(No. KRIT-CT-22-030, 재사용 무인 우주비행체 고도화 기술 특화연구센터)

#### 참고문헌

- 1) Lee, S., and Kim, Y., "Optimal Output Trajectory Shaping Using Bézier Curves," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 44, No. 5, 2021, pp. 1027~1035.
- 2) Blackmore, L., Açıkmeşe, B., and Scharf, D. P., "Minimum-Landing-Error Powered-Descent Guidance for Mars Landing Using Convex Optimization," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 33, No. 4, 2010, pp. 1161~1171.
- 3) Szmuk, M., Reynolds, T. P., and Açıkmeşe, B., "Successive Convexification for Real-Time Six-Degree-of-Freedom Powered Descent Guidance with State-Triggered Constraints," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 43, No. 8, 2020, pp. 1399~1413.