

國立臺北大學通訊工程學系

數位通訊系統模擬

Simulation and Emulation of
Digital Communication Systems(U3260)
(課程實作紀錄)

第 16 組 組員：

411186028 鐘婉庭 / 411186030 葉璇

單元 1 基本操作

實作一~三高斯函數波形產生與實作比較

Function、Multipliers、Asser 三種模擬方式

實驗原理：

高斯函數（Gaussian Function）在訊號處理、統計分析與控制系統中扮演重要角色，其標準數學式為：

$$Y(t) = e^{-(t-\mu)^2}$$

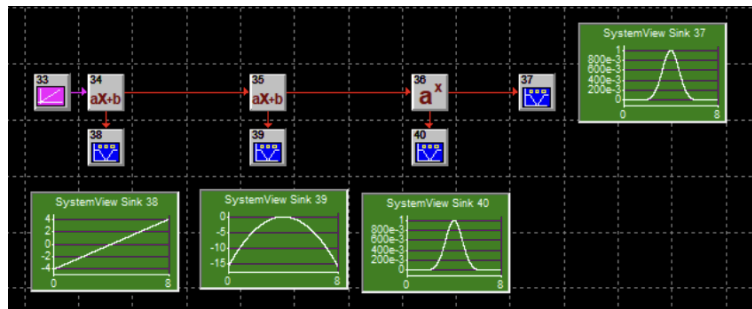
其中： μ ：均值（mean）決定高斯函數的中心位置， t 為時間變數， e 為自然常數（約為 2.71828），決定了波形的指數遞減特性。

透過 SystemView 軟體進行模擬，實作三種不同數學方式產生等效的高斯函數，並驗證其等效性。實作目標式：

$$Y(t) = e^{-(t-4)^2} = e^{-(t-4)(t-4)} = e^{-(t^2-8t+16)}, \quad 0 \leq t \leq 8$$

系統設計：

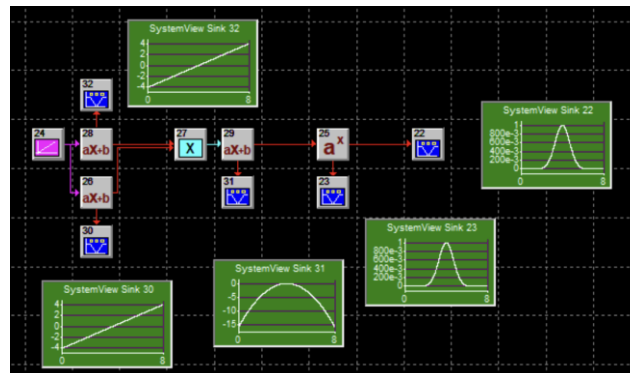
實作 1：使用三個函數（Function Token）產生高斯時間常數



圖一：使用基本函數設計圖

產生時間訊號 t → 線性位移處理 $t - 4$ → 平方運算與負號 $-(t - 4)^2$ → 指數運算 e^{-x} → 完成 $e^{-(t-4)^2}$

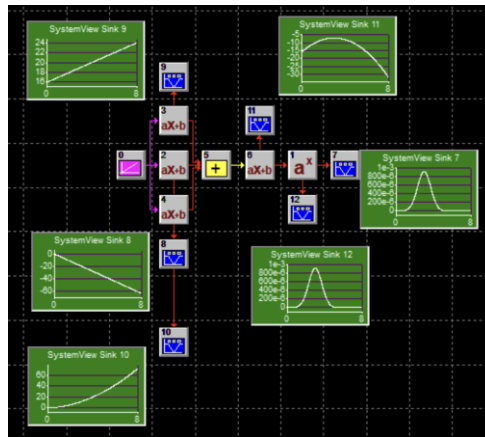
實作二：加入乘法器（Multiplier Token）進行高斯時間常數產生



圖二：使用乘法器實現平方設計圖

產生時間訊號 t → 線性位移處理 $t - 4$ → 將偏移後結果輸入兩次到乘法器，形成 $(t - 4)^2$ → 負號處理 $-t$ → 指數運算 e^{-x} → 得到 $e^{-(t-4)(t-4)}$

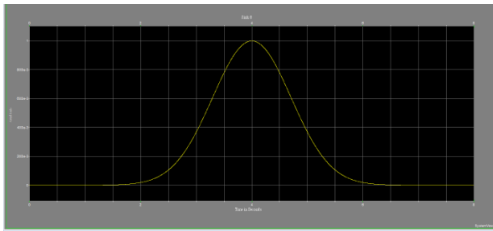
實作三：使用加法器（Adder Token）展開多項式計算



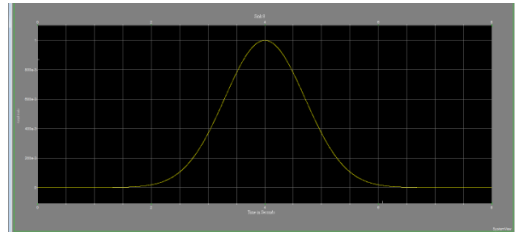
圖三:使用加法器設計圖

產生時間訊號 t \rightarrow 產生 t^2 \rightarrow 產生 $-8t$ \rightarrow 產生常數項 $+16$ \rightarrow 使用加法器將上述三項相加，得到 $(t^2 - 8t + 16)$ \rightarrow 負號處理 $-t$ \rightarrow 指數運算 e^{-x} \rightarrow 得到 $e^{-(t^2-8t+16)}$

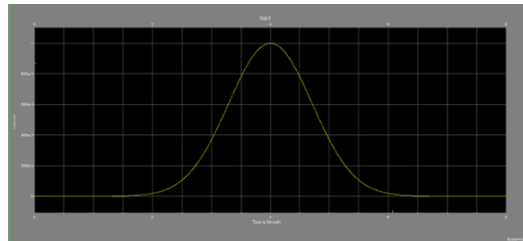
模擬結果：



圖四:實作一結果圖



圖五:實作二結果圖



圖六:實作三結果圖

本次實驗透過三種不同方式進行高斯函數的波形產生，分別使用了：

Function Token：以簡單的數學函數組合方式直接模擬高斯公式。

Multipliers Token：透過乘法器模擬平方運算，符合數學展開的直觀邏輯。

Asser Token：以多項式展開的形式模擬高斯函數，逐步還原每一個運算項。

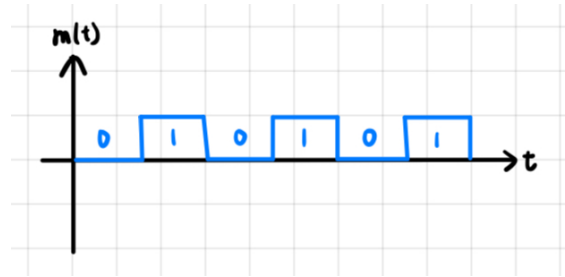
儘管三種方法在結構上有所差異、使用模組的順序與數量不同，但其最終所呈現的數學結果完全一致，皆成功模擬出目標高斯函數波形： $Y(t) = e^{-(t-u)^2}$ 。

單元二模擬振幅調變

實作四、五

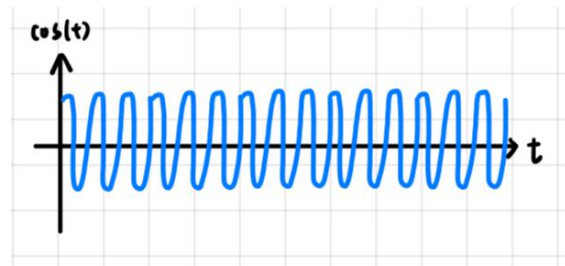
實驗原理：

上課講解了振幅鍵移調變的基本原理，分為數位訊號、載波信號、調變後的訊號這三個主要部分。我們依照這個順序逐步拆解。



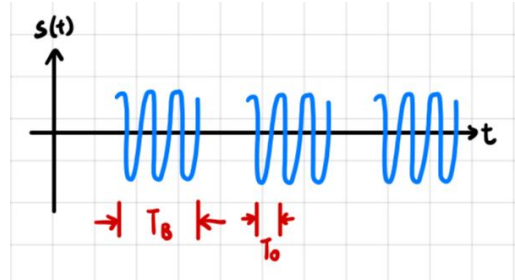
圖七：數位訊號

圖七方波圖示代表基帶數位訊號 $m(t)$ ，這是輸入訊號，通常來自數位資料，如 010101 或 010110。橫軸(時間 t)：顯示時間的推移。縱軸(振幅 $m(t) = 1$ 表示有訊號(高電位)、 $m(t) = 0$ 表示無訊號(低電位)。這部分的數位訊號是 ASK 調變的關鍵，因為它決定了載波是否開啟或關閉。



圖八：載波信號 $C(t)$

圖八是連續的正弦波，是載波信號 $C(t)$ ，是高頻訊號，負責調變輸出訊號。載波頻率 f_c ：比數位訊號的頻率 f_{bit} 高很多，確保訊號可以透過天線發送(如果應用於無線通訊)。載波不包含數位訊號資訊，只是用來幫助數位訊號傳輸的高頻信號。若沒有數位訊號，則載波會一直存在，不會關閉。



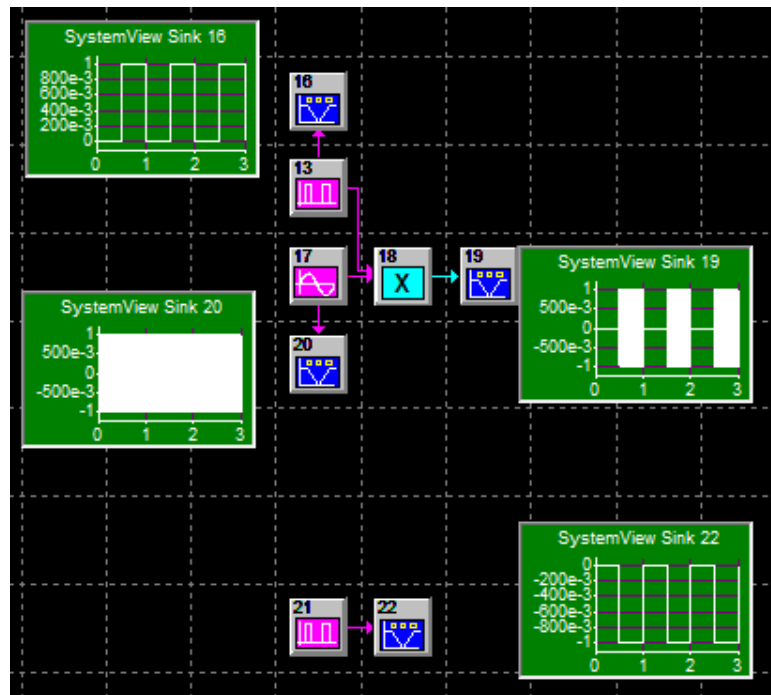
圖九：調變後的訊號

圖九是 ASK (振幅鍵移) 調變後的訊號，當 $m(t) = 1$ (數位訊號為 1) 時，輸出為載波 $A\cos(2\pi fct)$ 。當 $m(t) = 0$ (數位訊號為 0) 時，輸出為 0 (無載波)。這表示數位訊號控制載波的開啟與關閉，而時間關係 $T_B \gg T_0$ ， T_B 是數位訊號的比特週期(每個 0 或 1 持續的時間)； T_0 是載波信號的週期(載波的單次震盪時

間)。

因為載波頻率遠高於數位訊號頻率，所以 T_B 必須比載波週期 T_0 大很多，以確保每個比特內有足夠的載波週期來傳輸。通常： $f_c = 10f_{\text{bit}}$ ，確保在每個比特 T_B 內，載波至少震盪 10 次，讓接收端能夠準確解調訊號。

系統設計 1:



圖十:輸出方波訊號 010101 的系統設計圖

Pulse Generator: 元件 13 產生基帶數位訊號，也就是 010101 的方波訊號 $m(t)$

- 頻率 = f_{bit} (比特率) = 1Hz
- Pulse Width = 500e-3sec
- Phase = 180

這部分的輸出對應圖七的 $m(t)$ ，並顯示在 SystemView Sink 16

Sine Wave Generator: 元件 17 產生載波信號 $C(t)$ ，輸出為高頻正弦波，提供 ASK 調變的載波。

頻率： $f_c = 100 \times f_{\text{bit}}$ (確保 $T_B \gg T_0$) = 100

振幅 = A (控制訊號強度) = 1v

Phase = 0

這部分的輸出對應圖八的 $C(t)$ ，並顯示在 SystemView Sink 20

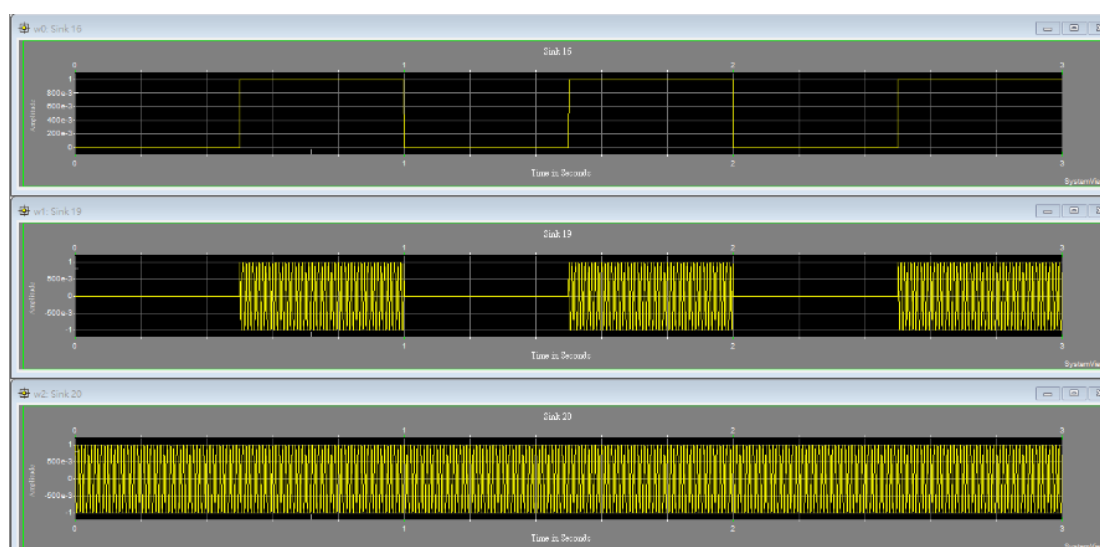
Multiplier: 元件 X(18): 將數位訊號 $m(t)$ 與載波 $C(t)$ 相乘：當 $m(t) = 1$ ，輸出 $C(t)$ (有載波)、當 $m(t) = 0$ ，輸出 0 (無載波)

元件 21 是一個包絡線檢測器，用來解調 ASK 信號，即從高頻 ASK 調變信號中提取出數位訊號 $m(t)$ 。當我們使用 ASK 傳輸信號時，接收端需要從高頻載波中提取出原本的數位訊號 010101，這就是解調的過程。

包絡線檢測器的作用：去除載波，提取 $m(t)$ 、輸出的是 $m(t)$ 的平滑包絡，接近 010101、幫助後續電路進行數位判決（如比較器）。

包絡檢測的核心運作方式：1. 整流：取 ASK 調變信號的絕對值，讓負半週的載波翻轉為正值。這樣的訊號仍然有高頻成分，但所有波峰都在正半軸。2. 低通濾波使用低通濾波器（LPF）去除高頻成分，留下訊號的包絡線，低通濾波後的輸出近似為 $m(t)$ 。

模擬結果：

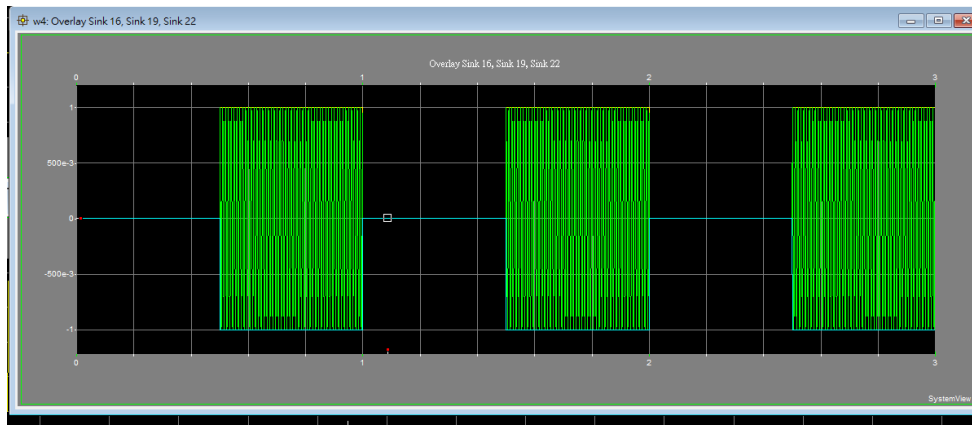


圖十一：由上而下為數位訊號、ask 調變信號、純載波的波形圖

數位訊號 $m(t)$ ：這是基帶數位訊號（輸入訊號），來自 Pulse Generator，對應 010101。0 \rightarrow 低電位(0V)、1 \rightarrow 高電位(1V)，每個比特持續時間 TB（比特週期），週期性變化 010101，與圖七的 $m(t)$ 相同，這是 ASK 調變的控制信號，決定何時開啟或關閉載波。

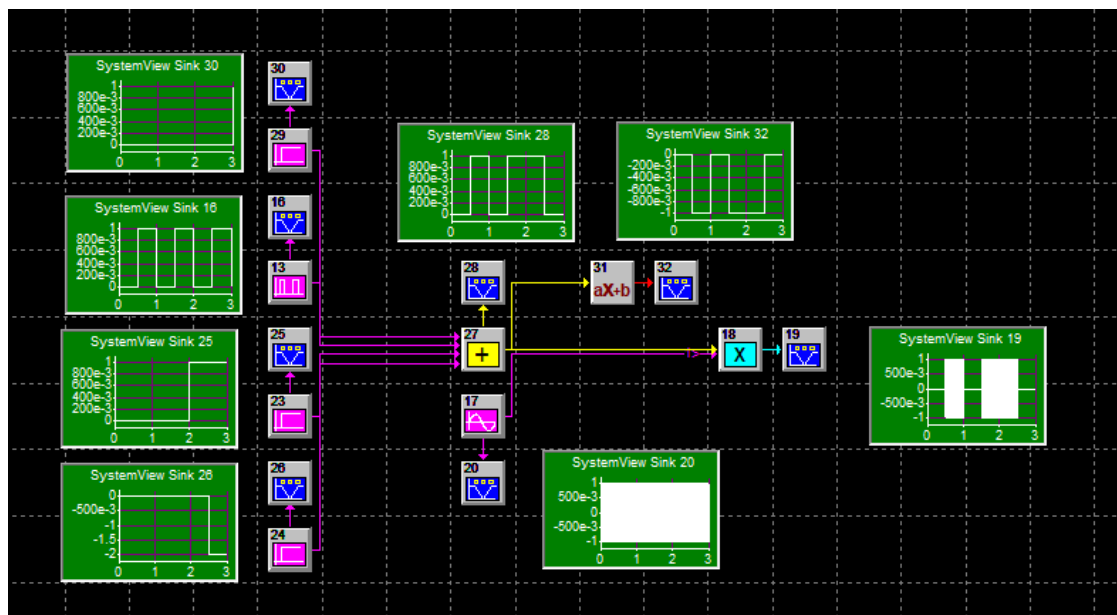
ASK 調變信號 $S(t)$ ：當 $m(t) = 1$ ，輸出完整載波，當 $m(t) = 0$ ，載波完全消失，輸出零（沒有載波），為高頻震盪信號，與圖九的 ASK 調變信號 $S(t)$ 一致。

純載波 $\cos(2\pi fct)$ ：這是未調變的純載波信號，為連續的高頻正弦波 $A\cos(2\pi fct)$ ，沒有任何數位訊號的控制，這是 ASK 調變前的載波訊號。



圖十二: Ask 之解調變信號波形圖與 ask 調變信號疊加比較

系統設計 2:



圖十三: 輸出方波訊號 010110 的系統設計圖

Pulse Generators 元件 13、23、24、30 負責產生不同組合的數位信號，這些訊號來自不同頻率或相位的數位波形，然後透過 Adder 合併。

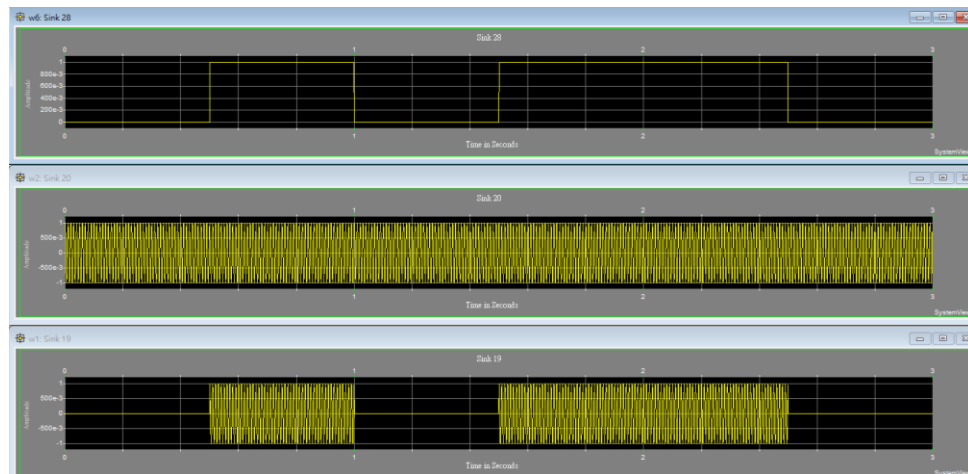
元件 17 產生高頻載波訊號 $C(t) = A\cos(2\pi fct)$ 載波頻 f_c 大於 f_{bit} ，確保 ASK 可正常調變，載波應該是連續的正弦波，高頻不變。

元件 18 為 Multiplier（乘法器）用來執行 **ASK 調變**：

$$S(t) = m(t) \cdot C(t) = Am(t)\cos(2\pi fct)$$

當 $m(t) = 1$ ，輸出完整載波 $A\cos(2\pi fct)$ ，當 $m(t) = 0$ ，輸出 0（無載波）。

模擬結果 2:

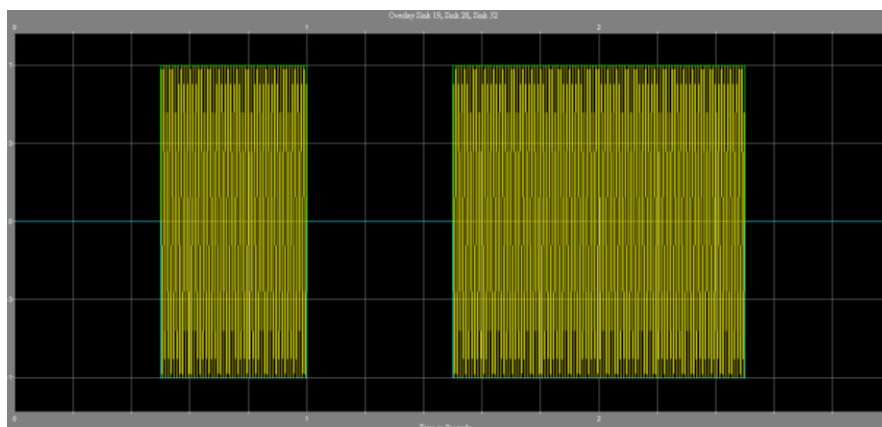


圖十四:數位訊號、未調變的高頻純載波、ASK 調變信號的波形圖

基帶數位訊號 $m(t)$: 代表 010110, 來自 Pulse Generator Adder 處理後的訊號, 每個 1 對應於載波開啟, 每個 0 則關閉載波, 是控制 ASK 調變的數位訊號。

未調變的高頻載波: 產生於 Sine Wave Generator 為連續正弦波, 顯示於 Sink 20 為完整載波信號, 未經調變, 對應圖八的 $C(t) = A\cos(2\pi fct)$ 。

ASK 調變後的訊號: $S(t) = m(t) \cdot C(t) = Am(t) \cos(2\pi fct)$, 是數位訊號 $m(t)$ 乘上載波 $C(t)$ 結果, 這個波形證明了 ASK 調變的過程, 當 $m(t) = 0$ 時載波消失, 當 $m(t) = 1$ 時載波傳輸。



圖十五:加上 ASK 調變信號的包絡線波形圖

ASK 調變信號的包絡線, 用來顯示訊號的振幅變化, 包絡線恰好對應原本的數位訊號 $m(t)$, 理想情況下, 包絡線形狀應與 $m(t)$ 一致, 因為載波的強度完全依賴 $m(t)$ 。

單元三 振幅調變（AM）類比訊號

實作六

實驗原理：

振幅調變（AM, Amplitude Modulation）是一種透過改變訊號振幅來傳遞資訊的方法。在本實驗中，我們透過改變信號的放大率參數來觀察不同調變條件（正常調變與過度調變）下的訊號變化。當調變指數（modulation index）小於 1 時，稱為「非過度調變」，此時訊號包絡線不會出現交叉現象，訊號仍能被正確解調。當調變指數大於 1 時，稱為「過度調變」，此時訊號包絡線會發生交叉，可能導致失真，使得訊號無法正確解調。振幅調變（AM）的訊號可以表示為：

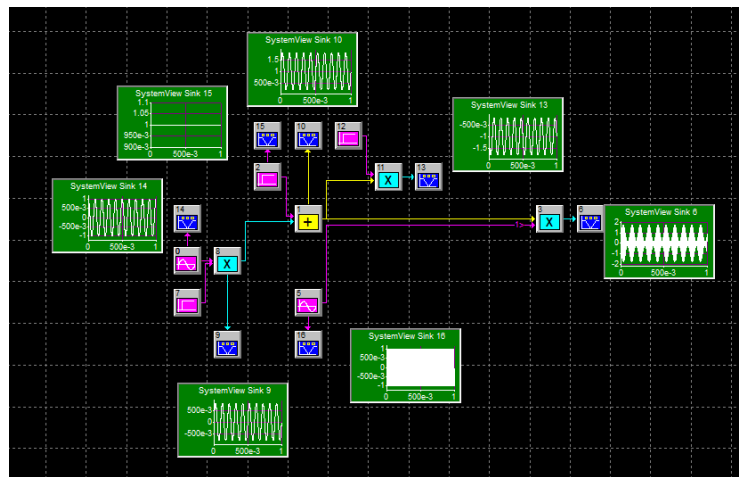
$$s(t) = A_c(1 + K_a m(t))\cos(\omega_c t)$$

其中 A_c 是載波的振幅， $m(t)$ 是訊息信號（baseband signal）， k_a 是調變係數， ω_c 是載波的角頻率。調變的核心在於 **調變指數 $k_a m(t)$** ，這決定了訊號是否會產生「過度調變」。

系統設計：

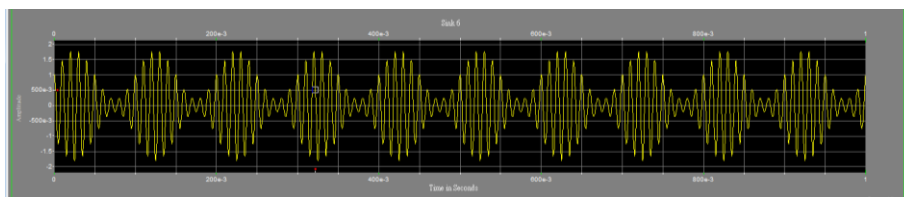
訊息信號 $m(t)$ 的振幅會影響 AM 訊號的包絡形狀。實驗中，我們設置一個振幅 $A_c = 1V$ 、頻率 10Hz 的 \sin 波作為訊息信號。

若 $|k_a m(t)| > 1$ ，則包絡線會發生交錯，導致解調困難（過度調變）。因此，我們在訊息信號 $m(t)$ 乘上 step function，設其振幅為 0.8(非過度調變)與 1.2(過度調變)，再利用加法器（Adder）加上直流偏壓（DC Offset），以確保訊號不會變為負值。



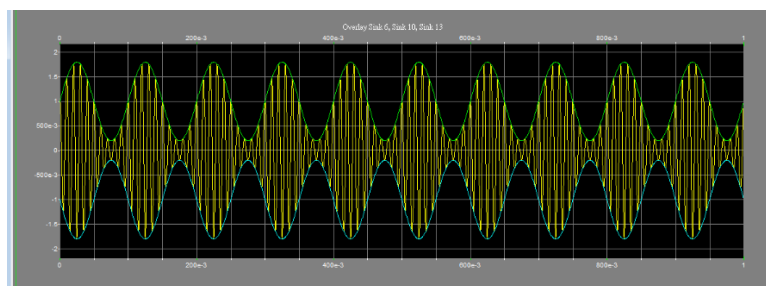
圖十六：系統設計電路圖

模擬結果



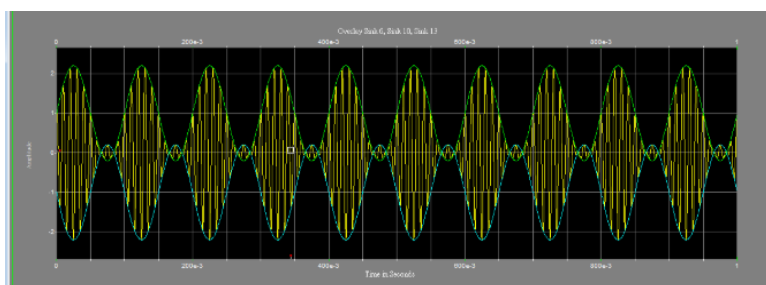
圖十七：未過度調變後的訊號顯示在 sink6 上

圖十七能看出訊號仍可透過包絡檢測(Envelope Detection)來解調。因為 $|k_a m(t)| < 1$ ，訊號的包絡保持完整，這是**非過度調變**的典型特徵。



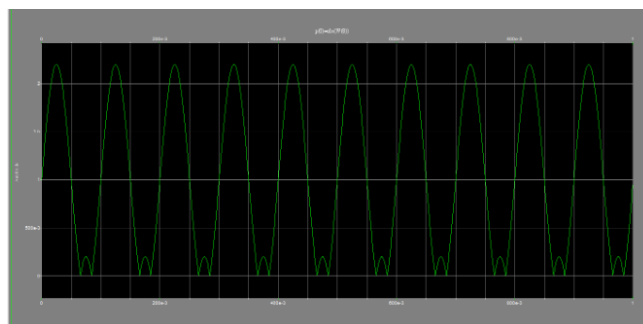
圖十八:具有包絡線與未過度調變的 AM 訊號

我們將訊號的正包絡（綠線 Sink 10），以及負包絡（藍線 Sink 13）顯示在訊號圖（圖十八）上，形狀對應於訊息信號 $m(t)$ ，顯示 AM 調變的效果。包絡線完整且無交錯，證明非過度調變成功實現。



圖十九:具有包絡線與過度調變的 AM 訊號

圖十九可看出在某些區域，上包絡與下包絡重疊、交錯，這是**過度調變**的關鍵特徵。由於 step function 的振幅設置超過 1.0，我們設 1.2，因此訊號的調變指數 $|k_a m(t)| > 1$ ，超過 100%。



圖二十:取絕對值後的包絡線

我們對包絡線取絕對值，消除過度調變所產生的交錯現象，原本交錯的部分會被鏡像回正，使得包絡線變為非負值，如圖二十。

結論：

當 $A_m = 0.8V$ ，有 $|k_a m(t)| = 0.8 < 1$ ，為非過度調變；

當 $A_m = 1.2V$ ，有 $|k_a m(t)| = 1.2 > 1$ ，為過度調變。

單元四 調變深度探測

實作七

實驗原理：

1. 時域訊號：調幅波形

$$S(t) = A_c[1 + k_a M(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

這是標準的 AM 訊號公式，當 $M(t) = 0$ 時，訊號是純載波 $A_c \cos(2\pi f_c t)$ ，當 $M(t)$ 變化時，訊號的振幅會隨之改變，這就是調幅。 $k_a M(t)$ 控制訊號的變化幅度，影響調變深度。

2. 展開公式

將 AM 訊號用歐拉公式展開：

$$S(t) = A_c[1 + k_a M(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

利用：

$$\cos(2\pi f_c t) = \frac{1}{2} (e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t})$$

可以展開為：

$$S(t) = \frac{A_c}{2} [e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}] + \frac{A_c k_a M(t)}{2} [e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}]$$

第一項是純載波成分 $A_c \cos(2\pi f_c t)$ ，第二項是含有訊號的調變成分 $M(t)$ 。

3. 頻域表示（頻譜分析）

透過傅立葉轉換：

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{A_c k_a}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)]$$

這顯示：載波頻率 f_c 上有兩個狄拉克函數 δ （對應於純載波）和訊號頻譜 $M(f)$ 會被搬移到 f_c 和 $-f_c$ 附近，形成雙側帶，且調變訊號 $M(f)$ 影響兩側頻譜寬度。

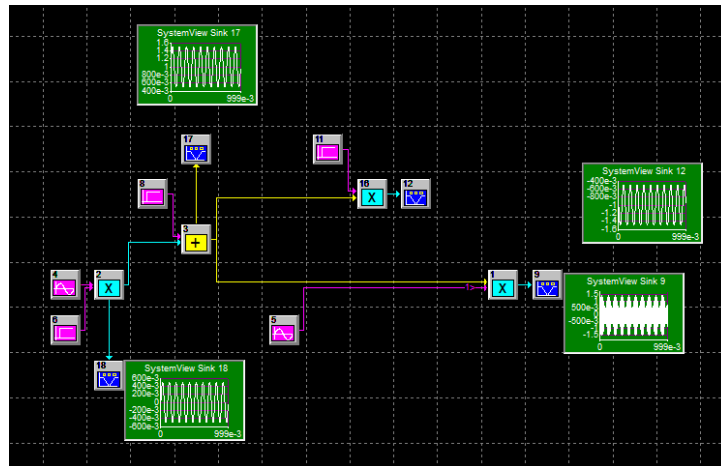
4. 50%、100%、200% 調變深度的意義

調變深度，定義為：

$$m = k_a M_{\max}$$

- $m=50\%$ （欠調變）：
 - 載波振幅變化較小，訊號能量主要集中在載波。
 - 頻譜中的側帶能量較弱，調變效果不明顯。
- $m=100\%$ （標準調變）：
 - 載波振幅變化剛好涵蓋訊號範圍，不會失真。
 - 頻譜的側帶和載波能量達到最佳平衡。
- $m=200\%$ （過調變）：
 - 載波可能會消失或反向，造成包絡失真。
 - 接收端若使用包絡檢測器，可能會無法正確解調。

系統設計：



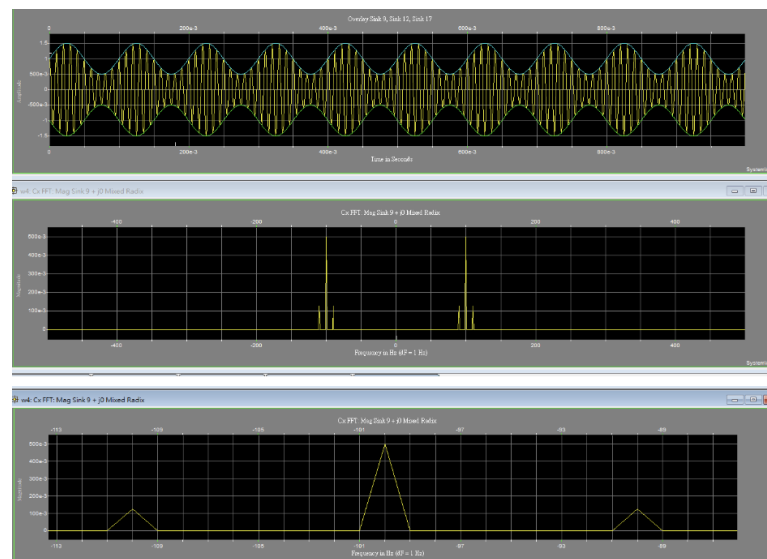
圖二十一：調變深度探測系統設計圖

透過 Sine Wave Generator 產生基帶訊號 $M(t)$ 以及載波訊號 $C(t)$ ，並利用乘法器進行調變，產生調變訊號：

$$S(t) = A_c(1 + k_a M(t)) \cos(2\pi f_c t)$$

此外，為了確保訊號振幅變化適當，我們使用加法器來調整直流偏移，使訊號適應 AM 的調變要求。

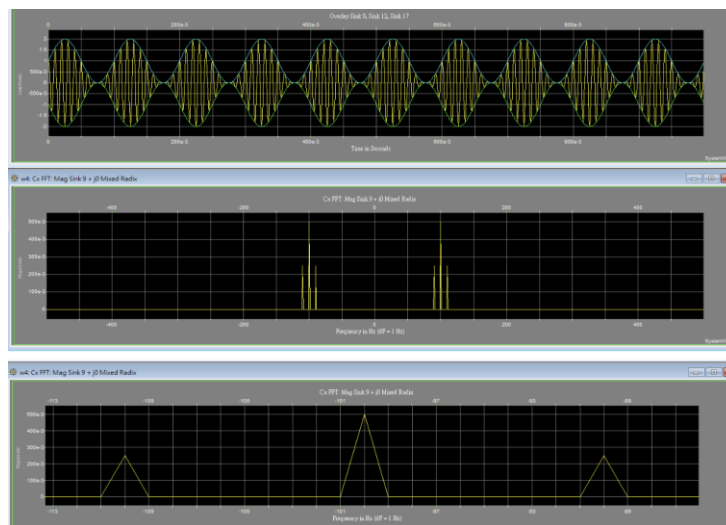
模擬結果



圖二十二：分別為時域波形、FFT 頻譜、放大的 FFT 頻譜(50%調深)

1. 時域波形：訊號的包絡變化較小，波形振幅變動幅度有限，沒有達到完整的擾動。
2. 頻域 (FFT 頻譜)：主頻率在載波 f_c 位置最強，側帶頻率 $f_c \pm f_m$ 強度較弱，表示訊號調變的影響有限，側帶能量相對較小，約為主頻率的 1/4 倍。

這種狀態稱為欠調變，意味著調變指數 kaM_{max} 小於 1，側帶訊號能量較小，調變效果不明顯，可能會導致接收端訊號解調時較不靈敏。

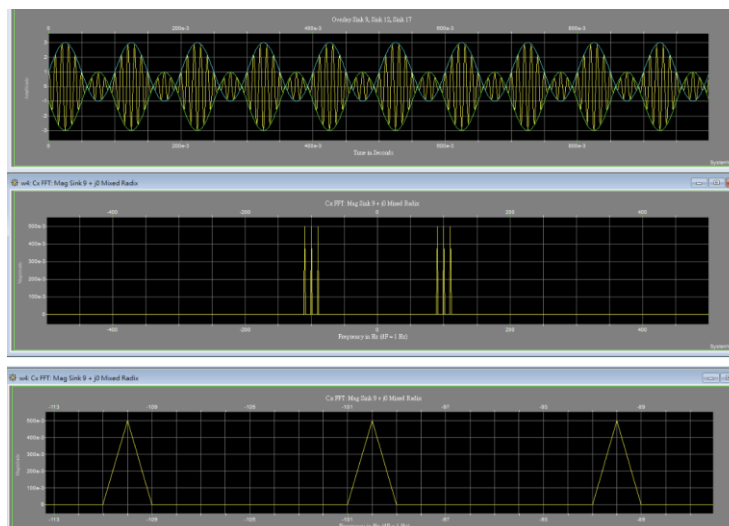


圖二十三:分別為時域波形、FFT 頻譜、放大的 FFT 頻譜(100%調深)

時域波形：波形包絡清晰且完整，訊號的振幅變化達到最大但未失真。

頻域 (FFT 頻譜)：載波 f_c 仍然是主要成分，側帶訊號 $f_c \pm f_m$ 能量明顯增強，代表訊號有足夠的頻率成分來傳遞訊息，側帶訊號**能量達到最佳平衡**，與載波強度相當，最理想的 AM 訊號，側帶強度約為主頻率的 1/2 倍。

這是**最佳調變**，調變指數 $kaM_{max} = 1$ 載波和側帶的能量分配均衡，訊號傳輸品質最佳，不會造成包絡失真。



圖二十四:分別為時域波形、FFT 頻譜、放大的 FFT 頻譜(200%調深)

時域波形：訊號包絡產生明顯的反向波形，局部振幅變為負值，無法正確解析原始訊號。

頻域 (FFT 頻譜)：載波 f_c 仍然可見，側帶強度約為主頻率的 1 倍，可能出現額外的諧波成分，表示系統進入非線性失真狀態。

單元五

抑制載波的雙邊帶調變 DSB-SC

實作八、九

實驗原理：

(1) 調變 (Modulation)

DSB-SC 調變的數學模型為：

$$S_{\text{DSB}}(t) = A_C m(t) \cos(2\pi f_C t)$$

其中：

A_C ：載波振幅

$m(t)$ ：訊號訊息（本實驗為 10Hz 的正弦波）

f_C ：載波頻率（本實驗為 100Hz）

與標準 AM 相比：

$$S_{\text{AM}}(t) = A_C [1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_C t)$$

可見 AM 包含直流分量 $A_C \cos(2\pi f_C t)$ ，但 DSB-SC 沒有此分量，僅保留訊息的上下側頻，頻譜為：

$$S_{\text{DSB}}(f) = \frac{A_C}{2} [M(f - f_C) + M(f + f_C)]$$

表示原始訊息頻譜 $M(f)$ 以 $\pm f_C$ 為中心進行對稱搬移，形成雙邊帶。

(2) 解調 (Demodulation)

接收端需使用與發射端相同頻率且同步的載波 (phase error = 0)，將接收到的 DSB-SC 訊號再次乘上 $\cos(2\pi f_C t)$

$$V(t) = S(t) \times \cos(2\pi f_C t) = A_C m(t) \cos^2(2\pi f_C t)$$

應用三角恆等式：

$$\cos^2(2\pi f_C t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_C t)$$

展開可得：

$$V(t) = \frac{A_C}{2} m(t) + \frac{A_C}{2} m(t) \cos(4\pi f_C t)$$

混合訊號 $V(t)$ 包含兩部分：

$$\text{Baseband 分量: } \frac{A_C}{2} m(t) \text{ 與高頻分量: } \frac{A_C}{2} m(t) \cos(4\pi f_C t)$$

接著經由 **低通濾波器 (LPF) (Block 7)** 濾除高頻成分，僅保留低頻部分，即可復原原始訊號：

$$V_{\text{out}}(t) = \frac{A_C}{2} m(t)$$

若本地載波與發射載波存在 90° 相位差，乘上的變為 $\sin(2\pi f_C t)$ ，則解調變成：

$$V(t) = S(t) \times \sin(2\pi f_C t) = A_C m(t) \times \cos(2\pi f_C t) \times \sin(2\pi f_C t)$$

利用三角恆等式：

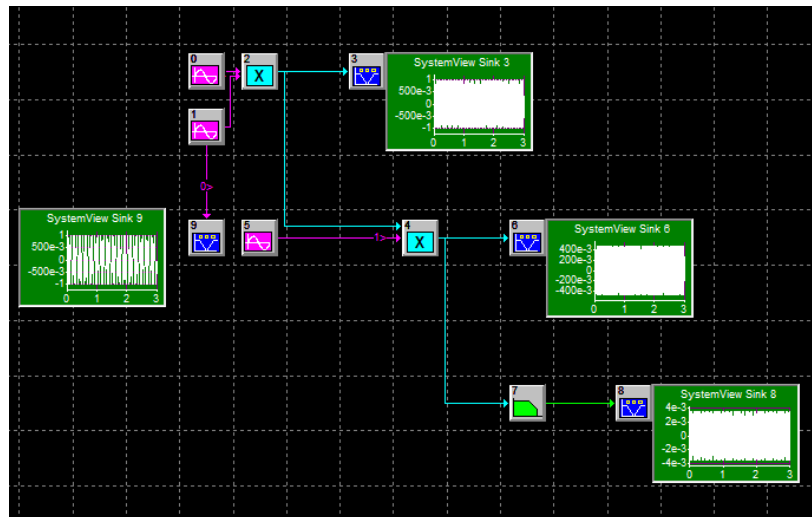
$$\cos(x) \times \sin(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

得：

$$V_{\text{out}}(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \sin(4\pi f_c t)$$

這個結果只有高頻分量，沒有 baseband 成分，訊號無法解調出來。

系統設計：



圖二十五：DSB-SC 調變系統設計圖

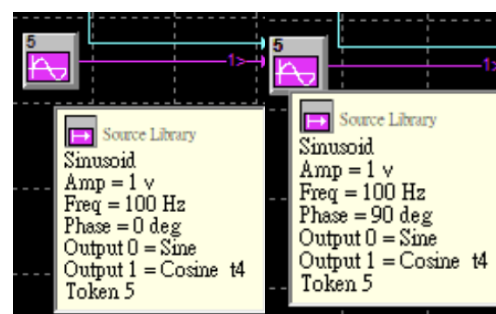
調變部分 (Modulation)：

- 訊號來源 (Sink 9)：產生訊息訊號 $m(t) = \sin(2\pi \times 10t)$
- 載波來源：產生 $\cos(2\pi \times 100t)$
- 乘法器：將 $m(t)$ 與載波相乘，形成 DSB-SC 訊號 $S_{\text{DSB}}(t)$
- Sink 3：觀察 DSB-SC 波形與頻譜

解調部分 (Demodulation)：

- 第二乘法器 (Block 4)：將接收到的 DSB-SC 訊號再次乘上同頻率載波
- Sink 6：觀察混合訊號 $V(t)$ ，含 baseband 與高頻
- 低通濾波器 (Block 7)：濾除高頻分量 $m(t)\cos(4\pi f_c t)$
- Sink 8：觀察解調後的訊號 $\frac{A_c}{2} m(t)$ ，驗證訊號成功復原

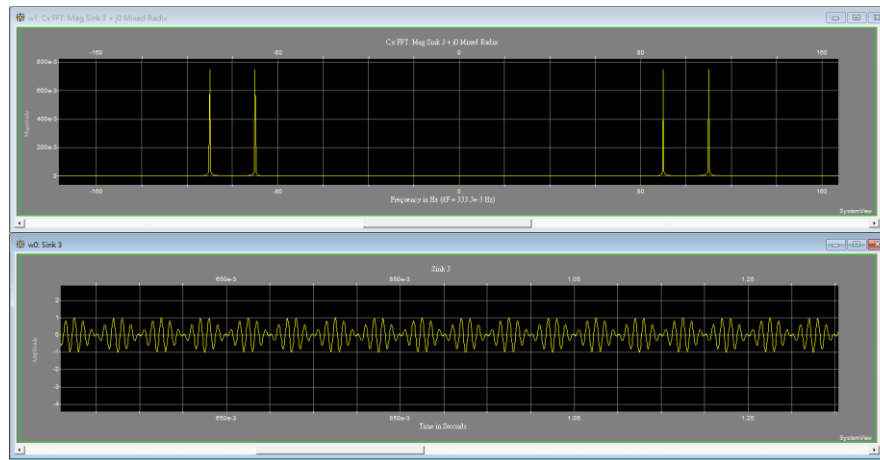
解調時使用的載波相位設定為：



圖二十六：載波 phase error 設 0 與 90 degree

模擬結果

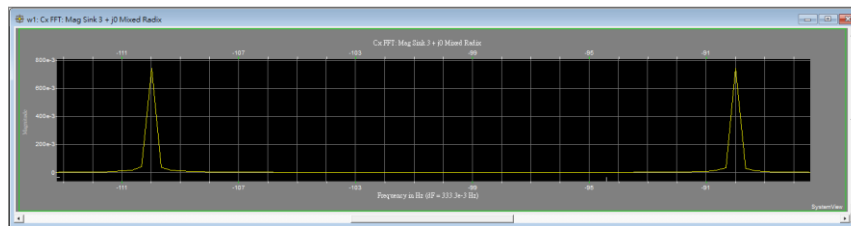
DSB-SC 調變訊號：



圖二十七:DSB-SC 調變訊號頻域與時域圖

$$\text{頻域波形 } S_{\text{DSB}}(f) = \frac{A_c}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)]$$

$$\text{時域波形 } S_{\text{DSB}}(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

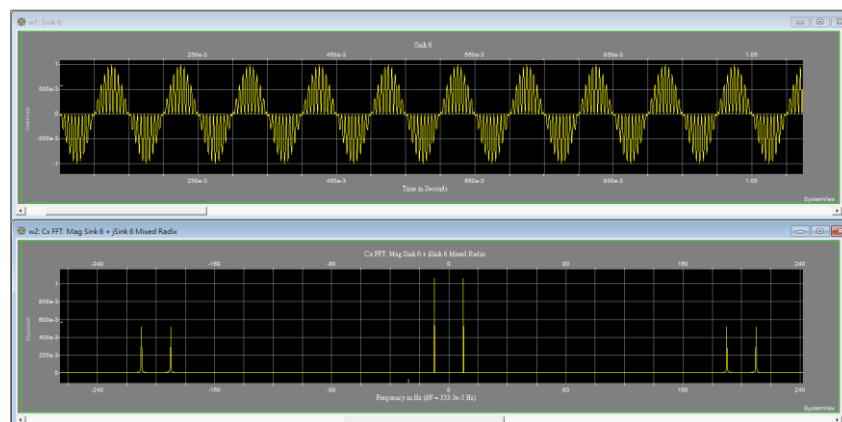


圖二十八:DSB-SC 調變訊號頻域波形放大圖

DSB-SC 解調 (相位誤差 = 0°)

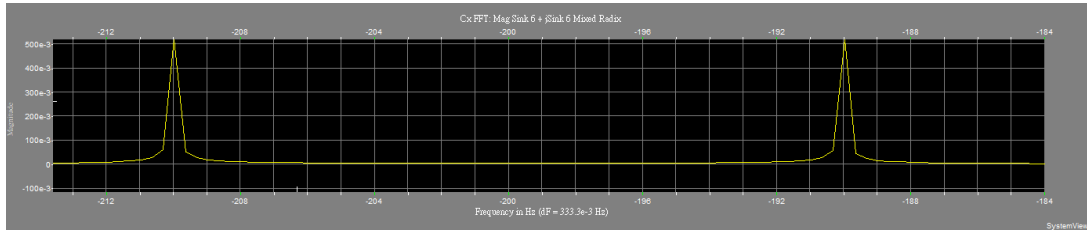
濾波前顯示訊號 $V(t) = A_c m(t) \cos^2(2\pi f_c t)$ ，展開為

$$V(t) = \frac{A_c}{2} m(t) + \frac{A_c}{2} m(t) \cos(4\pi f_c t)$$



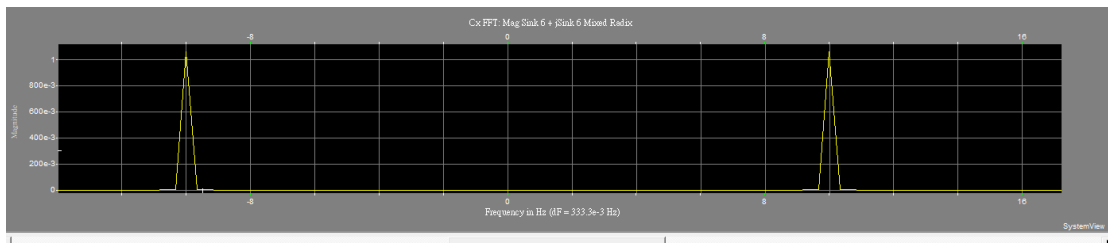
圖二十九:濾波前、相位誤差 = 0° 時域圖(上)頻譜圖(下)

圖三十顯示原始訊息訊號的一半振幅成分，對應 baseband $\frac{A_c}{2}m(t)$ 。



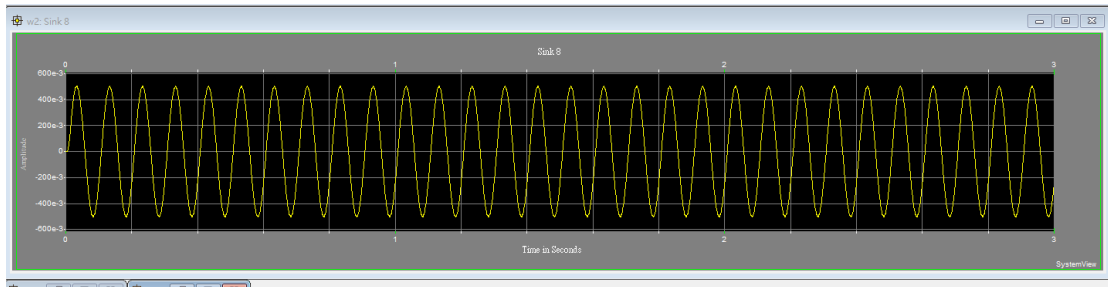
圖三十: baseband 成分的 FFT 頻譜圖

圖三十一顯示的是高頻分量 $\frac{A_c}{2}m(t)\cos(4\pi f_c t)$ ，頻率大約落在 $f = 200\text{Hz}$ （由於 $2f_c = 200\text{Hz}$ ），這部分在濾波後會被移除。



圖三十一：高頻分量的 FFT 頻譜圖

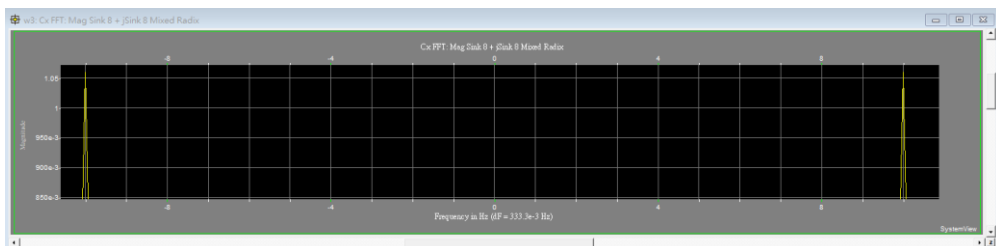
再經過低通濾波器（LPF）處理後的結果：



圖三十二：解調後時域波形

解調訊號經過低通濾波器，成功去除高頻項 $m(t)\cos(4\pi f_c t)$ ，剩下的波形非常接近純淨的正弦訊號，如圖三十二。

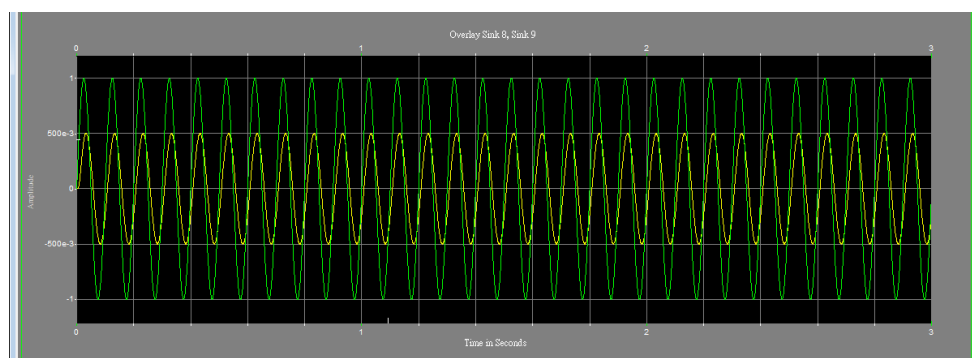
$$V_{\text{out}}(t) = \frac{A_c}{2}m(t)$$



圖三十三：解調後頻譜圖

FFT 顯示頻譜能量集中在 $\pm 10\text{Hz}$ ，證實高頻雜訊被 $\text{cutoff} = 40\text{Hz}$ 的低通濾波器有效去除高頻。

將解調後經低通濾波的訊號（Sink 8）和原始訊號（Sink 9）疊加比較



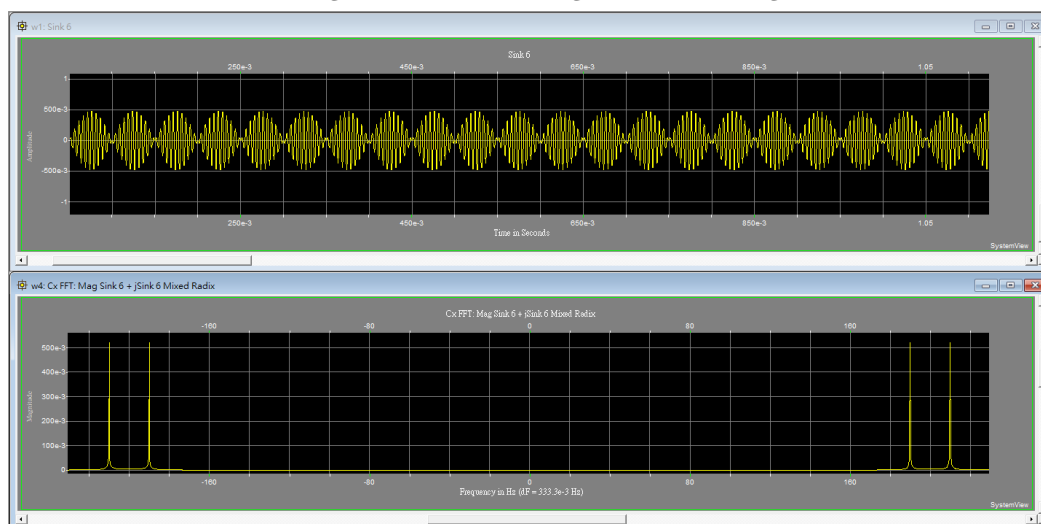
圖三十四：原始訊號 vs 解調後濾波訊號

兩波形頻率一致，證明成功還原了原始 baseband 訊號而黃色波形在振幅上為綠色波形的一半，這完全符合理論公式：

$$V_{\text{out}}(t) = \frac{A_c}{2} m(t)$$

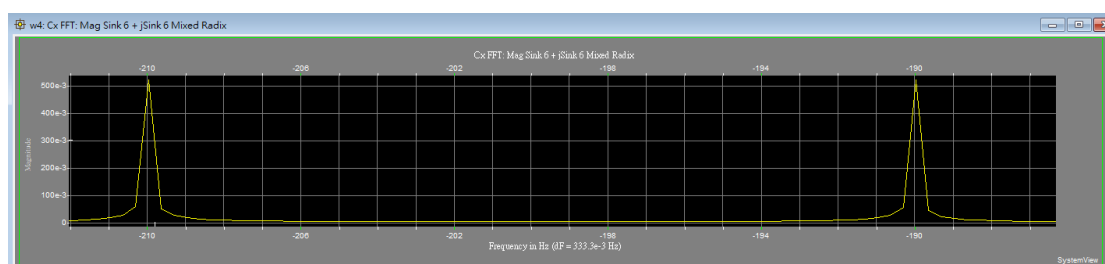
DSB-SC 解調（相位誤差 = 90° ）

濾波前顯示訊號 $V(t) = A_c m(t) \times \cos(2\pi f_c t) \times \sin(2\pi f_c t)$



圖三十五：濾波前、相位誤差 = 90° 時域圖(上)頻譜圖(下)

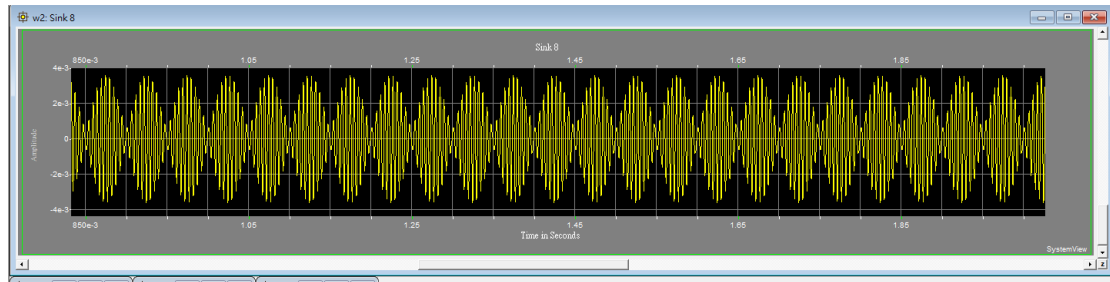
放大高頻分量：



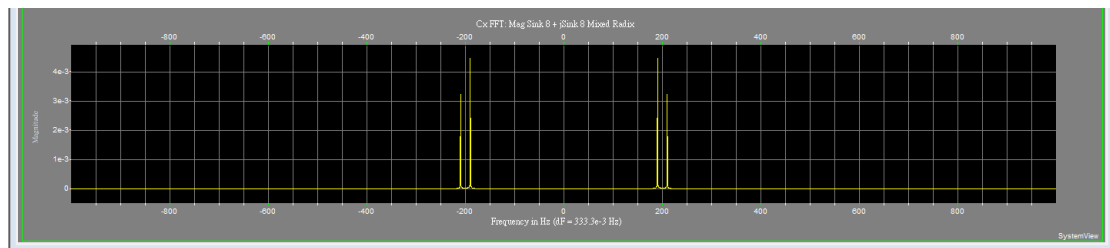
圖三十六：高頻分量的相位誤差 = 90° FFT 頻譜圖

經過低通濾波器處理：

可以看到時域訊號雖然經過濾波，但仍為明顯的高頻包絡震盪，並非原本應該呈現的純正弦 $m(t)$ ，根本原因是錯誤相位造成 baseband 成分完全不存在。



圖三十七：解調後有相位誤差濾波時域波形



圖三十八：解調後有相位誤差濾波頻譜圖

頻譜中依然沒有低頻成分（例如 $\pm 10\text{Hz}$ ）主能量集中在 $\pm 200\text{Hz}$ ，也就是 $2f_c$ ，對應的是：

$$V_{\text{out}}(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \sin(4\pi f_c t)$$

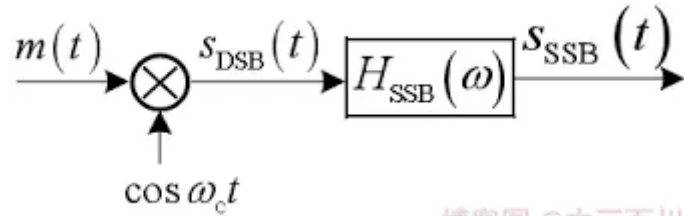
濾波器無法將高頻訊號轉回 baseband，因此：訊號解調失敗，濾波後也無法恢復訊息。

單元六 單邊帶調變 (SSB-SC)

實作十、十一

實驗原理：

上課中展示了單邊帶調變 (SSB) 的頻譜原理，它是從標準 AM 調變 (雙邊帶) 簡化而來，透過頻譜處理，只保留一側的側帶 (Upper Side Band 或 Lower Side Band)，從而達到節省頻寬與功率的效果。



圖三十九：單邊帶調變的基本原理流程圖

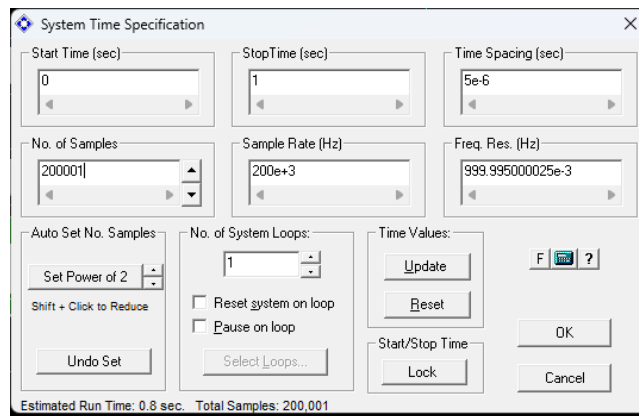
訊號從基帶訊號 $m(t)$ 開始，先與載波 $\cos(\omega_c t)$ 相乘，產生雙邊帶調變訊號 $s_{\text{DSB}}(t)$ ，包含上側帶 (USB)、下側帶 (LSB) 與可能的載波成分。接著，透過一個頻率選擇性的濾波器 $H_{\text{SSB}}(\omega)$ ，過濾掉其中一邊的側帶，只保留單一邊的頻譜，得到單邊帶訊號 $s_{\text{SSB}}(t)$ 。這樣的處理能有效節省一半頻寬與功率。對照到上課所說，便是從基帶訊號頻譜搬移後選擇 USB 或 LSB。

在標準 AM 中，調變後的頻譜 $S(f)$ 包含：載波分量 f_c 、上側帶 (USB)： $f_c + f_m$ 、下側帶 (LSB)： $f_c - f_m$ 。而在單邊帶調變 (SSB) 中，只保留 USB (Upper Side Band) 或 LSB (Lower Side Band)，這樣可以將頻寬從 $2 \times B$ 減少為 B ，且移除無用的載波成分，節省功率。

頻譜處理的過程說明：

原始基帶訊號頻譜 $|M(f)|$ ：範圍從 $-B$ 到 $+B$ 。將訊號上變頻 (調變) 至載波頻率 f_c ：基帶訊號頻譜平移至 f_c 。得到上側帶 (USB) 與下側帶 (LSB)，再利用濾波器選擇其中一側 (USB 或 LSB)，移除不需要的那一側以及載波本身，最後得到單邊帶訊號 $S(f)$ 。

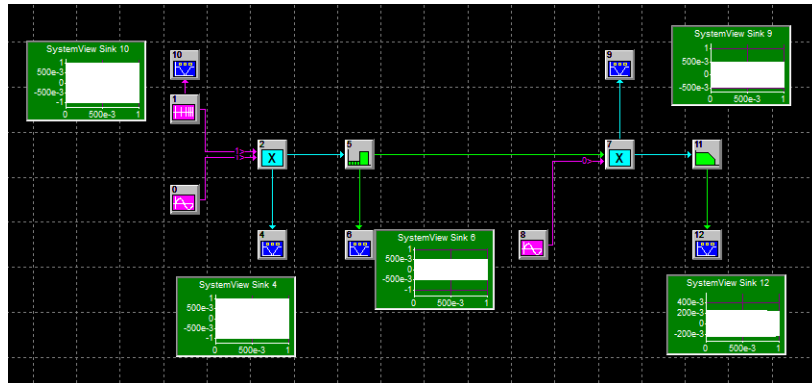
系統設計：



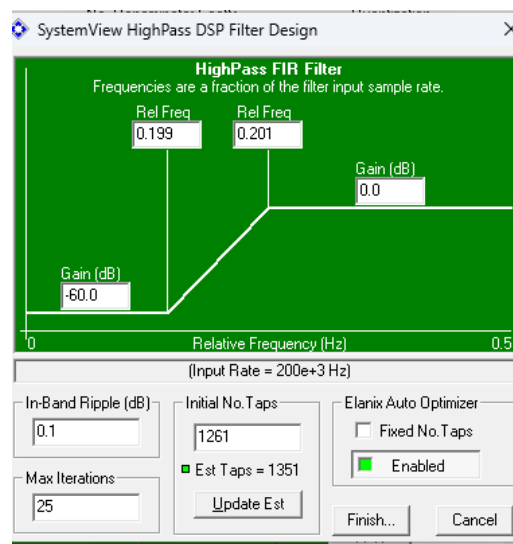
圖四十：系統時間設定

實作十：先高通再低通(取 USB)

先通過高通濾波器去除 LSB，再通過低通濾波器限制帶寬，只保留 USB，保留 $f_c + f_m$ 一側，丟棄 $f_c - f_m$ 。



圖四十一：取 USB 系統設計圖



圖四十二:設計高通 FIR 濾波器參數

已知 Sample Rate 為 2000000Hz，我們要設計的是高通濾波器，上圖設定的兩個轉換帶頻率是：

- 第一個轉折點 (-60 dB 降起點) 對應相對頻率 0.199
- 第二個轉折點 (0 dB 穩定通過) 對應相對頻率 0.201

所以我們根據公式計算實際截止頻率（使用相對頻率）：

第一個截止點（開始放行）：

$$f_{\text{cutoff1}} = 0.199 \times \frac{200,000}{2} = 0.199 \times 100,000 = \boxed{19,900 \text{ Hz}}$$

第二個截止點（完全放行）：

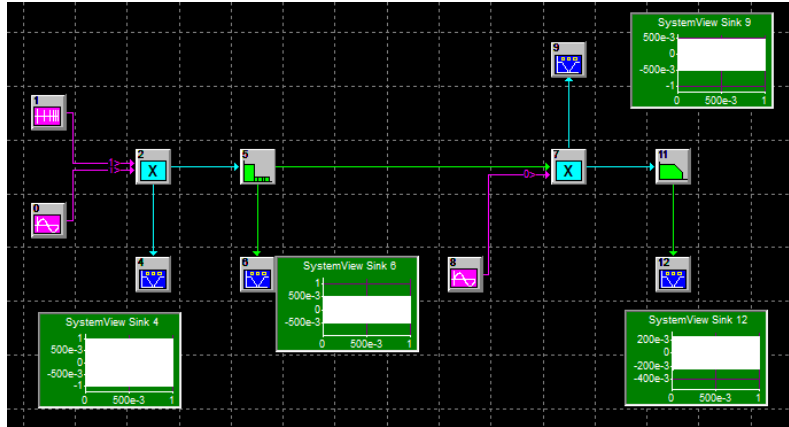
$$f_{\text{cutoff2}} = 0.201 \times 100,000 = \boxed{20,100 \text{ Hz}}$$

這樣就可以知道這濾波器是在濾掉 20kHz 以下訊號，只通過 20kHz 以上的部

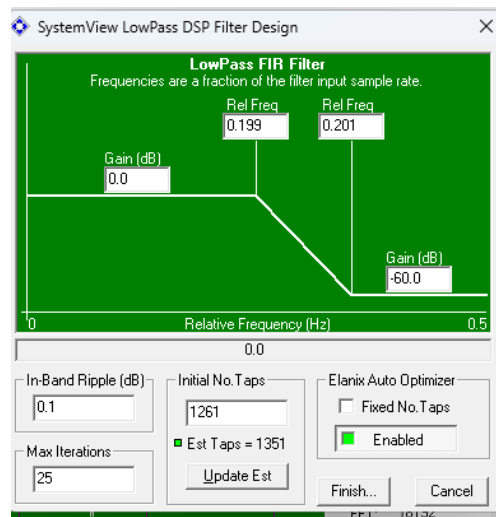
分。

實作十一:先低通再低通（取 LSB）

先通過低通濾波器去除 USB，接著再低通限制帶寬保留 LSB。保留 $f_c - f_m$ 的一側，丟棄 $f_c + f_m$ 。



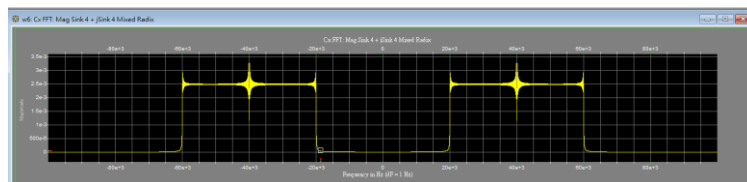
圖四十三:取 LSB 系統設計



圖四十四:低通 FIR 濾波器設計參數

低通 FIR 是用來濾掉高於 20.1 kHz 的高頻訊號，只保留 0 ~ 19.9 kHz 之間的基帶訊號。

模擬結果--先高通再低通(取 USB)

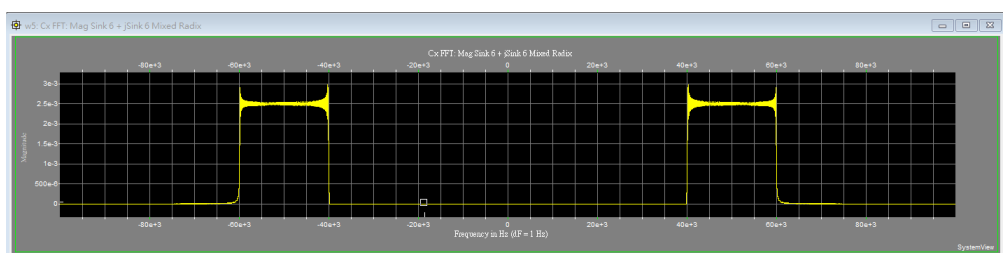


圖四十五: Sink 4)未濾波的 DSB 調變訊號

圖四十五是將 $m(t)$ 與載波 $\cos(\omega_c t)$ 相乘後的結果，即：

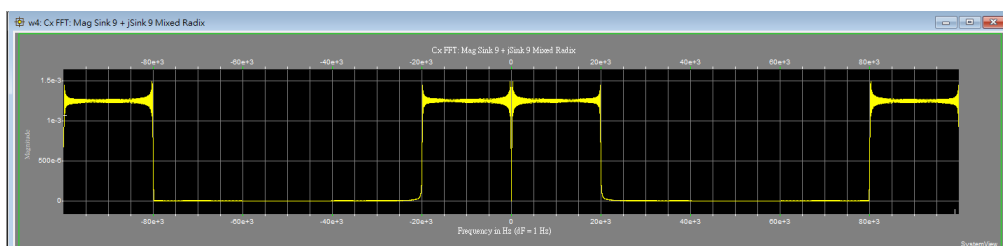
$$S_{\text{DSB}}(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

中心頻率對稱於 $\pm 40\text{kHz}$ ，代表調變後的雙邊帶訊號，左右兩側對稱，清楚顯示有上下側帶（USB 與 LSB），峰值是掃頻產生的頻率成分集中點。這代表原始的 DSB 調變成功，尚未經過濾波，頻譜是左右對稱的。



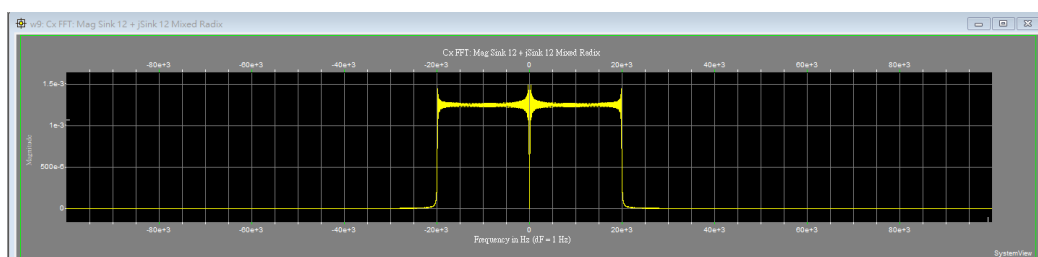
圖四十六: Sink 6 經過高通濾波後的單邊帶 (USB)

圖四十六是將 DSB 訊號經過高通濾波器後留下的結果，目的是濾除低頻的下側帶 (LSB)、保留高頻的上側帶 (USB)。左側頻帶 (-40kHz 附近) 完全消失，右側頻帶 ($+40\text{kHz}$ 附近) 被保留，相較於圖四十五，明顯變成了「單邊帶」。濾波器成功移除 LSB，留下 USB，這就是單邊帶調變 (SSB) 訊號的頻譜。



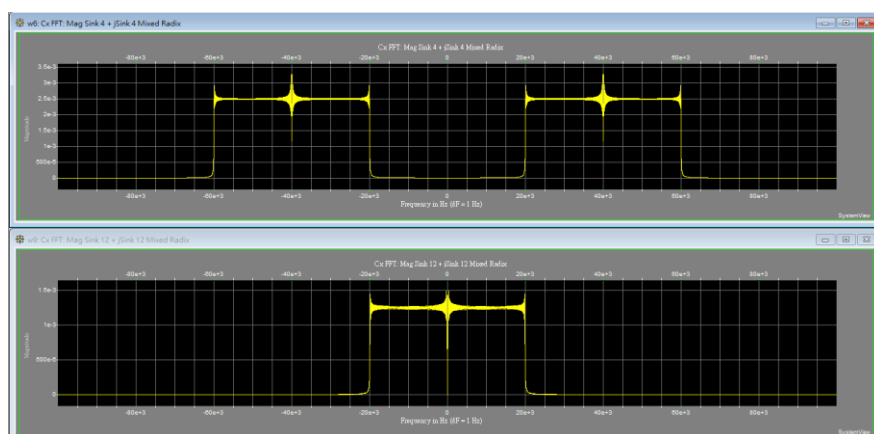
圖四十七: Sink 9 再乘上本地載波後的頻譜

圖四十七是保留下來的 USB (約 40kHz) 再乘上本地正弦波 $\cos(\omega_c t)$ ，也就是將其下變頻到基帶。可見兩個主頻帶分別出現在 0 Hz 附近和 $\pm 80\text{kHz}$ 附近，中心有明顯頻率成分表示成功將信號搬回基帶，右側 80kHz 處的頻譜為混頻產生的高頻分量。



圖四十八: Sink12 經低通濾波器後的結果

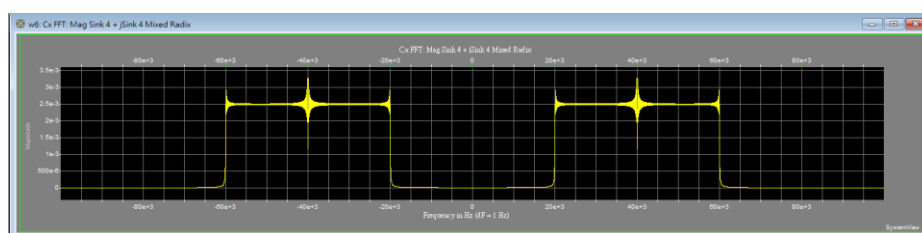
圖四十八為 Sink 9 \rightarrow 經低通濾波器 \rightarrow Sink 12，目的是將圖四十七中的「基帶保留、高頻去除」，還原出原始 $m(t)$ 的頻譜。僅保留中心的 0 Hz 附近頻帶， $\pm 80\text{kHz}$ 的頻帶已被濾除，保留的頻率範圍符合原始訊號掃頻設計。這證明低通濾波器成功地從再混頻後的訊號中只留下原始基帶，完成解調還原。



圖四十九：比較原始頻譜與解調後頻譜（Sink 4 與 Sink 12）

觀察 Sink 12 頻譜形狀與原始 Sink 4 的訊號結構非常接近（中心頻率落在 0 Hz 附近、頻寬一致），顯示解調成功。此證明單邊帶調變（SSB）搭配再混頻與低通濾波可有效還原原始訊號。

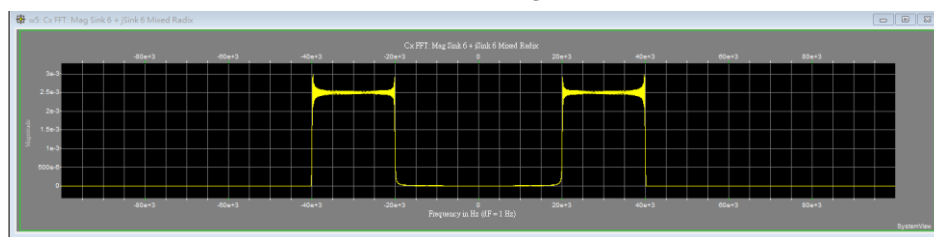
模擬結果--先低通再低通(取 LSB)



圖五十: Sink 4 原始 DSB 頻譜

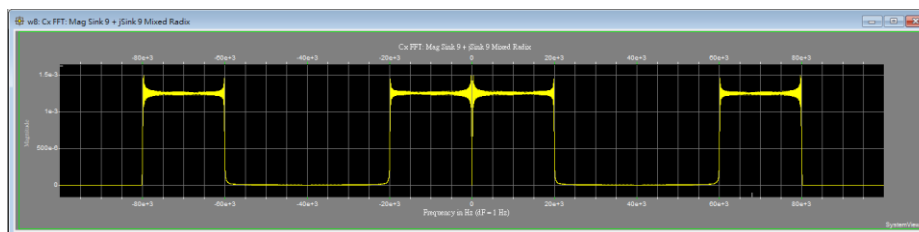
圖五十是 DSB 調變的結果頻譜，明顯有對稱的頻譜分佈於 $\pm 40\text{kHz}$ 附近，表示訊號被調變到載波頻率兩側，即出現 USB（上側帶）和 LSB（下側帶），為未經濾波的完整調變訊號頻譜。

雙邊帶（DSB）調變成功，頻率對稱出現於 $f_c \pm f_m$ 。



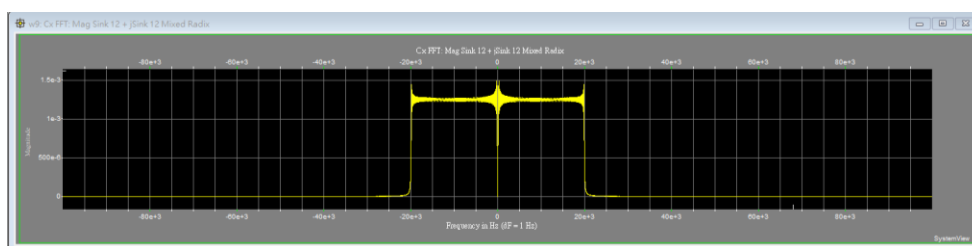
圖五十一: Sink 6 經低通濾波後的結果

圖五十一是 DSB 訊號通過低通濾波器後的頻譜，可以看到右側頻帶（+40kHz 附近）被保留，但左側（-40kHz）已經被濾除。這表示濾波器已經去除了下側 LSB，僅保留 USB（單邊帶訊號），頻譜變得不再對稱，為單邊帶訊號的特徵。低通濾波器成功濾除不需要的頻帶（LSB），留下 USB，完成單邊帶處理。



圖五十二: Sink 9 再混頻後（未濾波）的結果

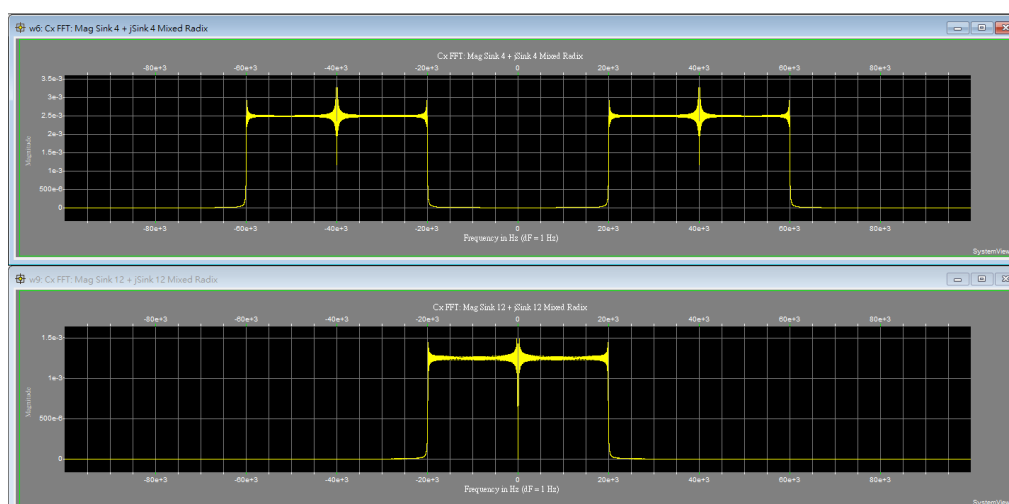
圖五十二顯示的是訊號經過再與載波相乘（也就是解調過程的第一步）之後的頻譜情況，當訊號再與同頻載波乘上後，原本在 f 的頻率分量會被移到 $f \pm f_c$ ，因此形成了四個邊帶，表示此時訊號仍包含高頻成分，還沒有還原成基帶信號。此圖是再混頻後的中間狀態，需要透過低通濾波器進一步還原。



圖五十三: Sink 12 通過低通濾波器後的結果

圖五十三是再混頻後再經過低通濾波器的結果（完成解調），頻譜只剩下靠近 0 Hz 的那一段，即基帶訊號，原本高頻的訊號（如 ± 80 kHz）已經被濾掉，表示訊號已經被成功解調回原始訊號的頻譜。這是訊號完成解調後的頻譜結果，只保留所需的原始頻率範圍。

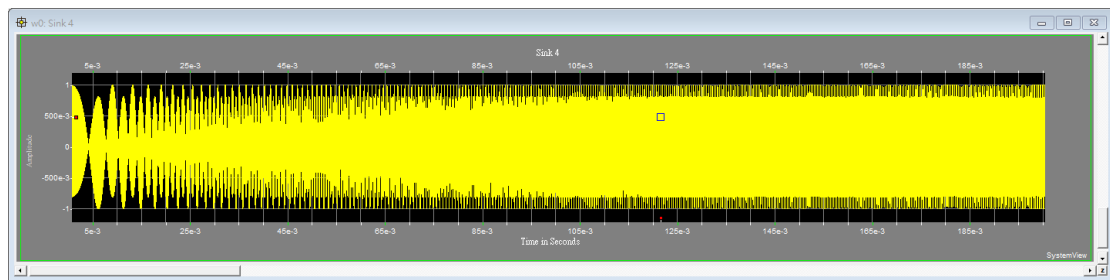
比較原始頻譜與解調後頻譜



圖五十四：比較原始頻譜與解調後頻譜（Sink 4 與 Sink 12）

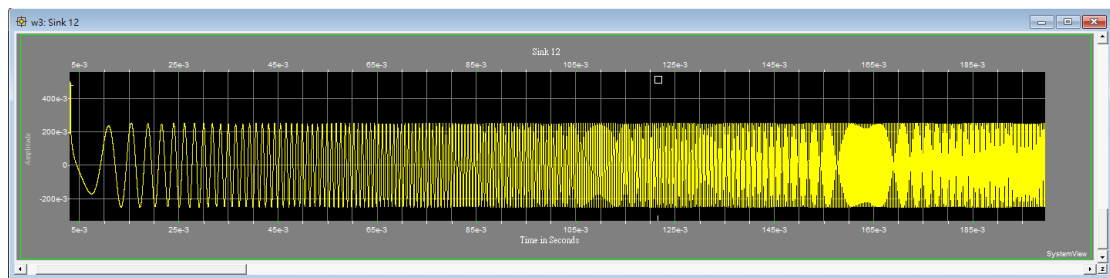
圖五十四比較顯示出「再混頻 + 低通濾波」的解調流程是有效的，可以把調變訊號成功還原，去除多餘的邊帶成分，也符合單邊帶調變的理論模型。

比較時域



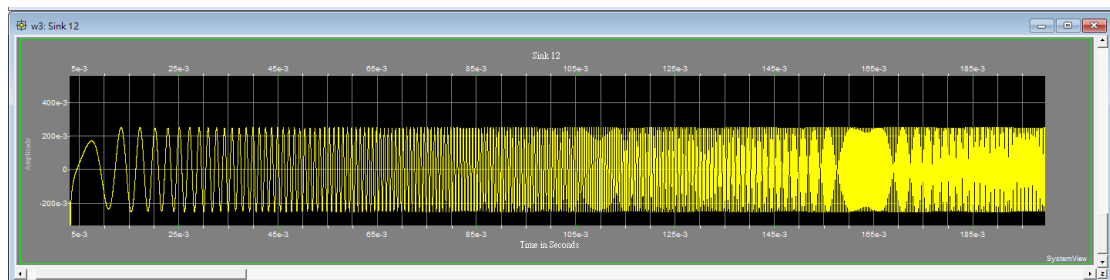
圖五十五: Sink 4 原始調變訊號

圖五十五是訊號經過搬移後的 DSB (雙邊帶) 調變波形，可以看到是載波包著原始訊號的外形。整段訊號中，包絡線表示的就是原始 baseband 訊號的形狀，涵蓋高頻載波。



圖五十六: Sink 12 高通濾波後

圖五十六是使用高通濾波器後得到的波形，目的是保留 USB，並濾除掉 LSB。發現時域波形中仍然有明顯的載波包絡結構，但訊號的對稱性消失，這是因為只保留了一邊的頻譜造成的影響。



圖五十七: Sink 12 低通濾波後

圖五十七是改用低通濾波器，保留 LSB 的結果。和第二張圖相比，時域的包絡形狀看起來會有些微不同，尤其是在高頻率處的變化，這也是因為頻譜的一邊被濾除後，時域會失去部分對稱性。

國立臺北大學通訊工程學系

數位通訊系統模擬

Simulation and Emulation of
Digital Communication Systems(U3260)
(期末課程實作紀錄)

第 16 組 組員：

411186028 鐘婉庭 / 411186030 葉璇

殘邊帶調變(Vestigial-sideband modulation, VSB)

實驗原理：

殘邊帶調變是一種介於雙邊帶與單邊帶之間的調變技術，其目的是有效節省頻寬，同時避免完全移除一側訊號所帶來的失真問題。在 VSB 中，訊號在載波頻率上下各保留一個完整帶寬與一個「漸進式衰減」的過渡區域（即殘留邊帶）。

首先，訊號 $M(f)$ 通過一個調變器與載波 $\cos(\omega ct)$ 混頻，產生 $U(f)$ ，頻譜包含上下兩側的訊號成分。為了進行殘邊帶處理，接著引入一個特殊設計的濾波器 $H(f)$ ，其頻率響應在靠近 fc 及 $-fc$ 的地方，並於過渡區內線性下降。

經過濾波後，產生的 $S(f) = U(f) \times H(f)$ ，即是具有殘邊帶特性的頻譜。此時， $V(t)$ 會再經過一次與 $\cos(\omega ct)$ 的混頻，產生頻譜 $V(f)$ ，進而經過濾波及適當處理後，最終可以復原出 $M(t)$ 。

數學推導上，濾波器會使訊號在頻域上進行乘積，導致訊號經過混頻後的頻譜分量在 $\pm 2fc$ 和直流附近重疊。經過設計，最後可以得到一個與原始訊號 $M(t)$ 成正比的結果，證明了 VSB 可以成功進行調變與解調。

殘邊帶調變過程中的頻譜變化流程，從上到下大致分成幾個步驟：

1. 原始訊號頻譜 $|M(f)|$

一開始是訊號 $M(t)$ 的頻譜，是一個對稱、主要集中在低頻（例如 20Hz~20kHz）的訊號頻譜，代表原始訊號的頻率分佈。

2. 訊號調變後的頻譜 $|U(f)|$

第二層，訊號經過和載波 $\cos(\omega ct)$ 調變後，產生了上下兩個「鏡像」頻譜，分別位於 $+fc$ 和 $-fc$ 兩邊，這就是雙邊帶調變的特徵（上下兩個鏡像是對稱的，且與原始訊號頻譜結構相同）。

3. 經過濾波後的頻譜 $|S(f)|$

第三層，在調變後的雙邊帶訊號上，乘上設計好的濾波器 $H(f)$ 。這個濾波器只在一邊保留大部分訊號，一邊則經過一個斜率過渡，逐漸衰減到接近 0。這就是殘邊帶的特性：一邊完整、另一邊只殘留一部分。

4. 再次混頻後的頻譜 $|V(f)|$

第四層，訊號再與 $\cos(\omega ct)$ 混頻一次，這樣頻譜會被「搬移」回靠近直流（0Hz），並且在 $\pm 2fc$ 附近出現新的成分（混頻之後，訊號頻譜左右會對稱分布，但因為濾波器的影響，強度和形狀已經不同）。

5. 最終濾波及恢復 $V_o(f)$

最後經過低通濾波器之後（只保留靠近 0Hz 的部分），可以把搬移回來的訊號取出，最終得到的訊號 $V_o(f)$ ，其頻譜形狀與原來的 $M(f)$ 類似，只差一個常數比例（幅度縮放），這就是解調成功，還原原本訊號的結果。

系統設計：

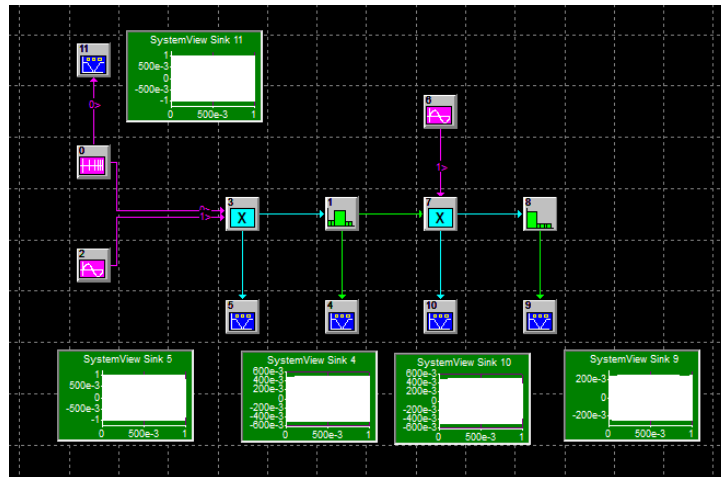


圖 1. 殘邊帶調變系統的流程

整體目的是將訊號經由調變、濾波、再解調，達成殘邊帶調變效果。系統首先由 Freq Sweep 產生一個 20Hz~20kHz 的基頻訊號，再與 40kHz 的餘弦載波信號相乘，產生雙邊帶調變訊號。這個調變後的訊號會呈現在 Sink 5 與 Sink 4，可觀察其對稱的上下邊帶。接著將 DSB 訊號通過一個設計成具備 45° 斜率的濾波器，使原本對稱的頻譜一側被斜切，保留一邊完整邊帶並保留部分另一邊邊帶，形成殘邊帶調變。之後訊號再次乘上載波進行解調。這個解調後的結果顯示於 Sink 10 與 Sink 9，其中可看到還原前的中頻雜訊仍存在。最後系統透過低通濾波器進一步清除解調後的高頻分量，進一步還原出原始訊號。

模擬結果：

Bandpass 濾波器的設計是針對殘邊帶調變進行設計，主要目的是要保留一整個邊帶並部分保留另一側邊帶，我們先利用參數計算出 bandpass 所填入的數值。我們設定 $f_c = 40\text{kHz}$ ：

目標保留上邊帶： $f_c + 20\text{Hz} \sim f_c + 20\text{kHz} \Rightarrow 40.02\text{kHz} \sim 60\text{kHz}$

目標濾除下邊帶： $f_c - 20\text{kHz} \sim f_c - 20\text{Hz} \Rightarrow 20\text{kHz} \sim 39.98\text{kHz}$

Rel Freq 左邊

- $30\text{kHz} / 200\text{kHz} = 0.15$
- $50\text{kHz} / 200\text{kHz} = 0.25$

Rel Freq 右邊

- $70\text{kHz} / 200\text{kHz} = 0.35$
- $90\text{kHz} / 200\text{kHz} = 0.45$

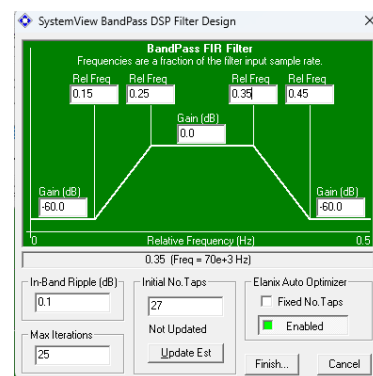


圖 2. Bandpass 理論值設定

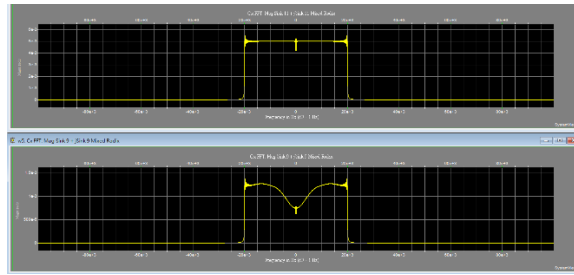


圖 3. 調變前的原始頻譜 vs Bandpass 濾波器後的頻譜(理論值)

可以看出使用理論值所跑出來的圖並不是很正確，所以我們進一步微調數值如下圖。

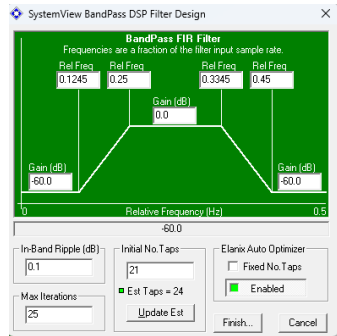


圖 4. Bandpass 濾波器實際值設計

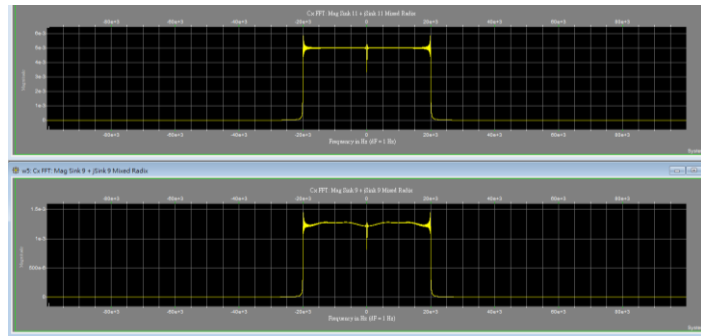


圖 5. 調變前的原始頻譜 vs Bandpass 濾波後的頻譜(實際值)

我們假設 USB 從 f_c (載波頻率) 往右延伸，保留大部分頻率、只斜切邊緣部分，根據計算代表設計的濾波器會在 30kHz 到 40kHz 之間開始逐漸衰減，達成斜切 45 度的效果，圖 6 顯示 LowPass 濾波器參數的設定情況。

開始衰減點 (Rel Freq = 0.15) : $f = 0.15 \times 200k = 30kHz$

完全衰減點 (Rel Freq = 0.2) : $f = 0.2 \times 200k = 40kHz$

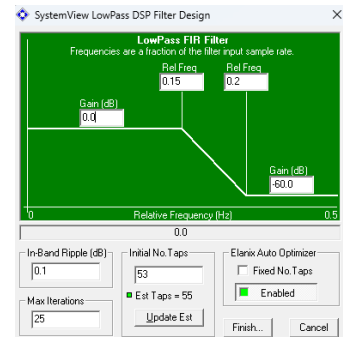


圖 6. LowPass 濾波器參數設定

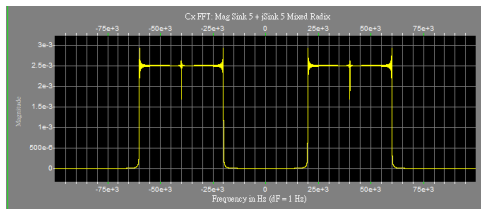


圖 7. 經過升頻的頻譜變化

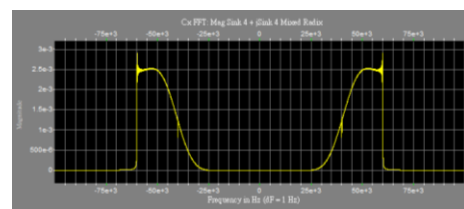


圖 8. Bandpass 濾波器斜切 45 度後的頻譜變化

圖 7 與圖 8 展示了訊號經過 Bandpass 濾波器斜切 45 度後的頻譜變化過程。圖 7 (Sink 5) 是訊號在經過升頻 (上變頻) 後的頻譜，可以看到訊號被搬移到中心頻率 (約 50 kHz) 附近，保留了完整的上、下邊帶。此時整體頻譜仍是對稱的。圖 8 (Sink 4) 則是通過設計為斜率 45 度的帶通濾波器後的頻譜結果，從圖中可以看到一邊的邊帶被部

分削減，頻譜呈現不對稱，形成殘邊帶調變的特徵。圖 7 與圖 8 成功展現了透過適當設計的 Bandpass 濾波器，將傳統的雙邊帶訊號轉換為具備斜切特性的殘邊帶訊號的過程。

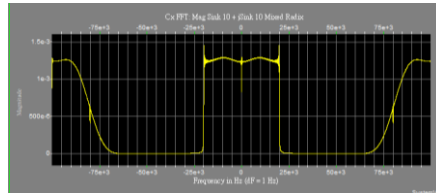


圖 9. 乘法解調後的頻譜

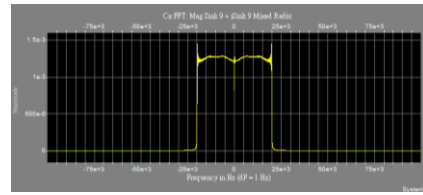


圖 10. 加上低通的頻譜

圖 9 與圖 10 展示了訊號在殘邊帶調變系統中，經過解調與低通濾波器處理後的頻域變化。圖 9 (Sink 10) 是斜切後的 VSB 訊號與載波信號進行乘法解調後的頻譜，可觀察到頻譜從原本偏移的位置摺疊回中心 (0 Hz) 附近，代表高頻調變訊號成功下變頻。然而由於 VSB 是不對稱調變 (只保留部分邊帶)，摺疊後的頻譜仍含有不完全鏡像，產生干擾。

圖 10 (Sink 9) 則是在解調後加上低通濾波器的結果，透過濾除高頻與鏡像成分，只保留 0 Hz 附近的基帶訊號，使頻譜變得**乾淨且平坦**，回復原本的 message 頻率範圍。這說明低通濾波器在 VSB 解調中是關鍵的一步，能有效重建原始訊號。

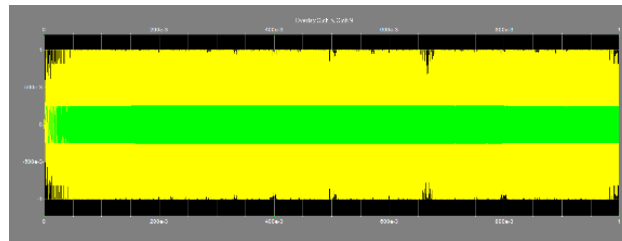


圖 11. 兩組時域訊號的疊加比較

圖 11 顯示 Sink 5 與 Sink 9 的時域波形。綠色波形 (Sink 9) 為解調後訊號，經時間軸壓縮為原來的 1/4 倍，以便與黃色原始訊號 (Sink 5) 對照。可觀察到兩組訊號在形狀上基本一致，代表解調與濾波後的訊號仍保有**原本訊號的調變特性與內容**，只是時間軸上被壓縮 (或展開)，顯示系統在**升頻、濾波與解調後**，仍能**準確重建訊號**，保有原始調變特性，驗證系統保真性與同步性。

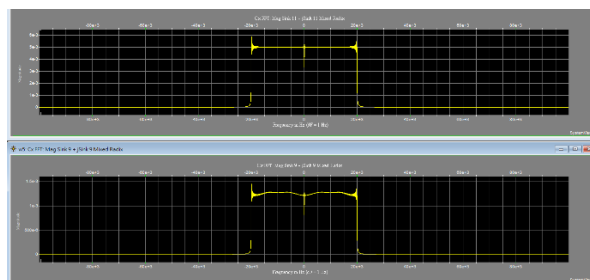


圖 12. 殘邊帶調變處理前後的頻域比較

圖 12 上半部 (Sink 11) 為原始頻譜，顯示訊號集中在 $\pm 20\text{kHz}$ 頻寬內，對稱分布；圖 12 下半部 (Sink 9) 則是訊號經過調變、斜切 45 度的 Bandpass 濾波器，以及解調後的頻譜結果。從比較中可見，濾波後的訊號仍**保留原本頻率分布的形狀與範圍**，雖有些**微能量衰減**，但整體頻譜一致，說明系統成功保留訊號頻域資訊。這驗證殘邊帶調變在降低頻寬使用的同時，也能保有良好的訊號還原度與保真性。

角度調變 (FM/PM 的互換性)

實驗原理:

一、Angle Modulation (AM) 角度調變

是以訊號改變載波的相位或頻率來進行調變。調變後的訊號統一可以表示為：

$$s(t) = A_c \cos[\theta(t)]$$

其中 $\theta(t)$ 為調變後的即時相位，我們定義：

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + \phi(t) \Rightarrow s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$$

A_c 是載波振幅， f_c 是載波頻率， $\phi(t)$ 是訊號調變進來的相位變化。

二、Phase Modulation (PM 相位調變)

在 PM 中，訊號會直接調變相位，調變後的訊號可表示為：

$$\phi(t) = k_p m(t) \rightarrow s_{PM}(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + k_p m(t)]$$

其中 k_p 是相位靈敏度常數，單位是 radians/volt。這表示訊號的振幅 $m(t)$ 會直接改變相位角，而載波頻率仍固定為 f_c 。然而，因為頻率是相位的導數，即

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [2\pi f_c t + k_p m(t)] = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt}$$

所以 PM 的即時頻率與訊號微分成正比，若訊號變化劇烈，頻率變動幅度也會變大。

三、Frequency Modulation (FM 頻率調變)

在 FM 中，訊號則是會直接調變載波的頻率，定義為：

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_i(t)t), \quad f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

其中 k_f 是頻率靈敏度常數，單位為 Hz/volt，表示訊號 $m(t)$ 每變化一單位時，頻率偏移的量。由於相位為頻率的積分，因此

$$\theta(t) = 2\pi \int_0^t f_i(\tau) d\tau = 2\pi \int_0^t [f_c + k_f m(\tau)] d\tau = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$$

所以 FM 訊號為：

$$s_{FM}(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$

表示 FM 是以訊號的積分值調變相位。

PM 與 FM 的轉換關係

類型	相位變化 $\phi(t)$	頻率變化 $f_i(t)$
PM	$k_p m(t)$	$f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt}$
FM	$2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$	$f_c + k_f m(t)$

可推論出：

若將 $m(t)$ 微分後送入 FM 調變器，即可模擬 PM；若將 $m(t)$ 積分後送入 PM 調變器，即可模擬 FM，可透過轉換電路或模組在 FM 與 PM 間切換。

系統設計：

目標在於驗證 PM（相位調變）與 FM（頻率調變）之間的互換性原理。實驗架構如圖所示，分為上下兩組模擬流程：

上半部：積分 → PM 調變器 = FM

下半部：微分 → FM 調變器 = PM

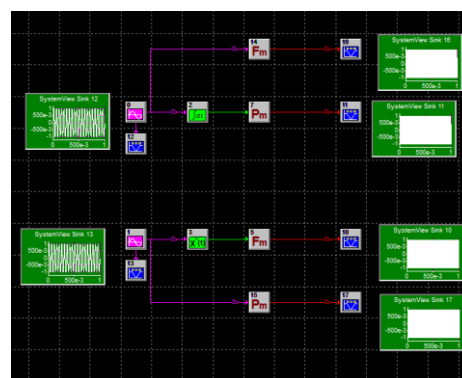


圖 13. 角度調變(PM/FM)實作系統設計圖

上半部模擬步驟：

1. 先經由積分模組 $\int m(t)dt$ (方塊 2)處理
2. 將積分結果送入 PM 調變器(方塊 7)，再將輸出送入示波器(方塊 11)，觀察波形
3. 同時，原始訊號 $m(t)$ 直接送入 FM 調變器(方塊 14)，觀察波形

目的：驗證下式，若兩者波形相同，就代表 FM 可由積分後的 PM 實現。

$$FM(m(t)) \equiv PM\left(\int m(t)dt\right)$$

下半部模擬步驟：

1. 先經由微分模組 $\frac{d}{dt}m(t)$ (方塊 3)處理
2. 將微分結果送入 FM 調變器(方塊 5)，再將輸出送入示波器(方塊 10)，觀察波形
3. 同時，原始訊號 $m(t)$ 直接送入 PM 調變器(方塊 15)，觀察波形

目的：驗證下式，若兩者波形相同，就代表 PM 可由微分後的 FM 實現。

$$PM(m(t)) \equiv FM\left(\frac{d}{dt}m(t)\right)$$

模擬結果：

1. 積分 $\rightarrow PM = FM$

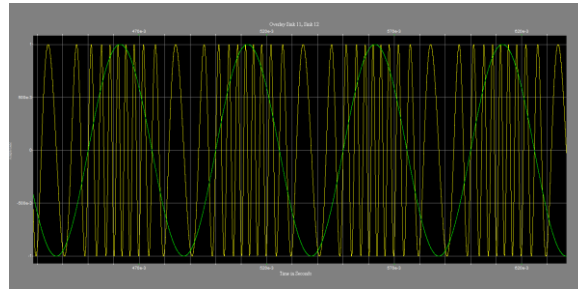


圖 14. FM 訊號(積分法) vs 原始訊號

圖 14 為積分後送入 PM 調變器所產生的波形(黃色)，與原始訊號 $m(t)$ 波形(綠色)做比較，觀察調變後的頻率改變。可觀察到當 FM 訊號(黃色波形)在 $m(t)$ 為正值區域時，載波頻率變高，波形變密； $m(t)$ 為負值區域時，載波頻率變低，波形變疏。完美呈現出 FM 調變特性：輸入訊號 $m(t)$ 控制載波頻率。

2. FM (積分法) 與 FM 比較

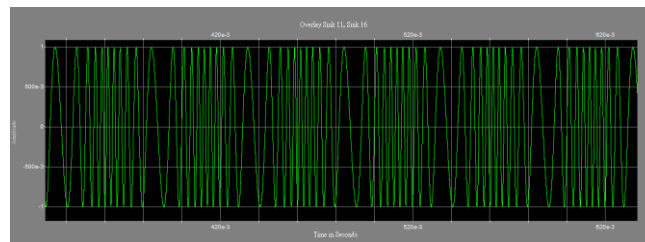


圖 15. FM 訊號(積分法) vs FM 訊號

圖 15 為將訊號積分後送入 PM 調變器的輸出波形，與直接將原始訊號送入 FM 調變器的輸出波形進行疊圖比較。可觀察到，兩條波形在振幅、頻率變化與相位趨勢上幾乎完全一致。在所有時段中，兩條波形的壓縮與展開週期同步，顯示即時頻率完全一致。此結果成功驗證理論公式：

$$FM(m(t)) \equiv PM\left(\int m(t)dt\right)$$

說明透過將訊號積分後進行 PM 調變，即可實現與直接 FM 調變相同的結果，理論與實驗結果完全吻合。

3. 微分 $\rightarrow FM = PM$

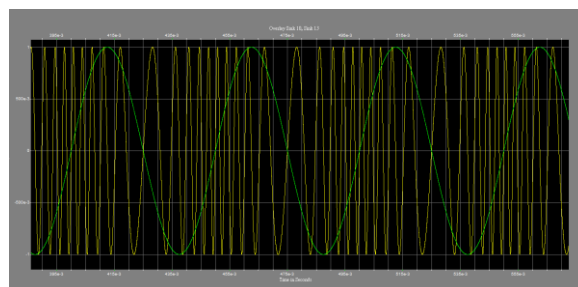


圖 16. PM 訊號(微分法) vs 原始訊號

圖 16 為微分後送入 FM 調變器所產生的波形(黃色),與原始訊號 $m(t)$ 波形(綠色)做比較,觀察調變後的相位偏移改變。可觀察到當 PM 訊號(黃色波形)在 $m(t)$ 為正斜率區間時(綠線往上升),黃色波形**頻率變高**,相位推進**變快**;當 PM 訊號(黃色波形)在 $m(t)$ 為負斜率區間時(綠線往下降),黃色波形**頻率變低**,相位推進**變慢**。完美呈現出 PM 調變的特性:

$$\phi(t) = k_p m(t)$$

也就是訊號 $m(t)$ 直接控制相位的變化速率,訊號的值越大,產生的**相位偏移也越大**。

4. PM (微分法) 與 FM 比較

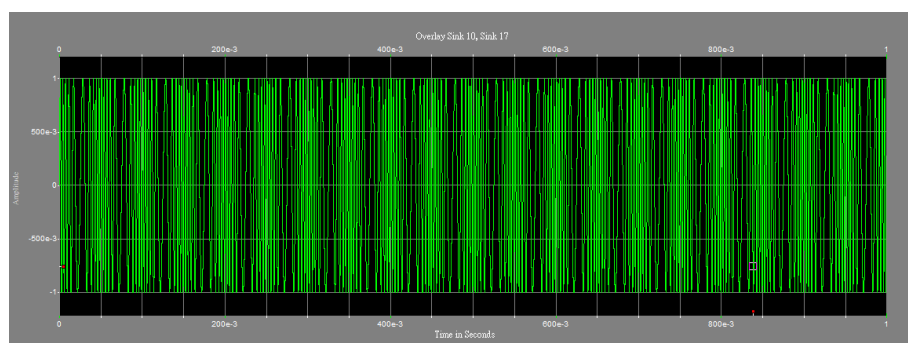


圖 17. PM 訊號(微分法) vs PM 訊號

圖 17 為將訊號 $m(t)$ 微分後送入 FM 調變器所產生的輸出波形,與直接將 $m(t)$ 輸入 PM 調變器所產生的輸出波形所做的疊圖比較。兩條波形在相位變化節奏、頻率快慢、振幅特性上高度一致。無論是高頻壓縮區域還是低頻展開區域,波形幾乎完全重合,整體波形輪廓一致。此結果成功驗證理論公式:

$$PM(m(t)) \equiv FM\left(\frac{d}{dt}m(t)\right)$$

說明若將訊號 $m(t)$ 先微分後進行 FM 調變,其輸出結果與直接進行 PM 調變完全**等效**,理論與實驗結果完全吻合。

角度調變 (FM/PM 解調變)

實驗原理:

角度調變是將類比訊號 $m(t)$ 改變載波訊號的相位或頻率，分為兩類：

一、Frequency Modulation (FM 頻率調變)

$$s_{FM}(t) = A_c \cos \left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right)$$

調變的是載波的「瞬時頻率」，因此相位是 $m(t)$ 的積分。

FM 解調流程 → $s(t)$ → 微分 → 整流 → 低通 → DC Block → $m(t)$

1. 對 FM 訊號微分

$$\frac{d}{dt}s(t) = -A_c (2\pi f_c + 2\pi k_f m(t)) \sin \left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int m(t) dt \right)$$

2. 絕對值整流器（取包絡），透過類似 AM 的處理方式（包絡線與訊號強度正比）。
3. 低通濾波器（LPF），去除高頻載波，留下類比訊號 $m(t)$ 。
4. 去除高頻載波，留下類比訊號 $m(t)$ ，去除平均偏移成分。
5. 解調結果，得到 $m(t)$ 。

二、Phase Modulation (PM 相位調變)

$$s_{PM}(t) = A_c \cos (2\pi f_c t + k_p m(t))$$

調變的是載波的「相位」，相位與訊號 $m(t)$ 成正比。

PM 解調流程 → $s(t)$ → 微分 → 整流 → 低通 → 積分還原出 $m(t)$

1. 對 PM 訊號微分

$$\frac{d}{dt}s(t) = -A_c \left(2\pi f_c + k_p \frac{dm(t)}{dt} \right) \sin (2\pi f_c t + k_p m(t))$$

2. 整流（取絕對值或平方），包絡會和 $\frac{dm(t)}{dt}$ 成正比。
3. 低通濾波器，去除高頻分量，保留 baseband 頻率成分。
4. DC Block，去除直流分量，避免積分時產生漂移。
5. 積分器，將微分後的 $m'(t)$ 積分還原成 $m(t)$ 。

系統設計：

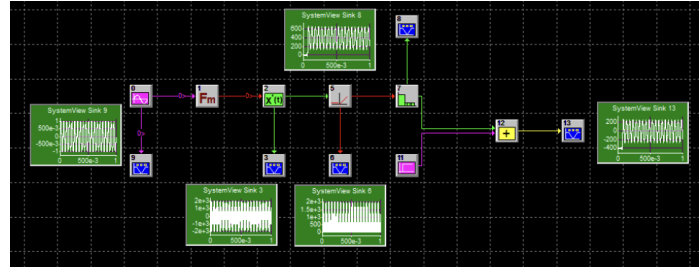


圖 18. FM 訊號的解調流程圖

圖 18 為 FM 訊號的解調流程圖，首先由訊號產生器產生 $m(t)$ ，接著經過 **FM 調變器**，輸出為： $s_{FM}(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$ ，即頻率隨 $m(t)$ 而變的載波訊號。再經過**微分器**，計算 $\frac{d}{dt} s_{FM}(t)$ ，將 FM 的頻率變化轉換為振幅變化，經過**半波整流**後通過**低通濾波器**，用以濾除高頻載波成分，保留 baseband 的 $m(t)$ 信息，最後經過**DC 補償**來偏移校正信號。

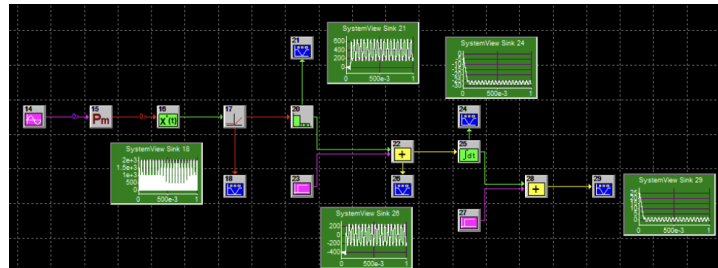


圖 19. PM 訊號的解調流程圖

圖 19 為 PM 訊號的解調流程圖，首先由訊號產生器產生 $m(t)$ ，接著經過 **PM 調變器**，輸出為： $s_{PM}(t) = A_c \cos [2\pi f_c t + k_p m(t)]$ ，其中相位與訊號 $m(t)$ 成正比，再經過**微分器**對 $s_{PM}(t)$ 做時間微分，轉換為頻率變化的形式，讓相位訊息變成幅度訊息，經過半波整流後通過**低通濾波器**，用以濾除高頻載波成分，保留 baseband 成分，接著經過**第一次 DC 補償**來偏移校正信號，最後一步**對訊號積分**，還原出原本的 $m(t)$ ，最終經過**第二次 DC 補償**來偏移校正信號。

其中，我們使用相對頻率的公式來計算出解調所需低通濾波器中所填的 Rel Freq:

$$Relative\ Frequency = \frac{f_{實際頻率}}{f_s}$$

取樣頻率 $f_s = 200\text{kHz} = 200000\text{Hz}$ ，baseband 訊號是由 PM 解調來的，訊號頻率是 20 Hz 左右，我們想要通帶截止 $f_{pass} = 30\text{Hz}$ 、阻帶起點 $f_{stop} = 50\text{Hz}$ ，代入公式：

- 通帶截止 Rel Freq：

$$\frac{30}{200000} = 0.00015$$

- 阻帶起點 Rel Freq：

$$\frac{50}{200000} = 0.00025$$

模擬結果：

1. FM 解調

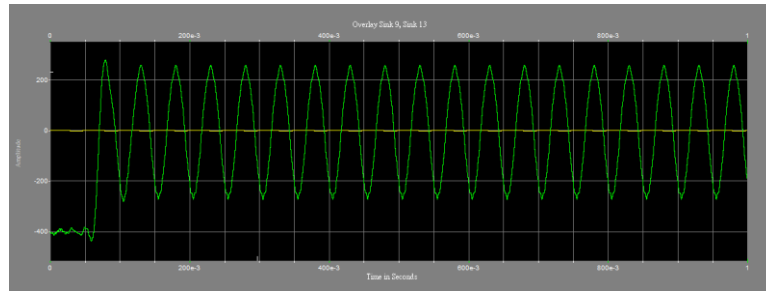


圖 20. Sink 9 與 Sink 13 的時域波形疊合

綠色波形的頻率與振幅都基本一致，代表解調後的訊號與原訊號非常相似。圖 20 顯示在解調流程（FM）中，濾波器與處理方式設定正確。

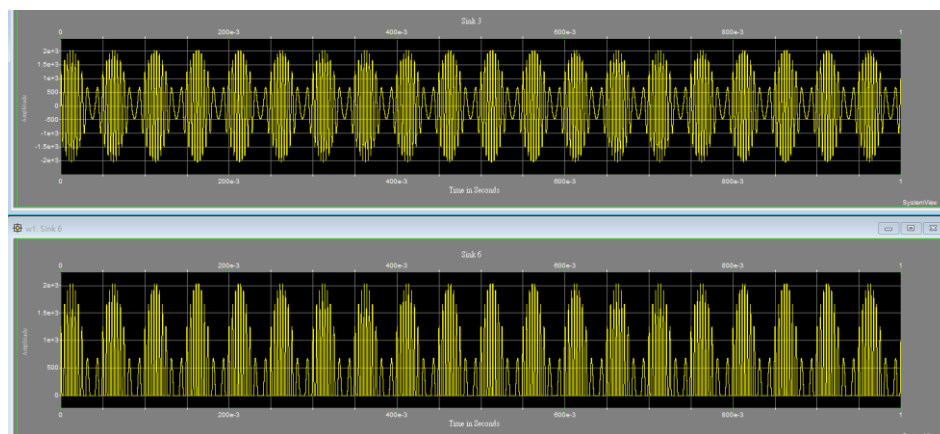


圖 21. Sink 3 與 Sink 6 的時域波形

Sink 3 顯示出完整的 FM 調變波，具有正負值與頻率變化。Sink 6 則是經過**半波整流**後的版本，保留訊號**正半部**，有助於後續包絡線提取、低通濾波與訊號還原。圖 21 明確呈現半波整流的效果，這樣的處理在角度調變解調中很常見，整流可以協助將角度變化轉為振幅變化，再透過濾波得到原始 baseband 訊號。

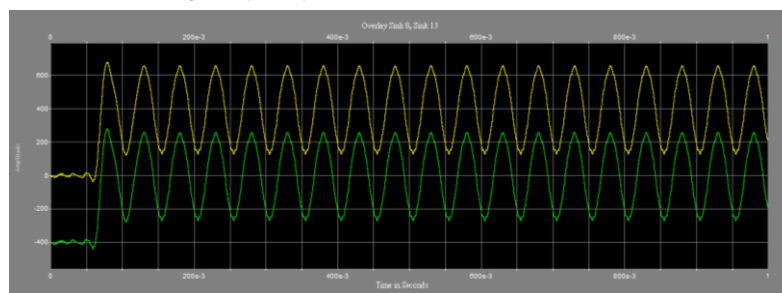


圖 22. Sink 8 與 Sink 13 的疊合波形

Sink 8 是整流後保留**DC 成分**的訊號，波形偏上。Sink 13 波形整體往下平移約 400 單位，將訊號**拉回以 0 為中心**，更接近原始 baseband 訊號，圖 22 展示了 DC 補償的實際效果與必要性。所謂 DC 補償，是為了**去除**由於整流或解調過程所產生的**直流偏移量**，使訊號回到對稱且以 0 為中心的波形。此步驟在 FM/PM 解調流程中非常重要，有助於還原真實的調變訊號形狀。

2. PM 解調

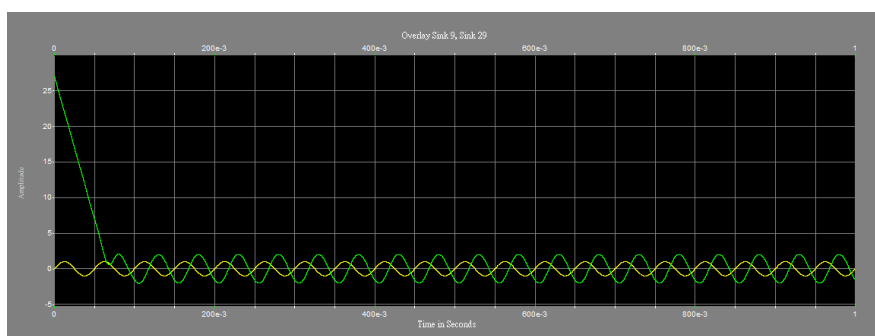


圖 23. Sink 9 與 Sink 29 的疊合波形

圖 23 中，初期偏移是由於 PM 解調中需要積分器還原相位訊號，而積分的初值會累積偏移，但過濾後會趨於穩定，低通濾波器已成功消除高頻雜訊。結果顯示 PM 解調流程設計正確，輸出波形能有效重建基帶訊號，證明相位調變訊號可透過本解調流程還原。

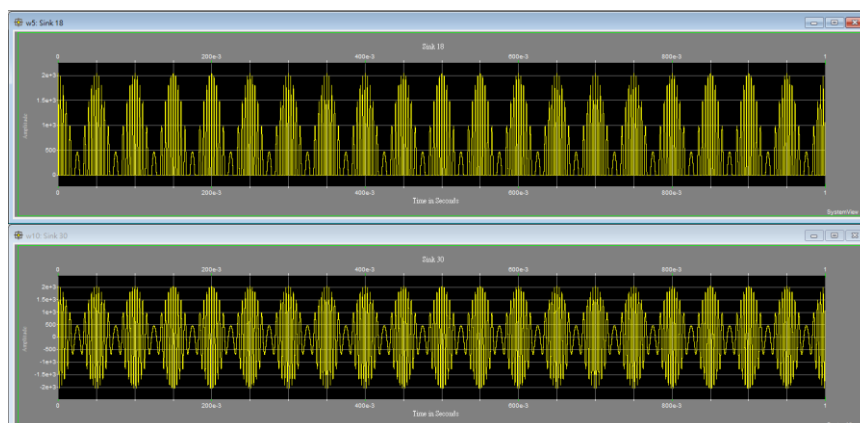


圖 24. Sink 18 與 Sink 30 的時域波形

圖 24 主要呈現的是經過半波整流前後的訊號比較，將原調變訊號的負半週去除，使訊號成為**全正值**。這樣的操作是為了後續使用低通濾波器提取出訊號包絡，進而完成解調。Sink 30 成功完成了整流步驟，是解調鏈中的關鍵轉換環節。

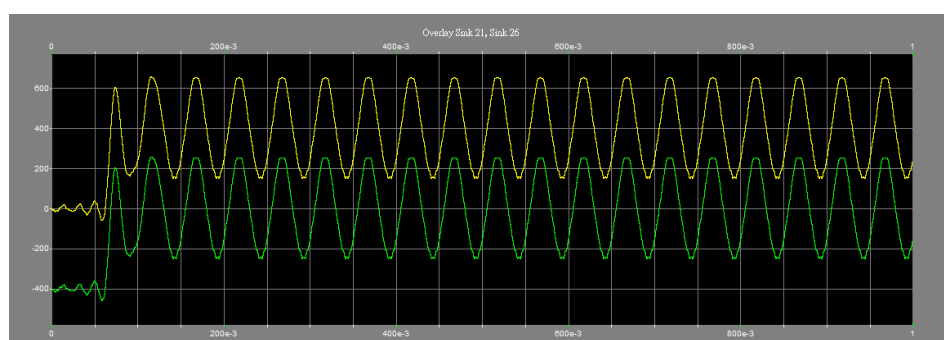


圖 25. Sink 21 與 Sink 26 疊合的時域波形

圖 25 展示的是經過半波整流與低通濾波後進行**第一次 DC 補償**的處理成效。可看到 Sink 26 經過 DC 補償-400 處理後，波形明顯往下修正。整體中心位置貼近 0，對稱性改善，這樣的波形更接近原始調變訊號，適合用來進行後續如積分、訊號還原等操作。

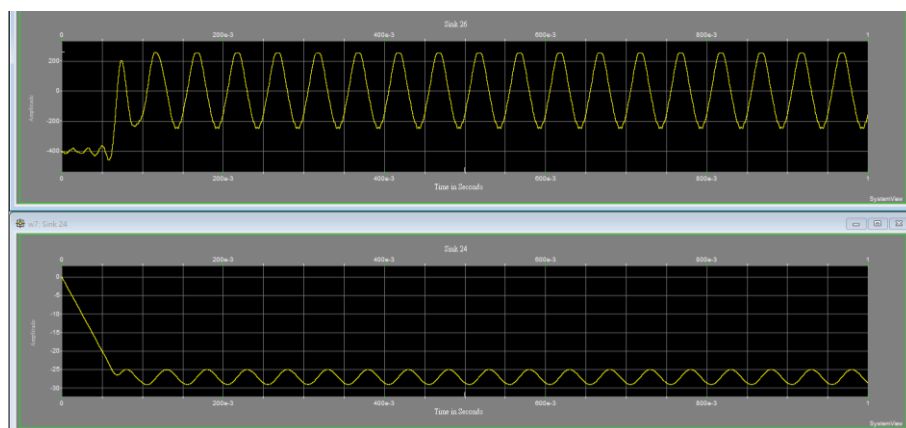


圖 26. Sink 26 與 Sink 24 的波形對比

圖 26 說明在角度調變 (PM) 解調過程中**積分器**的作用。由 Sink 26 可以看出波形仍是高頻成分為主 (但已經偏移修正至接近 0)，這是 PM 解調過程中經過整流與濾波後的訊號，其振幅與原訊號強相關，為了還原 $m(t)$ ，需透過積分才能回復為原始訊號形狀。由 Sink 24 可看出積分後波形變得**平滑且低頻**，形狀趨近於類似餘弦或類似原訊號，可以明顯觀察到一開始的直流偏移導致曲線從**高值開始**，但**後續穩定**，頻率與原訊號相當一致，且相位趨於穩定，是解調後的近似 $m(t)$ 。

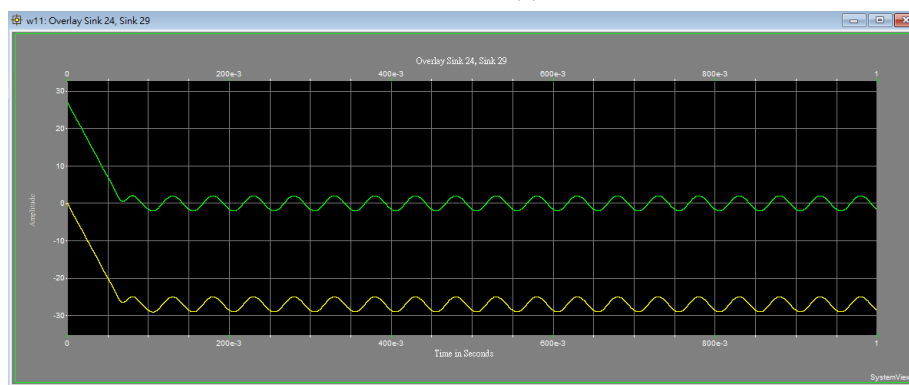


圖 27. Sink 24 與 Sink 29 的疊合圖

在 PM 解調中，經過**微分與低通濾波**後，我們會取得類似 $\dot{m}(t)$ 的訊號，接著進行**積分**以回復為 $m(t)$ 。但積分過程會造成 **DC 偏移**，需進行 DC 補償。圖 27 展示 PM 解調中**第二次 DC 補償**的必要性與效果。儘管經過積分後已還原訊號形狀，但因積分會累積偏移誤差。將 Sink 24 補正 +27，使訊號中心值回歸 0，使解調結果準確還原出原始調變訊號 $m(t)$ 。