Thm 任何方陣必可經ERO為上三角

$A=\begin{bmatrix}x&x&x&x\\x&x&x&x\\x&x&x&x\\x&x&x&x\end{bmatrix}\rightarrow B=\begin{bmatrix}x&x&x&x\\0&x&x&x\\0&0&x&x\\0&0&0&x\end{bmatrix}\rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ I

上半部可消掉成0

任何非奇異方陣必可經ERO變為單位矩陣

$d(A)\neq 0 \Rightarrow$ pivot皆不為0 $\Rightarrow r(A)=r(B)=4 \Rightarrow d(B)\neq 0$

基本列運算應用 3-3

Defn. 对I執行一次ERO稱基本矩陣E_0 Elementary matrix

Thm. 若 $\begin{matrix}A\\I\end{matrix}\xrightarrow{ERO}\begin{matrix}B\\E\end{matrix}\Rightarrow EA=B$

擴展

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{H_{12}}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\xrightarrow{H_{12}}\begin{bmatrix}b_1&b_2&b_3\\a_1&a_2&a_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{H_3(k)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&k\end{bmatrix}\qquad A\xrightarrow{H_3(k)}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\kc_1&kc_2&kc_3\end{bmatrix}$$

$$\underset{I}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\xrightarrow{H_{32}(k)}\underset{E_0}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&k&1\end{bmatrix}}\qquad A\xrightarrow{H_{32}(k)}\underset{B}{\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1+kb_1&c_2+kb_2&c_3+kb_3\end{bmatrix}}$$

Note 使用ERO計算反矩陣 (2.3階用伴隨矩陣)

$$d(A)\neq 0 \Rightarrow A\xrightarrow[E_1]{ERO_1}\xrightarrow[E_2]{ERO_2}\xrightarrow[E_3]{ERO_3}\xrightarrow[E_4]{ERO_4} I$$

$E_1A \quad E_2E_1A \quad E_3E_2E_1A \quad E_4E_3E_2E_1A$

$\Rightarrow (E_4E_3E_2E_1)A=I$

$\Rightarrow A^{-1}=E_4E_3E_2E_1$ 適合高階計算反矩陣

eg. 求A之反矩陣A^{-1}

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-2\\3&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[②H_{31}(-3)]{①H_{21}(-2)}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{③H_{32}(-4)}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[⑤H_{12}(1)]{④H_{13}(1)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

$(E_5E_4E_3E_2E_1)A=I \Rightarrow (E_5E_4E_3E_2E_1I)A=I$

$\Rightarrow (H_{12}(1)\,H_{13}(1)\,H_{32}(-4)\,H_{31}(-3)\,H_{21}(-2)\,I)A=I$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\5&-4&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}6&-4&1\\-2&1&0\\5&-4&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}4&-3&1\\-2&1&0\\5&-4&1\end{bmatrix}=A^{-1}$$ 得解

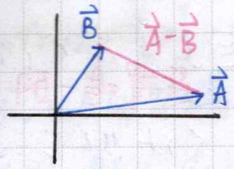
Thm 基本列/行運算,其反運算為 ☆ ERO之反運算仍為ERO

$(H_{ij})^{-1}=H_{ij}$; $(H_i(k))^{-1}=H_i(1/k)$; $(H_{ij}(k))^{-1}=H_{ij}(-k)$

Thm 非奇異方陣必可分解為一連串基本矩陣相乘

$E_5^{-1}(E_5E_4E_3E_2E_1A=I)\Rightarrow E_4E_3E_2E_1A=E_5^{-1}I \Rightarrow A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}$

Defn. $\|x-y\| = \mathrm{dist}(x,y)$



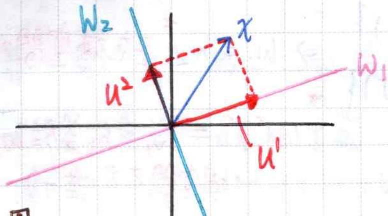
$|\vec{A}-\vec{B}| = \mathrm{dist}(\vec{A},\vec{B})$

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ 內積开根号

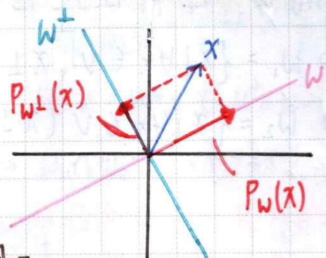
Defn. 向量空間V及其子空間W_1，必有唯一之$W_2 = W_1^{\perp}$，而任何$x\in V$有下式：

$x = u^1+u^2$，$u^1\in W_1$ & $u^2\in W_2$；$\langle u^1,u^2\rangle = 0$，此時便稱$u^1$為$x$向$W_1$之**正交投影**

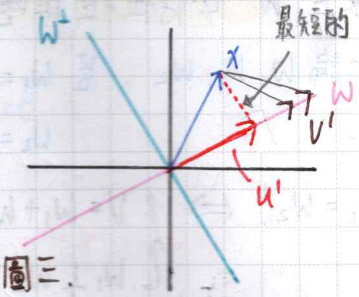
記作 $P_{W_1}(x) = u^1$ 圖一.



圖一.



圖二.

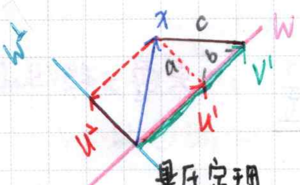


圖三.

Thm. 向空V及其子空間W，任何$x\in V$有：$x = P_W(x) + P_{W^{\perp}}(x)$ 圖二.

Thm. 承上，若$P_W(x) = u^1$，則任何$v^1\in W$有：$\|x-u^1\| \le \|x-v^1\|$ 圖三.

$$\|\overset{c}{x-v'}\|^2 - \|\overset{a}{x-u'}\|^2 = \langle x-v', x-v'\rangle - \langle x-u', x-u'\rangle$$



畢氏定理.

$$= \cancel{\langle x,x\rangle} - \langle x,v'\rangle - \langle v',x\rangle + \langle v',v'\rangle - \cancel{\langle x,x\rangle} + \langle x,u'\rangle + \langle u',x\rangle - \langle u',u'\rangle$$

$$= -\langle u',v'\rangle - \langle v',u'\rangle + \langle v',v'\rangle + \langle u',u'\rangle + \cancel{\langle u',u'\rangle} - \cancel{\langle u',u'\rangle}$$

$$= \langle v',v'\rangle - \langle v',u'\rangle - \langle u',v'\rangle + \langle u',u'\rangle = \langle v'-u', v'-u'\rangle$$

$$= \|v'-u'\|^2 \ldots b \ge 0$$

$\langle x,u'\rangle = \langle u'+u^2, u'\rangle = \langle u',u'\rangle = \langle u',x\rangle$

$\langle x,v'\rangle = \langle u'+u^2, v'\rangle = \langle u',v'\rangle$；$\langle v',x\rangle = \langle v', u'+u^2\rangle = \langle v',u'\rangle$

└ u^2和v'任何皆內積0

正交基底與保長矩陣 2-6

Defn. 对$\{x^1,\ldots x^m\}$若有以下性質則稱其為正交(單範)集 $\langle x^i,x^j\rangle \begin{cases} =0 & i\ne j \\ \ne 0 & i=j \\ =1 & i=j \end{cases}$

eg. $\langle x,x\rangle = 1 \Rightarrow \|x\| = 1$，$x$是單範向量

正交 Orthogonal
正交單範 Orthonomal

Thm. 正交集 ⇒ 線性無关集　☆正交必定LID，但LID未必正交

正交集$=\{x^1,x^2,\ldots x^m\}$為 orth set　從 $c_1x^1+c_2x^2+\ldots+c_mx^m = 0$ 出發

$\Rightarrow \langle x^1, c_1x^1+c_2x^2+\ldots+c_mx^m\rangle = 0$　[0向量和任向量內積是0]

$\Rightarrow c_1\langle x^1,x^1\rangle + c_2\underline{\langle x^1,x^2\rangle} + \ldots + c_m\underline{\langle x^1,x^m\rangle} = 0$

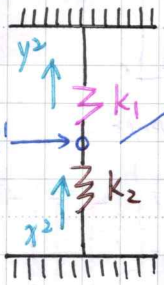
∵ 正交集：任意2向量內積為0 $\Rightarrow c_1\langle x^1,x^1\rangle + 0 + 0\ldots + 0 = 0$

$\Rightarrow$ └且自己跟自己內積不為0 $\Rightarrow c_1\underbrace{\langle x^1,x^1\rangle}_{\ne 0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_1=c_2=\ldots=c_m=0$

$\Rightarrow \{x^1,x^2\ldots x^m\}$ 為LID.

特徵理論角対角化

特徵現象 ☆ 因重点在方向,而不是長度 ⇒ 排除零向量



⇒ 僅方陣映射後仍在相同維度

系統会改變輸入向量 x 的方向,且若相同維度之歐式向量 x, y 間具線性关係 ⇒ 必存在 matrix A, $Ax = y$.

☆ 若輸入在垂直方向 x^2, 輸出 y^2 也在垂直方向 系統無法改變的方向

⇒ 系統之不變方向

↑ invariant direction 系統之不變方向中的向量稱為系統之特徵向量 (eigenvector)

$Ax = \lambda x$ (同方向,只差倍數長短),其中 x 為系統之特徵向量

⇒ $(Ax - \lambda x) = 0$ ⇒ $(A - \lambda I)x = 0$ 又因零向量不具方向性 ⇒ 討論 eigenvetor 要排除

$x \neq 0$ ⇒ $d(A - \lambda I) = 0$ 奇異方陣

Def. 对方陣 $A \in C^{n\times n}$, λ 為特徵值, x 為特徵向量 僅方向性

(1) $\phi_A(\lambda) = d(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda$ (2) $(A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow x$

Note

$$d(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = \underbrace{-(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)}_{=\phi_A(\lambda)}$$ A之特徵多項式

$d(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, -2, 3$

② $\phi_A(\lambda)$ 為 n 次多項式 ⇒ 複數系中,重根重複計算 ⇒ matrix A 有 n 个特徵值

$= \underbrace{-(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)}_{\text{対角線}} + 9 - 2 + 3(\lambda-1) + 3(\lambda-2) - 2(\lambda+1)$

③ 僅対角線相乘項会有 λ^n & λ^{n-1}

$\lambda = 1 \Rightarrow (A - \lambda I)x = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

計算 $[x]$ 的維度 (null space)

$\dim[N(A - \lambda I)] = 3 - r(A - \lambda I) = 3 - 2 = 1$

$\lambda = 2 \Rightarrow (A - \lambda I)x = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix}$

每个特徵值対应不同特徵向量

$\lambda = 3 \Rightarrow (A - \lambda I)x = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

☆ 解 $(A - \lambda I)x = 0$ 應得到 $N(A - \lambda I)$ 之基底!!

$\dim[N(A - \lambda I)]$ 即為 λ 对應的線性無關特徵向量數~

Thm. 若常數 μ 為 $\phi_A(\lambda) = 0$ 之 k 重根,則特徵值 μ 最多对应 k 个 LID 特徵向量.

★多項式觀念　$f(t)=0t^2+0t+3$ ⇒ 零次多項式　$f(t)=0t^2+0t+0$ ⇒ 零多項式

Def. 非零多項式 $\underbrace{f_1(t)\sim f_m(t)}_{\text{已知}}$，取 $\underbrace{W(t)}_{\text{所有任意集合}}=\{g(t)\mid g(t)=\sum_{i=1}^{m}\underbrace{h_i(t)}_{\text{未知}}f_i(t),\ h_i(t)\text{為任意多項式}\}$

1. $g(t)=h_1(t)f_1(t)+h_2(t)f_2(t)+\dots+h_m(t)f_m(t)$　① $h_1=1,\ h_2\sim h_m=0 \Rightarrow g(t)=f_1(t)$
可　　$h_2=1,\ h_1,h_3\sim h_m=0 \Rightarrow g(t)=f_2(t)$

2. $g_1(t)\in W \Rightarrow g_1(t)=h_1(t)f_1(t)+\dots+h_m(t)f_m(t)$
$g_2(t)\in W \Rightarrow g_2(t)=\tilde{h}_1(t)f_1(t)+\dots+\tilde{h}_m(t)f_m(t)$
$\Rightarrow g_1(t)\pm g_2(t)=(h_1(t)\pm\tilde{h}_1(t))f_1(t)+\dots+(h_m(t)\pm\tilde{h}_m(t))f_m(t)$ 符合 $W(t)$ 形式

3. $W(t)g_1(t)=W(t)h_1(t)f_1(t)+\dots+W(t)h_m(t)f_m(t)$

4. $\deg[f_1(t)]\ge\deg[d(t)] \Rightarrow f_1(t)=d(t)\cdot w(t)+r_1(t) \Rightarrow r_1(t)=f_1(t)-d(t)w(t)$
$r_1(t)$ 餘式次方一定比 $d(t)$ 非零多項式低 ⇒ $r_1(t)$ 是零多項式
$\Rightarrow f_1(t)=d(t)\cdot w(t)+0 \Rightarrow$ $d(t)$ 為 $f_1(t)$ 之因式 ⇒ $d(t)$ 為 $f_1(t)\sim f_m(t)$ 之公因式
若 $w(t)$ 為 $f_1(t)\sim f_m(t)$ 之公因式 ⇒ $W(t)=h_1(t)f_1(t)+\dots+h_m(t)f_m(t)$
$=h_1(t)g_1(t)w(t)+\dots+h_m(t)g_m(t)w(t)$
$=(h_1(t)g_1(t)+\dots+h_m(t)g_m(t))\,w(t)$
↓
$w(t)$ 為 $d(t)$ 之因式

Thm 承上，則恆有 1. $\forall i\ (f_i(t)\in W(t))$
2. $g_1(t)\in W$ & $g_2(t)\in W \Rightarrow g_1(t)\pm g_2(t)\in W$
3. $g(t)\in W \Rightarrow w(t)g(t)\in W$
4. 取 $d(t)$ 為 W 中次數最低之非零多項式，則 $d(t)$ 必為 $f_1\sim f_m$ 之最大公因式
5. $f_1\sim f_m$ 之最大公因式必在 W 中

Thm. 非零多項式 $f_1(t)\sim f_m(t)$，若 $d(t)$ 為其最大公因式，則必存在多項式 $h_1(t)\sim h_m(t)$ 而有：
$d(t)=h_1(t)f_1(t)+\dots+h_m(t)f_m(t)$；若 $f_1\sim f_m$ 互質則必有 $d(t)=1=h_1(t)f_1(t)+\dots$ "

Thm. 對 $A_1\sim A_m$ 均為 $C^{n\times n}$ 中之非零方陣，且 $A_1+A_2+\dots+A_m=I$，且 $i\ne j \Rightarrow A_jA_i=0$
則任何 i 有① $A_i^2=A_i$ 並且② $C^n=R(A_1)\oplus R(A_2)\oplus\dots\oplus R(A_m)$
① $I=A_1+A_2+\dots+A_m \Rightarrow A_1I=A_1(A_1+A_2+\dots+A_m) \Rightarrow A_1A_1+\cancel{A_1A_2}+\dots+\cancel{A_1A_m}=A_1^2$
② 已知

2. $\forall y\in C^n \Rightarrow Iy=(A_1+A_2+\dots+A_m)y \Rightarrow y=\underbrace{A_1y}_{\text{屬於}R(A_1)\text{的向量}}+A_2y+\dots+A_my \Rightarrow C^n=R(A_1)+R(A_2)+\dots+R(A_m)$
II. 任取 $y^1\in R(A_1)\sim y^m\in R(A_m)$，則 $(y^1=A_1x^1,\dots,y^m=A_mx^m)$
若 $0=y^1+y^2+\dots+y^m=A_1x^1+A_2x^2+\dots+A_mx^m$ 同乘 $A_1 \Rightarrow A_1\cdot0=A_1(A_1x^1+A_2x^2+\dots+A_mx^m)$
$\Rightarrow 0=\underbrace{A_1^2}_{①}x^1=A_1x^1=y^1 \Rightarrow y^1=y^2=\dots=y^m=0 \Rightarrow R(A_1)\cdot R(A_2)\dots R(A_m)$ 獨立

$V=W_1\oplus W_2\ \begin{cases}V=W_1+W_2\\ W_1\ \&\ W_2\text{ 獨立}\end{cases}$