Defn 針對 A,B 取 $AB = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^k \end{bmatrix} [b^1\ b^2 \dots b^n] = \begin{bmatrix} (a^1,b^1) & (a^1,b^2) & \dots & (a^1,b^n) \\ (a^2,b^1) & (a^2,b^2) & \dots & (a^2,b^n) \\ \vdots & & & \\ (a^k,b^1) & (a^k,b^2) & \dots & (a^k,b^n) \end{bmatrix} \in C^{k\times n}$

對應分量相乘再相加
向量分量 a.b 必須要一樣多

Thm a的向量分量為行數, b的向量分量為列數

$A \in C^{k\times m}$ & $B \in C^{m\times n} \Rightarrow AB \in C^{k\times n}$　A行數必須與B列數相同

k個列.m個行　m個列.n個行

Thm 承上, 任何 $x \in C^n$ 有 $A(Bx) = (AB)x$ ← 我們定義AB的原因

Note: $AB = 0 \not\Rightarrow A=0$ or $B=0$, $BA=0$ 皆未必　☆線性系統連續作用后仍為線性系統

eg.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Thm 承上, $AB = C$ 而 $C = [c_{ij}]_{k\times n}$ 則 $c_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lj}$

$$c_{ij} = (a^i, b^j) = \left([a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{im}], \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} \right) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$$

a的第i列　b的第j行

Thm 承上, 恆有 $AB = A[b^1\ b^2 \dots b^n] = [Ab^1\ Ab^2 \dots Ab^n]$　☆把右邊矩陣寫成行向量

Note:

$$Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}}_{\text{列向量}} \overset{\text{行向量}}{x} = \begin{bmatrix} (a^1,x) \\ (a^2,x) \\ \vdots \\ (a^m,x) \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\underbrace{\begin{matrix} (a^1,b^1) \\ (a^2,b^1) \\ \vdots \\ (a^k,b^1) \end{matrix}}_{Ab^1} \begin{matrix} (a^1,b^2) \\ (a^2,b^2) \\ \vdots \\ (a^k,b^2) \end{matrix} \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \\ \dots \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} (a^1,b^n) \\ (a^2,b^n) \\ \\ (a^k,b^n) \end{matrix}}_{Ab^n} \right]$$

Thm 一般矩陣沒有交換律 $AB \neq BA$, 但有結合律 $A(BC) = (AB)C$

$$A(BC) = A(B[c^1\ c^2 \dots c^n]) = A[Bc^1\ Bc^2 \dots Bc^n] = [A(Bc^1)\ A(Bc^2) \dots A(Bc^n)]$$

$$= [(AB)c^1\ (AB)c^2 \dots (AB)c^n] = (AB)[c^1\ c^2 \dots c^n] = (AB)C$$

Defn $I=[e^1\ e^2\ e^3 \dots e^n]$ 為n階單位矩陣

Thm 任何A有 $AI=A$，任何 $x\in C^n$ 有 $Ix=x$

$$AI=A[e^1\ e^2 \dots e^n]$$
$$=[Ae^1\ Ae^2 \dots Ae^n]$$
$$=[a^1\ a^2 \dots a^n]=A$$

$$IA=((IA)^T)^T=(A^TI^T)^T=(A^TI)^T$$
$$=(A^T)^T=A$$

反过來說

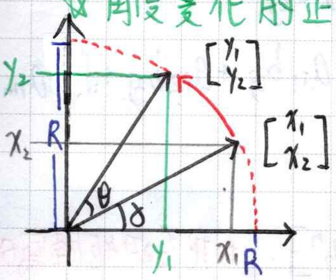
Thm 对 $A\in C^{n\times n}$：任何x有 $Ax=x \Rightarrow A=I$ 成立!!

proof: 任何x有 $Ax=x \Rightarrow$ 任何x有 $Ax=Ix \Rightarrow$ 任何x有 $Ax-Ix=0$

$\Rightarrow$ 任何x有 $(A-I)x=0 \Rightarrow A-I=0 \Rightarrow A=I$

Thm 平面上逆時針旋轉角度θ之矩陣 $A=?$ $[A]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ 求A?

☆角度變化的正方向為逆時針



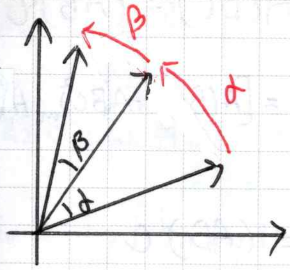
$$y_1=R\cos(\theta+\alpha)=\underline{R}[\cos\theta\,\underline{\cos\alpha}-\sin\theta\,\underline{\sin\alpha}]$$
$$=\cos\theta\cdot x_1-\sin\theta\, x_2 \checkmark$$
$$y_2=R\sin(\theta+\alpha)=\underline{R}[\sin\theta\,\underline{\cos\alpha}+\cos\theta\,\underline{\sin\alpha}]$$
$$=\sin\theta\, x_1+\cos\theta\, x_2 \checkmark$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cdot x_1-\sin\theta x_2\\ \sin\theta x_1+\cos\theta x_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

(逆時針旋轉矩陣)

◎ 連續旋轉時 (先逆β度，再逆α度)

BA = AB 滿足交換律



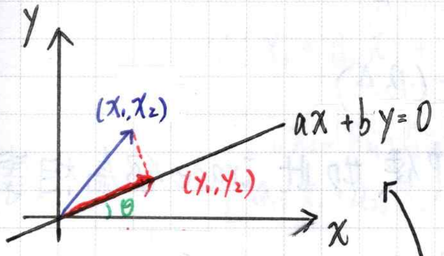
$$BA=\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\end{bmatrix}$$

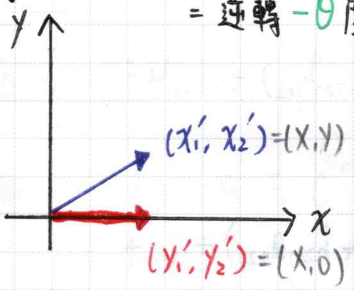
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n \text{旋轉 n 次 }\theta\text{ 度} = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

③ 在平面上，能夠把向量 (x_1, x_2) 投影在 $ax+by=0$ 上，變成向量 (y_1, y_2) 的矩陣 A 為何？ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$

①


② 為解題，先把它順轉 θ 度 = 逆轉 $-\theta$ 度

③


由③可知 $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$ x座標不變 y座標變0

由②可知 $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

④ 逆轉 θ 度回去 $= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

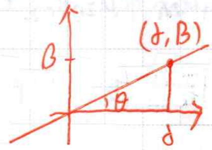
由④可知 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}$

整理可得

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

※高中所學



$\cos\theta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$; $\sin\theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

又由題可知，$(b, -a)$ 必在 $ax+by=0$ 上

其中 $\cos\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\theta = \dfrac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 代入

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{bmatrix} \#$$

行列式源起 (determinent) 03

目的為解 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{b}$

行列式可被視為一个函数 $d(x)$
定義域為一方陣 $C^{n\times n}$
值域為一常数

↳ 加減消去法得　創造行列式來規則表示 ⇒ **克萊姆法則**

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{d(b, a^2)}{d(a^1, a^2)}$$

向量b取代第1行列式 a
行列式

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_2a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{d(a^1, b)}{d(a^1, a^2)}$$

向量b取代第2行列式 a

A = 係数矩陣　b = 非齊次向量
- $b=0$ 齊次方程組 (homogeneous)
- $b\neq 0$ 非齊次方程組

Defn 針对 $A = [a^1\ a^2 \dots a^n] \in C^{n\times n} \to C$ (從n階方陣變常数) 的函數 d，記如下：$d(A)$ 或 $d(a^1\ a^2 \dots a^n)$。若具備以下性質則稱之為行列式 (determinent)：

一切行為起源
1. $Kd(\dots, a^i, \dots) = d(\dots, Ka^i, \dots)$　任一行的公因式可提出
2. $d(\dots, a^i, \dots, a^j, \dots) = d(\dots, a^i \dots, a^i + a^j, \dots)$　任2行相加对函数d值不影響
   (某一行)
3. $d(I) = 1$，I為單位矩陣

Thm 由 Crammer's Rule 證明可推得以下任何 $b \in C^n$ 恒有：

↓接續
① $d(A) \neq 0 \Leftrightarrow Ax = b$ 中 x 存在唯一解
② $d(A) = 0 \Leftrightarrow Ax = b$ 中 x 為無解 or 非唯一解
] 互斥

Thm 任何 $A \in C^{n\times n}$ 恒有：

③ $d(A) \neq 0 \Leftrightarrow Ax = 0$　∵ 因①中為唯一解 ⇒ $x=0$ 唯一解
④ $d(A) = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$　∵ 因不可能無解 ($x=0$ 就什為一解)，一定為非唯一解 ⇒ 必有 $x\neq 0$ 之解

Thm $A\in C^{n\times n} \Rightarrow d(KA)=K^n d(A)$

$d(KA)=d(K[a^1 a^2 \dots a^n]) = d([Ka^1\ Ka^2 \dots Ka^n])$

$=d(Ka^1, Ka^2, \dots, Ka^n) = Kd(a^1, Ka^2, \dots, Ka^n)$

$=K^n d(a^1, a^2, \dots, a^n) = K^n d(A)$

在不同階層中，行列式計算永遠正確的方式為降階展開計算

$$d(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\underline{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} - a_{12}\underline{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}} + a_{13}\underline{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

- 子行列式 M_{ij}
  ⇒把第i列,第j行拿掉

下標 11.12.13 $= a_{11}\underline{M_{11}} - a_{12}\underline{M_{12}} + a_{13}\underline{M_{13}}$

- 餘因式 A_{ij}
  ⇒下標相加為 偶數 與子行列同號
  奇數 與子行列差負號

⇒為第一列降階展开計算 $= a_{11}\underline{A_{11}} + a_{12}\underline{A_{12}} + a_{13}\underline{A_{13}}$

Defn 子列式 M_{ij} (Minor), 餘因式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ (Cofactor)

Thm 任何 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 有:
① $d(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ $(j\in 1\sim n)$ 对j行展開
② $d(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ $(i\in 1\sim n)$ 对i列展開

※在行列式計算中,針对行 or 針对列處理,結果皆相同,可選擇任一行/列做計算,結果不差 → 列与行具相同地位

Thm $A\in C^{n\times n} \Rightarrow d(A)=d(A^T)$ # 轉置不影響行列式 A的行 = A^T的列

補 若把第一列改成 $a_{21}\ a_{22}\ a_{23}$ ⇒ $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ⇒ $\det(A)=a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0$

結論 ⇒ 若a的下標与A的下標皆為同一列,行列式值為 $\det(A)$

若a的下標与A的下標為不同列, $a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0$
$a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}=0$

Thm

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} \overset{\text{伴隨矩陣}}{\underset{adj(A)}{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \underline{\det(A)\cdot I}$$

Defn $A=[a_{ij}]_{n\times n} \Rightarrow adj(A)=[A_{ij}]^T$

任何的方陣其伴隨矩陣為每項換餘因式後再轉置即得。 *轉置!