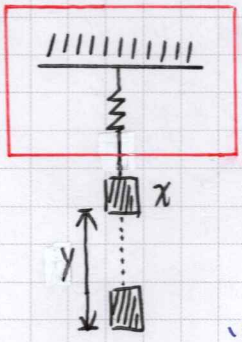
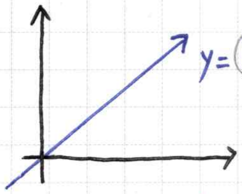
Ch1 歐氏線性系統 - 矩陣及其基本運算 01



L系統

$L(x) = y$

輸入 輸出



$y = kx$ "線性" ⇒ 直線

彈簧系數

用邏輯式子表達系統L ⇒ 抽象 造就無限

$\because \begin{cases} L(x+z) = L(x) + L(z) \\ L(kx) = kL(x) \end{cases}$ → 重疊原理 ∴ 圖為直線，系統L線性

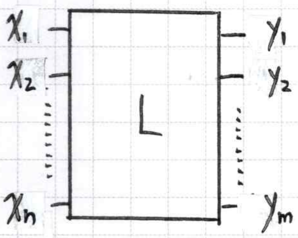
k：純量　x：向量

中 x.z 為相同性質之物件

發生在不同物件間 (倍數、質量)

倍數：純量　質量：向量

合併得 $L(\alpha x + \beta z) = \alpha L(x) + \beta L(z)$ 任何 $\alpha.\beta$ 皆成立



$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

相加為根據 "重疊原理"

討論此行為即為矩陣代數

線性系統的重疊原理：多個輸入的重疊導致輸出為各別相加

Q1：龐大系統如何用數學邏輯來安排簡化？

$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} = (2, 3, 4)$ 為方便起見重新寫成 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

習慣上　(僅為符號安排以取代)

數學符號的涵意是人賦予的

如果 $[\quad]$ 表 $\begin{bmatrix} i分量 \\ j分量 \\ k分量 \end{bmatrix}$ 那麼 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 即代表一空間位置

若 $[\quad]$ 表 $\begin{bmatrix} 溫度 \\ 压力 \\ 体積 \end{bmatrix}$ 那麼 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 即代表理想氣体的mole數 $(PV = nRT)$

向量原本定義為 ①有方向 ②有大小 抽象化後 → 只要具 $\begin{bmatrix} 不 \\ 管 \\ 几 \\ 个 \end{bmatrix}$ 形式即為 $\boxed{向量}$ 歐氏向量

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ in R^4 ; $\begin{bmatrix} 2+i \\ 1i \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ in C^4

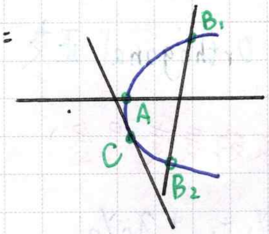
為使得理論圓滿,討論必進入複數系 ☆

R^n:佈於實數系的n維歐氏向量

C^n:佈於複數系的n維歐氏向量

Why? 以 $x^2+ax+b=0$ 做解釋

在實數系中:



可能有2個解

也可能沒有

A:單根

B_1, B_2:2相異根

C:2重根(2個無限靠近)

在複數系中:一定有2個根

因此,為建立理論架構,討論必進入複數系

在產生有R^n與C^n新觀念後,來確認其運算規則 ↓

Defn $C^n = \left\{ x \,\middle|\, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, x_i \in C \right\}$ 用C^n表示有n個在複數系的分量的所有集合

Defn 對 $x, y \in C^n$ 與 $k \in C$ 取

$x \pm y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_n \pm y_n \end{bmatrix}$ 任何2個歐氏向量的相加減符合左式

$kx = k\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}$ 任何歐氏向量與常數相乘符合左式

$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ ☆ 從高中內積延伸,目的建立正交與長度的抽象化

高中內容:$\vec{A} = x_a\hat{i} + y_a\hat{j}$ & $\vec{B} = x_b\hat{i} + y_b\hat{j}$

Defn(永遠正確) $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$ 在任何座標系統皆正確

Thm(需證明) $\vec{A}\cdot\vec{B} = x_ax_b + y_ay_b$ 只有在直角座標系統才正確

透過內積運算,可得正交與長度觀念

① $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$

② $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$

☆ 為討論廣義線性系統需抽象化①②觀念 ⟶

抽象化後

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} \ \& \ y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix} \Rightarrow \star \ \underline{(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n}$$

破壞我們對長度的定義

仍為錯誤結果

需修正

目的是建立向量正交角向量長度的延伸實義

Defn ① $\langle x,y\rangle=0 \Leftrightarrow$ …

② $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ …

複數.實數皆滿足交換律 ⇒ …

Why $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\dots+y_nx_n$

為錯誤結果?

eg.1 ⇒ $x\in C^2,\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+i\\1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow (x,x)=(1+i)(1+i)+1=1+2i$

eg.2 ⇒ $x\in C^2,\ x=\begin{bmatrix}i\\0\end{bmatrix}$ (複數系統)

$\Rightarrow (x,x)=i^2+0=-1$

即使在抽象領域,也無法接受

長度平方是複數 or 負實數

長度須為正實數!!

$(x,y+z)=\left(\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\begin{bmatrix}y_1+z_1\\\vdots\\y_n+z_n\end{bmatrix}\right.$ …

$=(x_1y_1+\dots+x_ny_n$ …

$(x,ky)=\left(\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\begin{bmatrix}ky_1\\\vdots\\ky_n\end{bmatrix}\right.$ … $_ny_n)$

$=k(x_1y_1+\dots+x_ny_n)=k(x,y)$ … Thm 2-2

③ $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=(\bar{x},\alpha y+\beta z)=(\bar{x},\alpha y)+(\bar{x},\beta z)=\alpha(\bar{x},y)+\beta(\bar{x},z)$

$=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle x,z\rangle$

④ $\overline{\langle x,y\rangle}=\overline{(\bar{x},y)}=\overline{\bar{x}_1y_1+\bar{x}_2y_2+\dots+\bar{x}_ny_n}=\overline{\bar{x}_1y_1}+\overline{\bar{x}_2y_2}+\dots+\overline{\bar{x}_ny_n}$

$=\bar{\bar{x}}_1\bar{y}_1+\bar{\bar{x}}_2\bar{y}_2+\dots+\bar{\bar{x}}_n\bar{y}_n=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\dots+x_n\bar{y}_n=\bar{y}_1x_1+\bar{y}_2x_2+\dots+\bar{y}_nx_n$

$=\langle y,x\rangle$

⑤ $\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\overline{\langle z,\alpha x+\beta y\rangle}=\overline{\alpha\langle z,x\rangle+\beta\langle z,y\rangle}$

$=\bar{\alpha}\overline{\langle z,x\rangle}+\bar{\beta}\overline{\langle z,y\rangle}=\bar{\alpha}\langle x,z\rangle+\bar{\beta}\langle y,z\rangle$

② 若 $\langle x,x\rangle=0$, $x\in C^n$, $x=a+bi \Rightarrow \langle x,x\rangle=\bar{x}x=a^2+b^2$

若 $a^2+b^2=0$, a.b 必為 0, x 必為 0

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} \; - \boxed{\;L\;} - \; \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{y}$$

以歐氏向量為輸入
以歐氏向量為輸出
的線性系統L

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = Ax$$

真正代表L系統的是 a_{xx} 系數，因此我們对 a_{xx} 分析

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} = [a^1 \; a^2 \cdots a^n] = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$$

矩陣matrix

行向量表示法

列向量

通常 a^n 為行向量

◎符號釐清：小寫英文字母.無下標 ⇒ 向量 x, y^2

有下標 ⇒ 常數 x_{12}, y_{13}^2

Defn $C^{m\times n} = \{A \mid A = [a_{ij}]_{m\times n},\ a_{ij} \in C\}$

Defn 对 $A, B \in C^{m\times n}$ 与 $k \in C$ 取： 人為規定

① $A \pm B = [a_{ij}]_{m\times n} \pm [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

② $kA = k[a_{ij}]_{m\times n} = [ka_{ij}]_{m\times n}$

eg. 以二維 input/output 線性系統為例

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \boxed{\text{Linear}} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

因為線性必具備此現象

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

系統的輸入向量　　系統的輸出向量　　矩陣A可完全代表系統

$$\underset{\text{訊號}x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} \xrightarrow{\text{經过A系統}} \underset{\text{訊號}y}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

定義矩陣相乘運算

用數学方式描述↑整件事情： $Ax = y \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

創造一个運算方式來描述，取代複雜情形

Thm $A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$ 本例實證了矩陣恆為線性算子

proof: $$A(\alpha x+\beta y)=A\left(\alpha\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}\right)=[a^1a^2\dots a^n]\begin{bmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\\vdots\\\alpha x_n+\beta y_n\end{bmatrix}$$

$$=a^1(\alpha x_1+\beta y_1)+a^2(\alpha x_2+\beta y_2)+\dots+a^n(\alpha x_n+\beta y_n)$$

$$=\alpha(x_1a^1+\dots+x_na^n)+\beta(y_1a^1+\dots+y_na^n)$$

$$=\alpha[a^1\,a^2\dots a^n]\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+\beta[a^1\,a^2\dots a^n]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$$

$=\alpha Ax+\beta Ay$ 得證

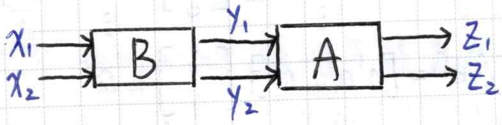
Thm 任何 $x\in C^n$ 恆有 $Ax=x$，證 A 必為單位矩陣

proof: 任何 $x\in C^n$ 恆有 $Ax=x$ $\Rightarrow$ 任何 $x\in C^n$ 有 $Ax=Ix$

$\Rightarrow$ 任何 $x\in C^n$ 有 $(A-I)x=0$

$\Rightarrow A-I=0 \Rightarrow A=I$

矩陣相乘運算 02



$$\begin{cases}y_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2\\y_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}z_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2\\z_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ y代入

$$\begin{cases}z_1=a_{11}(b_{11}x_1+b_{12}x_2)+a_{12}(b_{21}x_1+b_{22}x_2)\\z_2=a_{21}(b_{11}x_1+b_{12}x_2)+a_{22}(b_{21}x_1+b_{22}x_2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}z_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})x_2\\z_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})x_2\end{cases}$$

先經B系統再經A系統

連續映射作用

將↓矩陣創造成AB，來描述由[A][B]成的系統

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$$