補

若任2列相等,其值必為0

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \underbrace{f(x_1,x_2,x_3)}_{\text{必為}x_1,x_2,x_3\text{的多項式}} = k\underbrace{(x_1-x_2)}_{-1}\underbrace{(x_2-x_3)}_{-1}\underbrace{(x_1-x_3)}_{1}$$ ※因式分解

再加上对角線相乘,可確定$(x_2x_3^2)$的係數為1 → 相乘也為1 ⇒ $k=1$

eg.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \boxed{\begin{matrix} k(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n) \\ (x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n) \\ \vdots \\ (x_{n-1}-x_n) \end{matrix}}$$

改寫成
下標大－下標小

不確定k為何 (+1 or −1) ⇒ 已知 $1\times x_2\times \boxed{x_3^2}\cdots\boxed{x_n^{n-1}}$ 係數必為1

$$\begin{matrix} k(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1) \\ (x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2) \\ \vdots \\ (x_n-x_{n-1}) \end{matrix}$$ n-1个

要有n-1个x_n來乘 ⇒ 皆用括號裡前面的乘

⇒ 全部括號的整体係數為+1 ⇒ $k=1$

矩陣相乘之塊狀定理

: 矩陣相乘可以分塊計算

$$AB = \left[\begin{array}{cc|cc} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

相加後再原理解相同

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix}$$

↑ tantamount

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{array}\right] = \begin{array}{c} \qquad C_{12} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \hline x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{array}\right] \end{array}$$

○為第2列×第3行結果

⇒ A_{11}的第2列×B_{12}的第1行

⇒ A_{12}的第2列×B_{22}的第1行

Thm 对A∈

(任

補 $A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times n}$ & $A^T=A$, $B^T=B$ (實对稱方陣)

⇒ $\underbrace{(AB)^T=B^TA^T}_{\text{定理}}=\underline{BA}$ 推論 ※矩陣乘法必不滿足交換律 階

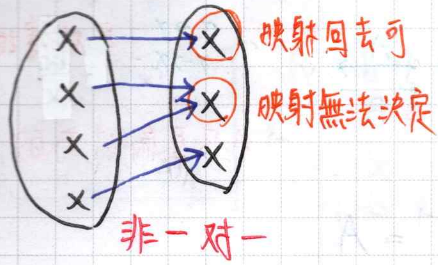
若滿足交換律: $AB=BA$ ⇒ $(AB)^T=BA=AB$ ⇒ AB為實对稱

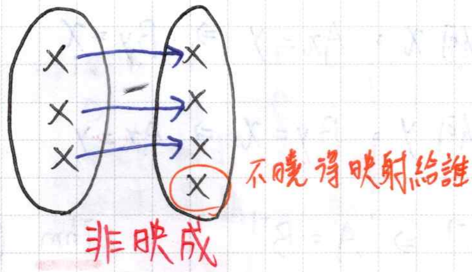
若滿足AB為實对稱: $(AB)^T=AB$ ⇒ $AB=BA$ ⇒ 滿足乘法交換律

Most 實对稱相乘後不会还是實对稱, real-symmetric 相乘後仍為real-symmetric 的充分且必要條件是相乘滿足交換律

☆ 並不是任何函數皆存在反函數 ⇒ 不是任何映射皆有反映射

存在反函數的充要條件 → 一對一且映成 (一定是方陣)





若 A 有 A^{-1}，存在 B 而 $AB = I$，保證 $d(AB) = d(I)$

$\Rightarrow d(A)\,d(B) = 1 \Rightarrow d(A) \neq 0 \Rightarrow A\,\text{adj}(A) = d(A)\,I$

已知 $k(AB) = A(kB)$

$\Rightarrow \frac{1}{d(A)} A\,\text{adj}(A) = I$

$\Rightarrow A\left(\frac{1}{d(A)}\text{adj}(A)\right) = I$ 若 $AB=I$，B為A的反矩陣

☆存在反映射，則行列式一定不是0；行列式非0，則一定存在反映射

Thm $A \in C^{n\times n}$ 可逆 (存在反映射) 之充要條件為

① $d(A) \neq 0$ 保證 $A^{-1} = \frac{1}{d(A)}\text{adj}(A)$ ☆適用>~3階

Defn $d(A) = 0 \Rightarrow$ A為奇異方陣 singular

$d(A) \neq 0 \Rightarrow$ A為非奇異方陣 nonsingular (存在反映射)

eg.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$ 由 $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ 轉置得

特例 diagonal matrix

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma & 0 \\ 0 & \beta\delta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}$$

表 $\alpha\gamma$ 與 $\beta\delta$ 皆為1

ex28. 求 $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ 之反矩陣？

$$A^{-1} = \frac{1}{d(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = -1\begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ch2 向量空間分析 ★任何現象都要先從定義域下手

請問 $f(t)=\sin t$ 是否為週期函數? 由定義域決定

若 $t \in Q$ 有理數 ⇒ 非週期函數

$t \in R$ 實數系 ⇒ 是週期函數

現象的行為会受到定義域影響 ⇒ 討論任何事都必須將定義域講清楚.

Review **Defn** 對定義在 R^n 之系統 L, 若其有以下性質, 則稱 L 為線性

1. 任何 $x \in R^n$, $y \in R^n$ 有 $L(x+y)=L(x)+L(y)$
2. 任何 $x \in R^n$, $k \in R$ 有 $L(kx)=kL(x)$

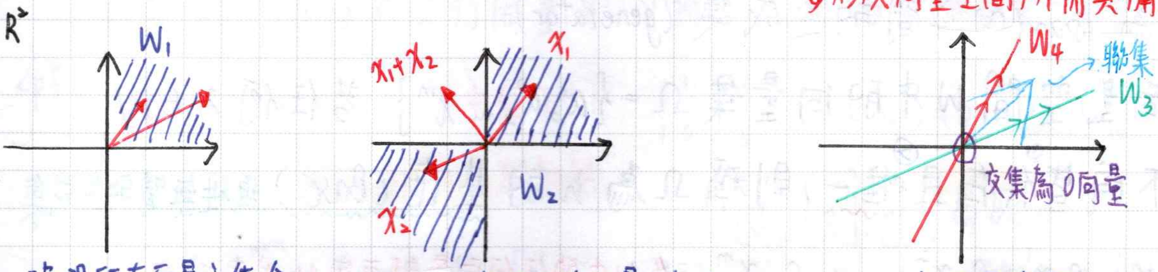
Defn 對 R^n 之子集合 W 而言, 若其具以下性質, 則稱 W 為一個向量空間

x.y 向量
k 常數

1. $x \in W$ & $y \in W$ ⇒ $x+y \in W$ 相加仍屬 W ⇒ 向量相加封閉性
2. $x \in W$ & $k \in R$ ⇒ $kx \in W$ 相乘仍屬 W ⇒ 純量積封閉性

任意的

要形成向量空間所需具備的2封閉性



W_1: I象限所有向量之集合 W_2: I. III象限所有向量之集合 $W_3.W_4$ 為向量空間

W_1. W_2 不是向量空間

W_1: 相加仍在象限 I, 符合向量相加封閉性
若乘上負實數, 就不在象限 I, 不符合純量積封閉性

W_2: 相加封閉性不符合. 乘上任何實數仍在象限 I. III. 符合純量積封閉性

$W_3.W_4$: 線上的任2個向量相加仍在線上, 乘上任何實數也仍在線上.

Defn 對集合 W_1 & W_2, 稱

W_1 為 W_2 的子集合

1. 恒有下式稱 $W_1 \subseteq W_2$: $\alpha \in W_1 \Rightarrow \alpha \in W_2$ 證明條件
   任何在 W_1 內一定也在 W_2 內 ⇒ W_1 包含於 W_2 (W_1 有可能等於 W_2)
2. 恒有下式稱 $W_1 \subset W_2$: $\alpha \in W_1 \Rightarrow \alpha \in W_2$ 且存在 β 而 $\beta \in W_2$ 但 $\notin W_1$
   任何在 W_1 內的一定在 W_2 內, 並存在任何只在 W_2 不在 W_1
   ⇒ W_1 包含於 W_2 但一定不等於 W_2 W_1 為 W_2 的真子集合

(證) 線性無關之 $x = c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_mx^m$ 具唯一性.

已知 $x = c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_mx^m$

設另有 $x = d_1x^1 + d_2x^2 + \dots + d_mx^m$

$0 = (c_1-d_1)x^1 + (c_2-d_2)x^2 + \dots + (c_m-d_m)x^m \Rightarrow c_1-d_1 = c_2-d_2 = \dots = c_m-d_m = 0$ 線性無關

結論 $c_1=d_1,\ c_2=d_2 \dots c_m=d_m \Rightarrow$ 具唯一性 得證.(僅能以一式表達 x)

Thm 若且唯若下式成立,則 $\{x^1, x^2 \dots x^m\}$ 可作為向量空間 W 之基底 (Base)

1. $W = span(x^1, x^2 \dots x^m)$ 2. $\{x^1, x^2 \dots x^m\}$ 為 L.ID (線性無關).

① 任何 $x \in W$ 必有 $x \in span(x^1, x^2 \dots x^m)$

$\Rightarrow$ 任何 $x \in W$ 必有 $c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_mx^m = x$

② $a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_mx^m = 0$

$a_i = 0$ 係數必定皆為0且唯一解.

Thm 任何 $A \in C^{n\times n}$ 有:

如果 $d(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ 之行向量 & 列

如果 $d(A) = 0 \Leftrightarrow A$ 之行向量 &

<pf>

已知 $d(A) \neq 0 \Leftrightarrow Ax = b$ 中存在唯

$d(A) = 0 \Leftrightarrow Ax = b$ 中為無解

ex 尋找 W 之基底

$W = span\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}\right) \in R^3$

$\because$ 維度 $dim = 3$, $\Rightarrow$ 線性無關之向量最多3个

$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 1\\0 & 2 & 5\end{vmatrix} = 1 \Rightarrow d(w) \neq 0 \Rightarrow$ 線性無關

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix}$ 為 Base.

$\because A \in C^{n\times n}: Ax = 0 \Leftrightarrow [a^1, a^2 \dots a^n]\begin{bmatrix}\vdots\\x_n\end{bmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x_1a^1 + x_2a^2 + \dots + x_na^n = 0$

$\underbrace{d(A) \neq 0 \Leftrightarrow d(A^t) \neq 0}_{\text{相等}}$

行列可一起考慮

結論:

$x = 0 \Rightarrow$ 係數皆為 0 $\Rightarrow$ 線性獨立 L.ID when $d(A) \neq 0$

$x \neq 0 \Rightarrow$ 係數不全為 0 $\Rightarrow$ 線性相關 L.D when $d(A) = 0$

Thm 若集合中有零向量,則其必為 L.D (相依)

$c_1\underset{0}{x^1} + c_2\underset{0}{x^2} + \dots + c_m\underset{0}{x^m} = 0$ $c_1, c_2 \dots c_m$ 不一定全0即可滿足.

Thm $\{x^1, \dots x^m\}$ LD (相依) $\Rightarrow \{x^1, x^2 \dots x^m, x^{m+1}\}$ 也為 LD

$\{x^1, \dots x^m, x^{m+1}\}$ LID (獨立) $\Rightarrow \{x^1, x^2 \dots x^m\}$ 仍為 LID

非P則Q, 非Q則P (duality)

不可能有0向量

① $\underbrace{c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_mx^m}_{c_i \text{不全為}0\text{,而}\ \overset{\shortparallel}{0}} + c_{m+1}x^{m+1} = 0$

只 $c_{m+1} = 0$, 式子即可成立.

② $c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_mx^m + c_{m+1}x^{m+1} = 0$

唯一解 $c_1 = c_2 = \dots = c_m = c_{m+1} = 0$

$\Rightarrow c_1x^1 + c_2x^2 + \dots + c_mx^m = 0$

c_i 全必為 0.

聯立方程組 3-1

Def: 對 $A=[a^1,a^2,\dots,a^n]\in C^{m\times n}$ 與 $b\in C^m$ 形成之聯立方程組 $Ax=b$，取廣置矩陣 (Augmented) $C=[a^1,a^2,\dots,a^n,b]\in C^{m\times(n+1)}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots \qquad \dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}&[a^1,a^2,a^3,\dots,a^n]x=b\\ &x_1a^1+x_2a^2+\dots+x_na^n=b\\ &C=[a^1,a^2,\dots,a^n\ b]\end{aligned}$$

分析廣置matrix的秩

$$r(C)=\begin{cases} r(A) & b\text{與}a^1\sim a^n\text{線相关}\dots\text{有解}\\ r(A)+1 & b\text{與}a^1\sim a^n\text{皆LID}\dots\text{無解}\end{cases}$$

※何謂有解？存在適當係數滿足下式

$x_1a^1+x_2a^2+\dots+x_na^n=b$

⇒ b 可介由 $a^1,a^2,\dots,a^n$ 組合出 ⇒ 線性相关

Thm 承上，$Ax=b$ 有解之充要條件為 $b\in R(A)$ 或 $r(A)=r(C)$

Def. $Ax=b$ 所有解之集合稱其之通解 (general solution)

Thm. 承上，取 x^p 為聯立方程 $Ax=b$ 之任一解，則此方程之通解為 $x=x^p+N(A)$

<pf> x^p 加上 $N(A)$ 中任何向量仍為 $Ax=b$ 之解　　若 $x^q\in x^p+N(A)\Rightarrow x^q$ 為解

$Ax^p=b$ & $x^r\in N(A)\Rightarrow \overset{x^q}{A(x^p+x^r)}=Ax^p+Ax^r=b+0=b$

x^q ⇒ x^p+x^r 為 $Ax=b$ 之解

<pf> 任何解向量皆可表示為 $x^p+N(A)$　　若 x^q 為解 $\Rightarrow x^q\in x^p+N(A)$

x^q 為 $Ax=b$ 之解 $\Rightarrow Ax^q=b=Ax^p\Rightarrow A(x^q-x^p)=0\Rightarrow (x^q-x^p)\in N(A)$

$x^q=x^p+(x^q-x^p)\in x^p+N(A)$

Thm 承上，只要 x^p 為 $Ax=b$ 之任一解，而 $\{x^1,\dots,x^m\}$ 為 $N(A)$ 的基底，則方程之通解為 $x=x^p+\underbrace{c_1x^1+\dots+c_mx^m}_{=N(A)}$

eg. 不同通解下的 α,β 限制條件

$$\begin{cases} \alpha x_2+x_3=\beta\\ \alpha x_1+0+\beta x_3=1\\ \alpha x_1+\alpha x_2+2x_3=2\end{cases}$$

$$C=\begin{bmatrix}0&\alpha&1&\beta\\ \alpha&0&\beta&1\\ \underbrace{\alpha\quad\alpha\quad 2}_{A}&&&2\end{bmatrix}$$

$\det(A)=\alpha^2\beta-\alpha^2=\alpha^2(\beta-1)$

存在唯一解 (唯解) ⇒ $r(A)=r(C)$ ⇒ $r(A)=r(C)=3$ 皆線性無关 $d(A)\neq0$

只有0向量 ⇒ $N(A)=0$　$\dim[N(A)]=3-r(A)=0$ ⇒ $\alpha\neq0$ 且 $\beta\neq1$

通解有一个參數 (多解) $r(A)=r(C)$ ⇒ $r(A)=r(C)=2$ 3个行向量相关 $\det(A)=0$

有一項 cx^1　$\dim[N(A)]=1$　$\alpha\neq0$ 且 $\beta=1$

通解有二个參數 (多解) $r(A)=r(C)$ ⇒ $r(A)=r(C)=1$　$\det(A)=0$

$\dim[N(A)]=2$ ⇒ $\alpha=0$ 且 $\beta=1$

方程無解 $r(A)\neq r(C)\Leftrightarrow \alpha=0$ 且 $\beta\neq1$