

國立臺北大學通訊工程學系

1132 無線通訊(U4615)

Wireless Communications

Project 1 - Fading Channel Simulator

學號：411186028 姓名：鐘婉庭

本次作業旨在模擬無線通訊中的 Rayleigh 衰落通道，探討移動環境下信號因多徑傳播所產生的衰落特性。模擬採用 Jakes 模型，產生符合 U 型 Doppler 頻譜的衰落信號，並透過複數高斯雜訊產生 I/Q 分支，經 FFT 與 Doppler 濾波器處理後轉換回時域以獲得衰落通道。作業進一步比較不同的最大 Doppler 頻率對通道自相關、功率分佈與統計行為的影響。

## 壹、 背景理論：

### 小尺度衰落 (Small-Scale Fading)

無線通訊信號在傳播過程中，會受到多徑效應 (Multipath Propagation) 的影響，導致信號在接收端出現幅度和相位的快速變化。當這種變化的尺度較小 (通常在波長級別)，我們稱之為小尺度衰落。

### 都普勒效應 (Doppler Effect)

當發射機或接收機相對於彼此移動時，入射波的頻率會產生偏移。當信號源靠近接收機時，頻率增加，我們稱作 Blueshift。當信號源遠離接收機時，頻率降低，我們稱作 Redshift。由於無線信號通常經過多條路徑傳播，每條路徑可能有不同的都普勒頻移，這會導致信號頻譜變寬，我們稱作 Doppler Spread。

最大都普勒頻率  $f_m$  的計算公式：

$$f_m = \frac{v}{\lambda}$$

其中  $v$  是相對移動速度(m/s)， $\lambda$ 是載波波長(m)， $f_m$ 是最大都普勒頻率(Hz)。

### U 型都普勒功率譜 (U-Shaped Doppler Spectrum)

為了描述 Doppler Spread 對無線信號的影響，Jakes 模型提供了一個具有理論依據的 U 型功率譜，其數學表達式為：

$$S(f) = \frac{1}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}} \quad , \quad |f| \leq f_m$$

其中： $S(f)$ 是都普勒功率譜密度， $f_m$ 是最大都普勒頻率(Hz)

當  $|f| > f_m$  時， $S(f) = 0$ ，表示都普勒頻移主要集中在  $|f| \leq f_m$  的範圍內，在  $f=0$  附近功率較低，但在  $f=\pm f_m$  附近功率較高，形成 U 型分佈，也就是說信號的能量主要分布在接近最大都普勒頻率的位置。

### 使用 Two-branch (I/Q) 方法來產生 Rayleigh 衰落？

Rayleigh 衰落模型常用於描述無線通道中的小尺度衰落現象，之所以被稱為「Rayleigh」，是因為在無直視通道 (Non-Line-of-Sight) 與多條散射路徑假設下，接收信號的包絡具有近似 Rayleigh 分布的統計特性。為了在模擬環境中生成這種隨機的衰落行為，常見且直觀的方法便是「雙分支 (I/Q) 法」。

在真實無線通道中，接收信號是來自眾多不同方位的散射分量彼此相長或相消後的總合。從統計角度而言，若各散射路徑的相位均隨機且互相獨立，根據中心極限定理，這些路徑在同相 (I) 與正交 (Q) 方向上投影的總和將呈現獨立的

零均值高斯分布。也就是說 I 分量與 Q 分量皆可視為方差相等且互相獨立的高斯分佈隨機變數，其平方和便構成了 Rayleigh 分佈的信號包絡。

在數值模擬中，為了產生符合 Rayleigh 衰落特性的信號，通常會在頻域中先產生兩組獨立的零均值高斯隨機變數  $W_I(f)$  與  $W_Q(f)$ ，分別對應於 I 分量與 Q 分量。這些雜訊可視為來自眾多獨立多徑貢獻的統計組合。為了反映因移動產

生的都普勒頻率擴展，會設計對應的 Doppler 濾波器  $H(f) = \sqrt{S(f)}$ ，其中  $S(f)$

為 Jakes 模型所定義的 U 型功率譜。此濾波器能塑形原始高斯雜訊的頻譜，使其功率集中於  $\pm f_m$  附近。接著，將經過濾波器的訊號做 IFFT 回到時域後，便可得到符合 Jakes 模型的 Rayleigh 衰落序列。最終生成的複數信號可寫成

$h(t) = h_I(t) + jh_Q(t)$ ，其包絡為  $r(t) = \sqrt{h_I^2(t) + h_Q^2(t)}$  即為 Rayleigh 分布。

當我們把這兩個 I 分量和 Q 分量方向的訊號組合起來，就可以很自然地模擬出真實世界中訊號經過多條反射、繞射路徑後產生的快速強度變化。這些變化會導致訊號在不同時間點被增強或抵銷，形成我們熟知的 **Rayleigh 小尺度衰落**。透過此方式，可有效模擬無線環境中訊號的隨機行為與快速變化特性。

## 貳、 模擬方法與步驟

我們使用同相 I 與正交 Q 來產生符合 Rayleigh 衰落的時間序列，並比較不同最大都卜勒頻率 ( $f_m$ ) 對衰落特性的影響。流程可分為以下五個步驟：

### ● Step 1: 定義模擬參數：

為了模擬 Rayleigh 衰落信號，首先需要設定基本參數，包括移動速度、載波頻率、取樣頻率與模擬點數等。逐步計算出最大都卜勒頻率  $f_m$ ，並決定模擬所需的其他參數。

**相對速度與載波頻率：**Rayleigh 衰落中的最大都卜勒頻率 (Doppler shift) 與使用者移動速度  $v$  及載波頻率  $f_c$  有關，其關係為：

$$\lambda = \frac{c}{f_c}, \quad f_m = \frac{v}{\lambda} = \frac{v \cdot f_c}{c} \quad (c = 3 \times 10^8 \text{ m/s})$$

載波頻率  $f_c$  設為  $2 \times 10^9 \text{ Hz} = 2\text{GHz}$ ，移動速度設定兩種分別為 **0.0006 m/s** 與 **0.006 m/s**。因此最大都卜勒頻率  $f_m$  分別為：

$$f_{m1} = \frac{0.0006 \times 2 \times 10^9}{3 \times 10^8} = 0.004\text{Hz} ; \quad f_{m2} = \frac{0.006 \times 2 \times 10^9}{3 \times 10^8} = 0.04\text{Hz}$$

**取樣頻率  $f_s$ ：**

取樣頻率應滿足  $f_s \geq 10f_m$ ，取樣頻率設定為  $f_s = 1024\text{Hz}$ ，對於最大都卜勒頻率為  $f_{m2} = 0.04\text{Hz}$  的情況，也能滿足  $f_s \gg 10f_m$  的條件。

**模擬持續時間和樣本數量：**

$$N_s = T \times f_s$$

我選擇樣本數  $N_s = 100$  表示模擬時間  $T$  為 0.09765 秒，而  $N$  越大，可以提供更

高頻率解析度與更平滑的衰落行為，但也會增加時間計算成本。

- Step 2: 生成 I/Q 分支的獨立複數高斯雜訊:

Rayleigh 衰落的關鍵在於:接收到的訊號是來自多條不同方向的路徑之和, 這些路徑在時間、空間、相位上都是隨機的。因此為了模擬 Rayleigh 衰落的通道, 常見的方法是對訊號的同相 (I) 與正交 (Q) 分量分別產生獨立零均值的兩組複數高斯雜訊。在撰寫的函 generateRayleighFading 與 generateRayleighphase 中, 核心做法如下:

在頻域產生複數高斯白雜訊:(分別代表 I 分支與 Q 分支)

$$W_1(f) = CN(0, 1), W_2(f) = CN(0, 1) \text{ (程式中使用 randn + 1i*randn)}$$

接著, 為了確保回到時域後的訊號為實數, 需強制頻域訊號滿足 Hermitian 對稱:

$$W(-f) = W^*(f) \text{ (程式中使用 flip(conj(...)))}$$

- Step 3: 設計並應用 Doppler 濾波器

在模擬 Rayleigh 衰落時, 為了讓產生的訊號符合真實通道的頻率選擇性特性, 我們會進一步對頻域雜訊加上一個 Doppler 濾波器, 其頻率響應根據 Jakes 模型的功率頻譜定義如下:

$$S(f) = \frac{1}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}}, \text{ for } |f| \leq f_m$$

分佈會呈現出一個 U 形的功率譜, 表示訊號的大多數能量集中在最大 Doppler 頻率  $\pm f_m$  附近, 而非在直流頻率附近。為了模擬這種分佈, 我們對前述的雜訊加上濾波器權重, 並取其平方根形成 Doppler 濾波器:

$$H(f) = \sqrt{S(f)}$$

- Step 4: FFT/IFFT 轉換

通過 Doppler 濾波器後, 頻域訊號  $\widetilde{W}_1(f)$ 、 $\widetilde{W}_2(f)$  仍為複數訊號, 因此我們需透過 IFFT (反快速傅立葉轉換) 將其轉換回時域, 得到對應的通道響應  $h_I(t)$ 、 $h_Q(t)$ , 我們才能對時間進行分析。

$$h_I(t) = \text{IFFT}\{\widetilde{W}_1(f)\}$$

$$h_Q(t) = \text{IFFT}\{\widetilde{W}_2(f)\}$$

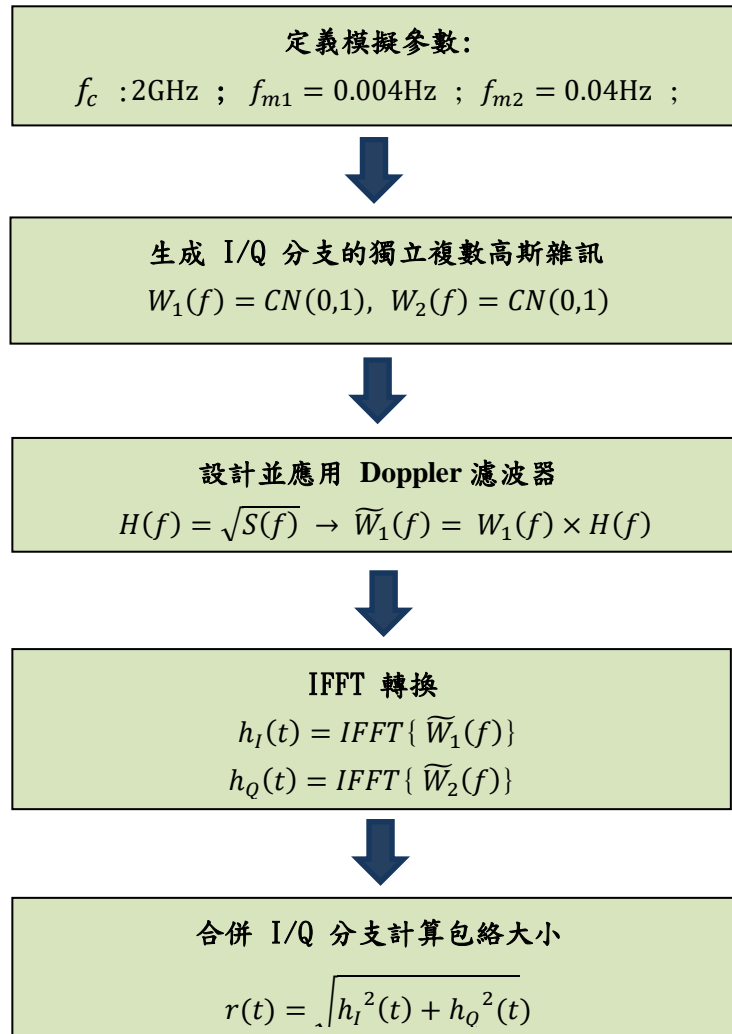
- Step 5: 合併 I/Q 分支

在前面的步驟中, 我們分別針對同相 (In-phase, I) 與正交 (Quadrature, Q) 分支產生了時域訊號  $h_I(t)$ 、 $h_Q(t)$ , 在最後藉由計算包絡:

$$r(t) = \sqrt{h_I^2(t) + h_Q^2(t)}$$

得到最終的 Rayleigh 衰落訊號, 其統計分布近似 Rayleigh 分布。

流程圖：



參、 主要程式與註解：

**generateRayleighFading 函式：**主要用來產生模擬 Rayleigh 通道的同相分量，即  $h_I(t)$ ，最終輸出為實數時域訊號。

```
function rayleigh_time = generateRayleighFading(N, fm, fs)
%Step 1: 設定頻率網格
df = 2*fm/(N-1);
fd = -fm:df:fm; % 頻率範圍，從 -fm 到 fm
%Step 2: FFT 點數
M = round(fs/df); %在此頻率解析度下，對應的頻域取樣長度
%Step 3: 設計 Jakes U 型功率譜
S_Ez = 1.5./(pi*fm*sqrt(1-(fd./fm).^2));
S_Ez(1) = 10*S_Ez(2);
S_Ez(end) = 10*S_Ez(end-1);
sqrt_S_Ez = sqrt(S_Ez); % 濾波器 H(f) = sqrt(S(f))
% Step 4: 複數高斯雜訊，I/Q 分支，Hermitian 對稱
signal = (randn(1, (N/2)) + 1i*randn(1, (N/2))); %signal 大小 = N/2
sample = [flip(conj(signal)), signal]; % 將一半的訊號取共軛並翻轉
%Step 5: 頻域濾波 + 零填充(用 sqrt_S_Ez 進行頻譜整形 (Doppler 濾波))
U_sample_padded = [zeros(1,round((M-N)/2)), sample.*sqrt_S_Ez, zeros(1,round((M-N)/2))];
%Step 6: 組合頻域資料以對應 ifft 格式
x = length(U_sample_padded); % x是整個頻域向量長度
ifft_sample = [0, U_sample_padded(x/2+1:x), 0, U_sample_padded(1:(x/2))];
%Step 7: IFFT 轉換回時域
rayleigh_time = real(ifft(ifft_sample)); %取實部 real()確保輸出為實數訊號
end
```

為了符合 Jakes 模型的特性，透過理論公式設計一個 U 形的功率頻譜  $S_{Ez}$ ，

其數值會在頻率靠近  $\pm f_m$  時趨近無限大，而在  $|f| > f_m$  時為 0。而後對該頻譜取平方根以產生濾波器頻率響應 `sqrt_S_Ez`，作為 Doppler 濾波器的實際濾波權重。

利用 `randn()` 來產生產生零均值、單位變異數的實數高斯雜訊 `signal`，再用 `1i*randn()` 產生虛部 → 組成複數。代表多條獨立多徑通道的訊號疊加效應，此雜訊僅包含一半的頻譜，為了確保 IFFT 回到時域後產生的是實數訊號，這裡對 `signal` 執行 Hermitian 對稱處理：利用 `conj()` 將雜訊取共軛並利用 `flip()` 左右翻轉 (加負號) 後再與原本的訊號拼接，組成完整的 Hermitian 對稱頻域訊號 `sample`。

接著利用 `sample .* sqrt_S_Ez` 將頻域訊號乘上設計好的濾波器 `sqrt_S_Ez`，進行 Doppler 頻譜塑形，使其頻譜分布符合 Rayleigh 通道的物理特性。為配合 IFFT 的格式與頻率對齊需求，利用 `zeros(1,N)` 產生一維 N 個 0 的向量，使訊號長度為 M，對處理後的頻域資料進行零填充與重新排列，並手動將頻域訊號分成兩半並重組 (中間插入 0)，組合出符合 MATLAB IFFT 函式使用的結構 `ifft_sample`。

最後對濾波後的訊號使用 `ifft()` 將頻域訊號轉換為時域訊號，並使 `real()` 將虛部去除，作為最終輸出的 Rayleigh 衰落時域訊號 `rayleigh_time`。

**generateRayleighphase 函式**: 主要用來產生模擬 Rayleigh 通道的正交分量，即  $h_Q(t)$ ，最終輸出為複數時域訊號。

```
function rayleigh_phase = generateRayleighphase(N, fm, fs)
    df = 2*fm/(N-1);
    fd = -fm:df:fm;
    M = round(fs/df);

    S_Ez = 1.5./(pi*fm*sqrt(1-(fd./fm).^2));
    S_Ez(1) = 10*S_Ez(2);
    S_Ez(end) = 10*S_Ez(end-1);
    sqrt_S_Ez = sqrt(S_Ez);

    signal = (randn(1, N) + 1i*randn(1, N)); % 直接用長度 N 的複數雜訊
    U_sample_padded = [zeros(1,round((M-N)/2)), signal.*sqrt_S_Ez, zeros(1,round((M-N)/2))];
    x = length(U_sample_padded);
    ifft_sample = [0, U_sample_padded(x/2+1:x), 0, U_sample_padded(1:(x/2))];
    rayleigh_phase = ifft(ifft_sample); % 輸出為複數 Q 分量
end
```

整體結構上與先前的 `generateRayleighFading` 相似。`generateRayleighFading` 是先產生一半長度的複數雜訊，再共軛翻轉後，拼接成對稱的訊號 (Hermitian 對稱)，這樣做是為了確保最後用 IFFT 轉回來的時域訊號是實數，符合 I 分量 (同相分量) 的需求。但 `generateRayleighphase` 則比較單純，它直接用 `randn + 1i*randn` 產生完整長度的複數雜訊，不去做對稱拼接，也不強制要讓 IFFT 結果變成實數。它會保留 IFFT 後的複數形式，因為它是用來模擬 Q 分量 (正交分量)，Q 分量本來就是帶有虛部的，所以這樣的處理方式更接近真實。

## outputRayleigh 函式：產生一組模擬的 Rayleigh 衰落訊號

```
function rayleigh = outputRayleigh(N, fm, fs)
% 產生兩組 Rayleigh 衰落通道的 I 分量 (實數訊號)
rayleigh_time1 = generateRayleighFading(N, fm, fs);
rayleigh_time2 = generateRayleighFading(N, fm, fs);
% 合併兩組 I 分量形成 Rayleigh 包絡 (r(t) = sqrt(I^2 + Q^2))
rayleigh_fading1 = sqrt((rayleigh_time1).^2 + (rayleigh_time2).^2);
% 正規化平均功率後轉換為 dB 單位
rayleigh_fading1 = 10*log10(rayleigh_fading1 / mean(rayleigh_fading1));
rayleigh = rayleigh_fading1;
end
```

outputRayleigh 透過兩次呼叫 generateRayleighFading 來產生兩組獨立的實數通道，模擬 I 分量與 Q 分量。接著，利用這兩組資料計算出對應的包絡，也就是 Rayleigh 衰落的幅度變化。為了讓結果更容易看懂和比較，會再把算出來的 Rayleigh 包絡訊號除以它的平均值，讓整體正規化平均值變成 1。接著再把這個標準化後的結果轉成 dB，讓數值變化更直觀。

## 產生 Rayleigh 通道與相位／包絡

```
% 產生對應 fm1 的通道
rayleigh_time1 = generateRayleighFading(N, fm1, fs);
rayleigh_time2 = generateRayleighFading(N, fm1, fs);
rayleigh_phase1 = generateRayleighphase(N, fm1, fs);
rayleigh_phase2 = generateRayleighphase(N, fm1, fs);

% 相位(度數)
rayleigh_phase_response1 = angle((rayleigh_phase1 + rayleigh_phase2)/2) * 180/pi;

% 包絡 (轉 dB)
rayleigh_fading1 = sqrt((rayleigh_time1).^2 + (rayleigh_time2).^2);
rayleigh_fading1 = 10*log10(rayleigh_fading1 / mean(rayleigh_fading1));
```

每組通道分別生成兩組獨立的 I 與 Q 分量，模擬多徑傳輸下的通道變化。接著將兩組 Q 分量取平均後利用 angle() 轉換成相位角度，表示接收訊號的相位變化。包絡部分則是根據 I 分量與 Q 分量計算平方和後開根號得到訊號強度，代表通道在不同時間點的衰落情形。最後再將包絡正規化並轉為 dB 單位，便於後續觀察與比較， $f_{m2}$  也是如同此概念。

## Rayleigh Magnitude Response

```
%% (1) Rayleigh Magnitude Response
figure;
plot(rayleigh_fading1, 'Color','blue','LineWidth',1.5); hold on;
plot(rayleigh_fading2, 'Color',[0.9, 0.5, 0],'LineWidth',1.5);
xlim([0,length(rayleigh_fading2)]);
xlabel('Samples');
ylabel('Amplitude (dB)');
title('Rayleigh Magnitude Response');
legend(['fm = ', num2str(fm1),'Hz'], ['fm = ', num2str(fm2),'Hz']);
hold off;
```

generateRayleighFading 函式的輸出就是模擬出來的 Rayleigh 衰落通道的振幅訊號，利用兩組由 generateRayleighFading 產生的獨立訊號（可以理解為 I 分量

與 Q 分量)，透過平方和後開根號的方式，計算出 Rayleigh 衰落的包絡 (Envelope)，也就是  $r(t) = \sqrt{h_I^2(t) + h_Q^2(t)}$ 。為了方便觀察也將包絡進行平均功率正規化，再轉換為 dB 單位。

## U-shaped Doppler spectrum (只節錄重點 code)

```
%% (3) 繪製理論 U 型都卜勒頻譜
figure;
Ns_plot = 512;
f_axis = linspace(-0.05, 0.05, Ns_plot);

H1 = zeros(size(f_axis));
H2 = zeros(size(f_axis));
% 計算理論 U 型 (只有 |f| <= fd 才有值)
for k = 1:Ns_plot
    if abs(f_axis(k)) <= fm1
        H1(k) = 1/( pi*fm1 * sqrt( 1 - (f_axis(k)/fm1)^2 ));
    else
        H1(k) = 0;
    end
end
H1 = H1 / max(H1); %正規化
```

根據 Jakes 模型理論，直接套用理論公式，來描述不同最大都卜勒頻率 ( $f_{m1}$  與  $f_{m2}$ ) 下的功率頻譜分布。因為  $f_{m1}$  為 0.04Hz，為了顯示完整圖將頻率軸 f\_axis 設範圍從 -0.05 到 0.05 Hz，並將其均勻分為 Ns\_plot 個點，接著對於兩組都卜勒頻率  $f_{m1}$  與  $f_{m2}$ ，分別初始化功率頻譜向量 H1 與 H2，並根據 Jakes 模型的理論公式：

$$S(f) = \frac{1}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}}, \text{ for } |f| \leq f_m$$

依序將每個頻率點對應的功率密度填入 H1 與 H2。為了能比較，再將其正規化處理將整個曲線除以其最大值，使得功率密度最大值為 1，其他相對縮放。

## Rayleigh Fading PDF Approximation

```
%% (4) Plotting PDF with histogram
figure;
%histcounts 將一組資料依照分箱 (bins) 進行統計，並計算每個區間內的數量或機率密度
[arg,bin]=histcounts(rayleigh_fading1,20,'Normalization', 'probability');
arg(end+1) =0; %% 為了補齊最後一個 bin 的值，使繪圖完整
plot(bin,arg,'Color','blue','LineWidth',1.5);
hold on;
[arg,bin]=histcounts(rayleigh_fading2,20,'Normalization', 'probability');
arg(end+1) =0;
plot(bin,arg,'Color', [0.9, 0.5, 0],'LineWidth',1.5);
```

透過 histcounts() 函式，將振幅訊號 (經由 generateRayleighFading() 產生，並以  $10 \cdot \log_{10}(\dots)$  轉為 dB 單位) 依照指定的區間數 (bins) 進行統計，統計結果會以機率密度進行正規化。這樣每一個 bin 的高度就表示該範圍內資料出現的「機率佔比」，相當於估計出 Probability Density Function (PDF)。並不是直接解析公式，而是逼近實際通道中振幅的統計特性。



## Autocorrelation plots comparing with the theoretical Jakes' autocorrelation

```
%% (5) Plotting Autocorrelation
figure;
% 產生「複數通道」
h_complex1 = generateRayleighFading(N, fm1, fs) + 1i*generateRayleighphase(N, fm1, fs);
h_complex2 = generateRayleighFading(N, fm2, fs) + 1i*generateRayleighphase(N, fm2, fs);

% 計算樣本自相關 (normalized)
[acf_full1, lags1] = xcorr(h_complex1, 'coeff');
[acf_full2, lags2] = xcorr(h_complex2, 'coeff');

% 只取正半邊
idx_pos1 = find(lags1 >= 0);
acf_pos1 = acf_full1(idx_pos1);
tau1 = lags1(idx_pos1) / fs; % 時間延遲 (秒)

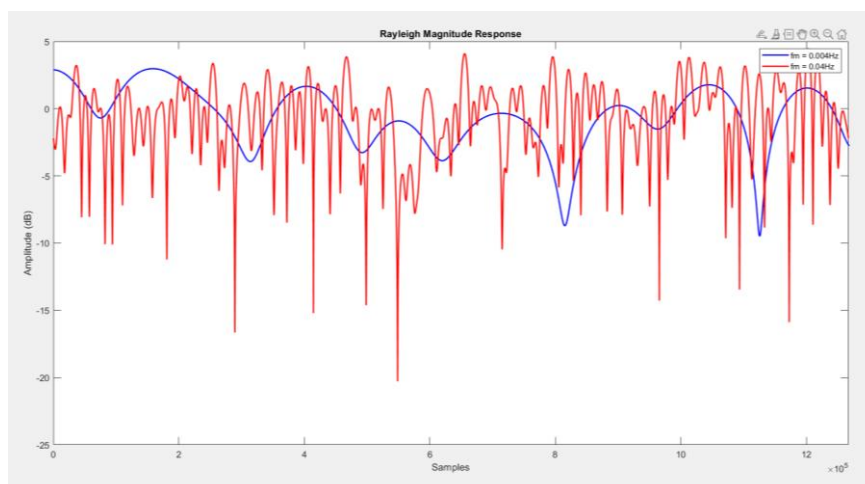
idx_pos2 = find(lags2 >= 0);
acf_pos2 = acf_full2(idx_pos2);
tau2 = lags2(idx_pos2) / fs; % 時間延遲 (秒)

% 計算理論 Jakes 自相關:  $R_{\text{theory}} = J_0(2\pi f_m \tau)$ 
R_theory1 = besselj(0, 2*pi*fm1*tau1); % 零階貝塞爾函數
R_theory2 = besselj(0, 2*pi*fm2*tau2);
```

將實部 (I 分量) 和虛部 (Q 分量) 合併，構成複數通道響應 `h_complex1` 與 `h_complex2`，使用 `xcorr()` 函式對複數通道訊號計算樣本自相關函數，並使用 `'coeff'` 參數將其正規化，使最大值為 1，利於比較。為了配合理論公式中  $\tau \geq 0$ ，我們只取自相關函數中非負時間延遲部分，並將離散 Lag 值轉換為實際時間 (秒)。最後再根據 Jakes 模型的理論，對應每個時間延遲  $\tau$  計算理論值 `R_theory1` 與 `R_theory2`。

### 肆、實作執行與結果討論：

#### Time-domain plots of the fading envelope $r(t)$

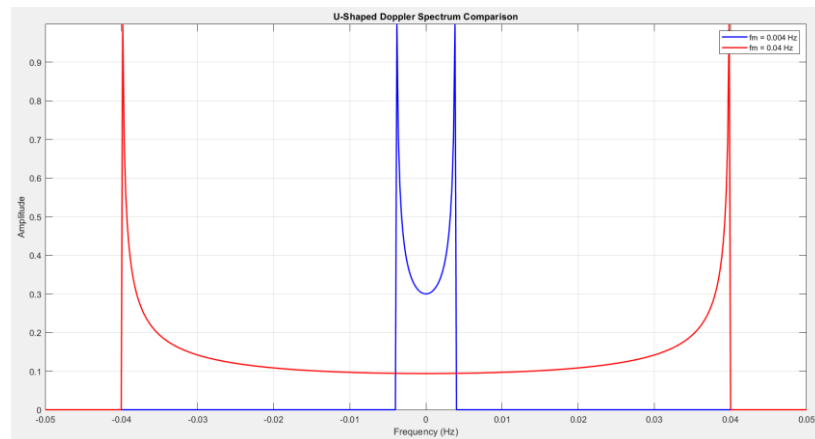


圖一、Rayleigh Magnitude Response

從圖中可以看出，藍線的變化明顯比紅線平緩，代表在較低的都普勒頻率下，通道隨時間變化較慢。紅線波動劇烈則顯示通道變化快速，且其振幅頻繁下降至 -10 dB (或更低)，深度衰落出現的頻率也較高。表示在高速移動環境中 (對應

較高的都普勒頻率)，通道會更不穩定，也就更需要強健的調變與編碼技術來抵抗深度衰落。也能藉此推得都普勒頻率越高，通道的時間變化越快，對時間同步的要求也會相對提高。

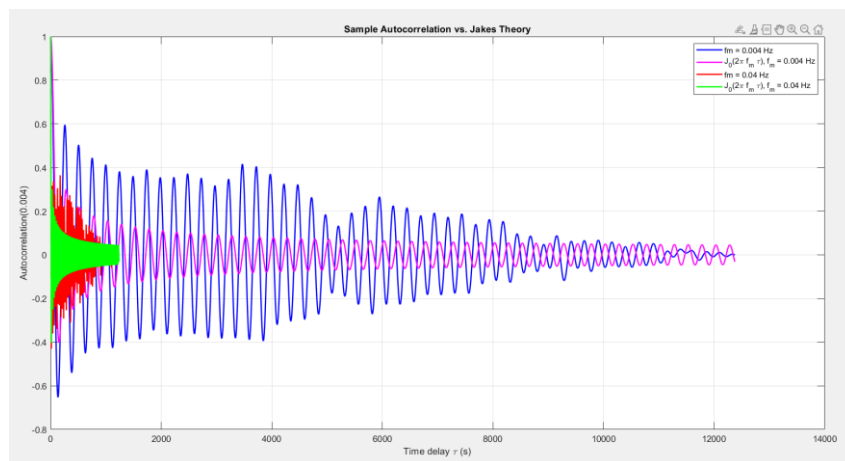
## PSD plots showing the U-shaped Doppler spectrum



圖二、U 型 Doppler 頻譜

本圖比較了在兩種不同最大 Doppler 頻率  $f_m$  下的 Rayleigh 衰落功率譜密度，顯示出典型的 U 型 Doppler 頻譜分佈，符合 Jakes 模型的特性。圖中兩條線皆呈現  $\pm f_m$  附近趨近無限，中心值較低的 U 型結構，顯示通道功率集中於邊緣頻率 ( $\pm f_m$ )。而根據 Jakes 模型，功率頻譜只在  $|f| \leq f_m$  範圍內有值，因此  $f_m$  越大  $\rightarrow$  整體頻譜分布範圍變寬，代表通道的頻率擾動越劇烈，變化速度也越快。

## Autocorrelation plots comparing & the theoretical Jakes' autocorrelation



圖三、自相關函數與 Jakes 理論曲線

圖三比較了模擬所得的 Rayleigh 衰落通道自相關函數 (Autocorrelation Function, ACF) 與 Jakes 模型所預測的理論自相關函數，藉此驗證模擬結果的正確性與合理性。橫軸為時間延遲  $\tau$ ，縱軸為自相關值，分別對應兩種不同的最大 Doppler 頻率  $f_m$ ，其中包含模擬結果與理論曲線各一。

Jakes 模型預測的理論自相關函數為：

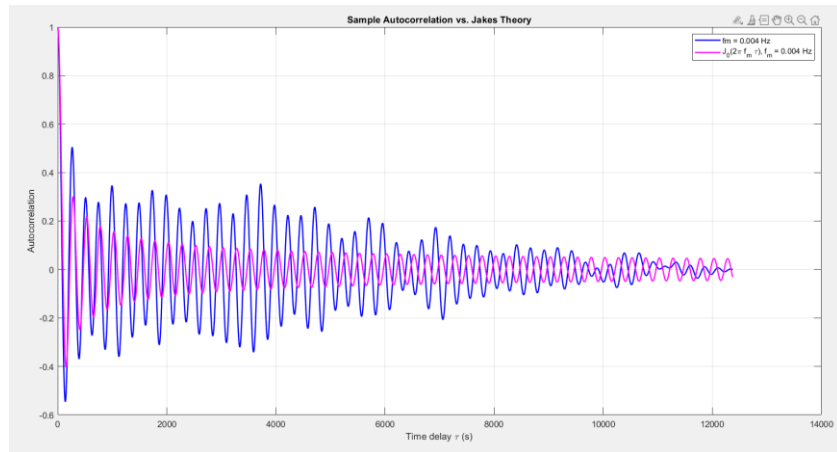
$$R(\tau) = J_0(2\pi f_m \tau)$$

其中 $J_0()$ 為第一類零階 Bessel function (order zero)，函數呈現隨時間震盪且逐漸衰減的特性，反映了通道隨時間的變動性。

由於兩組頻率對應的自相關曲線在時間延遲軸上長度不一致，低  $f_m$  延伸到約 12000 秒，而高  $f_m$  只延伸到 1200 秒提早結束，未與藍紫線（低 $f_m$ ）延伸到同樣時間範圍，兩者的時間軸範圍剛好差十倍。原因是因為自相關是使用 `xcorr` 函數計算，其結果的長度為： $\text{length}(\text{acf})=2N-1$ ，其中  $N$  為模擬產生的 Rayleigh 通道樣本長度。而時間延遲  $\tau$  是透過下列方式計算：

$$\tau = \frac{\text{lags}}{f_s}$$

因此，若固定 $f_s$ ，則時間延遲的範圍與樣本數  $N$  直接相關。雖然兩組通道樣本使用相同的  $N$  但若在 `generateRayleighFading()` 或 `generateRayleighphase()` 函數內部的處理（填充長度、FFT/IFFT 長度）有所差異，會導致輸出向量長度略有不同，進而造成 `xcorr()` 計算結果的時間延遲軸長度不同。因此為了方便分析敘述，我又將其拆成兩張圖做結果討論。

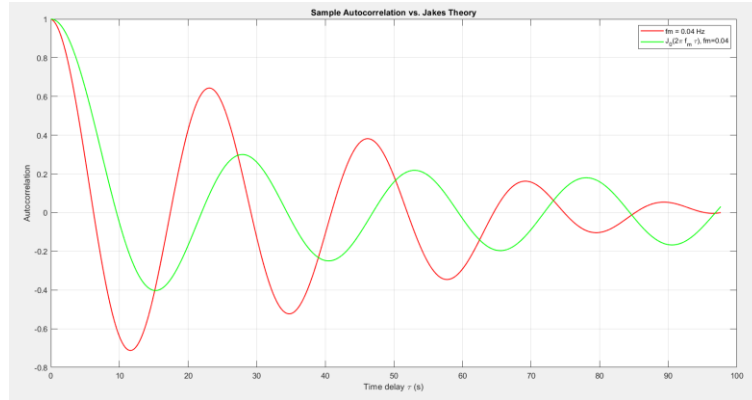


圖四、低速環境下 ( $f_m=0.004$  Hz) 自相關函數與 Jakes 理論曲線

從圖中可以觀察到，模擬所得的自相關曲線（藍色）與理論曲線（粉紅色）高度重疊。在 0~2000 秒內有 8 個波峰+波谷，可以理解成 2000 秒內震盪約 8 次，一個震盪週期約為 250 秒，如果  $T$  為 250 秒，則震盪頻率為

$$f_{\text{震盪}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{250} = 0.004\text{Hz}$$

與 Doppler 頻率設定 $f_m=0.004$  Hz 吻合。由於 Doppler 頻率較低，通道變化較慢，因此樣本之間保有較長的時間相關性。這使得其自相關函數呈現出較低的震盪頻率與緩慢的衰減趨勢。

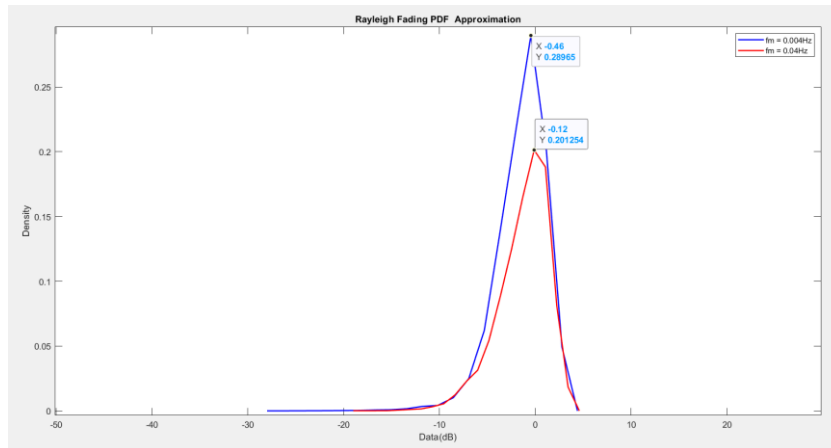


圖五、高速環境下 ( $f_m=0.04$  Hz) 自相關函數與 Jakes 理論曲線  
從圖中可以觀察到，紅線在 0~100 秒之間有 4 個波峰+波谷，震盪約 4 次，一個震盪週期約為 25 秒，因此

$$f_{\text{震盪}} = \frac{1}{T} = \frac{1}{25} = 0.04\text{Hz}$$

與 Doppler 頻率設定  $f_m=0.04$  Hz 吻合。當  $f_m = 0.04\text{Hz}$  時模擬所得的自相關函數顯示出較高的震盪頻率與快速衰減的特性。自相關值在極短的時間延遲內即大幅下降，顯示通道的時間記憶性較低，亦即通道狀態在短時間內便可能產生顯著變化。代表在高速移動環境中，通道變化劇烈，時間相關性會降低。對於通訊系統而言，表示接收端必須更頻繁地更新通道估計來因應通道的快速變化。

### Rayleigh Fading PDF Approximation



圖六、Rayleigh Fading 機率密度分布圖

在  $f_m = 0.004$  (低速) 下，分布主峰出現在  $-0.46$  dB，機率密度最高為  $0.28965$ ；而在  $f_m = 0.04$  (高速) 下，主峰略微向右偏移至  $-0.12$  dB，且最大密度下降為  $0.201254$ 。低 Doppler 頻率下，通道變化緩慢，樣本在短時間內變化較小，因此振幅值集中於某個範圍，使得整體分布較尖銳（密度較高）；而在高 Doppler 頻率下，通道快速變化，樣本在短時間內變動劇烈，造成振幅分布較分散，對應的密度曲線就會較鈍、較寬（密度較低）。

雖然這些差異不改變整體分布為 Rayleigh 型態的事實，但也說明了當樣本

數有限、觀察時間固定時，Doppler 頻率差異仍會對統計估計造成些微影響。

## 伍、挑戰、限制、潛在改進方向

**模擬樣本數有限:** 在頻率較高 ( $f_m=0.04$  Hz) 時，通道變化較快，若樣本數不足，會影響統計分布的穩定性與自相關的準確性。

**時間與頻率解析度難以兼顧:** 當 Doppler 頻率提高，需提升取樣頻率以捕捉快速變化，但這會增加計算成本與資料量，影響效率。

**僅使用 Jakes 模型:** Jakes 模型假設等功率、等間隔、多徑環境，未考慮實際通道中非理想多徑分佈或遮蔽效應。

**忽略其他通道效應:** 模擬未考慮陰影效應 (shadowing)、多路徑延遲 (delay spread) 或載波頻偏 (frequency offset) 等現象。

——潛在改進方向——:

**結合不同衰落模型:** 更真實地模擬實際通訊環境中的通道變化行為。

**提高樣本數與時間長度:** 能提升統計估計準確度，並更清楚觀察長時間下的通道特性。

## 陸、重點發現與結論摘要

本模擬成功驗證了 Rayleigh 衰落通道在不同移動環境下的時間與頻率行為，並展示 Jakes 模型與實際通道統計特性之間的高度一致性

**震盪頻率與  $f_m$  呈正比:** 自相關函數的震盪週期隨著  $f_m$  增加而縮短，與理論中的 Bessel 函數  $J_0(2\pi f_m \tau)$  行為一致，且 Bessel 函數能準確描述 Rayleigh 衰落通道的時間自相關特性。

**功率集中於最大都普勒頻率兩側，呈現 U 型分佈:** 根據 Jakes 模型，通道頻域功率譜呈現 U 型分佈，模擬所產生的 PSD 與理論曲線高度吻合，驗證模擬模型的正確性。

**振幅 PDF 符合 Rayleigh 分佈:** 不論在高速或低速情境，振幅分佈皆接近理論 Rayleigh 分佈，但在高速情況下曲線略為「鈍化」，代表通道變動導致統計分布稍有分散。

**雙分支 I/Q 結構能準確模擬複數通道行為:** 透過生成獨立的 I 與 Q 分支，加上 Doppler 濾波與 IFFT，成功重建出符合統計特性的 Rayleigh 時域通道。

**Doppler Shift (都普勒位移):** 指特定單一路徑因相對速度產生的頻率偏移，決定於發射／接收端的相對移動方向與速度。

**Doppler Spread (都普勒擴展):** 指所有多徑路徑的 Doppler 位移所造成的整體頻譜展寬，與信號時間變化率直接相關。

**Doppler 頻率影響通道變化速度:** 當  $f_m$  較大 (如 0.04 Hz) 時，自相關函數快速衰減，振幅劇烈波動，功率譜頻寬增加，呈現典型的「快衰落」通道特性，需更頻繁的通道估計。反之，在  $f_m$  較小 (如 0.004 Hz) 下，通道變化緩慢，具備明顯的「慢衰落」行為。