Aufgabe 1 a) Sei $f(z) \in \mathbb{R}$ für $z \in U \cap \mathbb{R}$. Damit haben wir $z = \overline{z} \in U \cap \mathbb{R}$. Daraus sehen wir, dass $f(z) = f(\overline{z}) \in \mathbb{R}$ für $z \in U \cap \mathbb{R}$ gilt. Also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} (\overline{z} - \overline{z_0})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} (z - \overline{z_0})^k.$$

Dementsprechend muss $a_k, z_0 \in \mathbb{R}$ gelten. Wir sehen, dass $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ gilt für alle $z \in U$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \overline{\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\overline{z} - z_0)^k} = \overline{f(\overline{z})}.$$

b) Folgt entweder aus i) und $-if(z) = \tilde{f}(z)$ oder genauer: für $z \in U \cap \mathbb{R}$ haben wir

$$-\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = -f(z) = \overline{f(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} (z - \overline{z_0})^k,$$

also $z_0 \in \mathbb{R}$ sowie $a_k \in i\mathbb{R}$. Für $z \in U$ folgt somit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \overline{\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}} = -\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\overline{z} - z_0)^k} = -\overline{f(\overline{z})}.$$

Aufgabe 3

a) Bestimme die Ordnung der Nullstelle in $z = 0$ folgender Funktionen:

$$\tan(2z), \qquad \sin\left(z^2\right)$$

Lösung: Für $\tan(2z)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tan(2z)|_{z=0} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \tan(2z)|_{z=0} &= \frac{2}{\cos^2(2z)}|_{z=0} = 2 \end{aligned}$$

Damit hat $\tan(2z)$ bei $z = 0$ eine Nullstelle 1. Ordnung.

Für $\sin\left(z^2\right)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin\left(z^2\right)|_{z=0} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin\left(z^2\right)|_{z=0} &= 2z\cos\left(z^2\right)|_{z=0} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \sin\left(z^2\right) &= \left(2\cos\left(z^2\right) - 4z^2\sin\left(z^2\right)\right)|_{z=0} = 2 \end{aligned}$$

Also hat $\sin\left(z^2\right)$ bei $z = 0$ eine Nullstelle 2. Ordnung.

b) Bestimme den Hauptteil der Laurentreihe in $a_{0,\pi}(0)$ von $\frac{1}{(\cos(z)-1)^2}$.

Lösung: Mit der Reihendarstellung des Cosinus gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\cos(z)-1)^2} &= \frac{1}{(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} - 1)^2} \\
&= \frac{1}{(-\frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{24} + \mathcal{O}(z^6))^2} \\
&= \frac{4}{z^4} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{z^2}{12} + \mathcal{O}(z^4))^2} \\
&= \frac{4}{z^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4)} \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{4}{z^4}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4)\right) \\
&= \frac{4}{z^4} + \frac{2}{3z^2} + \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

Bei der Gleichung $(\star)$ wurde die geometrische Reihe für $\left|\frac{z^2}{6}\right| < 1$ (für $z \in (0,\pi)$) angewandt.