Aufgabe 1

a) Sei $f(z) \in \mathbb{R}$ für $z \in U \cap \mathbb{R}$. Damit haben wir $z = \overline{z} \in U \cap \mathbb{R}$. Daraus sehen wir, dass $f(z) = f(\overline{z}) \in \mathbb{R}$ für $z \in U \cap \mathbb{R}$ gilt. Also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} (\overline{z} - \overline{z_0})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} (z - \overline{z_0})^k.$$

Dementsprechend muss $a_k, z_0 \in \mathbb{R}$ gelten. Wir sehen, dass $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ gilt für alle $z \in U$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \overline{\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\overline{z} - z_0)^k} = \overline{f(\overline{z})}.$$

b) Folgt entweder aus i) und $-if(z) = \tilde{f}(z)$ oder genauer: für $z \in U \cap \mathbb{R}$ haben wir

$$-\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = -f(z) = \overline{f(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} (z - \overline{z_0})^k,$$

also $z_0 \in \mathbb{R}$ sowie $a_k \in i\mathbb{R}$. Für $z \in U$ folgt somit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \overline{\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}} = -\overline{\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} a_k (\overline{z} - z_0)^k} = -\overline{f(\overline{z})}.$$

Aufgabe 2

a) Entscheide, ob auf einem Gebiet, dass die Null enthält, eine holomorphe Funktion existiert, sodass

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

Lösung: Solch eine Funktion existiert nicht. Um dies zu zeigen nutzen wir den Identitätssatz. Dieser soll zunächst in Erinnerung gerufen werden.

> Identitätssatz: Es seien f und g zwei auf einem Gebiet U holomorphe Funktionen, $\exists z_0 \in U$ und $z_n \to z_0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad z_n \neq z_0$ und zusätzlich sei $f(z_n) = g(z_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt schon, dass $f = g$ auf U.

Sei nun f wie oben beschrieben und $z_0 = 0$.

Wir finden zum einen eine holomorphe Funktion $g_1(z) = z$, die zusammen mit der Folge $z_n = \frac{1}{2n}$ die Bedingungen des Identitätssatzes erfüllt. Es gilt also $f(z) = z$.

Gleichzeitig werden die Bedingungen auch mit einer Funktion $g_2(z) = -z$ für die Folge $z_n = \frac{1}{2n+1}$ erfüllt. Es gilt also auch $f(z) = -z$. Dies ist ein Widerspruch, folglich kann eine solche Funktion nicht existieren.

b) Entscheide, ob auf einem Gebiet, dass die Null enthält eine holomorphe Funktion existiert, sodass

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Lösung: Solch eine Lösung existiert. Wir finden die Lösung

$$f(z) = \frac{z^2}{1 - z^2}$$

Diese Lösung ist holomorph in einer Umgebung der Null, denn z^2 und $1 - z^2$ sind beide holomorph um $z = 0$ und $1 - z^2$ hat dort keine Nullstelle. Weiter gilt

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n^2 - 1}$$

Die Funktion f erfüllt also alle geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 3

a) Bestimme die Ordnung der Nullstelle in $z = 0$ folgender Funktionen:

$$\tan(2z), \qquad \sin\left(z^2\right)$$

Lösung: Für $\tan(2z)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tan(2z)|_{z=0} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tan(2z)|_{z=0} &= \frac{2}{\cos^2(2z)}|_{z=0} = 2 \end{aligned}$$

Damit hat $\tan(2z)$ bei $z = 0$ eine Nullstelle 1. Ordnung.

Für $\sin\left(z^2\right)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin\left(z^2\right)|_{z=0} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin\left(z^2\right)|_{z=0} &= 2z\cos\left(z^2\right)|_{z=0} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\sin\left(z^2\right) &= \left(2\cos\left(z^2\right) - 4z^2\sin\left(z^2\right)\right)|_{z=0} = 2 \end{aligned}$$

Also hat $\sin\left(z^2\right)$ bei $z = 0$ eine Nullstelle 2. Ordnung.

b) Bestimme den Hauptteil der Laurentreihe in $a_{0,\pi}(0)$ von $\frac{1}{(\cos(z)-1)^2}$.

Lösung: Mit der Reihendarstellung des Cosinus gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\cos(z)-1)^2} &= \frac{1}{(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}-1)^2} \\
&= \frac{1}{(-\frac{z^2}{4}+\frac{z^4}{24}+\mathcal{O}(z^6))^2} \\
&= \frac{4}{z^4}\cdot\frac{1}{(1-\frac{z^2}{12}+\mathcal{O}(z^4))^2} \\
&= \frac{4}{z^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z^2}{6}+\mathcal{O}(z^4)} \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{4}{z^4}\left(1+\frac{z^2}{6}+\mathcal{O}(z^4)\right) \\
&= \frac{4}{z^4}+\frac{2}{3z^2}+\mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

Bei der Gleichung $(\star)$ wurde die geometrische Reihe für $\left|\frac{z^2}{6}\right| < 1$ (für $z \in (0,\pi)$) angewandt.