

Aufgabe 1

- a) Sei $f(z) \in \mathbb{R}$ für $z \in U \cap \mathbb{R}$. Damit haben wir $z = \bar{z} \in U \cap \mathbb{R}$. Daraus sehen wir, dass $f(z) = f(\bar{z}) \in \mathbb{R}$ für $z \in U \cap \mathbb{R}$ gilt. Also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k}(\bar{z} - \bar{z}_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k}(z - \bar{z}_0)^k.$$

Dementsprechend muss $a_k, z_0 \in \mathbb{R}$ gelten. Wir sehen, dass $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ gilt für alle $z \in U$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \overline{\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k}} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k}(\bar{z} - \bar{z}_0)^k} = \overline{f(\bar{z})}.$$

- b) Folgt entweder aus i) und $-if(z) = \tilde{f}(z)$ oder genauer: für $z \in U \cap \mathbb{R}$ haben wir

$$-\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = -f(z) = \overline{f(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k}(z - \bar{z}_0)^k,$$

also $z_0 \in \mathbb{R}$ sowie $a_k \in i\mathbb{R}$. Für $z \in U$ folgt somit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \overline{\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k}} = -\overline{\sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k}(\bar{z} - \bar{z}_0)^k} = -\overline{f(\bar{z})}.$$

Aufgabe 3

- a) Bestimme die Ordnung der Nullstelle in $z = 0$ folgender Funktionen:

$$\tan(2z), \quad \sin(z^2)$$

Lösung: Für $\tan(2z)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tan(2z)|_{z=0} &= 0 \\ \frac{d}{dz} \tan(2z)|_{z=0} &= \frac{2}{\cos^2(2z)}|_{z=0} = 2 \end{aligned}$$

Damit hat $\tan(2z)$ bei $z = 0$ eine Nullstelle 1. Ordnung.

Für $\sin(z^2)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin(z^2)|_{z=0} &= 0 \\ \frac{d}{dz} \sin(z^2)|_{z=0} &= 2z \cos(z^2)|_{z=0} = 0 \\ \frac{d^2}{dz^2} \sin(z^2) &= (2 \cos(z^2) - 4z^2 \sin(z^2))|_{z=0} = 2 \end{aligned}$$

Also hat $\sin(z^2)$ bei $z = 0$ eine Nullstelle 2. Ordnung.

b) Bestimme den Hauptteil der Laurentreihe in $a_{0,\pi}(0)$ von $\frac{1}{(\cos(z)-1)^2}$.

Lösung: Mit der Reihendarstellung des Cosinus gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\cos(z)-1)^2} &= \frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} - 1\right)^2} \\ &= \frac{1}{\left(-\frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{24} + \mathcal{O}(z^6)\right)^2} \\ &= \frac{4}{z^4} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z^2}{12} + \mathcal{O}(z^4)\right)^2} \\ &= \frac{4}{z^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4)} \\ &\stackrel{(\star)}{=} \frac{4}{z^4} \left(1 + \frac{z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4)\right) \\ &= \frac{4}{z^4} + \frac{2}{3z^2} + \mathcal{O}(1)\end{aligned}$$

Bei der Gleichung (\star) wurde die geometrische Reihe für $\left|\frac{z^2}{6}\right| < 1$ (für $z \in (0, \pi)$) angewandt.