第二章 道路与回路

§2.1 道路与回路概述

定义 1.1 无向图G的一个有限点边交替序列

$$P=\{v_0,e_1,v_1,e_2,\cdots,e_m,v_m\}$$

使得对任意$1\le i\le m$，e_i的端点是v_{i-1}和v_i，则称P为G的一条路径，v_0和v_m分别称为P的起点和终点．m称为P的长度．特别地，边均不相同的路径称为链；结点均不相同(除起点和终点有可能相同外)的路径称为道路(简称路)；起点和终点相同的路径(链，路)称为闭路径(闭链，回路)；长度为偶(奇)数的路(回路)称为偶(奇)路(回路).

例 1.1 在图 2.1 中，$(v_2,e_6,v_5,e_7,v_2,e_8,v_4,e_4,v_5,e_7,v_2,e_1,v_1)$是一条路径；$(v_1,e_1,v_2,e_6,v_5,e_7,v_2,e_2,v_3)$是一条链；$(v_3,e_3,v_4,e_8,v_2,e_1,v_1)$是一条路．$(v_2,e_6,v_5,e_7,v_2,e_8,v_4,e_4,v_5,e_7,v_2)$是一条闭路径；$(v_2,e_6,v_5,e_7,v_2,e_8,v_4,e_3,v_3,e_2,v_2)$是一条闭链；$(v_2,e_2,v_3,e_3,v_4,e_4,v_5,e_5,v_1,e_1,v_2)$是一条回路.

注 1：有时在不引起混淆的情况下，为方便起见,可仅以点序列或边序列表示路径，例如在图 2.1 中，(e_2,e_3,e_8)和(v_2,v_3,v_4,v_2)均可表示回路$(v_2,e_2,v_3,e_3,v_4,e_8,v_2)$.

注 2：非闭道路的长度小于等于$n-1$,回路长度小于等于n．两结点间有路径，则必有道路.

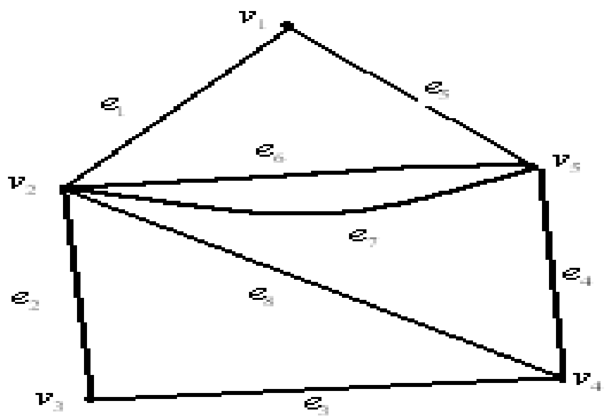


图 2.1

定义 1.2 在有向图D中，如果有限点边交替序列$P=v_0e_1v_1e_2\cdots e_mv_m$使得对$1\le i\le m$，$e_i=(v_{i-1},v_i)$，则称$P$为$D$的一条有向路径．$v_0$，$v_m$分别称为$P$的起点和终点，$m$称为$P$

的长度.

注: 可类似定义有向链, 有向道路, 有向闭路径, 有向闭链, 有向回路等概念.

例 1.2 三个量杯容量分别为8升, 5升和3升, 现在8升的量杯装满了水, 问怎样才能把水分成两个4升.

分析: 将三个量杯中的水量组成的三元有序组看成一个状态, 则起始状态为$(8,0,0)$, 目标状态为$(4,4,0)$. 将所有可能的状态看作结点. 若从状态A可转化到状态B, 则从状态A到状态B画一条有向边, 如此得到一有向图D. 则求解该问题可转化为求有向图D中的一条从$(8,0,0)$到$(4,4,0)$的有向道路.

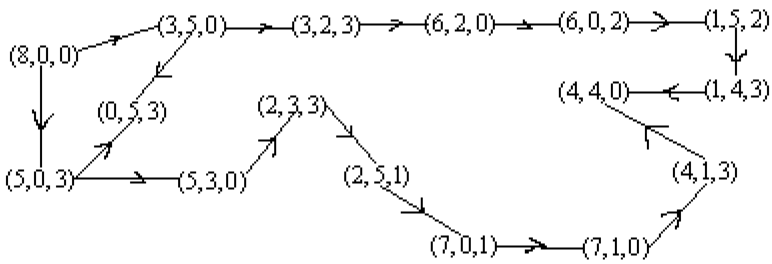


图 2.2

例 1.3 给定无向图G, 若$\delta(G)\geq 2$, 则G必包含回路.

证明: 若G包含自环或重边, 则结论显然成立. 下面假设图G是简单图. 设$P=v_0\cdots v_m$是G中的一条最长道路(长度最大的道路). 则$N_G(v_0)\subseteq V(P)$. 令$j=\max\{i:1\leq i\leq m, v_i\in N_G(v_0)\}$, 因$\delta(G)\geq 2$, 故$j\geq 2$, 于是$v_0v_1\cdots v_jv_0$是$G$中的一条回路.

要指出的是, 在本例的证明中, 我们选取的道路是最长道路P(显然, 这总是可行的).利用P的最长性, 可以使证明较为简洁.以后我们将频频使用这种所谓”极大性原则”(或”极小性原则”)的技巧.

下面再看一例, 可看作例 2.3 的推论.

例 1.4 设C是无向简单图G中含顶点数大于3的一个回路, 如果结点v_i和v_j在C中不相邻, 但$(v_i,v_j)\in E(G)$, 则称(v_i,v_j)是G的一条弦. 若$\delta(G)\geq 3$, 则G中必含带弦的回路.

证明: 考察上例中的回路 $v_0v_1\cdots v_jv_0$, 因此时 $\delta(G)\ge 3$, 所以 $j\ge 3$, 故存在 k, $1<k<j$, 使 $v_k\in N_G(v_0)$. 于是 v_0v_k 是回路 $v_0v_1\cdots v_k\cdots v_jv_0$ 的弦.

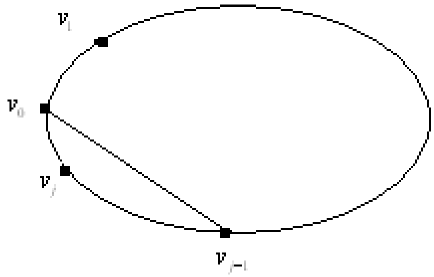


图 2.3

下面引入图的连通概念

定义 1.3 在无向图 G 中, 若两结点 u, v 之间存在路径, 则称 u 和 v 是连通的, 记作 $u\sim v$, 并且对于任意 $u\in V(G)$, 规定 $u\sim u$. 若 G 中任意两个顶点都是连通的,就称 G 是连通图, 否则称为非连通图或分离图.

注 1: 若 u , v 之间存在路径, 必存在路.

注 2: 连通关系"$\sim$"是 $V(G)$ 上的等价关系. 设商集 $V(G)/_{\sim}=\{V_1,\cdots,V_k\}$, 则导出子图 $G[V_i]$ ($1\le i\le k$)为 G 的极大连通子图,称为 G 的连通分支, k 称为 G 的连通分支数, 记为 $\kappa(G)$.若 G 是连通图, 则 $\kappa(G)=1$;若 G 是分离图, 则 G 可表示为 $\kappa(G)$ 个连通分支的并.

如图 2.4　图 G 可分解为三个连通分支.

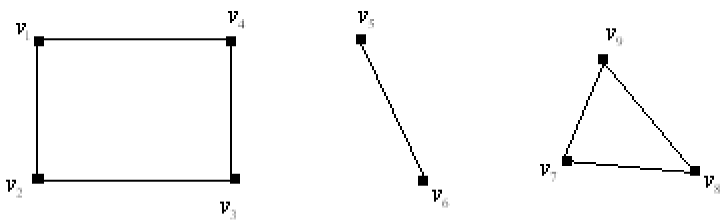


图 2.4

例 1.5 设 G 是无向简单图, 其连通分支数为 k, 则有

$$n-k\le m\le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

证明: 先来证简单连通图G ($k=1$)的边数: $n-1\le m\le \frac{1}{2}n(n-1)$. 其实只需证$m\ge n-1$. 对结点数$n$施行归纳. 当$n=1$时,不等式显然成立. 假设当$n<n_0$ ($n_0\ge 2$)不等式成立, 来看$n=n_0$时的情况，不妨设G没有回路（若G有回路，删掉回路上的一条边，不影响G的连通性），则必有$\delta(G)=1$（利用例 1.3 的结论），取定G的一个悬挂点v_0，则显然$G-v_0$依然连通，且$G-v_0$的结点数为n_0-1，边数为$m-1$，由归纳假设得，$m-1\ge n_0-2$，即$m\ge n_0-1$。注意到对任意二正实数a和b，有

$$a(a+1)+b(b+1)\le (a+b)(a+b+1),$$

即知当G有k个连通分支时，$m\le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$.

注: 当简单连通图G恰有$n-1$条边, 即G是最小连通图时, 被称为树. 我们将专门安排一章来讨论树.

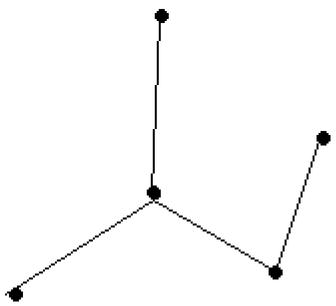


图 2.5

在无向图G上，可定义结点之间的距离。

定义 1.4 在无向图G中，若结点u和v是连通的，则称u，v之间长度最短的路径为u和v之间的短程线（测地线），短程线的长度称为u到v的距离，记作$d(u,v)$；当u与v不连通时，定义$d(u,v)=+\infty$。$d(u,v)$具有以下性质：

（1）$d(u,v)\ge 0$，当且仅当$u=v$时等号成立；

（2）$d(u,v)=d(v,u)$；

（3）$d(u,v)+d(v,w)\ge d(u,v)$；（三角不等式）

例 1.6 如图 2.6, $d(v_1,v_2)=d(v_1,v_4)=1$，$d(v_1,v_3)=2$，$d(v_1,v_5)$ $=d(v_1,v_6)=+\infty$

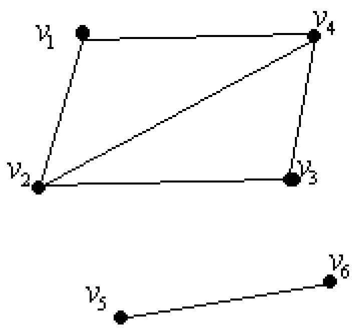


图 2.6

注：记 $d(G)=\max\{d(u,v):u,v\in V(G)\}$，称为 G 的直径。

下面介绍一种特别有用的图：二部图。

定义 1.5 若无向图 G 的结点集 $V(G)$ 存在 r（$r\ge 2$）划分 $(V_1,V_2,\cdots,V_r)$，使得 G 中每条边的两端点分别属于不同的 V_i，则称 G 是 r 部图，记作 $G=(V_1,V_2,\cdots,V_r;E)$；特别地，若 G 是 r 部简单图，且对任意 $1\le i<j\le r$，V_i 中的任意结点均与 V_j 中的任意结点相邻，则称 G 是完全 r 部图，记作 $G=K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}$，其中 $n_i=|V_i|$。

我们研究最多的是二部图和完全二部图。

二部图的特征可以用回路来刻划。

定理 1.1 无向图 G 是二部图当且仅当 G 中不包含奇回路。

证明：必要性：设 $G=(V_1,V_2;E)$，C 是 G 中任一回路，不妨设 $v_0\in V_1$ 是 C 的起点，当然也是终点。由于每条边的两端点分别属于 V_1 和 V_2，所以沿回路 C 必须经过偶数条边才能

到达V_1中的结点，所以经过了偶数条边最终又回到v_0，即C是偶回路。

充分性：不妨假定G是连通图（若G不是连通图，则考虑它的每个连通分支）。任意选定一结点$u \in V(G)$，定义$V(G)$的一个二划分(V_1,V_2)如下：

$$V_1=\{v\in V(G): d(v,u) \text{ is even}\},\ V_2=\{v\in V(G): d(v,u) \text{ is odd}\}。$$

下面来说明V_1中任意两个不同结点v和w都不相邻。设P是u到v的一条短程线，Q是v到w的一条短程线，u_1是P和Q的最后一个公共结点（P和Q的第一个公共结点是u）。因为P和Q是短程线，所以P和Q上$u\to u_1$的片断也都是短程线，故有相同的长度，从而P上$u_1\to v$的片断P_1与Q上$u_1\to w$的片断Q_2又相同的奇偶性，由此知道v到w的道路$P_1^{-1}Q_1$是偶路。若v和w相邻，则$P_1^{-1}Q_1(w,v)$是一条奇回路，与题设矛盾。同理，V_2中任意两结点都不相邻。

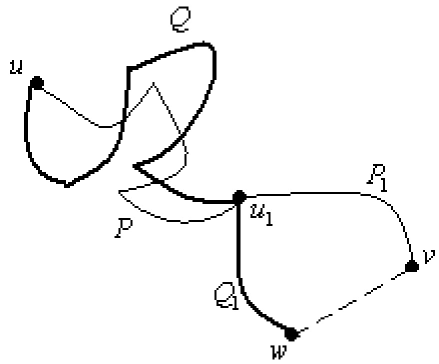


图 2.7

下面讨论有向图的连通问题。

定义 1.6 在有向图D中，若从结点u到结点v存在一条有向路径，则称u可达v，记作$u\to v$；对D中任意结点u，约定$u\to u$。若D的任意两结点都互相可达，则称D是强连通图（双向连通图）；若对D中任意两结点u，v，都有$u\to v$或$v\to u$，则称D是单连通图；若D的基图是连通图，则称D是弱连通图。

注 1：强连通$\Rightarrow$单连通$\Rightarrow$弱连通；

2：可类似定义强连通分支，但有向图的每一条边不一定都在某强连通分支中。

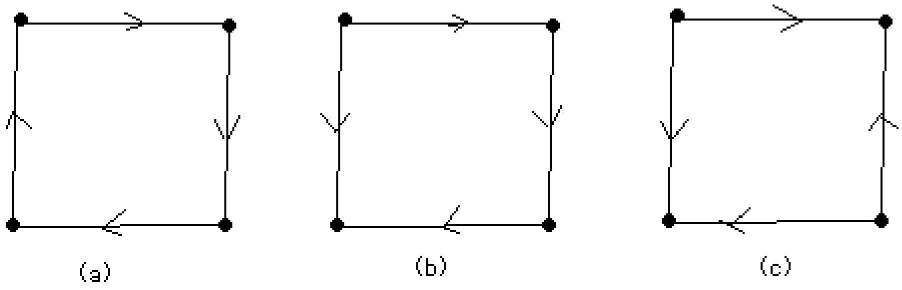


图 2.8

例 1.7 图 2.8 中，(a)强连通，(b)单连通，(c)弱连通。

定理 2.2 设D是有向图，D是强连通图当且仅当D中存在一条闭路径包含D的所有结点；D是单连通图当且仅当D中存在一条路径包含D的所有结点。

证明：仅证明第二个命题中的必要性。设D是单连通图，对v_1，v_2，必有$v_1 \to v_2$或$v_2 \to v_1$，不妨设$v_1 \to v_2$。再来考察v_3，则下面三者必有其一成立：（1）$v_3 \to v_1$，（2）$v_1 \to v_3 \to v_2$，（3）$v_2 \to v_3$，为表示简单，不妨设（3）成立，于是有$v_1 \to v_2 \to v_3$。一般地，假设D的前k（$2 \le k < n$）个结点满足：$v_{i_1} \to v_{i_2} \to \cdots \to v_{i_k}$的情况下，则对结点$v_{k+1}$来说，有下列三种情形必有其一成立：（1）$v_{k+1} \to v_{i_1}$；（2）存在$1 \le j < k$，使得$v_{i_j} \to v_{k+1} \to v_{i_{j+1}}$；（3）$v_{i_k} \to v_{k+1}$。无论何种情形成立，总存在前$k+1$个结点的一种排列：$v_{l_1}, \cdots, v_{l_{k+1}}$，使得$v_{l_1} \to v_{l_2} \to \cdots \to v_{l_{k+1}}$。

作业

1．证明：无向图G和$\overline{G}$至少有一个是连通图。

2．设D是有向图，若$\delta^+(D) \ge 1$，则D中必含有向回路。

3．设G是n($n \ge 2$)无向图, 则存在G的支撑二部子图H满足

$$d_H(v) \ge \frac{1}{2} d_G(v), \quad \forall v \in V(G)。$$

4．在无向简单图G中，若$n \ge 4$且$m \ge 2n-3$，则G中必含有带弦的回路。

5．无向连通图中任意两条最长道路必有公共结点。

6．设G是不含三角形的无向简单图，证明：

a. $\sum_{i=1}^{n} d^2(v_i) \le mn$;

b. $m \le \frac{n^2}{4}$.

7. 完全图K_n ($n \ge 3$)的所有边都赋以整数权，证明：K_n 的每个回路的权都是偶数当且仅当 K_n 的所有奇数权边诱导出一个空图或支撑完全二部图。

那么给定图G后，如何判定两结点间是否存在道路，进而判定G的连通性呢？

两种方法：1. 代数方法；2. 搜索法。

1．代数法

对于图G，可定义其路径矩阵$P = (p_{i,j})_{n\times n}$来表示任意两结点间是否存在道路，$p_{i,j}$定义如下

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ if } v_i \to v_j \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}。$$

约定：$p_{i,i} = 1$当且仅当存在从v_i到v_i的闭路径。

由G的邻接矩阵$A = (a_{i,j})_{n\times n}$可计算得到$G$的路径矩阵$P$，下面来说明这一点。

我们先对矩阵运算做几点注解：

(a). 称0和1为布尔数，对布尔数可定义布尔和与布尔积运算：

布尔和：$a \vee b = \begin{cases} 1, \ a = 1 \text{ or } b = 1 \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$

布尔积：$a \wedge b = \begin{cases} 1, \ a = 1 \text{ and } b = 1 \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$

满足

(1) 交换律：$a \vee b = b \vee a$，$a \wedge b = b \wedge a$；

(2) 结合律：$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$，$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$；

(3) 分配律：$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$，$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

(b). 以布尔数为元素的矩阵称为布尔矩阵，由布尔数的和$\vee$与积$\wedge$运算可定义布尔矩阵的

和$\vee$与积$\wedge$运算。同样满足交换律，结合律和分配律。
(c). 图G的邻接矩阵和路径矩阵都是布尔矩阵。

图G的邻接矩阵A和路径矩阵P有如下关系。

定理 1.3 $P = A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^n = \bigvee_{s=1}^{n} A^s$， （1.1）

其中A^s是布尔积意义下的矩阵A的s次幂。

证明：1. 我们知道，对于图G的任意两个结点v_i，v_j，v_i到v_j存在路径$\Leftrightarrow$ v_i到v_j存在长度不大于n的道路。

2. $(v_i, v_{i_1}, \cdots, v_{i_{s-1}}, v_j)$（$1 \le s \le n$）是$v_i$到$v_j$的路径$\Leftrightarrow$ $a_{i,i_1} \wedge a_{i_1,i_2} \wedge \cdots \wedge a_{i_{s-1},j} = 1$。

3. A^s（$1 \le s \le n$）中的(i, j)元为

$$\bigvee_{1 \le i_1, \cdots, i_{s-1} \le n} (a_{i,i_1} \wedge a_{i_1,i_2} \wedge \cdots \wedge a_{i_{s-1},j})。$$

所以，v_i到v_j存在长度为s的路径$\Leftrightarrow$ A^s的(i, j)元为1。

4. $p_{i,j} = 1 \Leftrightarrow$ 存在s，$1 \le s \le n$，使得v_i到v_j存在长度为s的路径$\Leftrightarrow$存在s，$1 \le s \le n$，使得A^s的(i, j)元为$1 \Leftrightarrow \bigvee_{s=1}^{n} A^s$的$(i, j)$元为$1$。

利用式（1.1）直接计算路径矩阵，计算复杂度为$O(n^4)$。下面介绍 Warshall 算法，它可将计算复杂度降低为$O(n^3)$。

Warshall 算法描述如下：

```
Begin
    1. P ← A          //初始化//
    2. for k = 1 to n do    //  外循环//
    3.     for i = 1 to n do    //  内循环//
               for j = 1 to n do
```

$$P_{i,j} \leftarrow P_{i,j} \vee (P_{i,k} \wedge P_{k,j})$$

End

定理 1.4 Warshall 算法的结果是图G的路径矩阵。

证明：仅需对外循环指标k进行归纳（内循环的归纳原因与外循环相似）。当P被初始化，尚未进入循环前，$P_{i,j}=1 \Leftrightarrow (v_i,v_j)\in E(G)$，执行$k=1$的内循环后，$P_{i,j}=1 \Leftrightarrow$结点集$\{v_i,v_1,v_j\}$的导出子图中存在从$v_i$到$v_j$的路径。假设执行$k=k_0$（$1\le k_0<n$）时的内循环后，$P_{i,j}=1 \Leftrightarrow$结点集$\{v_i,v_1,\cdots,v_{k_0},v_j\}$的导出子图中存在从$v_i$到$v_j$的路径，则当执行$k=k_0+1$时的内循环后，$P_{i,j}=1 \Leftrightarrow$结点集$\{v_i,v_1,\cdots,v_{k_0},v_{k_0+1},v_j\}$的导出子图中存在从$v_i$到$v_j$的路径。于是最终当执行$k=n$时的内循环后，$P_{i,j}=1 \Leftrightarrow$结点集$\{v_i,v_1,\cdots,v_n,v_j\}$的导出子图（即$G$）中存在从$v_i$到$v_j$的路径。

注：无向图G连通$\Leftrightarrow P_{i,j}=1$（$i\ne j$）；有向图$D$强连通$\Leftrightarrow P_{i,j}=1$，$D$单连通$\Leftrightarrow P_{i,j}=1$或$P_{j,i}=1$（$i<j$）。

2．搜索法

搜索法的原理：从G中的某一结点出发，寻找所有与其连通（或其能到达）的结点集。

常用的搜索法有：深度有限检索法(Depth First Search)，宽度有限检索法（Breadth First Search）。

对图进行搜索时，常采用邻接矩阵或正向邻接表来表示图。

详细描述请见有关“数据结构”的书籍。

§2.2 最短道路

本节讨论赋权图$G=(V,E,w)$的最优化问题之一：任意两结点间最短路径问题。

若H是赋权图G的一个子图，则H的权$w(H)$是指H的各边权和。

$$w(H)=\sum_{e\in E(H)} w(e)\text{。}$$

赋权图的一些最优化问题是，要在某类子图中找出具有最小（或最大）权的子图。其中一个典型的例子是最短路径问题：给定一个连接各城镇的铁路网络，在这个网络的两个指定城镇之间要确定一条最短路线，即要在一个赋权图的两个指定结点之间找出一条具有最小权的道路。

就涉及最短路问题的实际背景问题来讲，只需考虑简单正权图就够了。当$(u,v)\notin E(G)$时，约定$w(u,v)=+\infty$（进行具体计算时，往往用一足够大的数来替代$+\infty$）。为称谓方便起见，把赋权图中一条路径的权称为路径的长度。结点u到v之间的最短路径的长度称为u到v的距离，并记为$d(u,v)$。（$d(u,v)=d(v,u)$一般不成立）。

下面介绍的求最短路的算法是 Dijkstra 于 1959 年发现的。该算法给出了图G中某结点u_0到所有其他结点的最短路。

Dijkstra 算法建立在下述事实上：假设S是V的真子集且$u_0\in S$，并以$\overline{S}$记$V-S$，若u_0到$\overline{S}$中某结点u的最短路径$P=u_0v_1\cdots v_iu$是u_0到$\overline{S}$的最短路，则显然有

（1）$v_1,\cdots,v_i\in S$，$u\in S$，

（2）$u_0v_1\cdots v_i$是u_0到v_i的最短路。

所以，

$$d(u_0,u)=d(u_0,v_i)+w(v_i,u)\text{，}\qquad (2.1)$$

从而，从u_0到$\overline{S}$的距离由下列公式给出

$$d(u_0,\overline{S})=\min_{v\in S,\overline{u}\in\overline{S}}(d(u_0,v)+w(v,\overline{u}))=\min_{\overline{u}\in\overline{S}}\min_{v\in S}(d(u_0,v)+w(v,\overline{u}))$$

记

$$l(\overline{u})=\min_{v\in S}(d(u_0,v)+w(v,\overline{u}))\text{，}\quad \forall\overline{u}\in\overline{S}\text{，}\qquad (2.2)$$

则

$$d(u_0,\overline{S})=\min_{\overline{u}\in\overline{S}} l(\overline{u})=l(u)\ \text{，}\qquad （2.3）$$

$$d(u_0,u)=l(u)\qquad (2.4)$$

式(2,3), (2.4)正是 Dijkstra 算法的基础。从结点集$S_0=\{u_0\}$开始，用下述方法构造一个由V

的子集组成的递增序列：$S_0, S_1, \cdots, S_{n-1}$，使得

$$S_i = S_{i-1} \bigcup \{u_i\}，\ 1 \le i \le n-1$$

其中u_i满足：

$$d(u_0, u_i) = l(u_i) = \min_{\overline{u} \in \overline{S}_{i-1}} l(\overline{u})$$

显然，$S_{n-1} = V$。此过程逐一得到了u_0到其他结点的距离。

Dijkstra 算法可描述如下：

数组l表示距离：$l(v)$存放u_0到结点v的距离；数组Q表示最短路径：$Q(v)$存放u_0到结点v的最短路径上v的直接前趋。

Step 1: （初始化）置$l(u_0) = 0$，$Q(u_0) = u_0$，$sum = 1$；置$\overline{S} = V - \{u_0\}$，且对任意$\overline{u} \in \overline{S}$，置$l(\overline{u}) = w(u_0, \overline{u})$，$Q(\overline{u}) = u_0$。

Step 2: 找出$u \in \overline{S}$，使得$l(u) = \min_{\overline{u} \in \overline{S}} l(\overline{u})$。置$\overline{S} = \overline{S} - \{u\}$，$sum = sum + 1$。

若$sum = n$，则结束；否则，转 Step 3。

Step 3: 对任意$\overline{u} \in \overline{S} \bigcap N^{+}(u)$（在无向图中，$\overline{u} \in \overline{S} \bigcap N(u)$），

若$l(u) + w(u, \overline{u}) < l(\overline{u})$，则$l(\overline{u}) = l(u) + w(u, \overline{u})$，$Q(\overline{u}) = u$。

转 Step 2。

Dijkstra 算法的计算复杂度为$O(n^2) + O(m)$。

例 2.1 图 2.9 所示有向图中，求v_1到其他结点的最短路径。

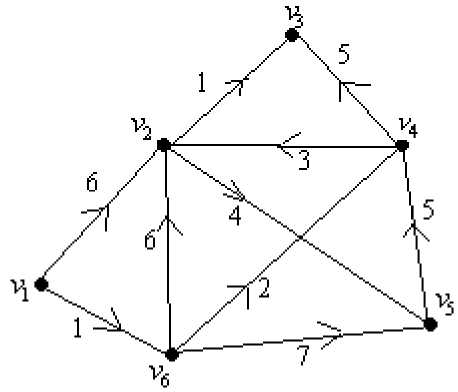


图 2.9

解：Step 1:初始，$l(1)=0$，$Q(1)=1$，$sum=1$；$\overline{S}=\{2,3,4,5,6\}$，$l(2)=6$，$l(6)=1$，$l(3)=l(4)=l(5)=+\infty$，$Q(2)=Q(3)=Q(4)=Q(5)=Q(6)=1$；

Step2: $l(6)=\min\limits_{i\in\overline{S}} l(i)$，$u=6$，$\overline{S}=\{2,3,4,5\}$，$sum=2$；

Step3: $l(4)=1+2=3$，$Q(4)=6$，$l(5)=1+7=8$，$Q(5)=6$；

Step2: $l(4)=\min\limits_{i\in\overline{S}} l(i)$，$u=4$，$\overline{S}=\{2,3,5\}$，$sum=3$；

Step3: $l(3)=3+5=8$，$Q(3)=4$；

Step2: $l(2)=\min\limits_{i\in\overline{S}} l(i)$，$u=2$，$\overline{S}=\{3,5\}$，$sum=4$；

Step3: $l(3)=6+1=7$，$Q(3)=2$；

Step2: $l(3)=\min\limits_{i\in\overline{S}} l(i)$，$u=3$，$\overline{S}=\{5\}$，$sum=5$；

Step3:

Step2: $l(5)=\min\limits_{i\in\overline{S}} l(i)$，$u=5$，$\overline{S}=\varnothing$，$sum=6$；

总之：$l(1)=0$，$l(2)=6$，$l(3)=7$，$l(4)=3$，$l(5)=8$，$l(6)=1$；

$Q(1)=1$，$Q(2)=1$，$Q(3)=2$，$Q(4)=6$，$Q(5)=6$，$Q(6)=1$，

当边权可取负值，但不存在负长的回路时，有 Ford 算法来解决某固定结点到其他结点的最短路问题；而对这样的赋权图，求任意两结点间最短路的著名算法为 Warshall-Floyd 算法。

Warshall-Floyd 算法描述如下：

Step 1 (初始化) n阶方阵$D=(d(i,j))_{n\times n}$，其中元素

$$d(i,j)=\begin{cases}w(i,j), & (i,j)\in E(G)\\ 0, & i=j\\ +\infty, & (i,j)\notin E(G)\end{cases};$$

n阶方阵$P=(p(i,j))_{n\times n}$，其中元素$p(i,j)=i$；置$k=0$。

Step2 $k=k+1$；$d(i,j)=\min(d(i,j),d(i,k)+d(k,j))$，若取后面的值，则置$p(i,j)=p(k,j)$。

Step3 若$k=n$，则结束；否则转 Step2。

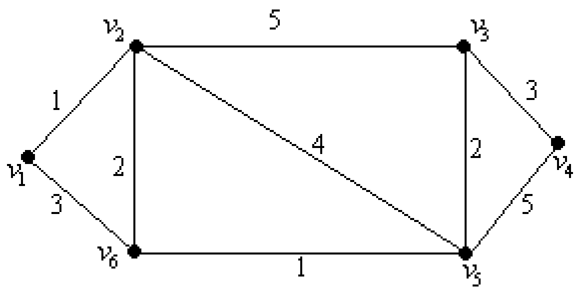
$d(i,j)$表示i到j的距离，而$p(i,j)$表示i到j的最短路程上j的直接前趋。

该算法类似于 Warshall 算法，计算复杂度为$O(n^3)$。

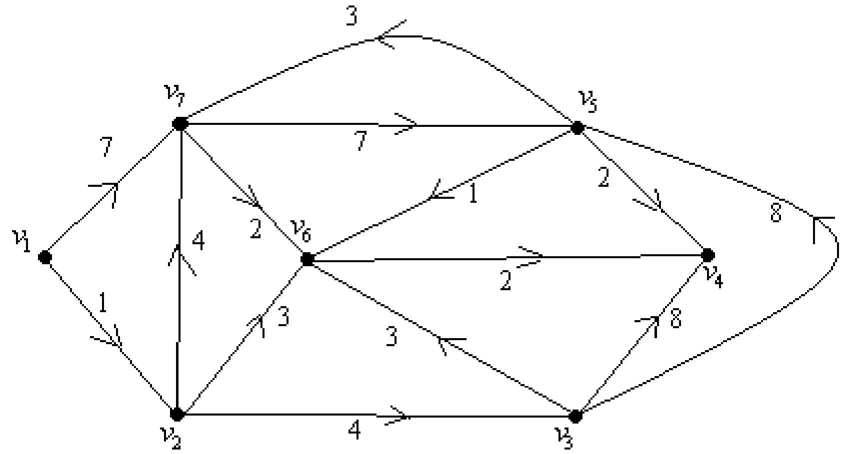
作业

1． 证明：Warshall-Floyd 算法的正确性。

2. 求下面赋权图中结点v_1到其它各结点的最短路径。



3. 求下面赋权图中结点v_1到其它各结点的最短路径。



§ 2.3 欧拉图

欧拉图得名于欧拉 1736 年发表的图论的第一篇论文“哥尼斯堡七桥问题”，哥尼斯堡(Konisberg)（现在的加里宁格勒）位于立陶宛的普雷格尔（Pregel）河畔, 当时的哥尼斯堡城被横贯全市的普雷格尔河分成四个部分，这四个部分由七座桥连接起来。如图 2.10(a)所示。

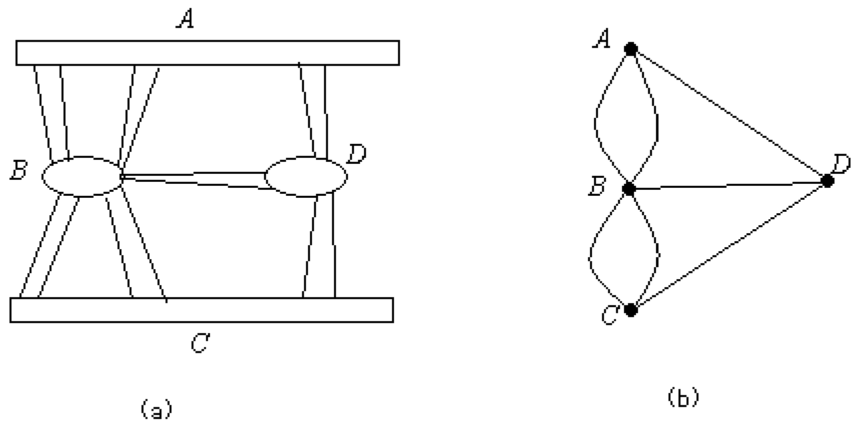


图 2.10

1727 年欧拉的朋友向欧拉提出一个问题：一个散步者是否可能从城市的某一地方出发通过每座桥一次且仅一次后又回到原地？欧拉的文章漂亮地解决了这个问题。他把 4 块陆地设想为 4 个结点，而将桥画成相应地边, 如图 2.10(b)所示。欧拉对七桥问题做出了否定的回答，并给出了解决这类问题的准则。本节将介绍这一准则。

定义 3.1 若无向连通图G中有一条包含G中所有边的闭链，则称此闭链为欧拉闭链（简称欧拉链），称G为欧拉图。若G中有一条包含G中所有边的开链（即起，终点不相同），则称此开链为欧拉开链，称G为半欧拉图。

定理 3.1 无向连通图G是欧拉图的充要条件是G中各结点都是偶结点。

证明：必要性：如果G是欧拉图，即G中有欧拉链C。对G中任意结点v来说，如果C经由边e_i进入v，则一定通过另一边e_j离开v（如果v有自环e_k，则C经由e_k进入v，又经由e_k离开v），即C每一次穿越v，对v的度的贡献为2，因此，v是偶结点。

充分性： 取定G的一个结点v_0，设以v_0为起点的最长的链为C。断言：C是欧拉链。首先来说明：C是闭链。 因为沿着C行走到任何非v_0的结点u处时，因为u的度为偶数，所以必然可以选择未曾走过的边继续往前走，只有走到v_0处时，才有可能无新边可走，停下来。 故C是闭链。 再来说明，G的所有边都在C上。 否则，C上必有某结点u，使得与u关联的边不全在C上，则从u出发可得到一个与C边不重的闭链C_1。两闭链C与C_1可合并(如图 2.11 所示)成一个更长的闭链，与C的最长性矛盾。所以G的所有边都在C上。

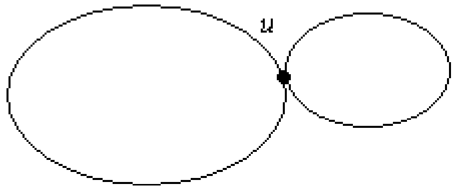


图 2.11

定理 3.1 给出了欧拉图的判别准则。

推论 3.1 无向连通图G是半欧拉图的充要条件是G中恰有两个奇结点。

证明：充分性：设G的两个奇结点为u和v，作$G' = G + (u,v)$，则G'的各结点都是偶结点。由定理 3.1 知，G'有欧拉链，从该欧拉链上删去边(u,v)，则得到一条开链，恰好由G的所有边组成。必要性同理可得。

推论 3.2 设D是有向弱连通图，则D存在有向欧拉闭链的充要条件是D中各结点的正度和负度相等。此时，称D为有向欧拉图。

例 3.1 七桥图既不存在欧拉闭链也不存在欧拉开链。

例 3.2 设无向连通图G有k（$k>0$）个奇结点，则$E(G)$可划分成$\frac{k}{2}$条开链。

证明：将G的k个结点（k是偶数）捉对连线，得到图G'，则G'是欧拉图，有欧拉链C'。新加的$\frac{k}{2}$条边在C'上不想邻接，所以从C'上删去这些边，则得到$\frac{k}{2}$条开链，它们正是$E(G)$的一个划分。

例 3.3 一个编码盘分成 8 个相等的扇面，分别由绝缘体和导体组成，可表示0和1两种状态，其中每连续的三个扇面组成一个二进制输出，试问这 8 个0和1状态的循环序列应如何排列，才恰好能得到所有（8 个）三位二进制输出？

解：分析：假设$a_1a_2\cdots a_8$是满足要求的一种循环序列，考虑到相邻的两个二进制输出$a_ia_{i+1}a_{i+2}$和$a_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}$的特点，可将$a_ia_{i+1}a_{i+2}$看作进入结点$a_{i+1}a_{i+2}$的有向边，将$a_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}$看作离开结点$a_{i+1}a_{i+2}$的有向边，则循环序列$a_1a_2\cdots a_8$确定 8 个三位二进制

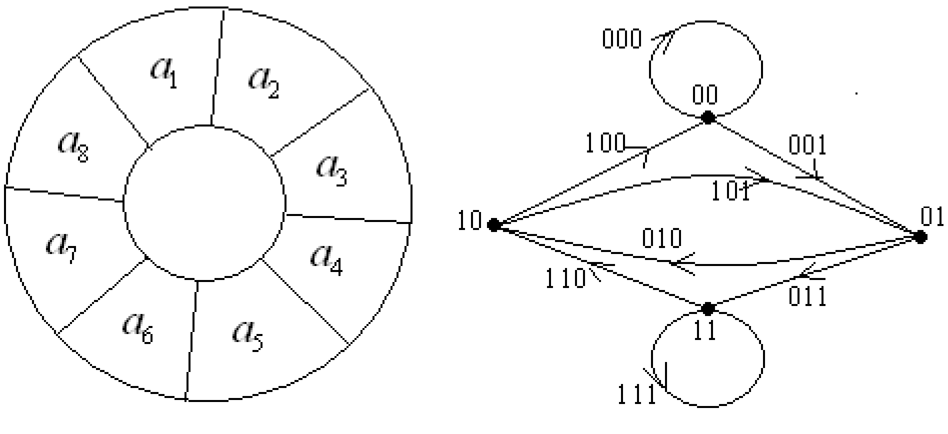


图 2.12

输出可由如下有向闭链：

$$a_1a_2 \xrightarrow{a_1a_2a_3} a_2a_3 \xrightarrow{a_2a_3a_4} a_3a_4 \xrightarrow{a_3a_4a_5} \cdots \xrightarrow{a_7a_8a_1} a_8a_1 \xrightarrow{a_8a_1a_2} a_1a_2$$

所表示，其上共 4 个结点（00，01，10，11）和 8 条边，形成一个有向欧拉图。反过来，我们只要得到此有向欧拉图，相应的一条有向欧拉闭链即可以确定所求循环序列$a_1a_2\cdots a_8$。如图 2.12 所示。得到一解：11100010

注 1：此问题的一般结论是：存在一个由2^n个二进制数组成的循环序列，使得2^n个由n个

连续的二进制数组成的输出全不相同。这样的循环序列通常称为笛波滤恩（DeBruijn）序列，对应构作的有向欧拉图称为笛波滤恩图，记作$G_{2,n}$。

注 2: 更一般地，设$\Sigma=\{0,1,\cdots,\sigma-1\}$（$\sigma\geq 2$）是字母表，$\Sigma$上长度为$n$的不同字共有$\sigma^n$个。笛波滤恩序列是$\Sigma$上的循环序列$a_0a_1\cdots a_L$（$L=\sigma^n$），对每一个长度为$n$的字$w$，存在唯一的$i$（$0\leq i\leq L-1$），使得$a_ia_{i+1}\cdots a_{i+n-1}=w$（其中下标按模$L$计算）。可以证明：对任意两个正整数$\sigma\geq 2$，$n\geq 2$，都存在笛波滤恩序列。类似前述，对应构造的笛波滤恩图记为$G_{\sigma,n}$。

例 3.4 （两只蚂蚁比赛问题）两只蚂蚁甲，乙分别在图 2-13 的结点a，b处，设图中各边长度相等，甲提出同乙比赛，各自从它们所处结点出发，走过图中所有边最后到达结点c。如果它们行走的速度相同，问谁更有机会获胜？

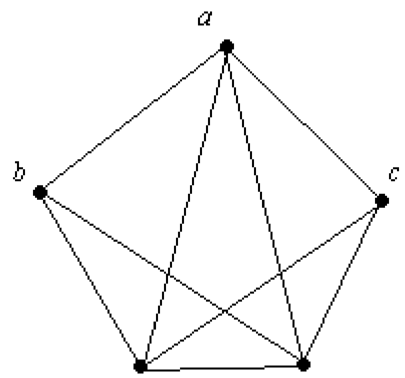


图 2.13

解：图 2.13 中，有两个奇结点b，c，因而存在从b到c的欧拉开链。蚂蚁乙只要沿着这条开链走即到不重复地走过图中所有边而到达目的地c；而蚂蚁甲要走过图中所有边最后到达结点c，至少得重复走一条边。所以蚂蚁乙更有可能获胜。

§2.4 哈密顿图

1859 年，威廉•哈密顿爵士（Sir William Hamilton）给出一个关于凸十二面体的数学游戏：他把十二面体的 20 个顶点比作 20 个城市，30 条棱表示这些城市之间的交通路线，如图 2.14 所示。哈密顿提出：能否周游此世界？即能否从某个城市出发，不重复地经过其他城市，又回到出发地？答案是肯定的。图 2.14 箭头指示的道路就是一种实现方案。

对于任何连通图，都可以提出这个问题。

定义 4.1 无向图G的一条过全部结点的回路（道路）称为G的哈密顿回路（道路）。简记为H回路（道路）；包含H回路（道路）的图称为哈密顿图（半哈密顿图），简称H图（半H图）。

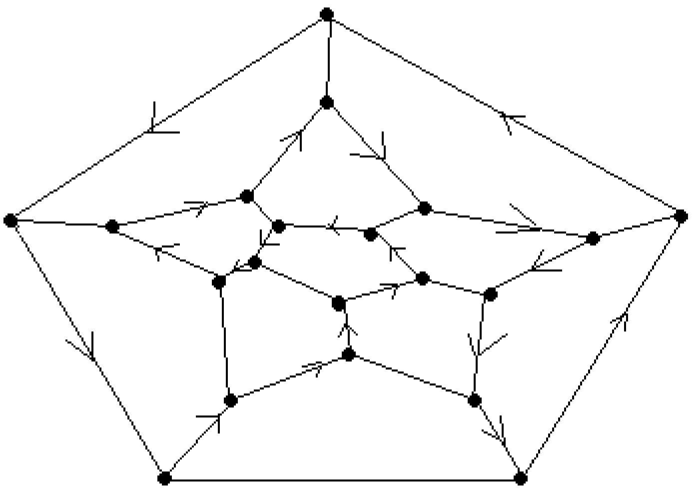


图 2.14

注 1：哈密顿图（半哈密顿图）是连通图。

注 2: 因为回路或道路中不包含自环和重边，所以对于无向图G来说，删去它的自环和重边，对于它是否包含H回路（道路）没有影响，所以本节限于讨论简单图，且设$n \geq 3$。

例 4.1 完全图K_n（$n \geq 3$）是H图。

迄今并无判断一个图是否H图的准则，只有某些关于图是H图的充分条件或必要条件。

定理 4.1 若无向图G是H图，则对于结点集$V(G)$的每个非空真子集，X 均有

$$\kappa(G - X) \leq |X| \tag{4.1}$$

证明：设C是G的一个H回路，因为$\kappa(G - X) \leq \kappa(C - X)$，所以只需证，$\kappa(C - X) \leq |X|$。对$|X|$施行归纳，当$|X| = 1$时，$C - X$是一条道路，$\kappa(C - X) = 1 = |X|$；假设当$|X| < r$（$2 \leq r < n$）时，$\kappa(C - X) \leq |X|$，且$C - X$的每个连通分支是一条道路，当$|X| = r$时，取$v_0 \in X$，则$C - X \leq (C - (X - v_0)) - v_0$，从而$\kappa(C - X) \leq \kappa(C - (X - v_0)) + 1 \leq |X| - 1 + 1 = |X|$，且$C - X$的每个连通分支是一条道路。

例 4.2 图 2.15 不是哈密顿图，因$\kappa(G - v) = 2 > |v|$。

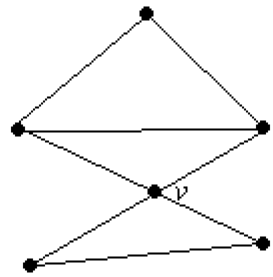


图 2.15

例 4.3 图 2.16 所示的皮得森（Petersen）图，满足(4.1)，但它不是 H 图，说明(4.1)不是 H 图的充分条件。

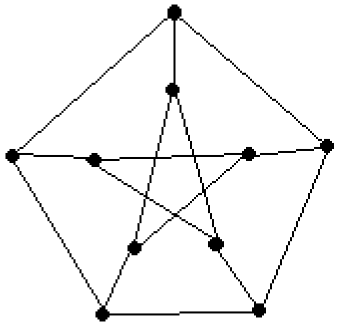


图 2.16

我们下面给出 H 图的一个充分条件。

引理 4.1 对于无向简单图 G 中的任意一条极长道路 $P = v_1 \cdots v_l$（$l \ge 3$），若 $d(v_1) + d(v_l) > l - 1$，则 G 中存在回路 C，使得 $V(C) = V(P)$。

证明：因为 P 是极长道路，所以 v_1 和 v_l 的邻点都在 P 上，即 $N(v_1) \subseteq \{v_s : 2 \le s \le l\}$，$N(v_l) \subseteq \{v_{s-1} : 2 \le s \le l\}$。

若 $d(v_1) + d(v_l) > l - 1$，则存在 s，$2 \le s \le l$，使得 $v_s \in N(v_1)$ 和 $v_{s-1} \in N(v_l)$。如图 2.17 所示，结果得到一个回路 C，满族 $V(C) = V(P)$。

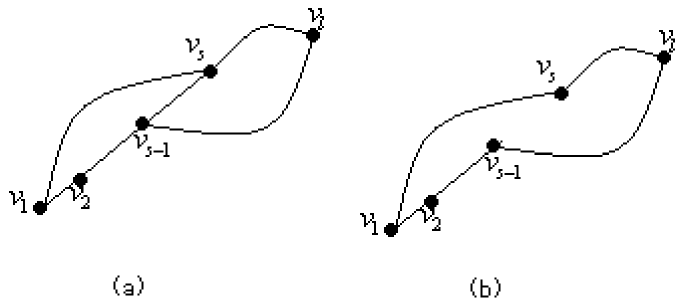


图 2.17

定理 4.2 如果简单图 G 的任意两不同结点 u, v 均满足：$d(u) + d(v) \ge n - 1$，则 G 中存在哈密顿道路。

证明：先证 G 是连通图。若 G 不是连通图，则存在不连通的两个不同结点 u 和 v，显然 u 和 v 互不相邻且没有共同邻点，从而 $d(u) + d(v) \le n - 2$，这与题设矛盾。下面证 G 中存在 H 道路。设 $P = v_1 \cdots v_l$ 是 G 中的一条最长道路，若 $l < n$，因为 $d(v_1) + d(v_l)$ $\ge n - 1 > l - 1$，由引理 4.1 得，G 中存在回路 C，使得 $V(C) = V(P)$。不妨设 $c = v_1 \cdots v_p v_1$。又因为 G 是连通图，所以存在 C 外某结点 u 与 C 上某结点 v_k 相邻，如图 2.18 所示，从而得到比 P 更长的一条道路，这与 P 的最长性矛盾。

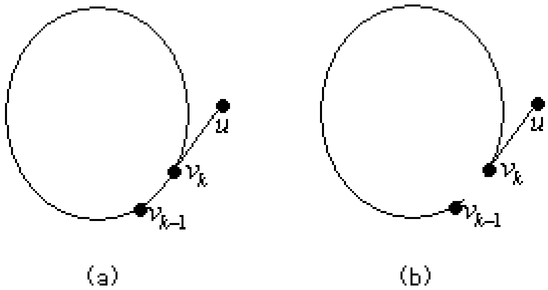


图 2.18

例 4.4 设n（$n \geq 3$）个人中，任何两个人合在一起都认识其余$n-2$个人，证明这n个人可以排成一队，使相邻者都互相认识。

证明：每个人用一个结点表示，若两人相互认识则对应的两结点间画一条无向边，如此形成一个无向简单图G。问题转化为证明G中存在H道路。对任何一个人v来说，v不认识的人数至多为1，否则，设u_1和u_2是v不认识的两人，结果u_1和u_2合在一起不认识v，这与题设矛盾。所以，$\delta(G) \geq n-2$，从而对G中任意两个不同结点u,v，有$d(u)+d(v)$ $\geq 2n-4 \geq n+3-4 = n-1$。由定理 4.2 知，$G$中存在$H$道路。

推论 4.1 如果简单图G的任意两不同结点u,v均满足：$d(u)+d(v) \geq n$，则G中存在哈密顿回路。

证明：对哈密顿道路应用引理 4.1。

推论 4.2 如果简单图G满足：$\delta(G) \geq \dfrac{n}{2}$，则$G$是哈密顿图。

下面介绍一个更强的哈密顿图的存在定理。

引理 4.2 设G是无向简单图，u,v是G的不相邻结点，且满足：$d(u)+d(v) \geq n$，则G是H图的充要条件是：$G+(u,v)$是H图。

证明：必要性显然。来证充分性：不妨设$G+(u,v)$的H回路经过边(u,v)，删掉(u,v)即得到G中的一条以u,v为端点的H道路，又因为$d(u)+d(v) \geq n$，由引理 4.1 知，G中存在H回路，即G是H图。

定义 4.2 对无向简单图 G，令 $G_0 = G$，再令 $G_1 = G_0 + (u_0, v_0)$，$\cdots$，$G_{i+1} = G_i + (u_i, v_i)$，$\cdots$，其中 u_i, v_i 是无向简单图 G_i 中的不相邻结点，且满足 $d_{G_i}(u_i) + d_{G_i}(v_i) \ge n$，直至存在 k（$0 \le k < \frac{1}{2}n(n-1)$），使得 G_k 中不存在两不相邻结点 u, v 满足 $d(u) + d(v) \ge n$。G_k 称为 G 的闭合图，记作 $C(G)$。

引理 4.3 无向简单图 G 的闭合图 $C(G)$ 是唯一的，即与定义 4.2 中如何往 G 中添加边的操作过程无关。

证明：设 $C_1(G)$ 和 $C_2(G)$ 是 G 的两个闭合图，生成 $C_1(G)$ 和 $C_2(G)$ 的过程中往 G 中添加的边集分别是 E_1，E_2，来证 $E_1 = E_2$。否则，必有 $E_1 \not\subseteq E_2$ 或 $E_2 \not\subseteq E_1$，不妨设为前者。设在形成 $C_1(G)$ 的过程中，E_1 中的边被添加的顺序为 $e_1, \cdots, e_r$，e_i 是其中第一条不属于 E_2 中的边，即 $e_1, \cdots, e_{i-1} \in E_2$，但 $e_i \notin E_2$。设 $\tilde{G} = G + \{e_1, \cdots, e_{i-1}\}$，则 $\tilde{G} \subset C_1(G)$，$\tilde{G} \subseteq C_2(G)$。由于构作 $C_1(G)$ 的过程中，还需往 $\tilde{G}$ 中添加边 $e_i = (u, v)$，所以 $d_{\tilde{G}}(u) + d_{\tilde{G}}(v) \ge n$，从而 $d_{C_2(G)}(u) + d_{C_2(G)}(v) \ge n$，这与 $(u, v) \notin C_2(G)$ 和 $C_2(G)$ 的闭合性矛盾。

定理 4.3 无向简单图 G 是 H 图 $\Leftrightarrow$ $C(G)$ 是 H 图。

证明：设 $C(G) = G + \{e_1, \cdots, e_r\}$，由引理 4.2 知，$G$ 是 H 图 $\Leftrightarrow$ $G + e_1$ 是 H 图 $\Leftrightarrow$ $G + e_1 + e_2$ 是 H 图 $\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$ $G + e_1 + \cdots + e_r$ 是 H 图。

例 4.5 设 G 是无向简单图，若 $C(G)$ 是完全图，则 G 是 H 图。

例 4.6 $2k+1$ 阶 k 正则图必是 H 图。

证明：留作思考题。

例 4.7 证明：图 2.19 所示的图中没有 H 回路。

证明：经观察，图是二部图，结点数为 13，只有偶回路，所以不可能存在 H 回路。

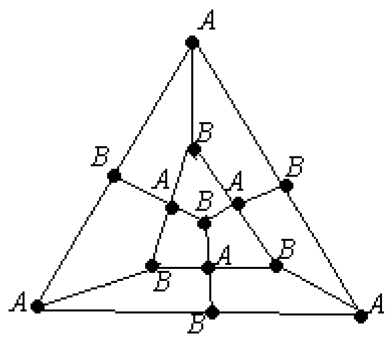


图 2.19

例 4.8 k 立方体（$k \ge 2$）是哈密顿图。

证明：我们知道，k 立方体（$k \ge 2$）$Q_k = Q_{k-1} \times K_2$，$Q_1 = K_2$，如果以 0 和 1 分别表示 Q_1（即 K_2）的两个结点，则 Q_2 的 4 个结点可表示为：00，01，10，11，Q_2 中的一条哈密顿回路为 $(00)(01)(11)(10)(00)$；设 Q_k（$k \ge 2$）中的 2^k 个结点可表示为：v_1，$\cdots$，v_{2^k}，其中 v_i 表示字母表 $\{0,1\}$ 上的一个长度为 k 的字，Q_k 的一条哈密顿回路为 $v_1 \cdots v_{2^k} v_1$，则 Q_{k+1} 的 2^{k+1} 个结点可表示为 $(v_1 0)$，$\cdots$，$(v_{2^k} 0)$，$(v_1 1)$，$\cdots$，$(v_{2^k} 1)$，Q_{k+1} 的一条哈密顿回路为 $(v_1 0) \cdots (v_{2^k -1} 0)(v_{2^k} 0)(v_{2^k} 1)(v_{2^k -1} 1) \cdots (v_1 1)(v_1 0)$。

定义 4.3 对于由 2^n 个字长为 n 的不同二进制数组成的循环序列，如果每两个相邻的二进制数恰有一位数字不同，则称该循环序列为格雷码（Gray Code）。

每个格雷码对应着 n 立方体的一个哈密顿回路。

定义 4.4 若有向简单图 D 中每两个不同结点间恰有一条边，则称 D 为竞赛图。

定理 4.4 任意竞赛图 D（$n \ge 2$）必有 H 道路。

证明：对 D 的阶 n 施行归纳。当 $n = 2$ 时结论显然成立。假设当 $n = k$（$k \ge 2$）时，结论成立。则当 $n = k+1$ 时，设 $V(D) = \{v_1, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}\}$，$v_{k+1}$ 的内邻点集为 $N^-(v_{k+1}) = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$，外邻点集 $N^+(v_{k+1}) = \{v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_k\}$，则由归纳假设知，$D[N^-(v_{k+1})]$ 和 $D[N^+(v_{k+1})]$ 都有 H 道路，不妨分别设为 $v_1 v_2 \cdots v_r$ 和 $v_{r+1} v_{r+2} \cdots v_k$。则 $v_1 v_2 \cdots v_r v_{k+1} v_{r+1} v_{r+2} \cdots v_k$ 是 D 的 H 道路。

定理 4.5 任何强连通的竞赛图 D（$n \ge 3$）必是有向 H 图。

证明：论证由下面两个事实组成。

其一：D 中存在有向回路。这是因为，D 是强连通图，一条从 v_1 到 v_n 的路径和一条从 v_n 到 v_1 的路径可拼接成一个闭路径，闭路径由若干个有向回路组成。

其二：D 中若存在长度为 k（$3 \le k < n-1$）的有向回路，则必存在长度为 $k+1$ 的有向

回路。不妨设长度为k的有向回路为$C=v_1v_2\cdots v_kv_1$。C外的结点可分为两种情况：

（1）C外存在某结点u，使得C上既有u的内邻点又有u的外邻点，此时存在C上两连续结点v_r和v_{r+1}，使得v_r是u的内邻点，而v_{r+1}是u的外邻点，于是$v_1\cdots v_ruv_{r+1}\cdots v_kv_1$是$D$中长度为$k+1$的有向回路，如图 2.20(a)所示；

（2）否则，对C外任何结点来说v，要么C上的点全是v的内邻点，要么C上的点全是v的外邻点，设V_1是满足前者的结点构成的集合，V_2是满足后者的结点构成的集合。因为D是强连通图，所以存在$u\in V_1$，$w\in V_2$，使得$uw\in E(D)$，于是$v_1uwv_3\cdots v_kv_1$是D中长度为$k+1$的有向回路，如图 2.20(b)所示。

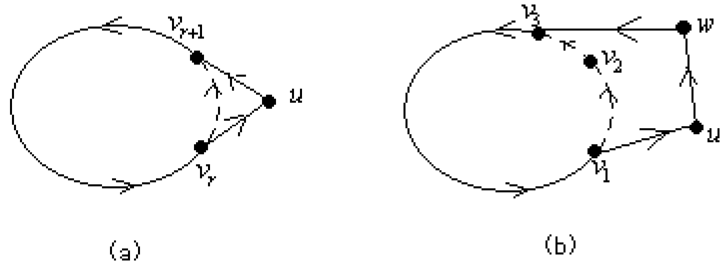


图 2.20

作业

1．设G为欧拉图，$v_0\in V(G)$，若从v_0开始沿着G中的边（不重复）行走，无论走到哪个结点处，都可以接着走遍没走过的边，然后回到v_0，则称v_0是可以任意行遍的。证明：v_0是可以任意行遍的当且仅当$G-v_0$中无回路。

2．如何将9个α，9个β，9个γ排成循环序列$x_1\cdots x_{27}$，使得对于字母表$\{\alpha,\beta,\gamma\}$上任何长度为3的字w，都存在i（$1\le i\le 27$），使得$x_ix_{i+1}x_{i+2}=w$。

3．设G为n阶无向简单图，边数$m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，证明$G$为哈密顿图；并举例说明，当$m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$时，$G$不一定是哈密顿图。

4．若二部图$G=(V_1,V_2;E)$中，$|V_1|\ne|V_2|$，则G是非哈密顿图。

5．对一个$3\times3\times3$的立方体，能否从一个角开始，通过所有27个$1\times1\times1$的小立方块各

一次，最后到达中心？试说明理由。

6. 设G是无向简单图，若从G的任意一点v_0出发，沿着G的边随意走向任何尚未经过的结点，总能走出一条哈密顿道路，则称G是随意哈密顿图。G是随意哈密顿图当且仅当G是K_n，C_n或$K_{n/2,n/2}$。