第四章 平面图与图的着色

本章讨论的图是无向图，因为图的平面性和着色都与边的方向无关。

§4.1 平面图

许多实际问题涉及图的平面性的研究，如单面印刷电路板的设计，大规模集成电路的布线等。此外，图的平面性在交通，通讯，城市建筑等方面都有广泛应用。

例 1.1 有三个小镇T_1，T_2，T_3，每个小镇都和三个工厂：水厂w，煤气厂G，电厂E有管道连接，如图 4.1(a)所示。如果在同一层铺设，可否是这些管道不相交？

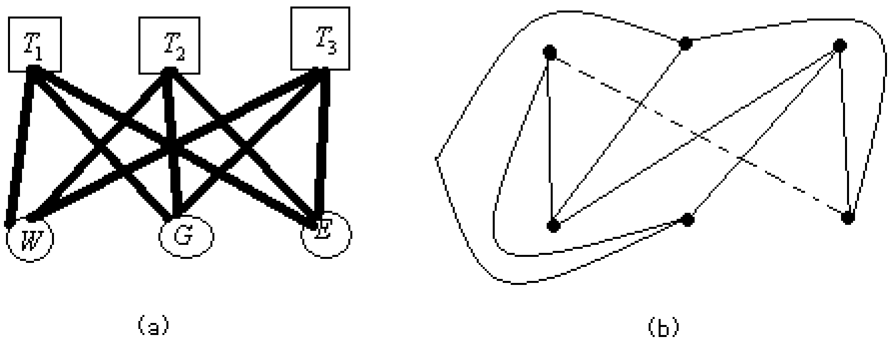


图 4.1

这个问题可以用 4.1(b)所示的二部图来表示，结点表示小镇或工厂，边表示管道。你会发现，如果要在一个平面中画出该图，使得所有边两两不交，这是不可能的。用图论的说法，就是该二部图不可平面化。

定义 1.1 若能把图G画在一个平面上，使任何两条边都不相交，就称G可嵌入平面，或称G是可平面图。可平面图在平面上的一个嵌入（画法）称为平面图。

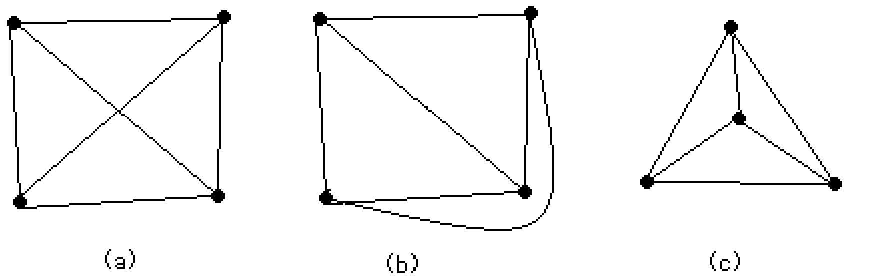


图 4.2

例 2.2 如图 4.2 所示，(b), (c)都是(a)的一个平面嵌入，因此(a)是可平面图，(b),(c)都是平面

图。

注 1: G 是可平面的等价于 G 是可球面的。
注 2：如果 G 是可平面图，则它的任何子图都是可平面图。

定义 4.2 设 G 是一个平面图，由它的若干条边所围成的区域内如果不含任何其它边，就称该区域为 G 的一个面或域，包围这个域的诸边称为该域的边界。

注 1: 在平面上，我们把平面图 G 外边的无限区域称为无限域，其他的域都叫内部域。如果两个域有共同的边界，就说它们是相邻的，否则是不相邻的。
注 2：割边只是一个域的边界，非割边一定是某两个域的公共边界。

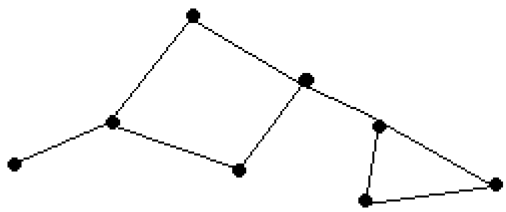


图 4.3

下面介绍平面图的基本定理：欧拉公式。

定理 1.1 设 G 是平面连通图，则 G 的域的数目是：$d = m - n + 2$。

证明：因 G 是连通图，可取它的一棵生成树 T。先从平面图 G 中删去 T 的弦，留下来的是平面图 T，T 只有一个无限域。然后逐一将 T 的弦加进来，每加入一条弦，就将某个域分割成两个域，所以域的数目增添 1。所以 G 的域的数目是：

$$d = 1 + (m - n + 1) = m - n + 2。$$

推论 1.1 若平面图 G 有 k 个连通分支，则 $d = m - n + k + 1$。

推论 1.2 对任意平面图 G，恒有：$n - m + d \geq 2$。（欧拉不等式）

例 1.2 设平面连通图没有割边，且每个域的边界数都是 t，则

$$m = \frac{t(n-2)}{t-2}。$$

推论 1.3 若 G 是阶不小于 3 的简单平面图，则 $m \leq 3n - 6$。

证明：如果 G 不含回路，则 $m \leq n - 1 < 3n - 6$。设 G 含回路，因为没有自环和重边，所以 G 的每个域的边界数不小于 3，所以 G 的边数 m 和域数 d 满足：$3d \leq 2m$，即

$d \le \dfrac{2}{3}m$，代入推论 1.2 中的欧拉不等式得：$n - m + \dfrac{2}{3}m \ge 2$，整理得：$m \le 3n - 6$。

例 1.3 若 G 是简单平面图，则 $\delta(G) \le 5$。

证明：不妨设 G 的阶大于 6。若 $\delta(G) \ge 6$，则由握手定理：$2m = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \ge 6n$，即 $m \ge 3n$，矛盾。

推论 1.4 若平面图 G 的每个域都由 4 条或更多条边围成，则 $m \le 2n - 4$。

证明：类似于推论 1.3 的证明。

下面介绍两个典型的非平面图：结点数最少的非平面图 K_5，边数最少的非平面图 $K_{3,3}$。

定理 1.2 K_5 和 $K_{3,3}$ 不是可平面图。

证明：对于 K_5，$n = 5$，$m = 10$，不满足 $m \le 3n - 6$，所以 K_5 不是可平面图。因 $K_{3,3}$ 是二部图，所以不含三角形。若 $K_{3,3}$ 是平面图，则它的每个域的边界数都不小于 4，所以应满足：$m \le 2n - 4$（推论 1.4）。但 $n = 6$，$m = 9$，矛盾。

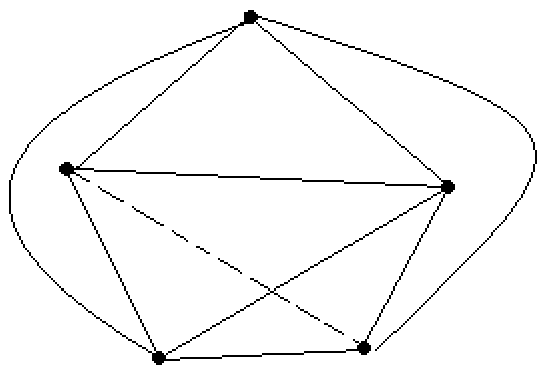


图 4.4

注：K_5 和 $K_{3,3}$ 分别称为 $K^{(1)}$ 图和 $K^{(2)}$ 图。

下面介绍的库拉托斯基定理告诉我们：本质上只有这两种非平面图。

定义 1.3 如果对图G施行若干此下述操作：

(a). 在图G的某条边中间插入一个结点，该结点将该边变成两条边；

(b). 将图G的某个结点度为2的结点所关联的两条边并成一条边。

得到图G'，则称G与G'同胚。

注：G是可平面图$\Leftrightarrow$ G的任意同胚图是可平面图。

定义 1.4 $K^{(1)}$和$K^{(2)}$图的所有同胚图分别称为$K^{(1)}$型图和$K^{(2)}$型图, 统称K型图。

定理 1.3 (Kuratowski, 1930) G是可平面图的充要条件是G没有K型子图。

这个定理从理论上看很漂亮，但仍不能借以方便地判断一个图是否可平面化。关于图的平面性检测算法 DMP 留给有兴趣的同学查阅有关书籍。

考虑平面图的对偶图，对有些问题是很方便的。

定义 1.5 设G是平面图，如下方法构造的图G^*称为G的对偶图。

1. G的每个域f_i内设置一点v_i^*作为G^*的结点；

2. 对G的非割边e_k，它必是G的某两域f_i和f_j的共同边界，画一条G^*的边$e_k^*=(v_i^*,v_j^*)$与e_k相交一次。

3. 对G的割边e_k，它必是某域f_i的边界，则画G^*的一条自环$e_k^*=(v_i^*,v_i^*)$与e_k相交一次。

注：可平面图在平面上有不同的画法，即有不同的平面图，这些平面图虽是同构的，却有可能对应着不同构的对偶图。

例 1.4 图 4.5 中，(a)图G_1与(b)图G_2同构，但G_1有一个域由五条边围成，而G_2没有这样的域，所以G_1^*与G_2^*不同构。

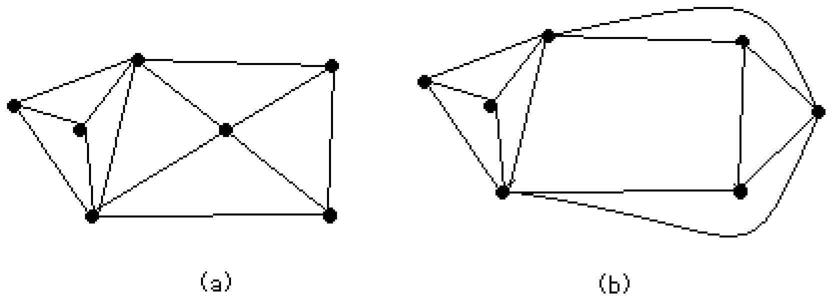


图 4.5

对偶图有如下性质：

性质 1.1 平面图G的对偶图G^*是唯一的，且$m^*=m$，$n^*=d$。

性质 1.2 G^*是连通图。

性质 1.3 若G是平面连通图，则$(G^*)^*$同构于G，且G与G^*的结点数，边数，域数满足下列关系：$n^*=d$，$m^*=m$，$d^*=n$。

性质 1.4 G的回路对应G^*的割集；G的割集对应G^*的回路。

利用对偶原理，可使某些问题变得简单。

例 1.5 设v_i和v_j是平面连通图无限域边界上的两个结点，求G中分离v_i和v_j的所有割集。

解：在无限域中添加边(v_i, v_j)，得到G_1。如图 4.6 所示，作G_1的对偶图G_1^*，则G_1^*中除(v_i^*, v_j^*)之外的从v_i^*到v_j^*的道路对应的诸边构成了G中分离v_i和v_j的割集。

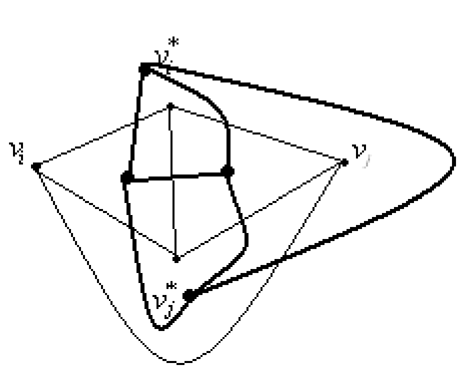


图 4.6

§4.2 图的着色

图的着色包括：点着色，边着色，平面图的域着色。

例 2.1 （点着色）六种货物要存放在仓库里，对每一种货物来讲，都有一些其他货物不能跟它放在同一个仓库，如图 4.7 所示，每个结点表示一种货物，每条边的两端点货物不能存放在同一个仓库，至少需要几个仓库存放这六种货物呢？

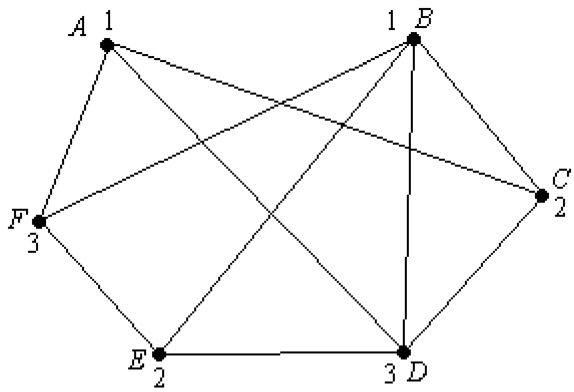


图 4.7

例 2.2 （边着色）五个球队进行比赛，不同的比赛可同时进行，如图 4.8 所示，以结点表示球队，每条边表示一场赛事，问：至少需要安排几个时间段进行比赛呢？

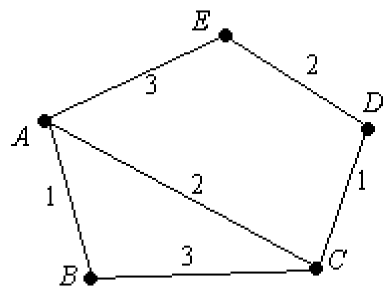


图 4.8

例 2.3 （平面图的域着色）地图着色问题。

这三类问题都可化为图的点着色问题：平面图的域着色可转化为其对偶图的点着色；而图G的边着色，可以通过下述方法构造一图G'：在G的每条边e_i上取一点v_i作为G'的结点，如果G的两边e_i和e_j相邻，则G'对应的两结点v_i和v_j相邻。

注：点着色只需考虑简单图。

关于图的着色问题，有著名的四色定理。

定理 2.1 （四色定理） 任何平面图G，其结点总可以用四种颜色来涂色，使得任何两相邻结点涂不同颜色。

1854 年英国青年格里思（Guthrie）在画地图时发现：如果要相邻两国着上不同颜色，那么画任何一张地图，四种颜色就够了。这就是地图的四色问题的由来。一直被人们称为“四色猜想”，知道 1976 年美国伊利诺斯大学的两位年轻教授阿佩尔（Apel）和黑肯（Haken）利用电子计算机证明了地图的四色猜想是正确的。他们将地图的四色问题化为两千多个特殊图的四色问题，然后在快速电子计算机上共计算了 1200 多小时，逐个验证了这两千多个特殊图。然而至今仍然没有得到通常的数学方法的证明。

较接近的一个结果“五色定理”早在 1890 年就由希伍德（Heawood）解决了。将四色问题的研究向前推进了一步。

定理 2.2（五色定理）任何平面图G的结点总可以用五种颜色来涂色，使得任何两相邻结点涂不同颜色。

证明：只需考虑简单平面图G即可。由本章例 1.3 知，$\delta(G)\le 5$。对G的结点数施行归纳。当$n\le 5$时，结论显然。设结点数为$n-1$时，结论成立，来考虑结点数为n的图G。取G中最小度结点v_0，则$d(v_0)\le 5$。由归纳假设知，$G'=G-v_0$可五着色。G'用五种颜色着好色后，将v_0放回，下面来考虑如何对v_0着色。若v_0的邻点没有用完五种颜色，则用剩余的某种颜色给v_0着色即可。否则，$d(v_0)=5$，且它的五个邻点恰好用了五种颜色，分别记为c_i（$1\le i\le 5$）。令$G_{1,3}$是G的由c_1和c_3着色的结点导出的子图，若v_1和v_3分别属于$G_{1,3}$的不同的连通分支，则将v_1所在连通分支各结点所着颜色c_1和c_3互换，这时v_1着c_3颜色，然后v_0可着c_1颜色，得到G的一个五着色。若v_1和v_3属于$G_{1,3}$同一个连通分支，那么一定存在v_1到v_3的结点交替着以c_1和c_3颜色的道路P，$(v_0,v_1)+P+(v_3,v_0)$构成一回路C，它把v_2和v_4分割在不同区域。这时，不可能存在从v_2到v_4的结点交替着以c_2和c_4颜色的道路，否则与 G是平面图矛盾，也就是说，在由着c_2和c_4颜色的结点导出的子图$G_{2,4}$中，v_2和v_4分别不同的连通分支，将将v_2所在连通分支各结点所着颜色c_2和c_4互换，这时v_2着c_4颜色，然后v_0可着c_2颜色，得到G的一个五着色。证毕。

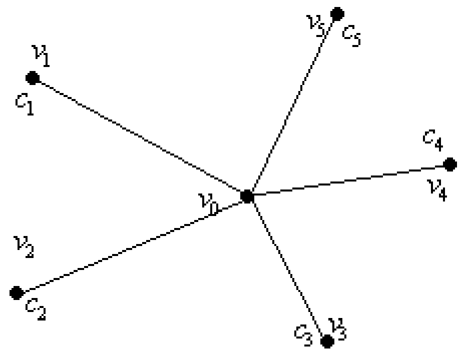


图 4.9

一般图的点着色问题可归结为研究它的色数和色数多项式。

定义 2.1 给定图G，满足相邻结点着以不同颜色所需的最少颜色数称为G的色数，记为$\gamma(G)$。

一些典型图的色数比较容易确定

1． 零图的色数是1;

2． $\gamma(K_n)=n$；

3． $\gamma(K_n-e)=n-1$；

4．若G是非空二部图，则$\gamma(G)=2$；特别地，若G是偶回路，则$\gamma(G)=2$；若G是非平凡树，则$\gamma(G)=2$。

5．若G是奇回路，则$\gamma(G)=3$。

对于一般简单图，怎样求得它的色数呢？下面介绍色数的一种求解方法。

定理 2.3 设v_i，v_j是简单图G的两个不相邻的结点，记$G_{i,j}=G+(v_i,v_j)$，$H_{i,j}=G\circ\{v_i,v_j\}$，则$\gamma(G)=\min\{\gamma(G_{i,j}),\gamma(H_{i,j})\}$。

根据定理 2.5，可以递归计算$\gamma(G)$。

例 2.4

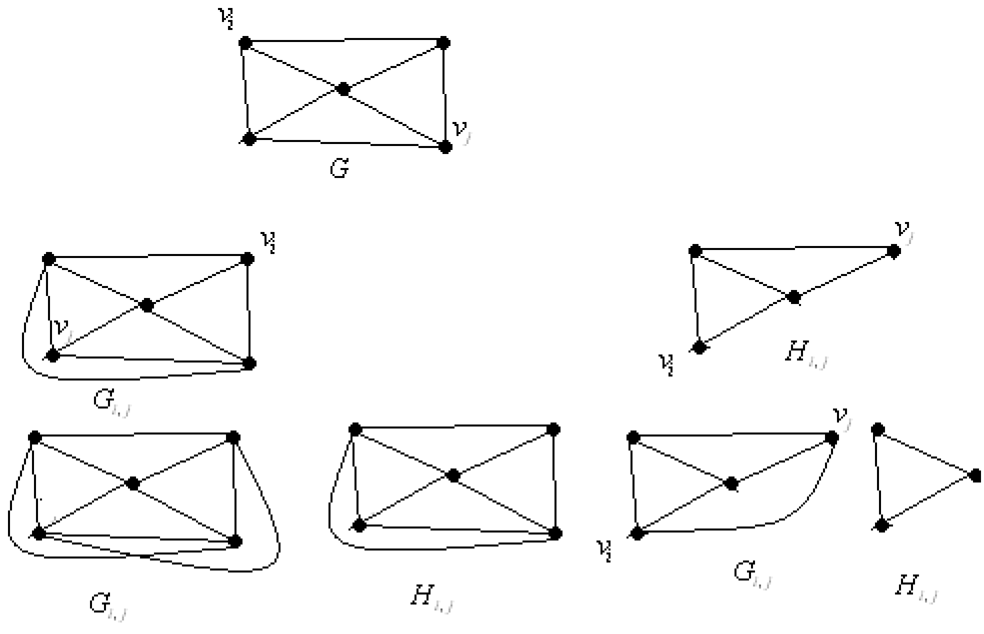


图 4.10

算法是指数复杂度的，事实上，最优着色问题（用最少颜色对图点着色）是 NP 难度的。下面介绍一个近似算法。

算法 2.1：贪心着色算法

颜色集：$\{1,\cdots,n\}$，着色：$\text{coloring}(v_i)\in\{1,\cdots,n\}$， $1\le i\le n$.

1.确定 n 个结点的一个顺序：$v_1,\cdots,v_n$ ，

2. $\text{coloring}(v_1)=1$

for $i\leftarrow 2$ to n do

$\text{coloring}(v_i)=\min\{\text{k}:1\le k\le n,\text{k}\notin\{\text{coloring}(v_j):1\le \text{j}<\text{i},v_j\in N(v_i)\}\}$

end

上述贪心算法所用的颜色数为：$\max\limits_{1\le i\le n}\text{coloring}(v_i)$

注：$\max\limits_{1\le i\le n}\text{coloring}(v_i)\le\Delta(G)+1$。

定理 2.4 对于任意简单图 G，$\gamma(G)\le\Delta(G)+1$。

证明: 对 G 的结点数 n 进行归纳。当 $n=1$ 时，结论显然成立。假设 $n=k-1$ 时，结论成立。当 $n=k$ 时，任取 G 的一个结点 v，则由归纳假设，$\gamma(G-v)\le\Delta(G-v)+1$ $\le\Delta(G)+1$，即可用 $\Delta(G)+1$ 种颜色对 $G-v$ 进行点着色。放回结点 v，由于 $d(v)\le\Delta(G)$，总可以用一种与 v 的邻点所着颜色都不同的颜色对 v 着色，故 $\gamma(G)\le\Delta(G)+1$。

这个定理可进一步改进为

定理 2.5（Brooks, 1941）：对于任意连通简单图 G，$\gamma(G)\le\Delta(G)$，除非 G 是完全图或奇回路。

另外一个改进为

定理 2.6 对任意简单图 G，$\gamma(G)\le\max\limits_{H是G的导出子图}\delta(H)+1$。

证明：当 $\gamma(G)=1$ 即 G 是零图时，结论显然成立。设 $\gamma(G)=k\ge 2$，令 H 是满足 $\gamma(H)=k$ 的任何一个 G 的极小导出子图，对 H 的任何结点 v 来说，都有 $\gamma(H-v)=k-1$，所以 $d_H(v)\ge k-1$，于是 $\delta(H)\ge k-1$，即 $\gamma(G)=k$ $\le\delta(H)+1$。

例 2.5 平面连通图 G 的域可 2 着色当且仅当 G 是欧拉图。

证明：平面连通图 G 的域可 2 着色 $\Leftrightarrow$ G^* 的结点可 2 着色 $\Leftrightarrow$ G^* 没有奇回路 $\Leftrightarrow$ $(G^*)^*$

的结点都是偶结点，即G的结点都是偶结点$\Leftrightarrow G$是欧拉图。

下面介绍色数多项式：$f(t,G)$，它表示用t中颜色对G进行点着色的不同方案数。

注 1：$t<\gamma(G)$时，$f(t,G)=0$；$t\geq\gamma(G)$时，$f(t,G)>0$。即$\gamma(G)$是满足$f(t,G)>0$的最小t值。

2: 四色定理可表述为：对任意平面图G，$f(4,G)>0$。

一般说来，令m_i表示恰好用i种颜色对G着色的方案数，则

$$f(t,G)=m_1C_t^1+m_2C_t^2+\cdots+m_nC_t^n。$$

所以$f(t,G)$是一个n阶多项式。

注：(1) $f(t,K_n)=t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)=P_t^n$；

(2) 对n阶树T_n，$f(T_n,t)=t(t-1)^{n-1}$。

定理 2.7 设v_i，v_j是简单图G的两个不相邻的结点，记$G_{i,j}=G+(v_i,v_j)$，$H_{i,j}=G\circ\{v_i,v_j\}$，则$f(t,G)=f(t,G_{i,j})+f(t,H_{i,j})$。

例 2.6 求长度为n的回路C_n的色数多项式。

解：长度为n的道路（两端点不同）P_n是树，所以$f(t,P_n)=t(t-1)^{n-1}$，将P_n的两端点连起来得到C_n，而将P_n的两端点粘起来得到C_{n-1}。由定理 2.6 得

$$f(t,P_n)=f(t,C_n)+f(t,C_{n-1}),$$

即，

$$t(t-1)^{n-1}=f(t,C_n)+f(t,C_{n-1}),$$

改写为

$$(-1)^n t(t-1)^{n-1}=(-1)^n f(t,C_n)-(-1)^{n-1}f(t,C_{n-1}),$$

递推求解得

$$(-1)^n f(t,C_n)=f(t,C_2)+(1-t)^n-(1-t)^2。$$

再利用$f(t,C_2)=t(t-1)$，得：$f(t,C_n)=(t-1)^n+(-1)^n(t-1)$。

作业

1．设G是n（$n \ge 11$）阶无向简单图，证明：G或$\overline{G}$必为不可平面图。

2．证明下图所示各图均为不可平面图。

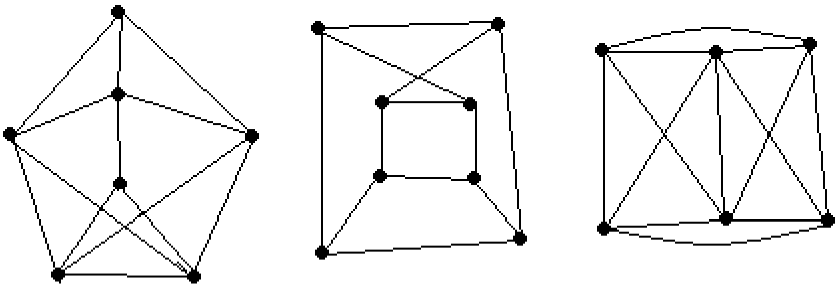
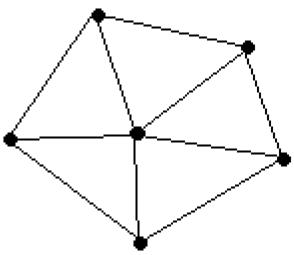


图 4.11

3. 画出所有6阶连通的简单非同构的不可平面图。

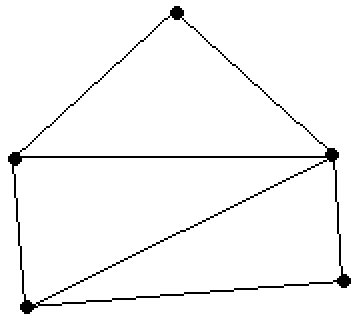
4. 证明超立方图Q_3是可平面图，但Q_4是不可平面图。

5. 求n阶轮形图$W_n = C_{n-1} + T_1$的色数与色数多项式。



6 阶轮形图

6. 求下图的色数与色数多项式。



7. 证明：存在G的n个结点的一个顺序：$v_1, \cdots, v_n$，使得依此顺序执行算法 2.1，算法所用颜色数是G的色数。