第五章 连通度·匹配·网络流

§5.1 连通度

5.1.1 割点、割边和块

我们已经知道，有些连通图删去某条边后就不连通了，这样的边叫割边。类似地，有些连通图删掉某个结点后就不连通了，这样的结点就称为割点。割边和割点都是关于图的连通强度的特征。

定义 1.1 设v是G中的一个结点，如果$G-v$的连通分支数比G多，就称v是G的一个割点。

注 1：若v是连通图G的一个割点，则$G-v$就是分离图。
注 2：树的分支点都是割点，树叶都不是割点。
注 3：对阶不小于3的连通图G来说，若G没有割点，则G没有割边。

定义 1.2 图G的极大的没有割点的连通子图称为块。

注：若图G没有割点，则G本身就是一个块。

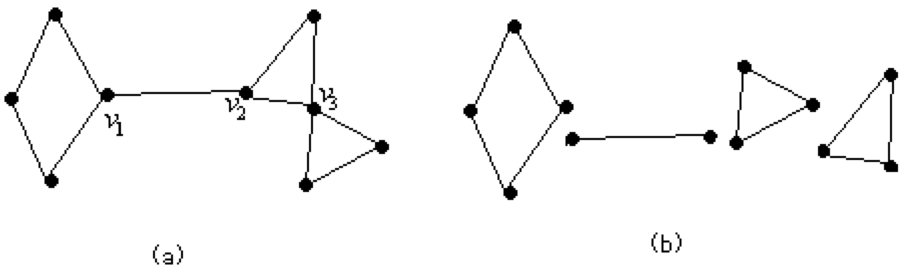


图 5.1

例 1.1 如图 5.1 所示， (a)图中，v_1，v_2，v_3是结点； (b)中各图是(a)图的所有块。

下面进一步讨论割点，割边和块的更多性质。

定理 1.1 设v是连通图G的一个结点，则下列论断等价。

1. v是G的一个割点；
2. 存在与v不同的两个结点u， w，使任意一条从u到w的道路$P_{u,w}$都经过v；
3. $V-v$可以划分为两个结点子集U和W，使得对任意$u\in U$和$w\in W$，结点v都在任意一条从u到w的道路$P_{u,w}$上。

证明：$1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$。

类似地有

定理 1.2 设e是连通图G的一条边，则下列论断是等价的。

1. e是G的一条割边；
2. e不属于G的任何回路；
3. 存在G的两个结点u，w，使得e属于任何u到w的道路$P_{u,w}$；
4. $G-e$的结点集可以划分成两个结点子集U和W，使得对任意$u \in U$和$w \in W$，G中任意从u到w的道路$P_{u,w}$都经过e。

注：定理 2.2 其实可看作定理 2.1 的推论。为看清这一点，我们边的剖分运算。称边e被剖分，是指用一条长度为2的道路来替代e，该道路的内部结点是新增添的一个结点v_e， 即边e被v_e剖分成两条边。G中某边e被剖分后的图设为G'，则e是G的割边$\Leftrightarrow$ v_e是G'的割点。

图 5.2

定理 1.3 (Whitney) 设G为n（$n \geq 3$）阶无向连通图，G是块当且仅当G中任意两个结点在同一回路上。

证明：充分性显然。来证必要性。设G是块，对任意两个不同结点u，v，来证u，v同在某一回路上。对距离$d(u,v)$施行归纳。当$d(u,v)=1$时，因边(u,v)不是割边，所以在$G-(u,v)$中存在从u到v的道路$P_{u,v}$，于是$(u,v)+P_{u,v}$即是所求回路。现在假设当$d(u,v)<k$时结论成立，来考察$d(u,v)=k$的情形。G中存在长度为k的u到v的短程线$P_{u,v}$，设w是

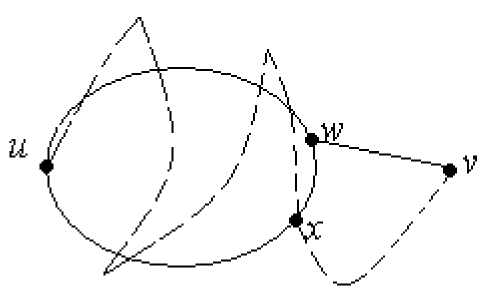


图 5.3

$P_{u,v}$上邻接v的结点，则$d(u,w)=k-1$，由归纳假设，u与w同在某回路C上。不妨设v不在C上，因w不是割点，所以$G-w$是连通的，在$G-w$存在u到v的道路$Q_{u,v}$(图5.3中虚线)，设$Q_{u,v}$与C的最后公共结点为x，则如图5.3所示，可得到同时包含u，v的回路$\tilde{C}=C-P_{w,x}+(w,v)+P_{x,v}$。

定理 1.4 设G是阶不小于3的连通图，则下列论断等价。

1. G是一个块；
2. G的任何两个结点同属于某回路；
3. G的任何一个结点和任何一条边同属于某回路；
4. G的任何两条边同属于某回路；
5. 给定任意两结点u，v和任意一条边e，存在一条包含e的道路$P_{u,v}$；
6. 对G的任意三个不同的结点u,v,w，存在道路$P_{u,w}$经过v；
7. 对G的任意三个不同的结点u,v,w，存在道路$P_{u,v}$不经过w。

证明：利用定理1.3和剖分运算，易知1，2，3，4等价。下面来证 3$\Rightarrow$5$\Rightarrow$6$\Rightarrow$7$\Rightarrow$1。

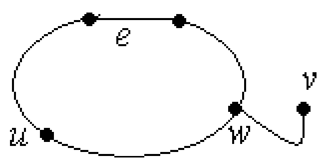


图 5.4

3$\Rightarrow$5：u与e同属于某回路C，设w是$G-u$中e的某端点到v的某道路与C的最后一个公共结点，则如图5.4所示，得到一条包含e的道路

$$P_{u,v}=C-P_{u,w}+P_{w,v}。$$

5$\Rightarrow$6$\Rightarrow$7$\Rightarrow$1 显然。

注: 在图G的边集E上可定义一个关系“$\sim$”：$e_1\sim e_2$当且仅当$e_1=e_2$或e_1与e_2同在某一回路上。可证明：$\sim$是E上的等价关系， $\sim$的等价类即是G的块。所以 G可表示为它的所有块的并（边不交）。

5.1.2 连通度

推广割点和割边的概念，得到点断集和边断集。

定义 1.3 若连通图G删去某些结点之后成为非连通图，则这些结点组成的集合称为G的一个点断集，记为A。并称

$$\mu(G)=\min_{A\text{是点断集}}|A|$$

为G的点连通度，简称G的连通度。规定完全图K_n的连通度为$n-1$，特别的，$\mu(K_1)=0$。

定义 1.4 记B为连通图G的断集，称

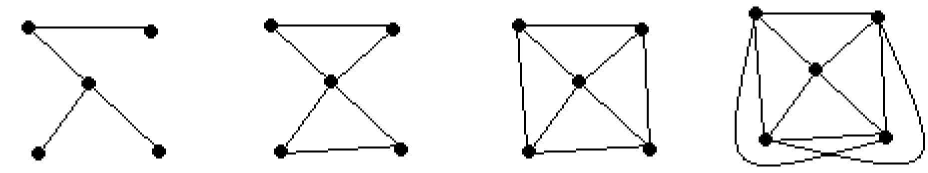
$$\lambda(G)=\min_{B\text{是断集}}|B|$$

为G的边连通度。

注 1：$\mu(G)=1\Leftrightarrow G$有割点；$\lambda(G)=1\Leftrightarrow G$有割边。

注 2：点连通度和边连通度反映了连通图的连通程度。完全图的连通程度最强，树的连通程度最弱。

例 1.2



(a) $\mu(G)=\lambda(G)=1$　(b) $\mu(G)=1,\lambda(G)=2$　(c) $\mu(G)=\lambda(G)=3$　(d) $\mu(G)=\lambda(G)=4$

图 5.5

下面定理揭示了点连通度，边连通度与最小结点度之间的关系。

定理 1.5 （Whitney）连通图G中，有

$$\mu(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)。$$

证明：设v是G中具有最小度的结点，与v关联的这$\delta(G)$条边是一个断集，所以$\lambda(G)\le\delta(G)$。下面证$\mu(G)\le\lambda(G)$。设B是G的一个最小断集（边数是$\lambda(G)$），B是由跨在某结点子集V_1与$\overline{V_1}$之间的所有边组成。分下列两种情况来取点断集。

(1) V_1（或$\overline{V_1}$）中存在结点v_0，与B中的任何边都不关联，则从V_1中删去所有与B中的边关联的结点，G将称为非连通图；

（2）V_1和$\overline{V_1}$的结点都与B中的边关联。删去V_1中除某一结点v_0之外的所有结点，再删

去 B 中与 v_0 相关联的边在 $\overline{V}_1$ 中的端点，则 G 将成为非连通图（或平凡图，此时 $G = K_n$，$\mu(G) = \lambda(G) = n-1$）。

上面两种情形删去的结点都构成点断集，其中结点的数目都不大于 B 中的边数，所以 $\mu(G) \le \lambda(G)$。

注：定理 1.5 中的两个不等号都可以成立。例如，对于 k 立方体 Q_k，$\mu(Q_k) = \lambda(Q_k) = \delta(Q_k) = k$ 。

例 1.3 如图 5.6 中，$\delta(G) = 4$，$\lambda(G) = 3$，$\mu(G) = 2$。

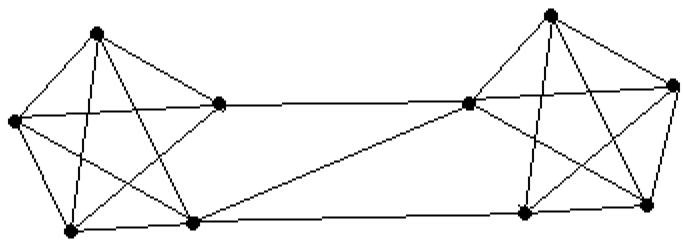


图 5.6

定义 1.5 G 是连通图，k 是正整数，若 $\mu(G) \ge k$，则称 G 是 k 连通图；若 $\lambda(G) \ge k$，则称 G 是 k 边连通图。

例 1.4 非平凡树是 1 连通图，也是 1 边连通图。回路 C 是 1 连通图，也是 2 连通图。至少 3 阶的块是 2 连通图，也是 2 边连通图。

定理 1.6 简单连通图 G 中，有

$$\mu(G) \le \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor。$$

证明: 因为 $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$，所以 $n\delta(G) \le 2m$，于是 $\delta(G) \le \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$，$\mu(G) \le \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$。

令 $f(k,n)$ 表示 n 阶 k 连通图的最少边数。定理 1.6 说明

$$f(k,n) \ge \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil。$$

那么对于任意$k \le n-1$，是否存在一个n阶k连通图G，满足$m = \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$呢？哈拉里（Harary, 1962）构造了这样的图，记为$H_{n,k}$。

哈拉里的构造方法如下：$H_{n,k}$的结点记为$1,2,\cdots,n-1$，分三种情形来构作$H_{n,k}$的边集

1. $k=2r$。若$i-j \le r \pmod n$，则$(i,j) \in E$。
2. $k=2r+1$，$n=2l$。若$i-j \le r \pmod n$，或$i-j=l \pmod n$，则$(i,j) \in E$。
3. $k=2r+1$，$n=2l+1$。若$i-j \le r \pmod n$，或$0 \le i \le l$，$j=i+l+1$，则$(i,j) \in E$。

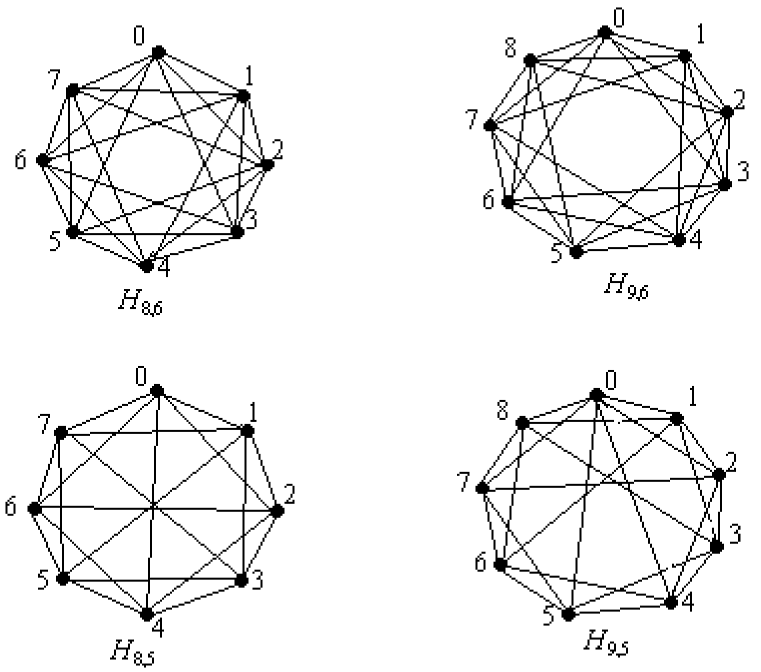


图 5.7

定理 1.7 $H_{n,k}$是k连通的。

证明：因为$\delta(H_{n,k})=k$，只需证明：$\mu(H_{n,k}) \ge k$即可。来证$H_{n,k}$的每个点断集至少含有k个结点。采用反证法，假定A是一个点断集，使得$|A|<k$，设i，j分别属于$H_{n,k}-A$的两个不同连通分支，记

$$S=\{i,i+1,\cdots,j\}，T=\{j,j+1,\cdots,i\}。$$

按三种构造情况分别讨论如下：

1. $k=2r$。由于$|A|<2r$，$i,j\notin A$，由抽屉原理，必有$|A\cap S|<r$或$|A\cap T|<r$，不妨设$|A\cap S|<r$，这时S中不可能有连续的r个结点属于A，于是$S-A$中一定存在若干结点$i_1,\cdots,i_m$，使得i_1-i，i_2-i_1，$\cdots$，i_m-i_{m-1}，$j-i_m\le r$（$\bmod n$），即$H_{n,k}-A$中存在i到j的道路$ii_1\cdots i_m j$，矛盾。

2. $k=2r+1$，$n=2l$。若$|A|<2r$，或$|A|=2r$但$|A\cap S|<r$或$|A\cap T|<r$，类似情形 1 可得矛盾。下面考虑$|A|=2r$，且$|A\cap S|=|A\cap T|=r$。由于$k\le n-1$，即$2r+1\le 2l-1$，所以$r\le l-1$。因为i，j不可能是对角线的两端点，所以S或T所含结点数不少于$l+2$（$|S|+|T|=n+2=2l+2$），不妨设$|S|\ge l+2$，则S中有i到j的道路。具体来说，可分两种情形：a. S中没有连续r个结点属于A；b. S中有连续r个结点属于A，此时注意到$|A\cap S|=r$，$r\le l-1$，并利用对角线，可知$S-A$中有i到j的道路。

3. $k=2r+1$，$n=2l+1$。类似 2 的论证。

综上所述，可知假设错误，所以$\mu(H_{n,k})\ge k$。证毕。

Hararry 构作这类图来源于一个实际问题：可靠通讯网的设计。

我们要设计一个有线通讯网，使得当几个通讯站点被毁坏时，其余的通讯站点仍然可以互相连通。显然，有两个要求是必要的：1. 毁坏后不影响连通的站点尽可能多；2. 造价要小。这个问题的数学模型如下：G是加权连通图，k是给定的正整数，求G的有最小权的k连通生成子图。当$k=1$时，即是求最小生成树；当$k>1$时，是尚未解决的难题之一。

当$G=K_n$，每边权皆为1时，Hararry 图即是解。

下面介绍两个关于连通度的存在性定理。

定理 1.8 设G是n阶简单图，k是一个正整数，假定G的结点度满足：$d(v_1)\le d(v_2)\le\cdots\le d(v_n)$，且当$1\le r\le n-1-d(v_{n-k+1})$时，有$d(v_r)\ge r+k-1$，则$G$是$k$连通图。

证明：假设G不是k连通图，则存在G的一个点断集A，满足$|A|=a<k$。设H是$G-A$中含结点数（设为h）最少的一个连通分支，最大结点度$\Delta(H)\le h-1$，所以H中每个结点在G中的结点度都不大于$a+h-1$，所以$d(v_h)\le \max\limits_{v\in H} d(v)\le a+h-1$ $<h+k-1$，不满足题设中的不等式，所以，$h>n-1-d(v_{n-k+1})$，(*)。又$G-A$中任意结点在G中最多与$n-1-h$个结点相邻，所以，$d(v_{n-a})\le \max\limits_{v\in V-A} d(v)\le n-1-h$，即 $h\le n-1-d(v_{n-a})$ (**)。对比 (*) 和 (**) 得，$d(v_{n-a})<d(v_{n-k+1})$，故 $n-a<n-k+1$，即$a>k-1$，这与$a<k$矛盾。

定理 1.9 设G是n阶简单图，若$\delta(G)\ge\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明：此时，G一定是连通图，否则每个连通分支至少含$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$个结点，与$G$是$n$阶图矛盾。假定$\lambda(G)<\delta(G)$，则存在$G$的一个断集$B=E(V_1\times\overline{V_1})$，满足$|B|=\lambda(G)$。设$G[V_1]$的边数为$m_1$，则有，$|V_1|\delta(G)\le\sum\limits_{v\in V_1}d_G(v)=2m_1+\lambda(G)<|V_1|(|V_1|-1)$ $+\delta(G)$，导出$|V_1|>\delta(G)$。同理$|\overline{V_1}|>\delta(G)$。从而，$n=|V_1|+|\overline{V_1}|\ge 2(\delta(G)+1)$ $\ge 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2\ge n+1$，矛盾。

最后，不加证明地介绍两个定理（Menger 定理）。

定理 1.10 设G是n阶连通图，$k\le n-1$。G是k连通的$\Leftrightarrow$ G中任意两个结点间至少存在k条内部不交的道路。
定理 1.11 设G是n阶连通图，$k\le n-1$。G是k边连通的$\Leftrightarrow$ G中任意两个结点间至少存在k条边不重的道路。

作业

1. 设G是含n（$n\ge 3$）个结点的简单图，且$\delta(G)\ge n-2$，证明：$\mu(G)=\delta(G)$。

2. 证明：若v是简单图G的割点，则v一定不是补图$\overline{G}$的割点。

3. 设G是n阶无向简单图，$k \le n-1$，若$\delta(G) \ge \frac{1}{2}(n+k-1)$，证明：$G$是$k$连通图。

4. 证明：5.1.1 节最后一段定义的图G的边集E上的二元关系“～”的相关结论。

5. 设连通图G存在割点，证明：G中任意两个不同的块至多有一个公共结点，且公共结点必是割点。

6. 设连通图G存在割点，如下定义图G的**块割图**H：G的每个割点和每个块分别对应H的一个结点，若G的某割点在某块中，则两者对应的结点连成H的一条边。证明：H是一棵非平凡树，其叶子结点必对应于G的块，这样的块称为叶子块。

§5.2 二部图的匹配

例 2.1 m项工作要安排给n个工人去做，每个工人能做的工作如图 5.8 所示，其中结点x_i（$1 \le i \le n$）表示工人，结点y_j（$1 \le j \le m$）表示工作，边(x_i, y_j)表示工人x_i能做工作y_j。如果每个工人只能做一项工作，且每项工作只需要一个工人来做，问：怎样安排才能使可能多的工作有人做？问题归结为找二部图G的一个边子集M，要求M中的边互不相邻（这样的边集称为匹配），且要求M中的边数尽可能多（此时，称M为G的最大匹配）。

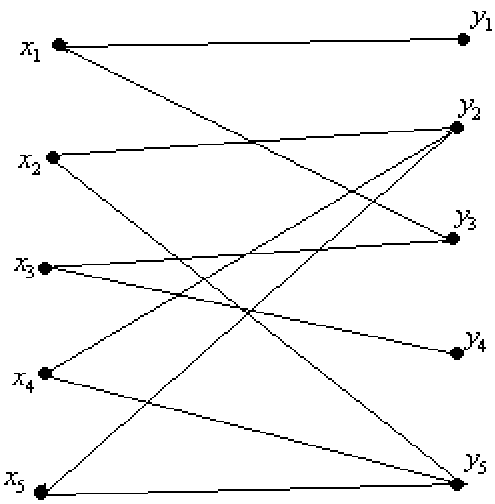


图 5.8

例 2.1 是一个典型的二部图的匹配问题，其实匹配的问题并不局限于二部图。

例 2.2 旅游团给n个游客分配客房，每个客房可安排 2 人，但由于性别，起居习惯等原因，并不是任何两人都可同住一间客房。如图 5.9 所示，结点v_i（$1 \le i \le n$）表示游客，边(v_i, v_j)表示游客v_i与v_j可同住。问：如何安排住宿，占用的客房最少？此问题可归结为简单图的最大匹配。

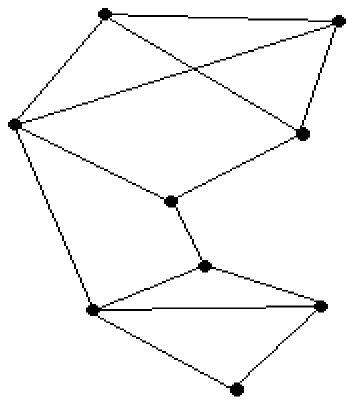


图 5.9

下面约定G是无向连通图。

定义 2.1 设M 是图G的边子集，若M 中任意两边不相邻，则称M 是G的一个匹配。与M 中的边关联的结点称为M 的饱和点，其余的结点称为M 的非饱和点。

定义 2.2 设M 是图G的一个匹配，如果对G的任意匹配M'，都有$|M| \geq |M'|$，则称M是G的一个最大匹配。特别地，如果G的每个结点都是M 的饱和点（此时，$|M| = \frac{|V|}{2}$），就说M 是G的完美匹配。

定义 2.3 给定G的一个匹配M，G中属于M 与不属于M 的边交替出现的道路称为关于M 的交错道路。

定义 2.4 设P是G中关于匹配M 的一条交错道路，如果P的起点和终点都是关于M 的非饱和点，则称P是关于M 的可增广道路。

注：可增广道路的首尾两条边都是M 外的边，所以p中包含包含奇数条边，且其中不属于M 的边比M 中的边多一条。同时，$M' = p \oplus M$ 仍然是G的一个匹配，且p上所有点都是M'的饱和点，$|M'| = |M| + 1$，即M'是比M 更大的匹配。M 的饱和点仍是M'的饱和点，称M'是M 的增广匹配。

定理 2.1 （Berge, 1957）M 是G的最大匹配当且仅当G中不存在关于M 的可增广道路。

证明：必要性由上面的注记可知。来证充分性。取G的一个最大匹配M'，构作$G' = M' \oplus M$。如果G'不是空图，则显然$\Delta(G') \leq 2$，所以G'的连通分支无非有两种可能的情形，其一：M'中的边与M 中的边交错构成的偶回路。其二：M'中的边与M 中的边交错构成的道路P，P应含偶数条边，否则，P是M 或M'的增广道路。依此可知，$|M'| = |M|$。这说明M 也是最大匹配。

定理 2.1 是二部图乃至一般图最大匹配算法的依据。二部图的最大匹配算法较为简单，我们将着重加以介绍。

二部图$G=(X,Y,E)$的最大匹配M包含的边数总不会超过$\min\{|X|,|Y|\}$，当$|M|=\min\{|X|,|Y|\}$时，M称为完全匹配。

定义 2.5 设M是二部图$G=(X,Y,E)$的匹配，若$|M|=|X|$，则称M是G的从X到Y的完全匹配。

注 1：若M是G的从X到Y的完全匹配，则X中的结点全是M的饱和点，M显然是最大匹配。

注 2: 如果$|M|=|X|=|Y|$，M即是完美匹配。

那么满足什么条件的二部图就会有完全匹配呢？霍尔（Hall）于 1935 年给出一个判别准则。

定理 2.2 （Hall）在二部图$G=(X,Y,E)$中，X到Y存在完全匹配的充要条件是，对于X的任意子集A，恒有$|N(A)|\geq|A|$。　　(*)

证明：必要性：因为A全是M的饱和点，相应地，$N(A)$中必至少包含$|A|$个M的饱和点，所以$|N(A)|\geq|A|$。

充分性：若(*)成立，假如不存在从X到Y的完全匹配，取G的一个最大匹配M，则存在$u\in X$是M的非饱和点。设Z是通过M的交错道路与u连通的结点组成的集合，则$u\in Z$，且$Z-\{u\}$中的点全是M的饱和点，否则会形成关于M的可增广道路。记$S=X\bigcap Z$，$T=Y\bigcap Z$，注意到

1. T中的所有点都匹配到S中的点，所以$T\subseteq N(S)$；
2. $N(S)\subseteq T$；

则有：$u\in S$，$S-\{u\}$中的点与T中的点一一配对，且$N(S)=T$。所以$|N(S)|=|S|-1$，矛盾。

推论 2.1 设k是一正整数，若在二部图$G=(X,Y,E)$中，每个X的结点x，都有$d(x)\geq k$，每个Y的结点y，都有$d(y)\leq k$，则存在从X到Y的完全匹配。

证明：对 X 的任意子集 A，设 A 的结点总共与 m 条边关联，$N(A)$ 的结点总共与 m' 条边关联，则 $k|A| \le \sum_{x \in A} d(x) = m \le m' = \sum_{y \in N(A)} d(y) \le k|N(A)|$，于是 $|A| \le |N(A)|$。

推论 2.2 在二部图 $G=(X,Y,E)$ 中，M 是最大匹配 $\Leftrightarrow$ 对于任意 M 的非饱和点 $u \in X$，都存在 X 的子集 S，使得 $u \in S$，$S-\{u\}$ 中的点都是 M 的饱和点，且 $|N(S)|<|S|$。

证明：$\Rightarrow$：参看定理 2.2 的证明。$\Leftarrow$：若 M 不是最大匹配，设 M' 是 M 的一个增广匹配，$u \in X$ 是 M' 的饱和点但不是 M 的饱和点，则对于所有的满足下列条件的 X 的子集 S：$u \in S$，$S-\{u\}$ 中的点都是 M 的饱和点，都有 $|N(S)| \ge |S|$。这是因为 S 中的点全是 M' 的饱和点。矛盾。

定义 2.6 设 M 是二部图 $G=(X,Y,E)$ 的一个匹配，$u \in X$ 是 M 的一个非饱和点，若存在 X 的子集 S，使得 $u \in S$，$S-\{u\}$ 中的点都是 M 的饱和点，且 $|N(S)|<|S|$，则称 u 是 M 的不可饱和点。

推论 2.3 设 M 是二部图 $G=(X,Y,E)$ 的一个匹配，u 是 M 的不可饱和点，M' 是 M 的一个增广匹配，则 u 也是 M 的不可饱和点。

证明：只需证 u 不可能是 M' 的饱和点即可。参见推论 2.2 的证明。

下面将介绍的求最大匹配的算法以推论 2.2 和 2.3 为理论依据。该算法是 Edmonds（1965）给出，称为匈牙利算法。其基本步骤是：先作一个初始匹配 M（M 可以是空集)，对于 X 中 M 的每一个非饱和点 x，试图找到以 x 的可增广道路 P，若成功，则 M 被增广为 $M \oplus P$，否则，x 必是 M 的不可饱和点。当 M 的非饱和点都是不可饱和点时，M 即是最大匹配，算法结束。

匈牙利算法可描述如下：

说明：输入为二部图$G=(X,Y,E)$，在算法执行过程中，对结点作三种标记：0：表示结点是尚未处理的非饱和点；1：表示结点是饱和点；2：表示结点是X中的不可饱和点。

1. 作初始匹配M，X中的饱和点标记1，非饱和点标记0；
2. 判断X中的结点是否都有非0标记
   2.1 是，M即是最大匹配，算法结束。
   2.2 否，取一个0标记结点$x \in X$，令$U \leftarrow \{x\}$，$V \leftarrow \varnothing$（$|U|=|V|+1$，$N(U) \supseteq V$）；
3. 判断是否有$N(U)=V$？
   3.1 是，则x是不可饱和点，给x标记2；
   3.2 否，在$N(U)-V$中找一点y_i，判断y_i是否标1？
      3.2.1 是，则有边$(y_i,x_i) \in M$，令$U \leftarrow U \bigcup \{x_i\}$，$V \leftarrow V \bigcup \{y_i\}$，转 3;
      3.2.2 否，存在从x到y_i的可增广道路P，令$M \leftarrow P \oplus M$，给x,y_i标记1，转 2.

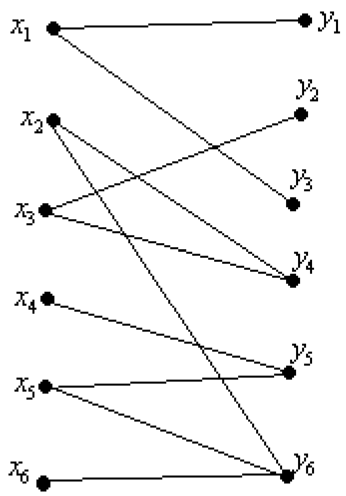


图 5.1

例 2.3 图 5.10 中，设初始匹配$M=\{(x_1,y_1),(x_3,y_4),(x_4,y_5)\}$，用匈牙利算法求最大匹配的过程如下：

1．$U \leftarrow \{x_2\}$，$V \leftarrow \varnothing$，$N(U)=\{y_4,y_6\}$，取$y_6 \in N(U)-V$，且非1标记，所以得增广道路$P=x_2y_6$，M增广（见图 5.11(a)）为$M=\{(x_1,y_1),(x_3,y_4),(x_4,y_5),(x_2,y_6)\}$；

2．$U \leftarrow \{x_5\}$，$V \leftarrow \varnothing$，$N(U)=\{y_5,y_6\}$

取 $y_5 \in N(U)-V$，$U=\{x_5,x_4\}$，$V=\{y_5\}$；$N(U)=\{y_5,y_6\}$，取$y_6 \in N(U)-V$，$U=\{x_5,x_4,x_3\}$，$V=\{y_5,y_6\}$；$N(U)=\{y_5,y_6,y_4,y_2\}$，取$y_2 \in N(U)-V$，非1标记，所以有增广道路$P=x_5y_6x_2y_4x_3y_2$。M增广（见图 5.11(b)）为$M=\{(x_1,y_1),(x_2,y_4),(x_3,y_2),(x_4,y_5),(x_5,y_6)\}$；

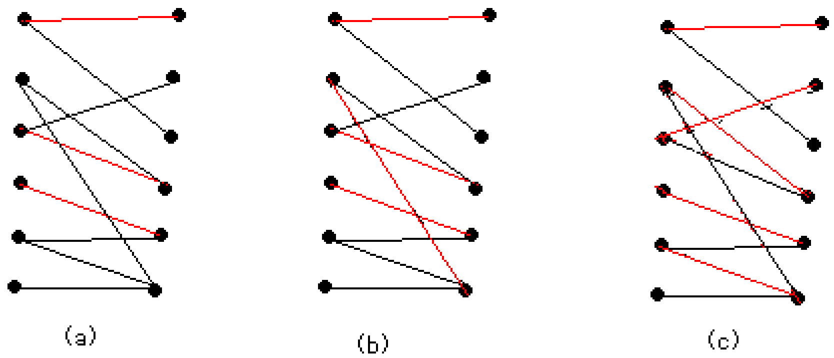


图 5.11

3．$U=\{x_6\}$，$V\leftarrow\varnothing$，$N(U)=\{y_6\}$，取 $y_6\in N(U)-V$，$U=\{x_5,x_6\}$，$V=\{y_6\}$；$N(U)=\{y_5,y_6\}$，取 $y_5\in N(U)-V$，$U=\{x_4,x_5,x_6\}$，$V=\{y_5,y_6\}$，$N(U)=\{y_5,y_6\}=V$，给 x_6 标记 2；

4．X 中无 0 标记结点，结束。

定理 2.3 二部图 $G=(X,Y,E)$ 的最大匹配的边数是 $|X|-\varepsilon(G)$，其中 $\varepsilon(G)=\max\limits_{A\subseteq X}\varepsilon(A)$，$\varepsilon(A)=\max\{|A|-|N(A)|,0\}$。

证明：首先说明 G 的最大匹配的边数不超过 $|X|-\varepsilon(G)$。不妨设 $\varepsilon(G)>0$。取 $A\subseteq X$，使得 $\varepsilon(A)=\varepsilon(G)$。对于 G 的任意匹配 M，A 中至多有 $|N(A)|$ 个饱和点，于是 $|M|\le|X-A|+|N(A)|=|X|-|A|+|N(A)|=|X|-\varepsilon(A)=|X|-\varepsilon(G)$。下面来构造一个边数为 $|X|-\varepsilon(G)$ 的匹配。断言：若 $A\subseteq X$，$\varepsilon(A)=\varepsilon(G)$，则 $(X-A)\bigcup(Y-N(A))$ 的导出子图 $G'=(X-A,Y-N(A),E')$ 满足：$\varepsilon(G')=0$。否则，存在 $B\subseteq X-A$，满足 $|N(B)\bigcap(Y-N(A))|<|B|$，于是 $|A\bigcup B|-|N(A\bigcup B)|=|A|+|B|-|N(A)|-|N(B)\bigcap(Y-N(A))|$ $>|A|-|N(A)|=\varepsilon(A)=\varepsilon(G)$。矛盾。对 $\varepsilon(G)$ 施行归纳。当 $\varepsilon(G)=0$ 时，存在完全匹配，即为所求。当 $\varepsilon(G)\ge 1$ 时，取 A 为满足 $\varepsilon(A)=\varepsilon(G)$ 的极小点集。于是，对任

意 $x_0\in A$，$\varepsilon(A-\{x_0\})=\varepsilon(G)-1$，此时，$N(A-\{x_0\})=N(A)$。考虑 $(A-\{x_0\})\bigcup N(A)$ 的导出子图 G''，则 $\varepsilon(G'')=\varepsilon(G)-1$，由归纳假设，存在 G'' 的匹配 M_1，使得 $|M_1|=|A-\{x_0\}|-\varepsilon(G'')=|A|-1-(\varepsilon(G)-1)=|A|-\varepsilon(G)$，再取 $(X-A)\bigcup(Y-N(A))$ 的导出子图 $G'=(X-A,Y-N(A),E')$ 的完全匹配 M_2，则 $M=M_1\bigcup M_2$ 是 G 的匹配，且 $|M|=|M_1|+|M_2|=A-\varepsilon(G)+|X|-|A|$

$=|X|-\varepsilon(G)$。

作业

1. 证明：在 8×8 的国际象棋棋盘的一条主对角线上移去两端的小方格后，所得棋盘不能用 1×2 的长方形恰好填满。
2. 一次舞会，共有 n 个小伙子和 n 个姑娘参加，已知每个小伙子至少认识两个姑娘，而每个姑娘至多认识两个小伙子，问能否将他们分成 n 对舞伴，使得每对中的姑娘与小伙子相互认识？
3. 有 5 个字符串 bc，ed，ac，bd 和 abe，能否用其中的一个字母代表该字符串并且不产生混淆？如果可以，试给出一种方案。
4. 由 $0,1$ 元素组成的矩阵每行都恰有 k 个 1 元素，每列 1 元素的数目都不超过 k 个。能否使 $A=P_1+P_2+\cdots+P_k$ 成立，其中 P_i（$1\le i\le k$）也是由 $0,1$ 元素组成的矩阵，且每行都恰有 1 个 1 元素，每列最多有 1 个 1 元素？

§ 5.3 网络流

网络流的实际背景是各种运输系统中运输量的规划问题，譬如航空，公路，铁路，水运的运输货物和旅客的调度问题，电话线和电力线传输信息和电能的设计问题，都可用网络流的模型加以研究。

定义 3.1 一个网络 $N(V,E,C)$ 是一个赋权有向简单弱连通图，满足

1. V 中恰有一个负度为 0 的结点 s，称为发点（源）；
2. V 中恰有一个正度为 0 的结点 t，称为收点（汇）；
3. 每条边 (v_i,v_j) 的边权 $c_{i,j}$ 是一个非负实数（通常是整数），称为该边的容量，

$C=(c_{i,j})_{(v_i,v_j)\in E}$ 称为网络的容量函数。

注 1: V 中除 s，t 以外的结点称为网络 N 的中间点；
注 2: 网络 N 可以看作：表示某种产品从产地 s 分批通过一些中间站点到达销地 t，V 中的结点表示各个站点，有向边 (v_i, v_j) 表示从站点 v_i 到 v_j 的运输线路，边上的容量表示运输线路的最大货物运载量（固定时间内），如图 5.12 所示。

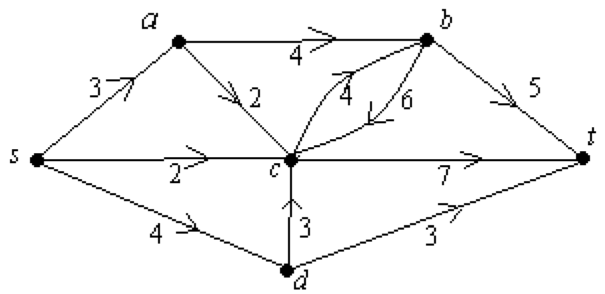


图 5.12

注 3：将货物从多个产地运往多个销地的运输问题也可用网络来表示，如图 5.13 所示，有两

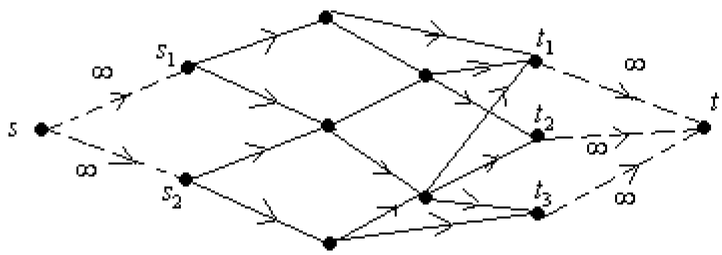


图 5.13

个产地 s_1，s_2，三个销地 t_1，t_2，t_3。可通过添加虚拟源点 s 和虚拟汇点 t 转化为网络，边 (s, s_i) 和边 (t_j, t) 的容量可合理地约定为 ∞，也可根据实际问题规定为其他值。

在给定一个网络 $N(V, E, C)$ 的情况下，我们就可以通过网络上的各段运输线路将货物从源点运送到汇点。当然各运输线路上的运输量不能超过容量，同时对中间点来说，进来的货物量等于出去的货物量。这样的调度条件可用容许流的概念来描述。

定义 3.2 如果在网络 $N(V, E, C)$ 的边集 E 上定义的一个非负实值函数 $f = (f_{i,j})_{(v_i, v_j) \in E}$ 满足下列条件

（1） 容量限制条件：对任意 $(v_i, v_j) \in E$，恒有 $f_{i,j} \le c_{i,j}$；

（2） 平衡条件：对每个中间点 v_k，恒有

$$\sum_{(v_k,v_j)\in E} f_{k,j} = \sum_{(v_j,v_k)\in E} f_{j,k}$$

则称 f 为网络 N 的一个容许流（可行流），称

$$w(f) = \sum_{(s,v_i)} f_{s,i}$$

为 f 的流量。所有 $f_{i,j}$ 的值称为 f 的分布。

定义 3.3 在给定容许流 f 的网络中，满足 $f_{i,j} = c_{i,j}$ 的边称为饱和边，其余的边称为非饱和边。

定义 3.4 设 F 是网络 $N(V,E,C)$ 的所有容许流组成的集合，称

$$f_0 = \arg\max_{f\in F} w(f)$$

为网络 $N(V,E,C)$ 的最大流。

下面考虑如何求最大流。为此，先介绍割切的概念。

定义 3.5 设 S 是 $N(V,E,C)$ 的一个结点子集，如果满足 $s\in S$，$t\in \overline{S}$，则 S 到 $\overline{S}$ 的所有有向边 (v_i,v_j)（$v_i\in S$，$v_j\in \overline{S}$）组成的集合称为 $N(V,E,C)$ 的一个割切，记为 $(S,\overline{S})$。$(S,\overline{S})$ 中所有边的容量之和

$$C(S,\overline{S}) = \sum_{(v_i,v_j)\in(S,\overline{S})} c_{i,j}$$

称为割切 $(S,\overline{S})$ 的容量。取最小容量值的割切称为最小割切。

例 3.1 在图 5.12 中，令 $S=\{s\}$，则 $(S,\overline{S}) = \{(s,a),(s,c),(s,d)\}$，$C(S,\overline{S}) = 9$；令 $S=\{s,a,c\}$，则 $(S,\overline{S}) = \{(s,d),(c,b),(c,t),(a,b)\}$，$C(S,\overline{S}) = 19$。

引理 3.1 设 f 是网络 $N(V,E,C)$ 的任一容许流，$(S,\overline{S})$ 是 N 的任一割切，则有

$$w(f) = \sum_{(v_k,v_i)\in(S,\overline{S})} f_{k,i} - \sum_{(v_j,v_k)\in(\overline{S},S)} f_{j,k} 。 \tag{3.1}$$

证明：为讨论方便起见，不妨认为网络的任何两结点间都有方向相反的两条边，只是规定本不存在的边上的容量和流量都是 0。对于源点 s，有

$$\sum_{v_i \in V} f_{s,i} - \sum_{v_j \in V} f_{j,s} = w(f)\,, \tag{3.2}$$

对于任意中间点v_k，有

$$\sum_{v_i \in V} f_{k,i} - \sum_{v_j \in V} f_{j,k} = 0\,, \tag{3.3}$$

(3.2)式与所有关于$k \in S - \{s\}$的(3.3)式相加得到

$$w(f) = \sum_{v_k \in S, v_i \in V} f_{k,i} - \sum_{v_k \in S, v_j \in V} f_{j,k}$$

$$= \left(\sum_{v_k \in S, v_i \in S} f_{k,i} + \sum_{v_k \in S, v_i \in \overline{S}} f_{k,i} \right) - \left(\sum_{v_k \in S, v_j \in S} f_{j,k} + \sum_{v_k \in S, v_j \in \overline{S}} f_{j,k} \right)$$

$$= \sum_{v_k \in S, v_i \in \overline{S}} f_{k,i} - \sum_{v_k \in S, v_j \in \overline{S}} f_{j,k} = \sum_{(v_k, v_i) \in (S, \overline{S})} f_{k,i} - \sum_{(v_j, v_k) \in (\overline{S}, S)} f_{j,k}$$

注：将$S = V - \{t\}$，$\overline{S} = \{t\}$代入(3.1)式得

$$\sum_{v_i \in V} f_{i,t} - \sum_{v_j \in V} f_{t,j} = w(f)\,。 \tag{3.4}$$

这说明，对任意容许流来说，源点发出的货物量总等于汇点接受的货物量。

定理 3.1 设f是网络$N(V,E,C)$的任一容许流，$(S,\overline{S})$是N的任一割切，则有

$$w(f) \le C(S,\overline{S})\,。$$

注：若存在容许流f和割切$(S,\overline{S})$，使得$w(f) = C(S,\overline{S})$，则必有：f是最大流，$(S,\overline{S})$是最小割切。事实上，有

定理 3.2 （最大流与最小割切定理， Ford-Fulkerson，1956）若f是网络$N(V,E,C)$的最大流，则f的流量等于N的最小割切的容量。

为证明定理 3.2, 我们需要引进增流路径的概念。

定义 3.6 设f是网络$N(V,E,C)$的任一容许流，称道路（作为无向道路）$v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_k}$是$f$的增流路径，如果

1. $v_{i_0} = s$，$v_{i_k} = t$；

2. 当$(v_{i_t},v_{i_{t+1}})\in E$（称$(v_{i_t},v_{i_{t+1}})$为向前边）时，$f_{i_t,i_{t+1}}<c_{i_t,i_{t+1}}$；当$(v_{i_{t+1}},v_{i_t})\in E$（称$(v_{i_t},v_{i_{t+1}})$为向后边）时，$f_{i_t,i_{t+1}}>0$。

注：对于f的增流路径$v_{i_0}v_{i_1}\cdots v_{i_k}$，令

$$\delta_1=\min_{(v_{i_t},v_{i_{t+1}})\text{是向前边}}(c_{i_t,i_{t+1}}-f_{i_t,i_{t+1}}),\ \delta_2=\min_{(v_{i_{t+1}},v_{i_t})\text{是向后边}}f_{i_{t+1},i_t},\ \delta=\min(\delta_1,\delta_2),$$

对f作如下修改：对向前边$(v_{i_t},v_{i_{t+1}})$，$f_{i_t,i_{t+1}}\leftarrow f_{i_t,i_{t+1}}+\delta$；对向后边$(v_{i_{t+1}},v_{i_t})$，$f_{i_{t+1},i_t}\leftarrow f_{i_{t+1},i_t}-\delta$，则易知，$f$仍是容许流，且流量增加了$\delta$。

定理 3.2 的证明：我们用下列规则来构造结点子集S：(1) $s\in S$； (2) 若$v_i\in S$，$(v_i,v_j)\in E$，$f_{i,j}<c_{i,j}$，则$v_j\in S$；(3)若$v_i\in S$，$(v_j,v_i)\in E$，$f_{j,i}>0$，则$v_j\in S$。由S的构造规则可知：

1. $t\notin S$，否则会得到f的一条增流路径，矛盾。所以$(S,\bar{S})$是割切。

2. 当$(v_i,v_j)\in(S,\bar{S})$时，$f_{i,j}=c_{i,j}$；当$(v_j,v_i)\in(\bar{S},S)$时，$f_{j,i}=0$。依据式(3.1)可知，$w(f)=C(S,\bar{S})$。所以，$(S,\bar{S})$是最小割切。

推论 3.1 容许流f是最大流的充分必要条件是不存在关于f的增流路径。

下面介绍求最大流的艾德蒙兹－卡普(Edmonds-Karp)算法。算法从一个初始容许流开始，主要分为两个过程，其一是标号过程，试图找一个增流路径，若找不到，说明目前的容许流已是最大流，否则转入第二个过程：增流过程。
算法描述如下：

1.（初始化）任选一个容许流f，可以对任意$(v_i,v_j)\in E$，取$f_{i,j}=0$（零流）。

2.（标号过程开始）给s标号$(-,\Delta_s)$（其中$\Delta_s=\infty$），s入队列Q；

3．若Q为空，则停止，此时f已是最大流。否则，从Q中取出结点v_i，对v_i的所有未标号的邻点，按下列规则标号。

a. 如果$(v_i,v_j)\in E$且$f_{i,j}<c_{i,j}$，则给v_j标号$(+v_i,\delta_j)$，其中$\delta_j=\min(\delta_i,c_{i,j}-f_{i,j})$，$v_j$入队列$Q$；

b. 如果$(v_j,v_i)\in E$且$f_{j,i}>0$，则给v_j标号$(-v_i,\delta_j)$，其中$\delta_j=\min(\delta_i,f_{j,i})$，$v_j$入队列$Q$；

4．若t被标号，转 5，否则转 3；
5．（增流过程开始）令$v=t$；
6．设v的标号是(Sv,Δ_v)，

a. 若$Sv=+u$，则令 $f_{u,v}=f_{u,v}+\Delta_t$；

b. 若$Sv=-u$，则令 $f_{v,u}=f_{v,u}-\Delta_t$；

7. 若$u=s$，删去全部标号，将队列Q置空，转 2，否则令$v=u$，转 6。

定理 3.3 Edmonds-Karp 最大流算法中，至多处理$\dfrac{m(n+2)}{2}$条增流路径就会终止。

证明：{见参考书（2，戴一奇等），110－111。}证明过程较长，用到下面三个引理。

设 f 是网络N的一个容许流分布，$P=u_0e_1u_1e_2u_2\cdots u_{k-1}e_ku_k$是 f 的一条增流路径。令

$$\delta_i=\begin{cases}c(e_i)-f(e_i), & \texttt{if } e_i \texttt{ is a forward edge}\\ f(e_i), & \texttt{if } e_i \texttt{ is a backward edge}\end{cases},$$

$$\delta=\min_{1\le i\le k}\delta_i,$$

则必存在i，使得$\delta_i=\delta$，称对应的e_i是该路径的瓶颈。

假定标号法从初始流分布 f_0 开始。依照 Edmonds-Karp 算法依此构造容许流 f_1，f_2，$\cdots$。

设增流路径P的瓶颈是e。增流后，若e是向前边，它将饱和；若e是向后边，则 $f(e)$变为0。这个事实导致下述结论

引理 3.2 若$k_1<k_2$，e是从 f_{k_1} 变为 f_{k_1+1} 以及 f_{k_2} 变为 f_{k_2+1} 时的向前（后）边瓶颈，则存在l，满足$k_1<l<k_2$，使得e是从 f_l 变为 f_{l+1} 的增流路径的向后（前）边。

容许流为 f 时，从结点u到v的一条非饱和路径是指其中的向前边e都满足$f(e)<c(e)$，向后边e都满足 $f(e)>0$。令$\lambda^i(u,v)$表示容许流为 f_i 时从u到v的最短非饱和路径的长度，若不存在u到v的非饱和路径，则约定$\lambda^i(u,v)=\infty$。

引理 3.3 对每个结点v及每个容许流 f_k，恒有

$$\lambda^k(s,v)\le\lambda^{k+1}(s,v),$$

$\lambda^k(v,t) \le \lambda^{k+1}(v,t)$。

引理 3.3 的证明：只证明$\lambda^k(s,v) \le \lambda^{k+1}(s,v)$，$\lambda^k(v,t) \le \lambda^{k+1}(v,t)$的证明是类似的。若容许流为 f_{k+1}时不存在s到v的非饱和路径，则$\lambda^{k+1}(s,v) = \infty$，不等式成立；现假定 $P = u_0 e_1 u_1 e_2 u_2 \cdots u_{p-1} e_p u_p$ 是 f_{k+1} 中 s 到 v 的一条最短非饱和路径，其中 $u_0 = s$，$u_p = v$。只需证明对任意$1 \le i \le p$，$\lambda^k(s,u_i) \le \lambda^k(s,u_{i-1}) + 1$。因为由此可得

$$\lambda^k(s,v) = \lambda^k(s,u_p) \le \lambda^k(s,u_{p-1}) + 1 \le \lambda^k(s,u_{p-2}) + 2$$

$$\le \cdots \le \lambda^k(s,u_0) + p = p = \lambda^{k+1}(s,v)$$

如果e_i是P的一条向前边，则有 $f_{k+1}(e_i) < c(e_i)$，分两种情况来看

(a) $f_k(e_i) < c(e_i)$，此时直接有$\lambda^k(s,u_i) \le \lambda^k(s,u_{i-1}) + 1$；

(b) $f_k(e_i) = c(e_i)$，此时e_i在 f_k变为 f_{k+1}时充当了增流路径的向后边，所以有$\lambda^k(s,u_{i-1}) = \lambda^k(s,u_i) + 1$，从而$\lambda^k(s,u_i) \le \lambda^k(s,u_{i-1}) + 1$。

如果e_i是P的一条向后边，则有 $f_{k+1}(e_i) > 0$，同理分两种情况来看

(a) $f_k(e_i) > 0$，此时直接有$\lambda^k(s,u_i) \le \lambda^k(s,u_{i-1}) + 1$；

(b) $f_k(e_i) = 0$,此时e_i在 f_k变为 f_{k+1}时充当了增流路径的向前边，所以有$\lambda^k(s,u_{i-1}) = \lambda^k(s,u_i) + 1$，从而$\lambda^k(s,u_i) \le \lambda^k(s,u_{i-1}) + 1$。

引理 3.4 如果边e是从 f_k变为 f_{k+1}时增流路径的向前（后）边，同时也是 f_l变为 f_{l+1}时（$k < l$）增流路径的向后（前）边，则有

$\lambda^l(s,t) \ge \lambda^k(s,t) + 2$。

引理 3.4 的证明 假定$e = (u,v)$， 由于e是 f_k的增流路径的向前边，所以

$$\lambda^k(s,v) = \lambda^k(s,u) + 1$$

又由于e是 f_l的增流路径的向后边，所以

$$\lambda^l(s,t) = \lambda^l(s,v) + 1 + \lambda^l(u,t)$$

利用引理 3.3

$$\lambda^l(s,t) \ge \lambda^k(s,v)+1+\lambda^k(u,t)=\lambda^k(s,u)+2+\lambda^k(u,t)=\lambda^k(s,t)+2$$

利用上述引理 3.2 和 3.4，可以来证明定理 3.3 了。在 Edmonds-Karp 标号算法中，每条增流路径都是当前最短的非饱和路径。对任意边e，设以e为增流路径向前边瓶颈的容许流为 f_{k_1}，f_{k_2}，$\cdots$，其中$k_1<k_2<\cdots$，由引理 3.2, 存在另一个容许流序列 f_{l_1}，f_{l_2}，$\cdots$，使得$k_1<l_1<k_2<l_2<\cdots$，且e是 f_{l_i} 增流路径的向后边。由引理 3.4，

$$\lambda^{l_i}(s,t) \ge \lambda^{k_i}(s,t)+2，\lambda^{k_{i+1}}(s,t) \ge \lambda^{l_i}(s,t)+2。$$

因此，

$$\lambda^{k_{i+1}}(s,t \ge \lambda^{k_i}(s,t)+4，$$

$$\lambda^{k_j}(s,t) \ge \lambda^{k_1}(s,t)+4(j-1)。$$

将

$$\lambda^{k_1}(s,t) \ge 1，\lambda^{k_j}(s,t) \le n-1，$$

代入上面不等式得

$$n-1 \ge 1+4(j-1)，$$

$$j \le \frac{n+2}{4}。$$

即以e为增流路径向前边瓶颈的容许流最多$(n+2)/4$个，同理以e为增流路径向后边瓶颈的容许流也最多$(n+2)/4$个。由于网络共有m条边，故增流路径至多有$m(n+2)/2$条。

注 1：定理 3.3 同时说明，任何网络都存在最大流。

注 2：Edmonds-Karp 算法的时间复杂度为$O(m^2n)$。

例 3.2 如图 5.14 所示的网络，求其最大流。

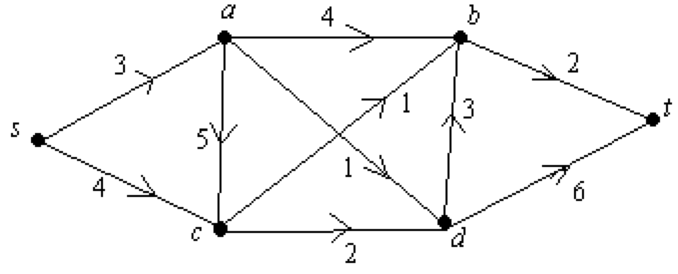


图 5.14

解：利用 Edmonds-Karp 最大流算法求解。初始容许流取为零流。图 5.15 中，每条边上的两个权值分别表示容量和流量分布。

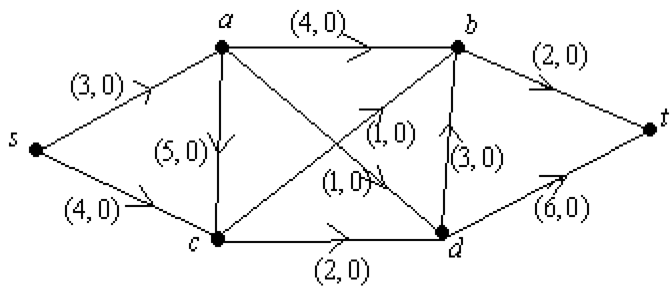


图 5.15

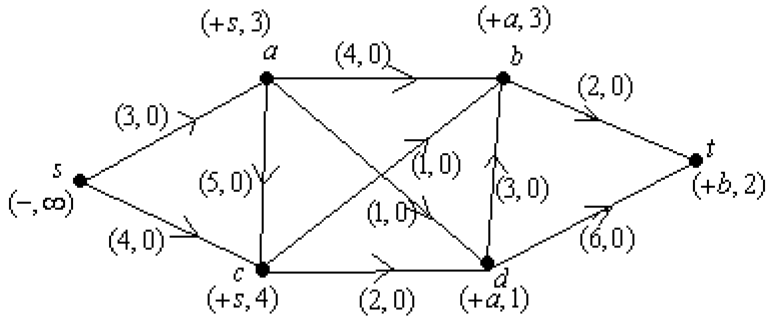


图 5.15.1

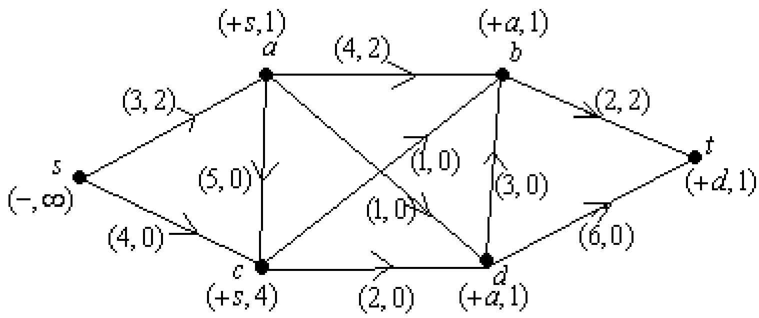


图 5.15.2

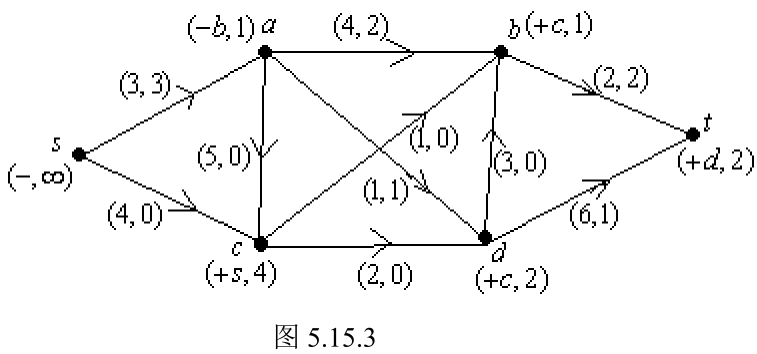


图 5.15.3

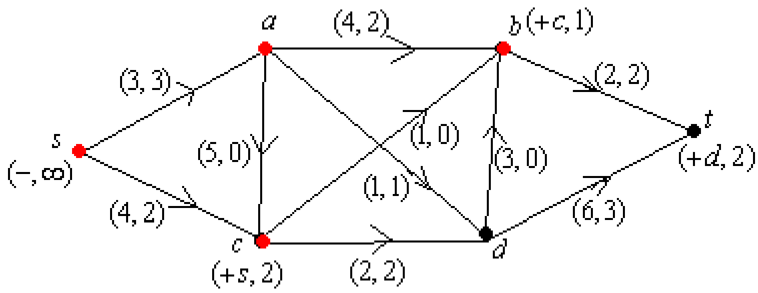
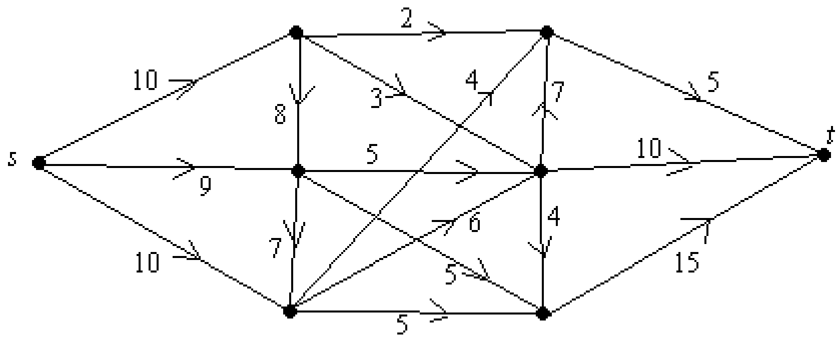


图 5.15.4

图 5.15.4，红结点组成集合 S，$(S,\overline{S})$ 是最小割切，最大流是 5。

作业 1111

1.求下面网络的最大流和最小割切。



2. 在下面多源点和多汇点网络中，源点 s_1，s_2 分别可供应 10 和 15 个单位的货物量，汇点 t_1，t_2 分别可接受 10 和 25 个单位的货物量，求最大流分布。