1 二項関係

Definition: 集合 X 上の同値関係 $R \subset X \times X$

㊍: 等号関係の一般化

$$\begin{cases} \text{反射律}: & xRx \quad (\forall x \in X) \\ \text{対称律}: & xRy \Rightarrow yRx \quad (\forall x, y \in X) \\ \text{推移律}: & xRy, yRz \Rightarrow xRz \quad (\forall x, y, z \in X) \end{cases}$$

Example: 同値関係の例 R

1. $=$
2. 合同, 相似 (幾何)
3. $x \equiv y \quad (mod\ p)$

Definition: 同値類

$$[a] = \{x \in X \mid xRa\} \quad (a \in X, R: \text{relation on a set } X)$$

Definition: 商集合

㊍ : 同値類集合の集合

$$X/R = \{[a] \mid a \in X\}$$

Definition: 自然な射影

$$\gamma : X \longmapsto X/R,\ \gamma(x) = [x] \quad (x \in X)$$

Definition: 集合 X 上の順序関係 $R \subset X \times X$ $(xRy \Leftrightarrow x \leq y)$

㊍: 大小関係の一般化

$$\begin{cases} \text{反射律}: & x \leq x \quad (\forall x \in X) \\ \text{反対称律}: & x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y \quad (\forall x, y \in X) \\ \text{推移律}: & x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad (\forall x, y, z \in X) \end{cases}$$

Definition: 順序集合 $(X, \leq)$

$\leq$ は X 上の順序関係.

Example: 順序集合の例

1. $(\mathbb{R}, \leq)$ は順序集合, $(\mathbb{R}, <)$ は順序集合でない.
2. $(2^X, \subset)$

Definition: 順序部分集合 $(M, \leq_M) \subset (X, \leq)$

$$M \subset X, a \leq_M b \Leftrightarrow a \leq b$$

Definition: 半順序, 全順序

$$\exists (x, y) \in R \quad (x, y \in X) \Rightarrow R \text{ is partial order, } (X, R) \text{ is partially ordered set}$$
$$\forall (x, y) \in R \quad (x, y \in X) \Rightarrow R \text{ is total order, } (X, R) \text{ is totally ordered set}$$

2 半順序集合

Definition: 最大値 (最小値) , 上限 (下限) and 上界 (下界)

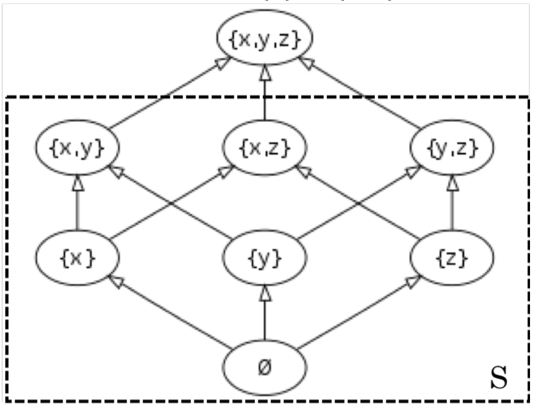
$$\max\ A = M \Leftrightarrow a \le M \quad (M \in A,\ \forall a \in A)$$

$$s \text{ is one of upper bounds of } A \Leftrightarrow a \le s \quad (\forall a \in A)$$

$$\sup\ A = M' \Leftrightarrow \min\ S = M' \quad (S \text{ is a set of upper bounds of } A)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A,\ a \le M' \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists a \in A \text{ s.t. } M' - \epsilon < a \end{cases}$$

Example: 半順序集合の例 $\{y\} \le \{x, z\}$ の順序は定義されていない.



$\max\ S$: $None$, $\min\ S$: ϕ
$\sup\ S$: $\{x,\ y,\ z\}$, $\inf\ S$: ϕ

Theorem: 最大値, 最小値, 極大値 , 極小値 は一意に存在する.

Ⓟ: 最大値, 最小値の一意性は順序関係の反対称律を使う.

Ⓟ: 極大値, 極小値の一意性は最大値, 最小値の一意性を使う.

Theorem: 集合 A に最大 (最小) 値が存在するならば, $\max\ A = \sup\ A$ ($\min\ A = \inf\ A$).

Ⓟ: sup(inf) の 2 つめの定義を使う.

Axiom: 上限と下限の存在 (実数の連続性)

$$A \subset \mathbb{R},\ A \ne \phi,\ \begin{cases} A \text{ が上に有界 } \Rightarrow \sup A \in \mathbb{R} \text{ が存在} \\ A \text{ が下に有界 } \Rightarrow \inf A \in \mathbb{R} \text{ が存在} \end{cases}$$

Definition: 完備束

半順序集合 X, $\forall X' \subset X$, $\exists \sup\ X'$, $\inf\ X'$.

3 点列

Definition: 点列は写像 $x : \mathbb{N} \longmapsto X$ である.
Definition: 部分点列は合成写像 $x \circ \iota : \mathbb{N} \longmapsto X$
　　ただし, $\iota : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ は $i \leq j \Rightarrow \iota(i) \leq \iota(j)$ を満たす.
Example: 点列と部分点列の概要

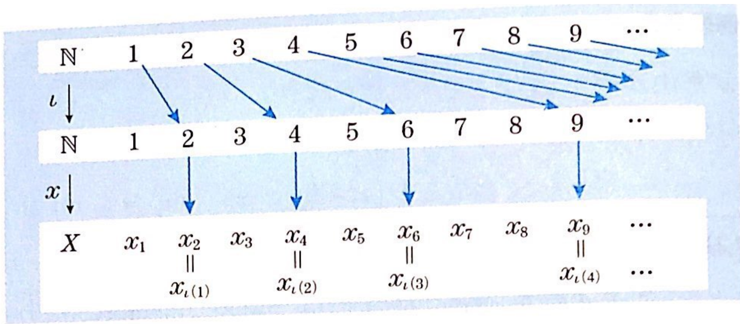


Fig. 1 点列

Definition: 点列の極限
　　α は点列の極限値である. $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow |x_n - \alpha| < \epsilon$$

Theorem: 数列 (a_n) が拡大実数系に極限をもつとき, その部分列の極限と一致する.
　　㋖: 元の数列が振動する場合などは, 部分列極限は複数存在する.
Definition: 上極限, 下極限

Definition: 上に有界, 下に有界
　　点列 $\{x_n\}$ は上に有界である. $\Leftrightarrow$

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall i \in \mathbb{N},\ x_i \leq M$$

Definition: Cauchy 列
　　㋖: 十分大きな $N \in \mathbb{N}$ を選ぶと $n,\ m \geq N$ において x_n と x_m の差をいくらでも小さくできる列.
　　$\{x_n\}$ が Cauchy 列である. $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n,\ m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon$$

Example: Cauchy 列の例

Theorem: $\{x_n\},\ \{y_n\}$ が Cauchy 列 $\Rightarrow$

$$\{x_n + y_n\},\ \{x_n \cdot y_n\} \text{ は Cauchy 列.}$$

Theorem: 点列 x_n が収束する $\Rightarrow$ x_n は Cauchy 列.
Theorem: 点列 x_n が Cauchy 列 $\Rightarrow$ x_n は有界.

4　実数

4.1　$\mathbb{N}$ の定義と $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ の構成

Axiom:　ペアノの公理

㋖: 自然数の定義

後者を与える関数 S を定義する. (ex. $S(1) = 2$)

1. 0 は自然数.
2. 全ての自然数 n に対し, $S(n)$ は自然数.
3. 全ての自然数 n に対し, $S(n) = 0$ とならない.
4. $a,\ b \in \mathbb{N},\ a \neq b \Rightarrow S(a) \neq S(b)$
5. Φ を単項述語関数とする.
   - $\Phi(0)$ が真.
   - 全ての自然数 n に対し, $\Phi(n)$ が真ならば $\Phi(S(n))$ は真.

   (**数学的帰納法**)

Definition:　整数と有理数

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N},\ \mathbb{Q} = \{\frac{b}{a} \mid a,\ b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0\}$$

4.2　$\mathbb{R}$ の構成

4.2.1　デデキント切断

Definition:　$\mathbb{Q}$ 上のデデキント切断

$$A \cup B = \mathbb{Q},\ A \cap B = \phi,\ A \neq \phi,\ B \neq \phi,\ a \in A,\ b \in B \Rightarrow a < b$$

Definition:　実数 α をデデキント切断の境界値 $\alpha = \langle A \mid B \rangle$ として定義する.

㋖: 有理数全体集合のデデキント切断の境界値を実数と定義.

4.2.2　有理数の Cauchy 列を用いた完備化

Definition:　Cauchy 列の同値関係

$$\begin{aligned}\{a_n\} \sim \{b_n\} &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \\ &\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow |a_n - b_n| < \epsilon\end{aligned}$$

Definition:　$\mathbb{R}$

全単射 $\Phi : (S\ /\ \sim) \longmapsto \mathbb{R}$　(S is the set of all Cauchy Sequences on $\mathbb{Q}$) を定義.

$$\Phi([\{a_n\}]) = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

㋖: $\mathbb{Q}$ 上の Cauchy 列の同値類と実数の間に 1 対 1 写像を定義する.

Example:　ネイピア数 $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n,\ a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ は Cauchy 列.

4.3　実数の性質

4.3.1　有理数の稠密性 / 無理数の稠密性

Theorem:　有理数の稠密性

㋖: 2 つの実数の間に有理数が存在.

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} \text{ s.t. } x < r < y$$

※ 他の表現 : $\forall\epsilon > 0,\ a \in \mathbb{R},\ \exists r \in \mathbb{Q},\ |a - r| < \epsilon$

Theorem: 無理数の稠密性

キ: 2 つの実数の間に無理数が存在.

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ s.t. } x < q < y$$

Theorem: アルキメデスの性質 (有理数の稠密性と同値)

$$\forall a,\ b \in \mathbb{R},\ 0 < a < b \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } b < na$$

Theorem: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ は上に有界でない. (有理数の稠密性と同値)

Theorem: $lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ (有理数の稠密性と同値)

4.3.2 実数の完備性

Axiom: $\mathbb{R}$ 上の全ての Cauchy 列は収束する.

キ: 一般 : 収束列 $\Rightarrow$ Cauchy 列, $\mathbb{R}$: 収束列 $\Leftrightarrow$ Cauchy 列.

Axiom: カントールの区間縮小定理

4.3.3 実数の連続性

キ: 有理数の稠密性 (4.3.1) & 実数の完備性 (4.3.2) と同値

Axiom: 実数の連続性

$$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \phi,\ \begin{cases} A \text{ が上に有界 } \Rightarrow \sup A \in \mathbb{R} \text{ が存在} \\ A \text{ が下に有界 } \Rightarrow \inf A \in \mathbb{R} \text{ が存在} \end{cases}$$

Theorem: デデキントの定理 (実数の連続性と同値)

実数集合上の全ての切断 $\langle A \mid B \rangle$ に対し,

$$\alpha \in A,\ \beta \in B \Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}\ s.t.\ \alpha \leq \gamma \leq \beta,\ \gamma \text{ is } \max A \text{ or } \min B$$

ただし, $\mathbb{R}$ 上のデデキント切断は

$$A \cup B = \mathbb{R},\ A \cap B = \phi,\ A \neq \phi,\ B \neq \phi,\ a \in A,\ b \in B \Rightarrow a < b$$

キ: $\mathbb{R}$ の数直線を二つに切断するイメージ.

Theorem: 単調有界数列の収束定理 (実数の連続性と同値)

数列 (a_n) が単調増加かつ上に有界ならば (a_n) は収束する.

数列 (a_n) が単調減少かつ下に有界ならば (a_n) は収束する.

Theorem: ボルツァーノ-ワイアシュトラウスの定理 (実数の連続性と同値)

任意の有界数列 (a_n) が収束する部分列をもつ.

以下の言い換えが可能.

- $A \subset \mathbb{R}$ が点列コンパクト $\Leftrightarrow$ A が有界閉集合.
- 距離化可能空間に置いてコンパクトと点列コンパクトは同値より,
  $A \subset \mathbb{R}$ がコンパクト $\Leftrightarrow$ A が有界閉集合. (ハイネボレルの定理)

5 濃度

Definition: 集合 A の濃度. $|A|$, $card\ A$, $\#A$ etc...

$$|A| = \begin{cases} n \in \{0\} \cup \mathbb{N} & : \text{有限集合の濃度} \\ (others) & : \text{無限集合の濃度} \quad ex. \begin{cases} \aleph_0 & : \text{可算無限集合の濃度} \\ \aleph & : \text{連続体の濃度} \end{cases} \end{cases}$$

Definition: $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B \Leftrightarrow \exists f$ (全単射) $: A \longmapsto B$
集合 S 上の同値関係 $R = \{(A, B) \mid |A| = |B|\ \} \subset S \times S$

Definition: $|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists f$ (単射) $: A \longmapsto B$
集合 S 上の順序関係 $R = \{(A, B) \mid |A| \leq |B|\} \subset S \times S$
P: 反対称律は Bernstein の定理を用いる.

Theorem: $\aleph_0 < \aleph$
P: $\mathbb{N} \not\sim [0, 1)$ をカントールの対角線論法で示す.

Theorem: $|X| < |\mathfrak{P}(X)|$
P: $X \subset \mathfrak{P}(X)$ より, $|X| \leq |\mathfrak{P}(X)|$ は明らか.$|X| \neq |\mathfrak{P}(X)|$ を対角線論法で示す.

Theorem: $A \cap B = \phi$ とする.

1. $\cup$

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

$\lvert A \cup B\rvert$	有限	可算	非可算
有限	有限	可算	非可算
可算		可算	非可算
非可算			非可算

2. $\times$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$\lvert A \times B\rvert$	有限	可算	非可算
有限	有限	可算	非可算
可算		可算	非可算
非可算			非可算

3. pow

$$|A^B| = |A|^{|B|}$$

$\lvert A^B\rvert$	有限	可算	非可算
有限	有限	非可算	非可算
可算	可算	非可算	非可算
非可算	非可算	非可算	非可算

Example:

$$A = \{1,\ 2,\ 3\},\ |A| = 3$$

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$$

$$\aleph = |\mathbb{R}| = |[a, b]| = |(a, b)| = |[a, b)|$$
$$= \aleph_1 = |\mathfrak{P}(\mathbb{N})| \quad (\text{連続体仮説})$$

6　選択公理と Zorn の補題