

13E053SSE, 2. domaći zadatak 2020/21

Teorija estimacije

1 Estimator maksimalne verodostojnosti (EMV)

Prvi zadatak je nalaženje EMV za početnu fazu ϕ kosinusoide, na osnovu zašumljenih opservacija

$$x[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \phi) + w[n], \quad n = 0, \dots, N-1$$

gde je $w[n]$ beo Gaussov šum varijanse σ_w^2 . Amplituda $A = 1$ i učestanost $f_0 = 0.2$ su poznati. U simulacijama usvojite da je tačna vrednost parametra $\phi = 1$.

EMV treba odrediti *numeričkom* maksimizacijom log-verodostojnosti $l(\phi)$, pomoću Newton-Raphsonove metode (NRM). Polazeći od neke početne procene $\hat{\phi}_0$, ova metoda iterativno koriguje procenu na sledeći način:

$$\hat{\phi}_{k+1} = \hat{\phi}_k - \frac{l'(\hat{\phi}_k)}{l''(\hat{\phi}_k)}.$$

1. Izvedite analitičke izraze za $l(\phi)$, $l'(\phi)$ i $l''(\phi)$, i prikažite grafike ovih f-ja.
2. Prikažite vrednosti procene $\hat{\phi}_k$ u zavisnosti od iteracije k za 5 različitih realizacija slučajnog procesa i za 3 različite početne estimacije $\hat{\phi}_0$ (3 grafika sa po 5 linija). Da li za sve realizacije NRM konvergira ka istoj vrednosti? Posle koliko iteracija? Da li na ovo utiče usvojena početna procena $\hat{\phi}_0$ i na koji način?
3. Usvojite $\hat{\phi}_0 = 0.5$, $\sigma_w^2 = 0.1$ i $N = 10$, pa napravite $N_r = 1000$ realizacija sekvence opservacija, i na osnovu svake od njih odredite EMV pomoću NRM. Koristite zaključak o potrebnom broju iteracija do konvergencije iz prethodne tačke. Prikažite histogramsku procenu FGV estimatora. Na istom grafiku prikažite asimptotsku FGV estimatora maksimalne verodostojnosti. Da biste nju odredili, moraćete da izvedete izraz za Fisherovu informaciju $\mathcal{I}(\phi)$, pri čemu možete da koristite sledeću aproksimaciju:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(4\pi f_0 n + 2\phi) \approx 0, \quad f_0 \notin \{0, \pm 0.5\}.$$

Da li se histogramska procena slaže sa asimptotskom za $N = 10$? Da li isti zaključak važi i kada

je $\sigma_w^2 = 1$? Koliko je tada opservacija potrebno da bi se dobilo dobro slaganje histograma sa asimptotskom FGV? Imate li neko intuitivno objašnjenje za uočenu zavisnost između σ_w^2 i potrebne dužine sekvence N ?

2 Kalmanov filter (KF)

Pomoću KF treba estimirati pozicije $p[n]$ vozila koje se kreće pravolinijski, na osnovu zašumljenih GPS merenja $x[n] = p[n] + w[n]$ iz datoteke `gps_data.txt`. Beli Gaussov šum $w[n]$ ima varijansu $\sigma_w^2 = 1$. Ubrzanje $a[n]$ se menja na nama nepoznat način, ali se može smatrati konstantnim tokom jedne periode odabiranja, pa su brzina $v[n]$ i pozicija $p[n]$ date sa

$$\begin{aligned} v[n+1] &= v[n] + T_s a[n] \\ p[n+1] &= p[n] + T_s v[n] + \frac{T_s^2}{2} a[n] \end{aligned}$$

gde je perioda odabiranja $T_s = 1$ s, dok ubrzanje modelujemo kao

$$a[n+1] = a[n] + u[n],$$

gde je $u[n]$ beo Gaussov proces varijanse σ_u^2 .

1. Uzmite $a[-1] = v[-1] = p[-1] = 0$ i $M[-1] = \mathbf{I}$, pa eksperimentišite sa različitim vrednostima za σ_u (na predavanjima smo koristili notaciju $a[-1] - 1$); ovde malo skraćujemo oznake, ali radi se o istoj stvari). Šta je po vama “najbolja” vrednosti ovog parametra i zbog čega? Prikažite grafike procenjenog ubrzanja i brzine, grafik procenjene i opservirane pozicije, i grafik sa vrednostima elemenata matrice Kalmanovog pojačanja za
 - a) po vama “optimalnu” vrednost σ_u^* ,
 - b) za $5\sigma_u^*$, i
 - c) za $\sigma_u^*/5$.

Komentarišite kakav efekat σ_u ima na dobijenu estimaciju i na vrednosti Kalmanovog pojačanja.

2. Prikažite kako se sa vremenom n menjaju (a) elementi matrice Kalmanovog pojačanja $K[n]$, (b) dijagonalni elementi matrica $M[n|n-1]$ i $M[n|n]$, za početne vrednosti iz prethodne tačke. Zatim prikažite kako izgledaju ovi grafici za

$$a[-1] = v[-1] = p[-1] = 5, \quad M[-1] = 10\mathbf{I}.$$

Komentarišite efekte početnih uslova na dobijenu estimaciju i na vrednosti Kalmanovog pojačanja u stacionarnom stanju.

3 Napomene

Raspored odbrana će biti naknadno objavljen. Izveštaj treba da bude što kraći ali da sadrži sve tražene grafike i koncizna, precizna objašnjenja i tumačenja. Za programiranje koristite Matlab/Octave ili Python. Izveštaj i kodove predajete putem MS Teams. Ne zaboravite da kliknete na “Turn in”!