DOMAĆI ZADATAK IZ PREDMETA STOHASTIČKI SISTEMI I ESTIMACIJA

Danica Bandović, 2018/0018

Novembar 2020.

Zadatak je rađen za vrednosti parametara $P = 0$, $Q = 0$, $R = 1$ i $S = 2$.

1 Prvi zadatak

a) Potrebno je simulirati eksperiment bacanja novčića. Novčić je deblji od standardnog, i po tekstu zadatka je verovatnoća da padne na ivicu 0.01, dok znamo da je verovatnoća da se prilikom bacanja dobije glava dva puta veća nego verovatnoća da se dobije pismo.
Dakle, posmatrani eksperiment je potrebno matematički opisati. Postoje tri elementarna ishoda ovog eksperimenta:

- događaj da je prilikom bacanja novčić pao na ivicu (neka ovo bude ishod ω_i)
- prilikom bacanja novčića je dobijena glava (ishod ω_g)
- prilikom bacanja je dobijeno pismo (ishod ω_p)

Istovremeno, skup $\Omega = \{\omega_i, \omega_p, \omega_g\}$ predstavljaju skup svih ishoda eksperimenta, pa znamo da je $P(\Omega) = 1$.
Definišimo sada slučajnu promenljivu X koja će predstavljati preslikavanje skupa Ω na skup realnih brojeva. Pošto ishoda ima tri, slučajna promenljiva X može uzeti tri različite vrednosti. Recimo da su ove tri vrednosti 0, 1 i 2, tako da je:

- $X = 0$ ako se desio dogadjaj ω_i
- $X = 1$ ako se desio dogadjaj ω_p
- $X = 2$ ako se desio dogadjaj ω_g

Odredimo zakon raspodele slučajne promenljive X, odnosno potrebno je da izračunamo kolika je verovatnoća da padne pismo pri izvođenju eksperimenta, koja da padne glava, a koja da novčić padne na ivicu. Iz uslova zadatka nam je poznato $P(\omega_i) = P(X = 0) = 0.01$. Odredimo ostale verovatnoće na osnovu uslova $P(\omega_g) = 2 \cdot P(\omega_p)$ i aksioma verovatnoće.

$$P(\Omega) = 1 = P(\omega_i) + P(\omega_p) + P(\omega_g)$$

$$1 = 0.01 + P(\omega_p) + 2 \cdot P(\omega_p)$$

$$0.99 = 3 \cdot P(\omega_p)$$

$$P(\omega_p) = P(X = 1)0.33, P(\omega_g) = P(X = 2) = 2 \cdot P(\omega_p) = 0.66$$

Zakon raspodele:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.01 & 0.33 & 0.66 \end{pmatrix}$$

Odredimo sada analitički funkciju raspodele $F_x(k)$ i funkciju mase verovatnoće $p_X(k)$. Pošto je $p_X(k) = P(X = k)$ imamo:

$$\boxed{p_X(k) = \begin{cases} 0.01, & \text{za } k = 0, \\ 0.33, & \text{za } k = 1, \\ 0.66, & \text{za } k = 2 \end{cases}}$$

$$F_X(x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 0, \\ p_X(0), & \text{za } 0 \leq x < 1, \\ p_X(0) + p_X(1), & \text{za } 1 \leq x < 2, \\ p_X(0) + p_X(1) + p_X(2), & \text{za } x \geq 2 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 0, \\ 0.01, & \text{za } 0 \leq x < 1, \\ 0.01 + 0.33, & \text{za } 1 \leq x < 2, \\ 0.01 + 0.33 + 0.66, & \text{za } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 0, \\ 0.01, & \text{za } 0 \leq x < 1, \\ 0.34, & \text{za } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{, za } x \geq 2 \end{cases}}$$

Odredimo sada matematičko očekivanje ove diskretne slučajne promenljive:

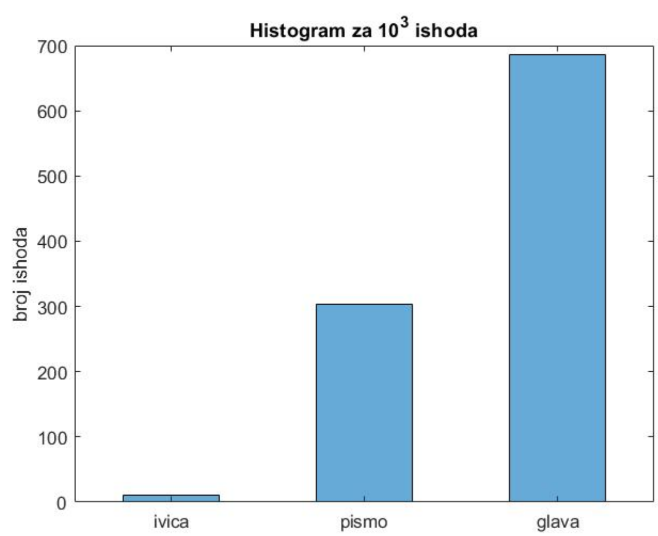
$$m = E\{X\} = \sum_x x \cdot p_X(x) = 0 \cdot 0.01 + 1 \cdot 0.33 + 2 \cdot 0.66 = \boxed{1.65}$$

Varijansa:

$$\sigma^2 = E\{(X - m)^2\} = E\{X^2\} - E\{X\}^2 = \sum_x x^2 \cdot p_X(x) - 1.65^2 = 1 \cdot 0.33 + 4 \cdot 0.66 - 1.65^2 = 2.97 - 2.7225 =$$

$$\boxed{\sigma^2 = 0.2475}$$

b) U ovom delu zadatka potrebno je generisati $N = 10^3$ ishoda i prikazati njihov histogram. Traženi histogram:



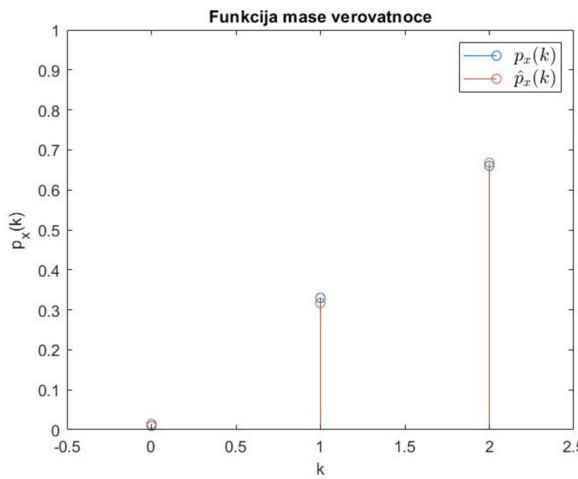
c) U ovom delu zadatka eksperimentalno je, pomoću programskog paketa MATLAB procenjena funkcija mase verovatnoće $\hat{p}_x(k)$, po formuli

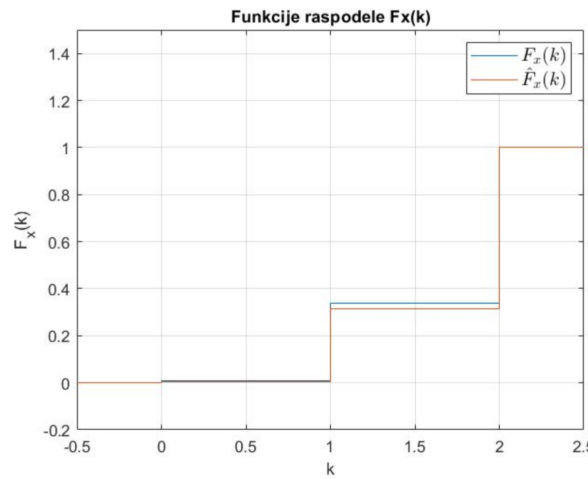
$$\hat{p}_x(k) = \frac{broj\, povoljnih\, ishoda}{ukupan\, broj\, ishoda}$$

Funkcija raspodele je računata po formuli

$$\hat{F}_x(k) = \sum_{n=-\infty}^{k} \hat{p}_x(n)$$

U nastavku su dva grafika na kom su prikazane egzaktne i eksperimentalne funkcije $p_x(k)$ i $F_x(k)$.





Dalje određujemo matematičko očekivanje i varijansu po formulama:

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (X_i - \hat{m})^2$$

	analitički	eksperimentalno
matematičko očekivanje	1.65	1.679
varijansa	0.2475	0.23019

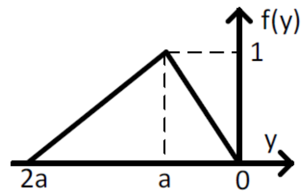
MATLAB kod u kom je realizovano rešenje ovog zadatka:

```
clc
clear
close all

br_realizacija = 1000;

F = [0 0.01 0.34 1];
p = [0.01 0.33 0.66];
t = [0 1 2];

%generisanje slucajne promenljive
u = rand(br_realizacija,1);
```

```
x = zeros(br_realizacija,1);
x(u<=p(1)) = 0;
x(u>p(1) & u<=(p(1)+p(2))) = 1;
x(u>(p(1)+p(2))) = 2;

%prikaz histograma
figure(1)
C = categorical(x,[0 1 2],{'ivica','pismo','glava'});
h = histogram(C,'BarWidth',0.5);
title('Histogram za 10^3 ishoda'); ylabel('broj ishoda');

%procena funkcije mase verovatnoce
p_kapica(1) = numel(x(x==0))/br_realizacija;
p_kapica(2) = numel(x(x==1))/br_realizacija;
p_kapica(3) = numel(x(x==2))/br_realizacija;

%racunanje funkcije raspodele
F_kapica(1) = 0;
for i=1:length(p_kapica)
    F_kapica(i+1) = sum(p_kapica(1:i));
end

%prikaz analiticki i eksperimentalno dobijene
%funkcije raspodele
figure(2)
stairs([-1 0 1 2 3],[F, F(4)]);
hold all
title('Funkcije raspodele Fx(k)'); xlabel('k');ylabel('F_x(k)');
stairs([-1 0 1 2 3],[F_kapica, F_kapica(4)]);
leg = legend('$F_x(k)$','$\hat{F}_x(k)$');
set(leg,'Interpreter','latex');
set(leg,'FontSize',12);
xlim([-0.5 2.5]);
ylim([-0.2 1.5]);
grid on

%prikaz analiticki i eksperimentalno dobijene
%funkcije mase verovatnoce
figure(3)
stem(0:length(p)-1, p);
hold all
stem(0:length(p_kapica)-1, p_kapica);
title('Funkcija mase verovatnoce');
xlabel('k');
ylabel('p_x(k)');
leg = legend('$p_x(k)$','$\hat{p}_x(k)$');
set(leg,'Interpreter','latex');
set(leg,'FontSize',12);
axis([-0.5 2.5 0 1]);

%odredjivanje EX i var
varijansa = zeros(2,1);
ocekivanje = zeros(2,1);
ocekivanje(1) = 1.65;
varijansa(1) = 0.2475;


ocekivanje(2) = sum(x)/br_realizacija;
varijansa(2) = sum((x-ocekivanje(2)).^2)/(br_realizacija-1);

tabela = table(ocekivanje, varijansa);
disp(tabela);
```

2 Drugi zadatak

a) Potrebno je izračunati konstantu a u ovom delu zadatka, pri čemu je funkcija gutcine verovatnoće prikazana na slici.



Grafik se sastoji iz dva segmenta. Računamo parametre prava kojima ovi segmenti pripadaju. Prvi segment $[2a, a]$ pripada pravoj $f(y) = -\frac{1}{a} \cdot y + 2$, dok deo grafika $[a, 0]$ pripada pravoj $f(y) = \frac{1}{a} \cdot y$.

$$f(y) = \begin{cases} -\frac{1}{a} \cdot y + 2, & \text{za } 2a \leq y < a, \\ \frac{1}{a} \cdot y, & \text{za } a \leq y < 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Traženu konstantu određujemo na sledeći način:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{2a} f(y)\, dy + \int_{2a}^{a} f(y)\, dy + \int_{a}^{0} f(y)\, dy + \int_{0}^{\infty} f(y)\, dy =$$

$$= 0 + \int_{2a}^{a} (-\frac{1}{a} \cdot y + 2)\, dy + \int_{a}^{0} \frac{1}{a} \cdot y\, dy + 0 = -\frac{1}{a} \cdot \frac{a^2 - 4a^2}{2} + 2 \cdot (a - 2a) + \frac{1}{a} \cdot \frac{0 - a^2}{2} = 1$$

Sređivanjem izraza se dobija

$$2a + a - 4a = 1 \implies \boxed{a = -1}$$

b) Znamo da je X uniformno raspodeljena slučajna promenljiva na intervalu $[0, 1]$, pa je njena funkcija raspodele definisana kao

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 0, \\ x, & \text{za } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{za } x > 1. \end{cases}$$

Iz relacija $Y = g(X)$ sledi

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(x \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

$$\boxed{F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)) = \begin{cases} 0, & \text{za } g^{-1}(y) < 0, \\ g^{-1}(y), & \text{za } 0 \leq g^{-1}(y) \leq 1 \\ 1, & \text{za } g^{-1}(y) > 1. \end{cases}}$$

Znamo da je $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(u)\, du$, ako je $y < -2$, $F_Y(y) = 0$. Za $-2 \leq y < -1$:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\, dt = \int_{-2}^{y} (t + 2)\, dt = \frac{y^2 - 4}{2} + 2(y + 2) = \frac{y^2}{2} - 2 + 2y + 4 = \frac{y^2}{2} + 2y + 2$$

$$F_Y(y) = \frac{(y + 2)^2}{2}, \text{ za } -2 \leq y < -1$$

Ako je y u intervalu $[-1, 0)$:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt = \int_{-2}^{-1} (t+2)\,dt + \int_{-1}^{y} (-t)\,dt = \frac{1-4}{2} + 2(-1+2) - \frac{y^2-1}{2}$$

$$F_Y(y) = 1 - \frac{y^2}{2}, \text{ za } -1 \leq y < 0$$

Na kraju imamo deo kada je y u intervalu $[0, \infty)$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt = \int_{-2}^{-1} (t+2)\,dt + \int_{-1}^{0} (-t)\,dt = 1$$

Dakle dobili smo da je funkcija raspodele slučajne promenljive Y oblika:

$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{za } y < -2, \\ \frac{(y+2)^2}{2}, & \text{za } -2 \leq y < -1 \\ 1 - \frac{y^2}{2}, & \text{za } -1 \leq y < 0 \\ 1, & \text{za } y \geq 0. \end{cases}}$$

Izjednačimo sada izraze za $F_Y(y)$ koje smo dobili. Posmatrajmo prvo slučaj kada je $-2 \leq y < -1$:

$$\frac{(y+2)^2}{2} = g^{-1}(y)$$

$$y = g\left(\frac{(y+2)^2}{2}\right)$$

Uvedimo smenu $x = \frac{(y+2)^2}{2}$

$$2x = (y+2)^2$$

Uz uslov da je $x > 0$ i da je $y + 2 > 0$ zbog uslova za y, sledi

$$y + 2 = \sqrt{2x}$$

$$y = \sqrt{2x} - 2$$

Slede uslovi za x:

$$-2 \leq \sqrt{2x} - 2 < -1 \implies 0 \leq x < 0.5$$

Posmatrajmo sada slučaj kada je $-1 \leq y < 0$:

$$1 - \frac{y^2}{2} = g^{-1}(y)$$

$$y = g\left(1 - \frac{y^2}{2}\right)$$

$$x = 1 - \frac{y^2}{2}$$

Iz uslova za y sledi

$$y = -\sqrt{2 - 2x}$$

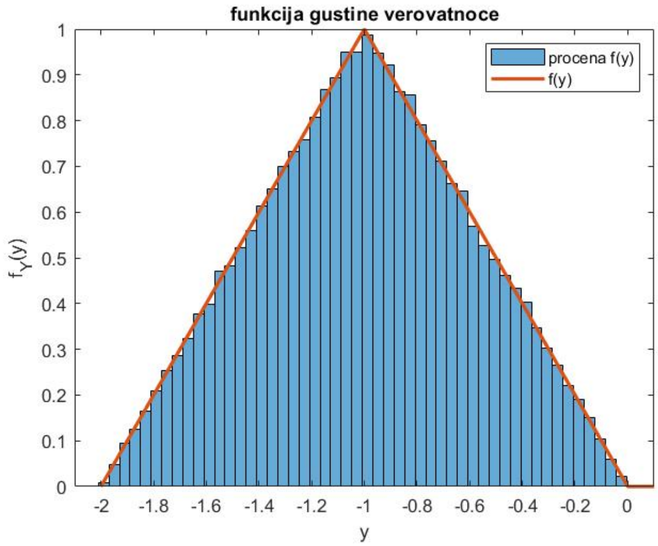
Uslovi:

$$-1 \leq -\sqrt{2-2x} \leq 0 \implies 0.5 \leq x \leq 1$$

Tražena funkcija g(X) je:

$$\boxed{Y = g(X) = \begin{cases} \sqrt{2x} - 2, & \text{za } 0 \leq x \leq 0.5 \\ -\sqrt{2-2x}, & \text{za } 0.5 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}}$$

c) Grafik na kome je prikazana analitička funkcije gustine verovatnoće i ona dobijena eksperimentalno generisanjem $N = 10^5$ odbiraka slučajne promenljive Y.



d) U ovom delu zadatka potrebno je analitički odrediti matematičko očekivanje i varijansu slučajne promenljive Y i uporediti ih sa eksperimentalno procenjenom vrednošću ovih parametara.

$$E\{Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y)\,dy = \int_{-2}^{-1} y(y+2)\,dy + \int_{-1}^{0} -y^2\,dy = \frac{-1+8}{3} + (1-4) - \frac{0+1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 3 - \frac{1}{3} = 2 - 3 = -1$$

$$\sigma^2 = E\{Y^2\} - E\{Y\}^2$$

$$E\{Y^2\} = \int_{-2}^{-1} (y^3 + 2y^2)\,dy + \int_{-1}^{0} -y^3\,dy = \frac{1-16}{4} + \frac{2}{3}(-1+8) + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{16}{4} - \frac{2}{3} + \frac{16}{3} = -\frac{14}{4} + \frac{14}{3} = \frac{7}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

	analitički	eksperimentalno
matematičko očekivanje	-1	-0.9992
varijansa	0.1667	0.1658

MATLAB kod u kom je realizovano rešenje zadatka:

```
clc
clear
close all


N = 100000;
broj = 50;

%generisanje slucajne promenljive Y
x = rand(N,1);
Y = zeros(N,1);
Y(x>=0 & x<0.5) = sqrt(2*x(x>=0 & x<0.5)) - 2;
Y(x>=0.5 & x<1) = -sqrt(2-2*x(x>=0.5 & x<1));

%prikaz fgv
figure(1)
hst = histogram(Y,broj, 'Normalization','pdf');
hold all
title('funkcija gustine verovatnoce'); xlabel('y'); ylabel('f_Y(y)');
%analiticka fgv-prikaz
```

```
y = [-2 -1 0 1];
fy = [0 1 0 0];
plot(y,fy, 'LineWidth',2);
xlim([-2.1 0.1]);
legend('procena f(y)','f(y)');

%racunanje varijanse i ocekivanja
ocekivanje_analiticki = -1;
varijansa_analiticki = 1/6;
ocekivanje_eksp = sum(Y)/N;
varijansa_eksp = sum((Y-ocekivanje_eksp).^2)/(N-1);
```

3 Treći zadatak

Na početku zadatka u MATLAB softverskom paketu je generisano $N = 10^3$ odbiraka normalno raspodeljenog slučajnog vektora $\mathbf{X} = [X_1 X_2]^T$ sa nezavisnim komponentama koje imaju nulto matematičko očekivanje i varijanse $\sigma_1^2 = 1$ i $\sigma_2^2 = 0.25$.

a) U ovom delu zadatka potrebnu je da odredimo analitički i eksperimentalno funkciju gustine verovatnoće $f(x_1, x_2)$. Odredimo prvo analitički funkciju gustine verovatnoće. Posmatraćemo dakle ovu funkciju kao zajedničku funkciju gustine verovatnoće dve slučajne promenljive x_1 i x_2 koje imaju normalne raspodele sa datim očekivanjima. Imamo da je $f(x_1, x_2)$ je jednako:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \cdot \frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right]$$

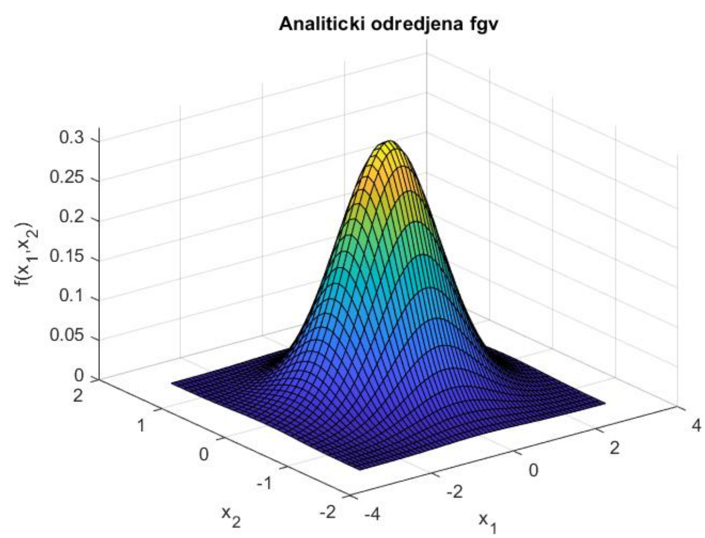
Matematička očekivanja su $\mu_1 = 0$ i $\mu_2 = 0$, a koeficijent korelacije $\rho(X_1, X_2)$ računamo po formuli:

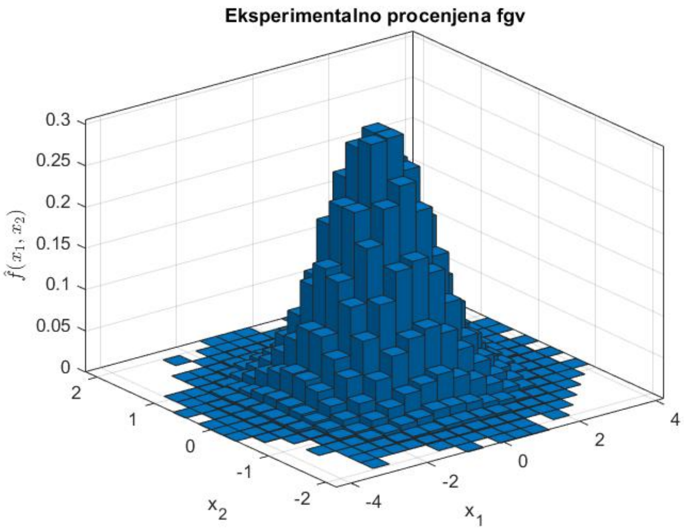
$$\rho(X_1, X_2) = \frac{cov(X_1, X_2)}{\sqrt{var(X_1)var(X_2)}}$$

S obzirom da su promenljive X_1 i X_2 nezavisne, sledi da su one i nekorelisane, pa je njihova kovarijansa nula, odakle sledi $\boxed{\rho = 0}$. Dalje se formula za $f(x_1, x_2)$ svodi na:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \exp\left[-\frac{(x_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2)^2}{2\sigma_2^2}\right]$$
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{0.5\pi} \cdot \exp\left[-\frac{(x_1)^2}{2} - \frac{(x_2)^2}{0.5}\right]$$

Grafici funkcija gustine verovatnoće određene analitički i eksperimentalno prikazani su na ispod:





b) Potrebno je da se analitički odrede matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ i $\mathbf{b}$ tako da slučajan vektor $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}$ ima očekivanje $m_Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ i kovarijacionu matricu $R_Y = \begin{bmatrix} 4 & -3.6 \\ -3.6 & 9 \end{bmatrix}$. Takođe je potrebno i naći koeficijent korelacije $\rho(Y_1, Y_2)$. Znamo da je R_Y

$$R_Y = \begin{bmatrix} var(Y_1) & cov(Y_1, Y_2) \\ cov(Y_2, Y_1) & var(Y_2) \end{bmatrix} = R_Y = \begin{bmatrix} 4 & -3.6 \\ -3.6 & 9 \end{bmatrix}$$

odakle dobijamo vrednosti $var(Y_1) = 4, cov(Y_1, Y_2) = -3.6$ i $var(Y_2) = 9$. Koeficijent korelacije za date parametre:

$$\rho(Y_1, Y_2) = \frac{cov(Y_1, Y_2)}{\sqrt{var(Y_1)var(Y_2)}} = \frac{-3.6}{2 \cdot 3} = \boxed{-0.6}$$

Dalje ćemo odrediti tražene vektore:

$$Y = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1 \\ a_{22}X_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

$$m_Y = EY = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \implies \boxed{b_1 = 0} \wedge \boxed{b_2 = 10}$$

$$var(Y_1) = var(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1) = a_{11}^2 var(X_1) + a_{12}^2 var(X_2) = a_{11}^2 + 0.25a_{12}^2 = 4$$

$$var(Y_2) = var(a_{22}X_2 + b_2) = a_{22}^2 var(X_2) = 0.25a_{22}^2 = 9$$

$$cov(Y_1, Y_2) = E\{(Y_1Y_2)\} - E\{Y_1\}E\{Y_2\} = E\{(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1)(a_{22}X_2 + b_2)\} - E\{(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1)\}E\{(a_{22}X_2 + b_2)\}$$

$$cov(Y_1, Y_2) = E\{(a_{11}X_1a_{22}X_2 + a_{12}X_2a_{22}X_2 + b_1a_{22}X_2 + b_2a_{11}X_1 + b_2a_{12}X_2 + b_2b_1)\} -$$

$$-(E\{a_{11}X_1\} + E\{a_{12}X_2\} + E\{b_1\})(E\{a_{22}X_2\} + E\{b_2\})$$

$$= a_{12}a_{22} \cdot var(X_2) + b_1b_2 - b_1b_2 = 0.25a_{12}a_{22} = -3.6$$

Iz sledećih jednačina ćemo dobiti elemente matrice $\mathbf{A}$

$$a_{11}^2 + 0.25a_{12}^2 = 4$$

$$0.25a_{22}^2 = 9 \implies \boxed{a_{22} = \pm\frac{3}{0.5} = \pm 6}$$

$$0.25a_{12}a_{22} = -3.6 \implies a_{12} = \frac{-3.6}{6 \cdot 0.25} \cdot 2 \implies \boxed{a_{12} = \mp 2.4}$$

$$a_{11}^2 + 0.25 \cdot 5.76 = 4 \implies a_{11} = \sqrt{\frac{4 - 1.44}{1}} = \sqrt{2.56} \implies \boxed{a_{11} = \pm 1.6}$$

Dakle, tražene matrice su $A = \begin{bmatrix} \pm 1.6 & \mp 2.4 \\ 0 & \pm 6 \end{bmatrix}$ i $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$

c) U ovoj tački smo generisali odbirke slučajnog vektora Y, i proverili da li vektor očekivanja i kovarijaciona matrica imaju vrednosti koje su zadate tekstom zadatka. Dobili smo sledeće vrednosti:

$$m_Y = \begin{bmatrix} 0.0005 \\ 10.0066 \end{bmatrix} \text{ Očekivano: } m_Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$R_Y = \begin{bmatrix} 3.9998 & -3.5939 \\ -3.5939 & 8.9620 \end{bmatrix} \text{ Očekivano: } R_Y = \begin{bmatrix} 4 & -3.6 \\ -3.6 & 9 \end{bmatrix}$$

d) Ukoliko promenimo vrednosti koeficijenta korelacije $\rho = 0$, dobijamo sledeće:

$$\rho = 0 = \frac{cov(Y_1, Y_2)}{\sqrt{var(Y_1)var(Y_2)}} \implies cov(Y_1, Y_2) = 0$$

Vektor b će ostati isti kao za $\rho = -0.6$. Jednačine koje dobijamo za računanje komponenti tražene matrice A:

$$0.25a_{22}^2 = 9 \implies a_{22} = \pm 6$$

$$0.25a_{12}a_{22} = 0 \implies a_{12} = 0$$

$$a_{11}^2 + 0.25a_{12}^2 = 4 \implies a_{11}^2 = 4 \implies a_{11} = \pm 2$$

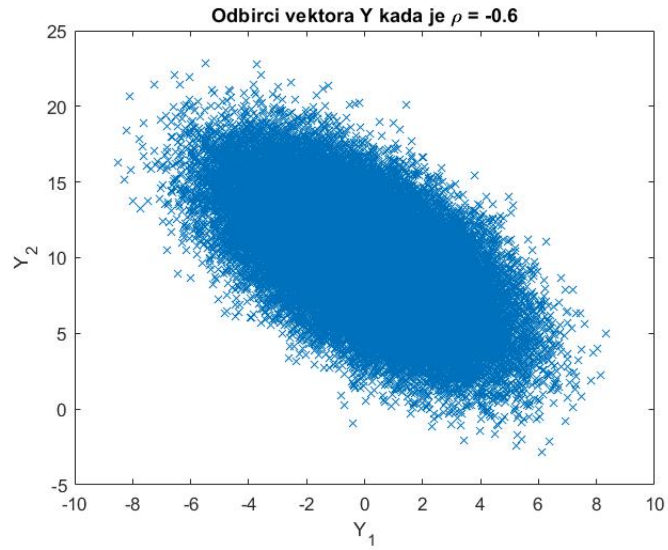
Dakle, tražene matrice su $A = \begin{bmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 6 \end{bmatrix}$ i $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ Za $\rho = 0.8$ vektor b ostaje isti kao za ostale vrednosti koeficijenta korelacije $\rho = -0.6$, a za A dobijamo:

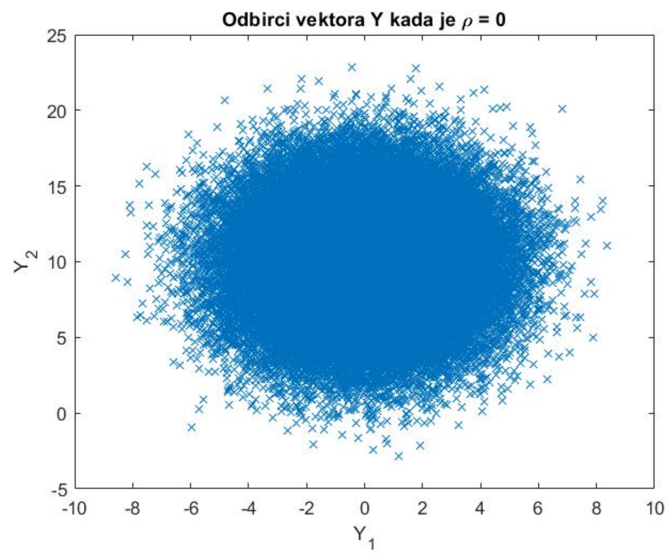
$$0.25a_{22}^2 = 9 \implies a_{22} = \pm 6$$

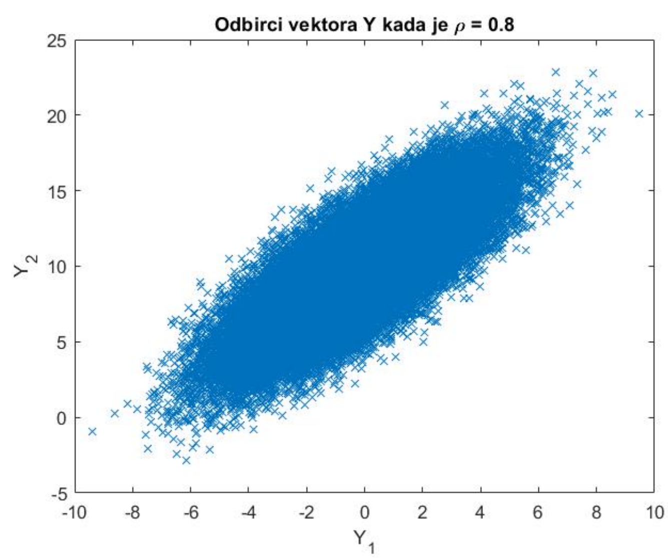
$$0.25a_{12}a_{22} = 0.8\sqrt{4}\sqrt{9} \implies a_{12} = \pm\frac{0.8 \cdot 2 \cdot 3}{0.25 \cdot 6} = \pm 3.2$$

$$a_{11}^2 + 0.25a_{12}^2 = 4 \implies a_{11} = \pm\sqrt{4 - 0.25 \cdot 3.2^2} = \pm\sqrt{1.44} = \pm 1.2$$

$A = \begin{bmatrix} \pm 1.2 & \pm 3.2 \\ 0 & \pm 6 \end{bmatrix}$ i $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ Slede grafici odbiraka za svaku vrednost koeficijenta korelacije iz zadatka:


Odbirci vektora Y kada je ρ = -0.6
Y_2
Y_1


Odbirci vektora Y kada je ρ = 0
Y_2
Y_1


Odbirci vektora Y kada je ρ = 0.8
Y_2
Y_1

MATLAB kod u kom je realizovano rešenje ovog zadatka:

```
clc
clear
close all

N = 10^5;

%definisanje parametara
m1 = 0; s1 = 1;
m2 = 0; s2 = 0.5;

rho = 0;
m = [m1 m2];
sigma = [s1^2 rho*s1*s2; rho*s1*s2 s2^2];


%generisanje N odbiraka slucajnog vektora X i eksperimentalna fgv
u = randn(N,2);
x_eksp(:,1) = m(1) + u(:,1).*(s1);
x_eksp(:,2) = m(2) + u(:,2).*(s2);
figure(1)
hst = histogram2(x_eksp(:,1),x_eksp(:,2),20,'Normalization','pdf');
xlabel('x_1');ylabel('x_2');zlabel('$$\hat{f}(x_1,x_2)$$','Interpreter','Latex')
title('Eksperimentalno procenjena fgv');

%analiticki odredjena fgv
x1 = -3*s1:0.1:3*s1;
x2 = -3*s2:0.1:3*s2;

[X1,X2] = meshgrid(x1,x2);
X = [X1(:) X2(:)];
F = 1/(2*pi*s1*s2)*exp(-(X1.^2)/2/(s1^2)-(X2.^2)/2/(s2^2));

figure(2)
surf(x1,x2,F);
xlabel('x_1'); ylabel('x_2'); zlabel('f(x_1,x_2)');
title('Analiticki odredjena fgv');

%generisanje odbiraka za Y
A = [1.6, -2.4; 0, 6];
b = [0; 10];
Y = A*x_eksp' + b;
Y = Y';

%vektor ocekivanja
m = sum(Y)/N;
disp(['Vektor ocekivanja EY']);
disp(m);

%kovarijaciona matrica
% varY1 = sum((Y(:,1)-m(1,1)).^2)/(N-1);
% varY2 = sum((Y(:,2)-m(1,2)).^2)/(N-1);
% cov_Y1Y2 = sum((Y(:,1)-m(1,1)).*(Y(:,2)-m(1,2)))/(N-1);
% R = [varY1 cov_Y1Y2; cov_Y1Y2 varY2];

R = ((Y-m)'*(Y-m))/(N-1);
disp(['Kovarijaciona matrica:']);
disp(R);

%ro = 0
Y1 = [2*x_eksp(:, 1), 6*x_eksp(:, 2)+10];

%ro = 0.8
Y2 = [1.2*x_eksp(:, 1)+3.2*x_eksp(:, 2), 6*x_eksp(:, 2)+10];

%crtanje grafika
```

```
figure(3);
plot(Y(:, 1), Y(:, 2), 'x');
xlabel('Y_1');
ylabel('Y_2');
title('Odbirci vektora Y kada je \rho = -0.6');

figure(4);
plot(Y1(:, 1), Y1(:, 2), 'x');
xlabel('Y_1');
ylabel('Y_2');
title('Odbirci vektora Y kada je \rho = 0');


figure(5);
plot(Y2(:, 1), Y2(:, 2), 'x');
xlabel('Y_1');
ylabel('Y_2');
title('Odbirci vektora Y kada je \rho = 0.8');
```