13E053SSE Stohastički sistemi i estimacija
I domaći zadatak 2020/21

Student sa brojem indeksa BBBB/GGGG radi ovaj zadatak sa vrednostima

$$P = \mathrm{mod}(B + B + B + B, 3),$$

$$Q = \mathrm{mod}(BBBB + GGGG, 4),$$

$$R = \mathrm{mod}(B + B + B + B, 4),$$

$$S = \mathrm{mod}(BBBB + GGGG, 3),$$

gde $\mathrm{mod}(a, b)$ označava a po modulu b.

Napomene:

- Prilikom izrade domaćeg zadatka nije dozvoljeno korišćenje ugrađenih Matlab funkcija za proračun srednje vrednosti, varijanse, funkcije raspodele itd. Jedine funkcije koje se mogu koristiti su `hist`, `histogram`, `hist3`, `histogram2`, `rand`, `randn`, kao i standardne funkcije za grafički prikaz rezultata (`plot`, `stem`, `stairs`, `surf` i slično).
- Izveštaj treba da sadrži sva potrebna analitička izvođenja, tražene numeričke vrednosti i grafike. Iza svakog zadatka potrebno je navesti i odgovarajući Matlab kod.
- Datum odbrane prvog domaćeg zadatka biće blagovremeno objavljen na MS Teams grupi predmeta.

---

1. Potrebno je simulirati eksperiment iz tabele I.

a) Matematički opisati eksperiment, elementarne ishode, slučajnu promenljivu, analitički odrediti funkciju raspodele $F_X(k)$, funkciju mase verovatnoće $p_X(k) = P(X = k)$, matematičko očekivanje $m = E\{X\}$ i varijansu $\sigma^2 = E\{(X - m)^2\}$.

b) Generisati $N = 10^3$ ishoda i prikazati njihov histogram.

c) Na osnovu generisanih odbiraka eksperimentalno proceniti funkciju mase verovatnoće $\hat{p}_X(k)$ kao količnik broja povoljnih ishoda $(X = k)$ i ukupnog broja ishoda. Takođe, odrediti i funkciju raspodele kao:

$$\hat{F}_X(k) = \sum_{n=-\infty}^{k} \hat{p}_X(n).$$

Dobijene funkcije predstaviti grafički, i to:

- Na jednom grafiku predstaviti egzaktnu ($F_X(k)$) i eksperimentalnu ($\hat{F}_X(k)$) funkciju raspodele, jednu preko druge
- Na drugom grafiku predstaviti egzaktnu ($p_X(k)$) i eksperimentalnu ($\hat{p}_X(k)$) funkciju mase verovatnoće, jednu preko druge

d) Na osnovu generisanih odbiraka eksperimentalno odrediti matematičko očekivanje ($\hat{m}$) i varijansu $\hat{\sigma}^2$ kao:

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \hat{m})^2 .$$

Tabelarno prikazati dobijene vrednosti zajedno sa analitički određenim očekivanjem m i varijansom σ^2.

Tabela I – Eksperiment za prvi zadatak

$P = 0$	Eksperiment bacanja novčića. Novčić je deblji od standardnog, tako da je verovatnoća da padne na ivicu 0.01 (ne dobije se ni pismo ni glava), a verovatnoća da se dobije glava prilikom bacanja je dva puta veća nego verovatnoća da se dobije pismo.
$P = 1$	Eksperiment izvlačenja papirića iz kutije. Na papirićima mogu da se nalaze brojevi 1, 2, 3 ili 4. Verovatnoća da se dobiju parni brojevi je dva puta veća nego verovatnoća da se dobiju neparni, a verovatnoća da je kutija prazna je 0.04.
$P = 2$	Eksperiment izvlačenja papirića iz kutije. Na papirićima mogu da se nalaze brojevi 1, 2, 3, 4, 5 ili 6. Verovatnoća da se dobije broj 2 je duplo veća nego verovatnoća da se dobije bilo koji od ostalih brojeva, a verovatnoća da je kutija prazna je 0.02.

2. Potrebno je generisati odbirke slučajne promenljive Y čija je funkcija gustine verovatnoće data u tabeli II.

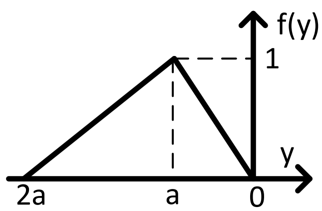
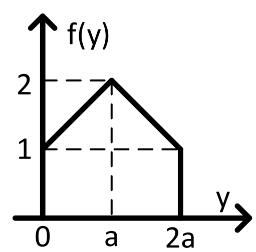
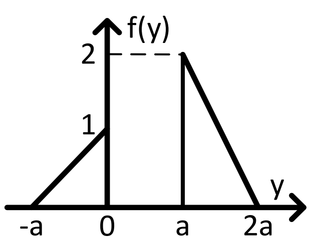
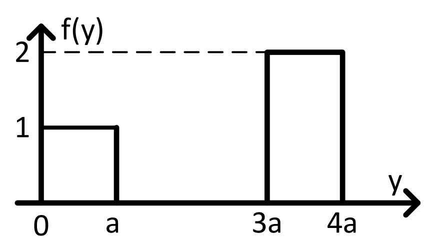
a) Izračunati vrednost realne konstante a.

b) Odrediti funkciju $Y = g(X)$ kojom se postiže željena raspodela slučajne promenljive Y. Ovde je X uniformno raspodeljena slučajna promenljiva na intervalu [0,1].

c) Generisati $N = 10^5$ odbiraka slučajne promenljive Y i na osnovu njih proceniti odgovarajuću funkciju gustine verovatnoće koristeći histogram. Na istom grafiku prikazati i analitičku funkciju gustine verovatnoće datu u tabeli II.

d) Analitički odrediti matematičko očekivanje i varijansu slučajne promenljive Y i uporediti ih sa eksperimentalno procenjenom vrednošću ovih parametara.

Tabela II – Funkcija gustine verovatnoće

$Q = 0$		$Q = 2$	
$Q = 1$		$Q = 3$	

3. Generisati $N = 10^5$ odbiraka dvodimenzionalnog normalno raspodeljenog slučajnog vektora $\boldsymbol{X} = [X_1 \quad X_2]^T$ sa nezavisnim komponentama koje imaju nulto matematičko očekivanje i varijanse σ_1^2 i σ_2^2 date u tabeli III.

a) Izdeliti ravan (x_1, x_2) na 20 x 20 elementarnih površina i eksperimentalno proceniti vrednosti funkcije fustine verovatnoće $\hat{f}(x_1, x_2)$ u tačkama koje odgovaraju centrima ovih površina. Skicirati jedne ispod drugih eksperimentalno određenu i analitički dobujenu funkciju gustine verovatnoće.

b) Analitički odrediti matricu $\boldsymbol{A}$ i vektor $\boldsymbol{b}$ tako da slučajan vektor $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{b}$ ima očekivanje m_Y i kovarijacionu matricu R_Y iz tabele IV. Odrediti koeficijent korelacije ρ između komponenti slučajnog vektora Y. Usvojiti da matrica A ima trougaonu formu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

c) Na osnovu generisanih odbiraka slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$ i dobijenih vrednosti $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{b}$ iz prethodne tačke generisati odbirke slučajnog vektora Y i eksperimentalno proveriti da li vektor očekivanja i kovarijaciona matrica imaju tražene vrednosti.

d) Ponoviti postupak iz tačke b) za iste vrednosti $m_{Y_1}, m_{Y_2}, \sigma_{Y_1}, \sigma_{Y_2}$, ali za promenjen koeficijent korelacije: $\rho = 0$ i $\rho = 0.8$. Generisati odbirke odgovarajućih slučajnih vektora. Predstaviti na tri grafika odbirke sva tri slučajna vektora (za ρ koje odgovara vektoru Y, zatim za $\rho = 0$ i $\rho = 0.8$).

Tabela III – Varijanse slučajnih promenljivih X_1 i X_2

$R = 0$	$\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 4$	$R = 2$	$\sigma_1^2 = 9, \sigma_2^2 = 4$
$R = 1$	$\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 0.25$	$R = 3$	$\sigma_1^2 = 0.01, \sigma_2^2 = 1$

Tabela IV – Parametri slučajnog vektora Y

$S = 0$	$m_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, R_Y = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ -1.5 & 9 \end{bmatrix}$
$S = 1$	$m_Y = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, R_Y = \begin{bmatrix} 4 & -0.8 \\ -0.8 & 1 \end{bmatrix}$
$S = 2$	$m_Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, R_Y = \begin{bmatrix} 4 & -3.6 \\ -3.6 & 9 \end{bmatrix}$