

1 Описание модели и ограничений

Пусть I – множество идентификаторов сотрудников, J – множество идентификаторов квалификаций, M – множество месяцев. Т.к. год считается заикленным, можно считать, что сложение на месяцах происходит по модулю 12.

Решением задачи будем называть матрицы

$$x_{im} - \text{количество часов отдыха сотрудника } i \text{ в месяце } m$$

$$z_{im} = \begin{cases} 1 & \text{сотрудник } i \text{ отдыхал в месяце } m \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$y_{im} = \begin{cases} 1 & \text{сотрудник } i \text{ открывал отпуск в месяце } m \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$q_{imj} = \begin{cases} 1 & \text{сотрудник } i \text{ в месяце } m \text{ работал по квалификации } j \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Чтобы эти переменные отображали логику модели, введём следующие ограничения:

$$\forall i \in I \quad \forall m \in M \quad x_{im} \leq z_{im} \text{MaxFly}[i]$$

– то есть сотрудник не может отдыхать, если этот месяц не помечен как месяц, в который сотрудник отдыхал.

Переменные z_{im} удобны для установления связи с часами отдыха, но для записи остальных ограничений модели будет удобно перейти к новым переменным – y_{im} . Дело в том, что если отпуск попадает на границу месяцев m и $m+1$, то $z_{i,m} = z_{i,m+1} = 1$. Переменные y_{im} нужны чтобы удалить последовательности из двух последовательных единиц, то есть:

$$z_{im} = 0 \rightarrow y_{im} = 0$$

$$z_{i,m-1} = z_{i,m} = 1 \rightarrow y_{im} = 0$$

что, ввиду того, что переменные принимают всего 2 значения, равносильно ограничениям:

$$y_{im} \leq z_{im}$$

$$y_{im} \leq 1 - z_{i,m-1} + 1 - z_{i,m}$$

Далее перейдём к бизнес-ограничениям:

$$\forall i \in I \quad \sum_{m \in M} (\text{MaxFly}[i] - x_{im}) \leq 10 \text{MaxFly}[i]$$

– ограничение на максимальное число рабочих часов за год.

$$\forall i \in I \quad \sum_{m \in M} y_{im} \leq \text{TOTAL_RESTS}$$

– ограничение на максимального числа отпусков за год.

$$\forall i \in I \quad \forall m \in M \quad x_{im} \leq 3z_{im}$$

– меньшая часть отпуска не может быть меньше 3-х часов.

$$\forall i \in I \quad \forall m \in M \quad x_{i,m} + x_{i,m+1} \geq z_{im} \text{MIN_REST_SIZE}$$

– отпуск не меньше минимального размера отпуска.

$$\forall i \in I \quad \sum_{m \in M} x_{im} \leq \text{MaxRest}[m]$$

– ограничение на максимальное число часов отдыха в зависимости от месяца.

Пусть $Top \subset M$ – множество топовых месяцев, тогда

$$\forall i \in I \quad \sum_{m \in Top} y_{im} \leq \text{PRIOR_RESTS}$$

$$\forall i \in I \quad \sum_{m \in M \setminus Top} y_{im} \leq NOPRIOR_RESTS$$

$$\forall i \in I \quad \sum_{m \in Top} y_{im} \geq 1$$

– ограничения на число топовых (нетоповых) отпусков.

$$\forall i \in I \quad \sum_{m=1}^{Start-1} y_{im} = 0$$

$$\forall i \in I \quad \sum_{m=Start}^{maxStart} y_{im} \geq 1$$

– ограничения на ранние и поздние времена начала отпуска.

$$\forall i \in I \quad \forall k \in M \quad \sum_{m=k-1}^{k+1} y_{im} \leq 1$$

– лаг отпусков.

2 Предварительная обработка данных

Так как задача может не иметь решений, потребуется предварительная обработка данных. Пусть $Quals^{-1}[j]$ – множество сотрудников, имеющих квалификацию j .

Тогда условие, что все работы должны быть выполнены, можно записать так:

$$\forall m \in M \quad \forall j \in J \quad \sum_{i \in Quals^{-1}[j]} (MaxFly[i] - x_{im}) q_{imj} = RequiredPersonal[j][m]$$

Так как q_{imj} принимает всего два значения, это равносильно ограничениям:

$$\forall m \in M \quad \forall j \in J \quad RequiredPersonal[j][m] \leq \sum_{i \in Quals^{-1}[j]} MaxFly[i] q_{imj}$$

$$\forall m \in M \quad \forall j \in J \quad RequiredPersonal[j][m] \leq \sum_{i \in Quals^{-1}[j]} (MaxFly[i] - x_{im})$$

$$\forall m \in M \quad \forall j \in J \quad RequiredPersonal[j][m] \geq \sum_{i \in Quals^{-1}[j]} (MaxFly[i] - x_{im}) - \sum_{i \in Quals^{-1}[j]} MaxFly[i] (1 - q_{imj})$$

Нарушение условия

$$\forall m \in M \quad \forall j \in J \quad \sum_{i \in Quals^{-1}[j]} (MaxFly[i] - x_{im}) \geq RequiredPersonal[j][m]$$

означает, что в месяце m не хватает сотрудников квалификации j .

Так как по условиям задачи это условие должно быть обязательно удовлетворено, а по логике процесса, описываемого задачей, не нарушается постоянно, то его можно реализовать как проверку входных данных. То есть если в месяце m не хватает сотрудников квалификации j , то к ограничениям модели добавляются ограничения:

$$\forall i \in Quals^{-1}[j] \quad z_{im} = 0$$

Добавление этого условия является релаксацией исходной постановки задачи, и решения, полученные с помощью такой модели могут не учитывать нехватку рабочих в какие-то месяцы. Уменьшить количество ложно-отрицательных результатов можно модифицироваф ограничение следующим образом:

$$\forall m \in M \quad \forall j \in J \quad \sum_{i \in Quals^{-1}[j]} (MaxFly[i] - x_{im}) \geq c RequiredPersonal[j][m]$$

где $c \leq 1$ – некоторый числовой коэффициент.

3 Целевая функция

Критерии оценивания подразумевают многокритериальную оптимизацию с целевыми функциями:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{m \in M, i \in I} x_{im} \rightarrow \max_x \\g(y) &= \sum_{m \in M, i \in I} y_{im} Request[i][m] \rightarrow \max_y \\h(y) &= \sum_{m \in M, i \in I} y_{im} Priority[i][m] \rightarrow \max_y\end{aligned}$$

Одним из вариантов реализации многокритериальной оптимизации может быть реализация целевой функции как суммы

$$C_1 f(x) + C_2 g(y) + C_3 h(y) \rightarrow \max_{x, y}$$

где коэффициенты подбираются в соответствии с приоритетами оптимизации.