1 (判断)**.** 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ 是凸集.

Answer. 是.

2 (判断)**.** 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}$ 是凸集.

Answer. 否.

3 (判断)**.** 有限个凸集的并集是凸集.

Answer. 否.

4 (判断)**.** 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1, a^t x \leq 1\}$ 是凸集，其中 $a \in \mathbb{R}^n$ 是给定的非 0 向量.

Answer. 是.

5 (判断)**.** 集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |e^a x + e^{-a} y| \leq 1, -1 \leq a \leq 1\}$ 是凸集.

Answer. 是.

6 (判断)**.** 凸函数一定可微.

Answer. 否.

7 (判断)**.** 对于一元可微函数 f，f 是凸函数当且仅当 $f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x)$ 对任何 x, y 成立.

Answer. 否，还要求 $\mathrm{dom}(f)$ 是凸集.

8 (判断)**.** 二元函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的凸函数.

Answer. 否.

9 (判断)**.** 若一元函数 $f(x) > 0$ 是开区间 (a, b) 上的凸函数，则 $\log f(x)$ 亦是 (a, b) 上的凸函数.

Answer. 否.

10 (判断)**.** 定义在 $\mathbb{R}$ 上的一元单调递增函数一定是凸函数.

Answer. 否.

11 (判断)**.** 凸优化问题中，强对偶永远成立.

Answer. 否.

12 (判断)**.** 对于凸优化中的 QP 问题，KKT 条件永远成立.

Answer.

13 (判断)**.** 线性模型的 SVM 中，最后得到的解仅依赖于支撑向量.

Answer.

14 (判断)**.** 通过梯度下降方法求解凸优化问题，通常可以收敛到全局极小值点.

Answer.

15 (判断)**.** 定义在集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ 上的凸函数一定存在极小值点.

Answer.

16 (判断)**.** 定义在集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ 上的凸函数一定存在极小值点.

Answer.

17 (问答)**.** 写出 $f(x) = x \log x$ 的对偶函数.

Answer.

18 (问答)**.** 若整数 $n \geq 0$ 使得 $f(x, y) = x^2 + xy^{n-1} + y^n$ 是 $\mathbb{R}^frm{-}e$ 上的凸函数，则 n 的所有取值是多少?

Answer.

19 (问答)**.** 给出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & a^t x \\ \text{subject to} & x \succeq 0 \end{cases}$ 的解，其中 $a \in \mathbb{R}^n$.

Answer.

20 (问答)**.** 叙述强凸函数 (strongly convex) 的定义.

Answer.

21 (问答)**.** 叙述严格凸函数 (strongly convex) 的定义.

Answer.

22 (问答)**.** 写出 $f(x) = \frac{1}{2} x^t P x + q^t x + r$ 的极小值点和极小值，其中 $P \in \mathbb{S}^n_{++}, q \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$.

Answer.

23 (问答)**.** 写出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

Answer.

24 (问答). 写出优化问题 $\begin{cases}\text{minimize} & f(x)\\ \text{subject to} & x \preceq a\end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $a \in \mathbb{R}^n$.

Answer.

25 (问答). 写出优化问题 $\begin{cases}\text{minimize} & \|x\|\\ \text{subject to} & Ax = b\end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

Answer.

26 (问答). 给定点集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $B \subset \mathbb{R}^m$，定义其乘积为 $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$. 证明：若 A 和 B 皆为凸集，则 $A \times B$ 亦是凸集.

Proof. □

27 (问答). 验证函数 $\|x\|^2/y$ 是否是凸函数并给出理由，其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及 $y > 0$.

Answer.

28 (问答). 证明下述问题是凸优化问题并给出 KKT 条件：

$$\begin{cases}\text{minimize} & -\sum_{i=1}^m a_i \log(b_i^t x)\\ \text{subject to} & 0 \preceq x \preceq 1, \sum_{i=1}^n x_i = n-1\end{cases}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, a_i > 0$ 以及 $b_i \succ 0$.

Answer.

29 (问答). 使用梯度下降方法（精确直线搜索）求出三元函数 $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 的极小值点。假设起始点为 $(1,0,0)$，需写出每次更新迭代的详细过程和结果。

Answer.

30 (问答). 证明下述问题是凸优化问题并求解：

$$\begin{cases}\text{minimize} & f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3u^2\\ \text{subject to} & x + y + z + u = 1\\ & x^2 + z^2 \le 1\end{cases}$$

Answer.