

1 (判断). 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ 是凸集.

Answer. 是.

2 (判断). 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}$ 是凸集.

Answer. 否.

3 (判断). 有限个凸集的并集是凸集.

Answer. 否.

4 (判断). 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1, a^t x \leq 1\}$ 是凸集, 其中 $a \in \mathbb{R}^n$ 是给定的非 0 向量.

Answer. 是.

5 (判断). 集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |e^a x + e^{-a} y| \leq 1, -1 \leq a \leq 1\}$ 是凸集.

Answer. 是.

6 (判断). 凸函数一定可微.

Answer. 否.

7 (判断). 对于一元可微函数 f , f 是凸函数当且仅当 $f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x)$ 对任何 x, y 成立.

Answer. 否, 还要求 $\text{dom}(f)$ 是凸集.

8 (判断). 二元函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy$ 是定义在 \mathbb{R}^2 上的凸函数.

Answer. 否.

9 (判断). 若一元函数 $f(x) > 0$ 是开区间 (a, b) 上的凸函数, 则 $\log f(x)$ 亦是 (a, b) 上的凸函数.

Answer. 否.

10 (判断). 定义在 \mathbb{R} 上的一元单调递增函数一定是凸函数.

Answer. 否.

11 (判断). 凸优化问题中, 强对偶永远成立.

Answer. 否.

12 (判断). 对于凸优化中的 QP 问题, KKT 条件永远成立.

Answer. 是.

13 (判断). 线性模型的 SVM 中, 最后得到的解仅依赖于支撑向量.

Answer. 是.

14 (判断). 通过梯度下降方法求解凸优化问题, 通常可以收敛到全局极小值点.

Answer. 是.

15 (判断). 定义在集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ 上的凸函数一定存在极小值点.

Answer. 是.

16 (判断). 定义在集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ 上的凸函数一定存在极小值点.

Answer. 否.

17 (问答). 写出 $f(x) = x \log x$ 的对偶函数.

Answer.

18 (问答). 若整数 $n \geq 0$ 使得 $f(x, y) = x^2 + xy^{n-1} + y^n$ 是 \mathbb{R}^2 上的凸函数, 则 n 的所有取值是多少?

Answer.

19 (问答). 给出优化问题
$$\begin{cases} \text{minimize} & a^t x \\ \text{subject to} & x \succeq 0 \end{cases}$$
 的解, 其中 $a \in \mathbb{R}^n$.

Answer. 如果 $c \succeq 0$, 则 $x^* = 0, p^* = 0$, 否则 $c_i < 0$, 当 $j \neq i$, $x_j = 0$, $x_i = \lambda c_i$, $\lambda \rightarrow -\infty$.

20 (问答). 叙述强凸函数 (strongly convex) 的定义.

Answer. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{dom}(f)$ 是凸集, $\exists m > 0$, s.t. $g(x) = f(x) - \frac{m}{2}\|x\|^2$ 是凸函数, 即 $g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$.

21 (问答). 叙述严格凸函数 (strictly convex) 的定义.

Answer. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{dom}(f)$ 是凸集, 并且 $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

22 (问答). 写出 $f(x) = \frac{1}{2}x^t P x + q^t x + r$ 的极小值点和极小值, 其中 $P \in \mathbb{S}_{++}^n, q \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$.

Answer. $\nabla f(x) = Px + q$, 令 $\nabla f(x) = 0$, 极小值点 $x^* = -P^{-1}q$, 极小值 $p^* = -\frac{1}{2}q^t P^{-1}q + r$.

23 (问答). 写出优化问题
$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{cases}$$
 的拉格朗日乘子函数, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

Answer. $L(x, \mu) = f(x) + \mu^t(Ax - b)$, 其中 $\mu \in \mathbb{R}^m$.

24 (问答). 写出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \preceq a \end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $a \in \mathbb{R}^n$.

Answer. $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t(x - a)$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

25 (问答). 写出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & \|x\| \\ \text{subject to} & Ax = b \end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

Answer. $L(x, \mu) = \|x\| + \mu^t(Ax - b)$, 其中 $\mu \in \mathbb{R}^m$.

26 (问答). 给定点集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $B \subset \mathbb{R}^m$, 定义其乘积为 $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. 证明: 若 A 和 B 皆为凸集, 则 $A \times B$ 亦是凸集.

Proof. $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 = (\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2, \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2)$, 其中 $z_1, z_2 \in A \times B, z_1 = (a_1, b_1), z_2 = (a_2, b_2), a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$. 由于 A 是一个凸集, 所以 $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in A$, 同理 $\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2 \in B$. 可得 $z_1 \in A, z_2 \in B \implies z \in A \times B$. $A \times B$ 是一个凸集. \square

27 (问答). 验证函数 $\|x\|^2/y$ 是否是凸函数并给出理由, 其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及 $y > 0$.

Answer. $\nabla^2 f = \frac{2}{y^3} \begin{pmatrix} y^2 I & -yx \\ -yx^t & 2x^t x \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} y^2 I & -yx \\ -yx^t & 2x^t x \end{vmatrix} = y^2 x^t x \geq 0$, 所以 $\nabla^2 f \succeq 0$, $f(x, y) = \|x\|^2/y$ 是一个凸函数.

28 (问答). 证明下述问题是凸优化问题并给出 KKT 条件:

$$\begin{cases} \text{minimize} & -\sum_{i=1}^m a_i \log(b_i^t x) \\ \text{subject to} & 0 \preceq x \preceq 1, \sum_{i=1}^n x_i = n - 1 \end{cases}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, a_i > 0$ 以及 $b_i \succ 0$.

Answer. 目标函数 $f(x) = -\sum_{i=1}^m a_i \log(b_i^t x)$, $\partial_{jk} f = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_{ij} b_{ik}}{(b_i^t x)^2} = (b_i b_i^t)_{jk} \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{(b_i^t x)^2}$. 所以 $\nabla^2 f(x)$ 正定, 目标函数是凸函数. 约束条件是仿射, 所以是凸优化问题.

Lagrange 函数: $L(x, \lambda, \mu) = -\sum_{i=1}^m a_i \log(b_i^t x) - \lambda_1^t x + \lambda_2^t(x - \mathbf{1}) + \mu(\mathbf{1}^t x - n + 1)$

KKT 条件如下:

- $0 \preceq x \preceq 1, \sum_{i=1}^n x_i = n - 1$
- $\lambda_1 \succeq 0, \lambda_2 \succeq 0$
- $\lambda_{1i} x_i = 0, \lambda_{2i}(x_i - 1) = 0$

$$\bullet \partial_x L = 0, -\sum_{i=1}^m \frac{a_i b_i}{b_i^t x} - \lambda_1 + \lambda_2 + \mu \mathbf{1} = 0$$

29 (问答). 使用梯度下降方法 (精确直线搜索) 求出三元函数 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 的极小值点。假设起始点为 $(1, 0, 0)$, 需写出每次更新迭代的详细过程和结果。

Answer.

30 (问答). 证明下述问题是凸优化问题并求解:

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3u^2 \\ \text{subject to} & x + y + z + u = 1 \\ & x^2 + z^2 \leq 1 \end{cases}$$

Answer. 目标函数是二次函数, 等式约束是仿射函数, 不等约束是二次函数, QCPQ 问题是凸优化问题。

Lagrange 函数: $L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3u^2 + \lambda(x^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z + u - 1)$

KKT 条件如下:

- $\bullet x + y + z + u = 1, x^2 + z^2 \leq 1$
- $\bullet \lambda \geq 0$
- $\bullet \lambda(x^2 + z^2 - 1) = 0$
- $\bullet 2x + 2\lambda x + \mu = 0, 4y + \mu = 0, 4z + 2\lambda z + \mu = 0$

根据 $\lambda(x^2 + z^2 - 1) = 0$,

- \bullet 当 $\lambda = 0$, $(x, y, z) = (\frac{2-2u}{5}, \frac{1-u}{5}, \frac{1-u}{5})$
- \bullet 当 $\lambda \neq 0 \implies x^2 + z^2 = 1$, ... difficult,