一 (16 分)

1. 你知道几种求解无约束优化问题 $\min f(x)$ 的迭代算法？请列出三种及其相应的搜索方向的迭代公式.

2. 取初始点 $x^{(0)}=(1,1)^t$，采用牛顿法求解下面的无约束优化问题：

$$\min f(x)=2x_1^2+x_2^2-4x_1+2x_2$$

写出迭代步骤，并解释说明最终得到的迭代点就是最优解.

二 (18 分)

3. 考虑约束优化问题 (P1):

$$\begin{cases}\min & x_1x_2\\ \text{subject to} & 2x_1-x_2-3=0\end{cases}$$

1. 给定 $\bar{x}=(\frac{3}{4},-\frac{3}{2})^t$，利用约束优化问题局部解的一阶必要条件和二阶充分条件判断 $\bar{x}$ 是否是 (P1) 的局部最优解?
2. 定义外罚函数为
$$G(x,c)=x_1x_2+\frac{c}{2}(2x_1-x_2-3)^2$$
试用外罚函数法求解 (P1)，并说明产生的序列趋向点 $\bar{x}$.

三 (20 分)

4. 考虑下面的线性规划问题 (P2)：

$$\begin{cases}\max & 2x_1-x_2+x_3\\ \text{subject to} & 3x_1+x_2+x_3\le b_1\\ & x_1-x_2+2x_3\le b_2\\ & x_1+x_2-x_3\le b_3\\ & x_1\ge 0,x_2\ge 0,x_3\ge 0\end{cases}$$

利用单纯形法求解 (P2) 得到如下最优单纯形表：

基	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	()	()	()	()	()	()	()
x_4	()	()	()	()	-1	-2	10
x_1	()	()	()	()	1/2	1/2	15
x_2	()	()	()	()	$-1/2$	1/2	5

试回答下面的问题：

1. 确定 b_1, b_2, b_3 的值，并把最优表补充完整.
2. 写出 (P2) 的对偶问题并根据给出的最优表求其对偶问题的最优解.

四 (28 分)

5. 设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$，函数 $f: S \to R$ 二阶连续可微，考虑约束优化问题 (P3)

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ \text{subject to} & x \in S \end{cases}$$

1. 写出函数 f 是凸函数的定义，并列出你所知道的判定函数 f 是凸函数的充要条件. 约束优化问题 (P3) 在什么条件下是凸规划？对于凸规划，你知道有什么好的性质？
2. 设 $f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2)^2, S = \{(x_1, x_2) \mid -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\}$，判断函数 $f(x_1, x_2)$ 是否为 S 上的凸函数？说明理由.
3. 考虑如下优化问题 (P4)：

$$\begin{cases} \min & x_1^2 - 5x_1 + 4x_2 \\ \text{subject to} & 2 + x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1 - 2 \leq 0 \\ & x_1 - (x_2 - 3)^2 + 2 \geq 0 \end{cases}$$

   (P4) 是否为凸规划？说明理由. 根据最优性条件求 (P4) 的最优解.

五 (18 分)

6. 设 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 对称设定，$b \in \mathbb{R}^n$ 且 $b \neq 0$，考虑非线性规划问题 (P5)：

$$\begin{cases} \min & \frac{1}{2} x^t Q x \\ \text{subject to} & x \geq b \end{cases}$$

试回答下面的问题：

1. 写出 (P5) 的 Lagrange 对偶规划.
2. 设 x^* 是 (P5) 的最优解，证明 x^* 与 $x^* - b$ 关于 Q 共轭.