Problem 1. 设函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. 矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 对称，向量 $b\in\mathbb{R}^n$.

(1) 写出函数 f 是凸函数的定义，并列出至少两个判定函数 f 是凸函数的充要条件。

(2) 设 $f(x_1,x_2)=10-2(x_2-x_1^2)^2$, $S=\{(x_1,x_2)\mid -11\le x_1\le 1,-1\le x_2\le 1\}$. 判断函数 $f(x_1,x_2)$ 是否为 S 上的凸函数？说明理由。

(3) 证明 $f(x)=\frac{1}{2}x^tAx+b^tx$，为严格凸函数的充要条件是其 Hessian 阵 A 正定。

Answer.

(1) 定义：$\mathrm{dom}(f)$ 是凸集，并且对于 $\forall x,y\in\mathrm{dom}(f),0\le\lambda\le 1$, 都有 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

判定充要条件：

(a) 函数 f 是定义在非空开凸集 S 上的可微函数，$\forall x,y\in\mathrm{dom}(f)$, 都有 $f(y)\ge f(x)+\nabla f(x)^t(y-x)$.

(b) 函数 f 是定义在非空开凸集 S 上的二次可微函数，$\forall x\in S$, 都有 $\nabla^2 f(x)\succeq 0$.

(2) $\nabla^2 f=\begin{pmatrix}8x_2-24x_1^2 & 8x_1\\ 8x_1 & -4\end{pmatrix}$ 不是半正定矩阵，故函数 f 不是凸函数。

(3) *Proof.*

(a) 严格凸 $\to$ 正定：

由一阶条件可得

$$f(\bar{x}+\lambda x)>f(\bar{x})+\lambda\nabla f(\bar{x})x.$$

并且

$$f(\bar{x}+\lambda x)=f(\bar{x})+\lambda\nabla f(\bar{x})^tx+\frac{1}{2}\lambda^2x^t\nabla^2 f(\bar{x})x+\lambda^2\|x\|^2a,\ \lim_{\lambda\to 0}a=0.$$

故

$$\frac{1}{2}\lambda^2x^t\nabla^2 f(\bar{x})x+\lambda^2\|x\|^2a>0.$$

两边除 λ^2, 令 $\lambda\to 0$ 得 $x^t\nabla^2 f(\bar{x})x>0$, 故 Hessian 阵 A 正定。

(b) 正定 $\to$ 严格凸：

$\forall x,\bar{x}\in\mathrm{dom}(f)$, 二阶 Taylar 展开可得：

$$f(x)=f(\bar{x})+\nabla f(\bar{x})^t(x-\bar{x})+\frac{1}{2}(x-\bar{x})^t\nabla^2 f(\xi)(x-\bar{x}).$$

其中 $\xi=\lambda\bar{x}+(1-\lambda)x,\lambda\in(0,1)$.

因为 dom(f) 是凸集，故 $\xi \in \mathrm{dom}(f)$, 又 $\nabla^2 f$ 正定，可得

$$\frac{1}{2}(x-\bar{x})\nabla^2 f(\xi)(x-\bar{x}) > 0$$

故

$$f(x) > f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^t (x-\bar{x})$$

即 f 是严格凸函数。

□

Problem 2. 设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$, 函数 $f: S \to \mathbb{R}$ 二阶连续可微。考虑约束优化问题 (P1):

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ \mathrm{s.t.} & x \in S \end{cases}$$

(1) 约束优化问题 (P1) 在什么条件下是凸规划？对于凸规划，你知道有什么好的性质？

(2) 考虑如下优化问题 (P2):

$$\begin{cases} \min & x_2^2 + 4x_1 - 7x_2 \\ \mathrm{s.t.} & x_1 - x_2 \le 4 \\ & x_2 \le 3 \\ & 6x_1 - x_1^2 + x_2 \ge 8 \end{cases}$$

(P2) 是否是凸规划？说明理由。根据最优性条件求 (P2) 的最优解。

Answer.

(1) 当 f 是凸函数，不等约束 $g_i(x) \le 0$ 是凸函数，等式约束是线性函数时，(P1) 是凸规划，在本题中，要求 S 是凸集即可。

凸规划下，函数的局部极小点就是整体极小点，且极小点的集合是凸集。

(2) 优化目标 $f(x) = x_2^2 + 4x_1 - 7x_2$ 是凸函数，约束条件 $g_i(x) \le 0$ 都是凸函数，故 (P2) 是凸规划。

$$\begin{cases} 4 + \lambda_1 + (-6 + 2x_1)\lambda_3 & = 0 \\ 2x_2 - 7 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1(x_1 - x_2 - 4) & = 0 \\ \lambda_2(x_2 - 3) & = 0 \\ \lambda_3(-6x_1 + x_1^2 - x_2 + 8) & = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 & \ge 0 \end{cases}$$

解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2\sqrt{6} - 4$, $x^* = \left(2 - \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{6}\right)^t$.

Problem 3. 用最速下降法，求解下列问题：

$$\min\ x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - 3x_2$$

取初始点 $x^{(1)} = (1,1)^t$, 迭代两次。

Answer.

$$f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - 3x_2$$
$$\nabla f(x) = (2x_1 - 2x_2 + 1, -2x_1 + 8x_2 - 3)^t$$

第一次迭代

(1) $d^{(1)} = (-1,-3)^t$.

(2) $\min\limits_{\lambda\geq 0}\varphi(\lambda) = \min\limits_{\lambda\geq 0} f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)})$, 得 $\lambda = -\frac{5}{31}$.

(3) $x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda d^{(1)} = (\frac{26}{31}, \frac{16}{31})$.

第二次迭代

(1) $d^{(2)} = \frac{17}{31}(-3,1)^t$

(2) $\min\limits_{\lambda\geq 0}\varphi(\lambda) = \min\limits_{\lambda\geq 0} f(x^{(2)} + \lambda d^{(2)})$, 得 $\lambda = \frac{5}{19}$.

(3) $x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda d^{(2)} = \frac{1}{589}(239,389)^t$.

Problem 4. 设 $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定，$b \in \mathbb{R}^n$ 且 $b \neq 0$, 考虑非线性规划问题 (P3):

$$\begin{cases} \min & \frac{1}{2}x^tQx \\ \text{s.t.} & x \geq b. \end{cases}$$

(1) 写出 (P3) 的 Lagrange 对偶规划。

(2) 设 x^* 是 (P3) 的最优解，证明 x^* 与 $x^* - b$ 关于 Q 共轭。

Answer.

(1)

$$g(\lambda) = \inf_x \frac{1}{2}x^tQx + \lambda(b-x)$$

(2) *Proof.* 由 Lagrange 对偶可得，$L(x,\lambda) = \frac{1}{2}x^tQx + \lambda^t(b-x)$

$$\begin{cases} Qx - \lambda & = 0 \\ \lambda & \succeq 0 \\ \lambda_i(b_i - x_i) & = 0 \end{cases}$$

由 $\lambda = Qx$ 以及 $\lambda_i(b_i - x_i) = 0$ 可得，最优解 x^* 满足 $x^tQ(b-x) = 0$, 即 x^* 与 $x^* - b$ 关于 Q 共轭。 □

Problem 5. 考虑线性规划问题 (P4):

$$\begin{cases} \max & 8x_1 - 9x_2 + 12x_3 + 4x_3 + 11x_5 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 1 \\ & x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 1 \\ & 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 22 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

(1) 写出 (P4) 的对偶规划。

(2) 利用对偶理论判断 $x^* = (0, 2, 0, 7, 0)$ 是否是 (P4) 的最优解，说明理由。

Answer.

(1)

$$\begin{cases} \min & w_1 + w_2 + 22w_3 \\ \text{s.t.} & 2w_1 + w_2 + 5w_3 \geq 8 \\ & -3w_1 + 7w_2 + 4w_3 \geq -9 \\ & 4w_1 + 3w_2 - 6w_3 \geq 12 \\ & w_1 - 2w_2 + 2w_3 \geq 4 \\ & 3w_1 + w_2 + 3w_3 \geq 11 \\ & w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

(2) 如果 $x^* = (0, 2, 0, 7, 0)^t$ 是最优解，那么由互补松弛定理可得

$$\begin{cases} -3w_1 + 7w_2 + 4w_3 & = -9 \\ w_1 - 2w_2 + 2w_3 & = 4 \\ w_2 & = 0 \end{cases}$$

解得对偶问题的最优解为 $(w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{34}{10}, 0, \frac{3}{10}\right)$. 两个问题最优解相同，故 $x^* = (0, 2, 0, 7, 0)$ 是最优解。

Problem 6. 考虑下列问题 (P5):

$$\begin{cases} \min & x_1 x_2 \\ \text{s.t.} & g(x) = -2x_1 + x_2 + 3 \geq 0. \end{cases}$$

(1) 用二阶最优性条件证明点 $\bar{x} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$ 是局部最优解，并说明它是否为全局最优解。

(2) 定义障碍函数

$$G(x,r) = x_1x_2 - r\ln g(x),$$

试用内点法求解 (P5), 并说明内点法产生的序列趋向点 $\bar{x}$.

Answer.

(1) $L(x,\lambda) = x_1x_2 + \lambda(2x_1 - x_2 - 3)$, 由 KKT 条件

$$\begin{cases} \lambda(2x_1 - x_2 - 3) & = 0 \\ \lambda & \geq 0 \\ \partial_{x_1} L = x_2 + 2\lambda & = 0 \\ \partial_{x_2} L = x_1 - \lambda & = 0 \end{cases}$$

解得

$$x = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)^t, \quad \lambda = \frac{3}{4}.$$

由

$$\lambda > 0, \nabla g(x)^t d = 0$$

可得

$$d = (d_1, d_2)^t, \quad d_1 - 2d_2 = 0,\ d \neq 0.$$

此时

$$\begin{aligned} d^t \nabla_x^2 L(x,\lambda) d &= \begin{pmatrix} 2d_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2d_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &= 4d_2^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

故矩阵 $\nabla^2 L_x(x,\lambda)$ 在子空间 G 上正定，故是极小值点。

只有唯一的 KKT 点，故也是全局最优解。

(2) 令

$$\begin{cases} \partial_{x_1} G = x_2 + \dfrac{2r}{-2x_1 + x_2 + 3} = 0 \\ \partial_{x_2} G = x_1 - \dfrac{r}{-2x_1 + x_2 + 3} = 0 \end{cases}.$$

可得

$$x = \frac{1}{8}(3 \mp \sqrt{9 - 16r}, -6 \pm 2\sqrt{9 - 16r})^t.$$

需在 $r > 0$ 时满足约束条件，故

$$x = \frac{1}{8}(3 + \sqrt{9 - 16r}, -6 - 2\sqrt{9 - 16r})^t.$$

令 $r \to 0$, 可得 $x = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)^t$ 是全局最优解。

Problem 7. 考虑约束优化问题 (P6):

$$\begin{cases} \min & x_1 x_2 \\ \text{s. t.} & 2x_1 - x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

(1) 给定 $\bar{x} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)^t$, 利用约束优化问题局部解的一阶必要条件合二阶充分条件判断 $\bar{x}$ 是否是 (P6) 的局部最优解?

(2) 定义外罚函数为

$$G(x, c) = x_1 x_2 + \frac{c}{2} (2x_1 - x_2 - 3)^2$$

试用外罚函数法求解 (P6)，并说明产生的序列趋向点。

Answer.

(1) Lagrange 乘子函数为 $L(x, \mu) = x_1 x_2 + \mu(2x_1 - x_2 - 3)$.

由 KKT 条件可得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3 & = 0 \\ \partial_{x_1} L = x_2 + 2\mu & = 0 \\ \partial_{x_2} L = x_1 - \mu & = 0 \end{cases}$$

解得

$$x^* = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right).$$

由二阶最优性条件可得

$$\nabla h(x)^t d = 0$$

故

$$d = (d_1, d_2) \neq 0, \quad 2d_1 - d_2 = 0$$

则 Lagrange 乘子函数的 Hessian 矩阵在空间 G 上

$$\begin{aligned} d^t \nabla^2 L_x(x, \mu) d &= \begin{pmatrix} d_1 & 2d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ 2d_1 \end{pmatrix} \\ &= 4d_1^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

故 $\nabla^2 L_x(x, \mu)$ 正定，$\bar{x} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$ 是 (P6) 的局部最优解。

(2) 对 x 求偏导可得

$$\partial_{x_1} G = x_2 + c(2x_1 - x_2 - 3) \cdot 2 = 0$$
$$\partial_{x_2} G = x_1 + c(2x_1 - x_2 - 3) \cdot (-1) = 0$$

解得

$$x^* = \left(\frac{3c}{4c-1}, \frac{-6c}{4c-1} \right).$$

令 $c \to +\infty$, 得

$$x^* = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2} \right).$$

Problem 8. 用单纯形法求解标准的线性规划问题得到下面的最优表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	$\bar{c}_3$	$\bar{c}_4$	
x_2	0	1	-1	α	1
x_1	1	0	4	β	3

设 $\bar{c}_3 = 0$, 求另一个不同于表中的最优解。

Answer.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
	0	0	0	$\bar{c}_4$	
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	$\alpha + \frac{\beta}{4}$	$\frac{7}{4}$
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{\beta}{4}$	$\frac{3}{4}$

故线性规划另一个解为 $x = \left(0, \frac{7}{4}, \frac{3}{4}, 0 \right)^t$.