**1** (判断). 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}$ 是凸集.

**Answer.** 是.

**2** (判断). 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}$ 是凸集.

**Answer.** 否.

**3** (判断). 有限个凸集的并集是凸集.

**Answer.** 否.

**4** (判断). 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1, a^t x \le 1\}$ 是凸集，其中 $a \in \mathbb{R}^n$ 是给定的非 0 向量.

**Answer.** 是.

**5** (判断). 集合 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |e^a x + e^{-a} y| \le 1, -1 \le a \le 1\}$ 是凸集.

**Answer.** 是.

**6** (判断). 凸函数一定可微.

**Answer.** 否.

**7** (判断). 对于一元可微函数 $f$，$f$ 是凸函数当且仅当 $f(y) \ge f(x) + (y-x)f'(x)$ 对任何 $x, y$ 成立.

**Answer.** 否，还要求 $\mathrm{dom}(f)$ 是凸集.

**8** (判断). 二元函数 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3xy$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的凸函数.

**Answer.** 否.

**9** (判断). 若一元函数 $f(x) > 0$ 是开区间 $(a,b)$ 上的凸函数，则 $\log f(x)$ 亦是 $(a,b)$ 上的凸函数.

**Answer.** 否.

**10** (判断). 定义在 $\mathbb{R}$ 上的一元单调递增函数一定是凸函数.

**Answer.** 否.

**11** (判断). 凸优化问题中，强对偶永远成立.

**Answer.** 否.

**12** (判断). 对于凸优化中的 QP 问题，KKT 条件永远成立.

**Answer.** 是.

**13** (判断). 线性模型的 SVM 中，最后得到的解仅依赖于支撑向量.

**Answer.** 是.

**14** (判断). 通过梯度下降方法求解凸优化问题，通常可以收敛到全局极小值点.

**Answer.** 是.

**15** (判断). 定义在集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ 上的凸函数一定存在极小值点.

**Answer.** 是.

**16** (判断). 定义在集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ 上的凸函数一定存在极小值点.

**Answer.** 否.

**17** (问答). 写出 $f(x) = x \log x$ 的对偶函数.

**Answer.**

**18** (问答). 若整数 $n \geq 0$ 使得 $f(x, y) = x^2 + xy^{n-1} + y^n$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的凸函数，则 $n$ 的所有取值是多少?

**Answer.**

**19** (问答). 给出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & a^t x \\ \text{subject to} & x \succeq 0 \end{cases}$ 的解，其中 $a \in \mathbb{R}^n$.

**Answer.** 如果 $c \succeq 0$，则 $x^* = 0, p^* = 0$，否则 $c_i < 0$，当 $j \neq i$，$x_j = 0$，$x_i = \lambda c_i$，$\lambda \to -\infty$.

**20** (问答). 叙述强凸函数 (strongly convex) 的定义.

**Answer.** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$\mathrm{dom}(f)$ 是凸集，$\exists m > 0$, s.t. $g(x) = f(x) - \frac{m}{2}\|x\|^2$ 是凸函数，即 $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$.

**21** (问答). 叙述严格凸函数 (strictly convex) 的定义.

**Answer.** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$\mathrm{dom}(f)$ 是凸集，并且 $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

**22** (问答). 写出 $f(x) = \frac{1}{2}x^t P x + q^t x + r$ 的极小值点和极小值，其中 $P \in \mathbb{S}^n_{++}, q \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$.

**Answer.** $\nabla f(x) = Px + q$, 令 $\nabla f(x) = 0$, 极小值点 $x^* = -P^{-1}q$, 极小值 $p^* = -\frac{1}{2}q^t P^{-1} q + r$.

**23** (问答). 写出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

**Answer.** $L(x,\mu) = f(x) + \mu^t(Ax-b)$，其中 $\mu \in \mathbb{R}^m$.

**24** (问答). 写出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \preceq a \end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $a \in \mathbb{R}^n$.

**Answer.** $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^t(x-a)$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

**25** (问答). 写出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & \|x\| \\ \text{subject to} & Ax = b \end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

**Answer.** $L(x,\mu) = \|x\| + \mu^t(Ax-b)$，其中 $\mu \in \mathbb{R}^m$.

**26** (问答). 给定点集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $B \subset \mathbb{R}^m$，定义其乘积为 $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$. 证明：若 $A$ 和 $B$ 皆为凸集，则 $A \times B$ 亦是凸集.

*Proof.* $z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 = (\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2, \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)$，其中 $z_1, z_2 \in A \times B, z_1 = (a_1, b_1), z_2 = (a_2, b_2), a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$. 由于 $A$ 是一个凸集，所以 $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A$，同理 $\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 \in B$. 可得 $z_1 \in A, z_1 \in B \Longrightarrow z \in A \times B$. $A \times B$ 是一个凸集. □

**27** (问答). 验证函数 $\|x\|^2/y$ 是否是凸函数并给出理由，其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及 $y > 0$.

**Answer.** $\nabla^2 f = \frac{2}{y^3}\begin{pmatrix} y^2 I & -yx \\ -yx^t & 2x^t x \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} y^2 I & -yx \\ -yx^t & 2x^t x \end{vmatrix} = y^2 x^t x \geq 0$，所以 $\nabla^2 f \succeq 0$，$f(x,y) = \|x\|^2/y$ 是一个凸函数.

**28** (问答). 证明下述问题是凸优化问题并给出 KKT 条件：

$$\begin{cases} \text{minimize} & -\sum_{i=1}^m a_i \log(b_i^t x) \\ \text{subject to} & 0 \preceq x \preceq 1, \sum_{i=1}^n x_i = n-1 \end{cases}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, a_i > 0$ 以及 $b_i \succ 0$.

**Answer.** 目标函数 $f(x) = -\sum_{i=1}^m a_i \log(b_i^t x)$，$\partial_{jk} f = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_{ij} b_{ik}}{(b_i^t x)^2} = (b_i b_i^t)_{jk} \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{(b_i^t x)^2}$。所以 $\nabla^2 f(x)$ 正定，目标函数是凸函数。约束条件是仿射，所以是凸优化问题。

Lagrange 函数: $L(x,\lambda,\mu) = -\sum_{i=1}^m a_i \log(b_i^t x) - \lambda_1^t x + \lambda_2^t(x - \mathbf{1}) + \mu(\mathbf{1}^t x - n + 1)$

KKT 条件如下：

- $0 \preceq x \preceq 1, \sum_{i=1}^n x_i = n-1$
- $\lambda_1 \succeq 0, \lambda_2 \succeq 0$
- $\lambda_{1i} x_i = 0, \lambda_{2i}(x_i - 1) = 0$

- $\partial_x L = 0, -\sum_{i=1}^m \frac{a_i b_i}{b_i^t x} - \lambda_1 + \lambda_2 + \mu \mathbf{1} = 0$

**29** (问答). 使用梯度下降方法（精确直线搜索）求出三元函数 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 的极小值点。假设起始点为 $(1, 0, 0)$，需写出每次更新迭代的详细过程和结果.

**Answer.**

**30** (问答). 证明下述问题是凸优化问题并求解：

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3u^2 \\ \text{subject to} & x + y + z + u = 1 \\ & x^2 + z^2 \leq 1 \end{cases}$$

**Answer.** 目标函数是二次函数，等式约束是仿射函数，不等约束是二次函数，QCPQ 问题是凸优化问题。

Lagrange 函数: $L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3u^2 + \lambda(x^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z + u - 1)$

KKT 条件如下：

- $x + y + z + u = 1, \ x^2 + z^2 \leq 1$
- $\lambda \geq 0$
- $\lambda(x^2 + z^2 - 1) = 0$
- $2x + 2\lambda x + \mu = 0, 4y + \mu = 0, 4z + 2\lambda z + \mu = 0$

根据 $\lambda(x^2 + z^2 - 1) = 0$，

- 当 $\lambda = 0$，$(x, y, z) = (\frac{2-2u}{5}, \frac{1-u}{5}, \frac{1-u}{5})$
- 当 $\lambda \neq 0 \Longrightarrow x^2 + z^2 = 1$, ... difficult,