1. 给定函数

$$f(x)=\frac{x_1+x_2}{3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2}$$

求 $f(x)$ 的极小点。

Answer. 令

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{3-x_1^2-2x_1x_2}{\left(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)^2}=0\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{3-x_2^2-2x_1x_2}{\left(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)^2}=0\end{cases}$$

解得

$$x^{(1)}=(1,1),\quad x^{(2)}=(-1,-1)$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}&=\frac{-18x_1-12x_2+2x_1^3-2x_2^3+6x_1^2x_2}{\left(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)^3}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}&=\frac{-12x_1-18x_2-2x_1^3+2x_2^3+6x_1x_2^2}{\left(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)^3}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}&=\frac{-12x_1-12x_2+6x_1^2x_2+6x_1x_2^2}{\left(3+x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)^3}\end{aligned}$$

故

$$\nabla^2 f(x^{(1)})=\begin{bmatrix}-\frac{1}{9} & -\frac{1}{18}\\ -\frac{1}{18} & -\frac{1}{9}\end{bmatrix},\quad \nabla^2 f(x^{(2)})=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & \frac{1}{18}\\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

由于 $\nabla^2 f(x^{(1)})$ 为负定矩阵，$\nabla^2 f(x^{(2)})$ 为正定矩阵，因此 $f(x)$ 的极小点是 $x^{(2)}=(-1,-1)$。