1 (判断). 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}$ 是凸集.

Answer. 是.

2 (判断). 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}$ 是凸集.

Answer. 否.

3 (判断). 有限个凸集的并集是凸集.

Answer. 否.

4 (判断). 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1, a^t x \le 1\}$ 是凸集，其中 $a \in \mathbb{R}^n$ 是给定的非 0 向量.

Answer. 是.

5 (判断). 集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |e^a x + e^{-a} y| \le 1, -1 \le a \le 1\}$ 是凸集.

Answer. 是.

Theorem 1. 如果对于 $\forall x, y \in S$，都有 $\lambda x + (1-\lambda) y \in S$，则集合 S 是一个凸集.

Proof. $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S, \lambda \in (0, 1)$，$(x_3, y_3) = (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)$

$$
\begin{aligned}
&|e^a x_3 + e^{-a} y_3| \\
=&|e^a(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) + e^{-a}(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)| \\
\le&\lambda |e^a x_1 + e^{-a} y_1| + (1-\lambda)|e^a x_2 + e^{-a} y_2| \\
\le&1
\end{aligned}
$$

$(x_3, y_3) \in S \Longrightarrow$ 集合 S 是一个凸集. □

6 (判断). 凸函数一定可微.

Answer. 否.

7 (判断). 对于一元可微函数 f，f 是凸函数当且仅当 $f(y) \ge f(x) + (y - x) f'(x)$ 对任何 x, y 成立.

Answer. 否，还要求 $\mathrm{dom}(f)$ 是凸集.

8 (判断). 二元函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的凸函数.

Answer. 否.

9 (判断). 若一元函数 $f(x) > 0$ 是开区间 (a, b) 上的凸函数，则 $\log f(x)$ 亦是 (a, b) 上的凸函数.

Answer. 否.

10 (判断). 定义在 $\mathbb{R}$ 上的一元单调递增函数一定是凸函数.

Answer. 否.

11 (判断). 凸优化问题中，强对偶永远成立.

Answer. 否.

12 (判断). 对于凸优化中的 QP 问题，KKT 条件永远成立.

Answer. 是.

13 (判断). 线性模型的 SVM 中，最后得到的解仅依赖于支撑向量.

Answer. 是.

14 (判断). 通过梯度下降方法求解凸优化问题，通常可以收敛到全局极小值点.

Answer. 是.

15 (判断). 定义在集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ 上的凸函数一定存在极小值点.

Answer. 是.

16 (判断). 定义在集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ 上的凸函数一定存在极小值点.

Answer. 否.

17 (问答). 写出 $f(x) = x \log x$ 的对偶函数.

Theorem 2. 函数 f 的共轭函数：$f^*(y) \triangleq \sup\limits_{x \in \mathrm{dom}(f)} (y^t x - f(x))$

Answer.

$$\begin{aligned} f^*(y) &\triangleq \sup_{x \in \mathrm{dom}(f)} (yx - f(x)) \\ &= \sup_{x>0} (yx - x \log x) \\ &= e^{y-1} \end{aligned}$$

18 (问答). 若整数 $n \geq 0$ 使得 $f(x, y) = x^2 + xy^{n-1} + y^n$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的凸函数，则 n 的所有取值是多少?

Answer. $n \in \{1, 2\}$.

- 当 $n=0$ 时，$f(x,y)=x^2+\frac{x}{y}+1$，$\nabla^2 f=\frac{1}{y^3}\begin{bmatrix}2y^3 & -y\\ -y & 2x\end{bmatrix}$ 不是半正定.

- 当 $n=1$ 时，$f(x,y)=x^2+x+y$，$\nabla^2 f=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 半正定.

- 当 $n=2$ 时，$f(x,y)=x^2+xy+y^2$，$\nabla^2 f=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ 正定.

- 当 $n\geq 3$ 时，$f(x,y)=x^2+xy^{n-1}+y^n$，

$$\nabla^2 f=\begin{bmatrix}2 & (n-1)y^{n-2}\\ (n-1)y^{n-2} & (n-1)(n-2)xy^{n-3}+n(n-1)y^{n-2}\end{bmatrix}$$

  不是半正定.

19 (问答). 给出优化问题 $\begin{cases}\text{minimize} & a^t x\\ \text{subject to} & x\succeq 0\end{cases}$ 的解，其中 $a\in\mathbb{R}^n$.

Answer. 如果 $a\succeq 0$，则 $x^*=0, p^*=0$，否则 $a_i<0$，当 $j\neq i$，$x_j=0$，$x_i=\lambda a_i$，$\lambda\to-\infty$，$p^*=-\infty$.

20 (问答). 叙述强凸函数 (strongly convex) 的定义.

Answer. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$\text{dom}(f)$ 是凸集，$\exists m>0$, s.t. $g(x)=f(x)-\frac{m}{2}\|x\|^2$ 是凸函数，即 $g(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$.

21 (问答). 叙述严格凸函数 (strictly convex) 的定义.

Answer. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$\text{dom}(f)$ 是凸集，并且 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

22 (问答). 写出 $f(x)=\frac{1}{2}x^tPx+q^tx+r$ 的极小值点和极小值，其中 $P\in\mathbb{S}^n_{++}, q\in\mathbb{R}^n, r\in\mathbb{R}$.

Answer. $\nabla f(x)=Px+q$, 令 $\nabla f(x)=0$, 极小值点 $x^*=-P^{-1}q$, 极小值 $p^*=-\frac{1}{2}q^tP^{-1}q+r$.

23 (问答). 写出优化问题 $\begin{cases}\text{minimize} & f(x)\\ \text{subject to} & Ax=b\end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}, b\in\mathbb{R}^m$.

Answer. $L(x,\mu)=f(x)+\mu^t(Ax-b)$，其中 $\mu\in\mathbb{R}^m$.

24 (问答). 写出优化问题 $\begin{cases}\text{minimize} & f(x)\\ \text{subject to} & x\preceq a\end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $a\in\mathbb{R}^n$.

Answer. $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^t(x-a)$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

25 (问答)**.** 写出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & \|x\| \\ \text{subject to} & Ax = b \end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

Answer. $L(x,\mu) = \|x\| + \mu^t(Ax-b)$，其中 $\mu \in \mathbb{R}^m$.

26 (问答)**.** 给定点集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $B \subset \mathbb{R}^m$，定义其乘积为 $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$. 证明：若 A 和 B 皆为凸集，则 $A \times B$ 亦是凸集.

Proof. $z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 = (\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2, \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)$，其中 $z_1, z_2 \in A \times B, z_1 = (a_1, b_1), z_2 = (a_2, b_2), a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$. 由于 A 是一个凸集，所以 $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2 \in A$，同理 $\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2 \in B$. 可得 $z_1 \in A, z_1 \in B \Longrightarrow z \in A \times B$. $A \times B$ 是一个凸集. □

27 (问答)**.** 验证函数 $\|x\|^2/y$ 是否是凸函数并给出理由，其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及 $y > 0$.

Answer. $\nabla^2 f = \frac{2}{y^3}\begin{pmatrix} y^2 I & -yx \\ -yx^t & x^t x \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} y^2 I & -yx \\ -yx^t & x^t x \end{vmatrix} = 0$，所以 $\nabla^2 f \succeq 0$，$f(x,y) = \|x\|^2/y$ 是一个凸函数.

28 (问答)**.** 证明下述问题是凸优化问题并给出 KKT 条件：

$$\begin{cases} \text{minimize} & -\sum_{i=1}^m a_i \log(b_i^t x) \\ \text{subject to} & 0 \preceq x \preceq 1, \sum_{i=1}^n x_i = n-1 \end{cases}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, a_i > 0$ 以及 $b_i \succ 0$.

Answer. 目标函数 $f(x) = -\sum_{i=1}^m a_i \log(b_i^t x)$，$\partial_{jk} f = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_{ij} b_{ik}}{(b_i^t x)^2} = (b_i b_i^t)_{jk} \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{(b_i^t x)^2}$. 所以 $\nabla^2 f(x)$ 正定，目标函数是凸函数. 约束条件是仿射，所以是凸优化问题.

Lagrange 函数: $L(x,\lambda,\mu) = -\sum_{i=1}^m a_i \log(b_i^t x) - \lambda_1^t x + \lambda_2^t(x - \mathbf{1}) + \mu(\mathbf{1}^t x - n + 1)$

KKT 条件如下：

- $0 \preceq x \preceq 1, \sum_{i=1}^n x_i = n-1$
- $\lambda_1 \succeq 0, \lambda_2 \succeq 0$
- $\lambda_{1i} x_i = 0, \lambda_{2i}(x_i - 1) = 0$ ·
- $\partial_x L = 0, -\sum_{i=1}^m \frac{a_i b_i}{b_i^t x} - \lambda_1 + \lambda_2 + \mu\mathbf{1} = 0$

29 (问答)**.** 使用梯度下降方法（精确直线搜索）求出三元函数 $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 的极小值点. 假设起始点为 $(1,0,0)$，需写出每次更新迭代的详细过程和结果.

Answer.

30 (问答)**.** 证明下述问题是凸优化问题并求解：

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3u^2 \\ \text{subject to} & x + y + z + u = 1 \\ & x^2 + z^2 \leq 1 \end{cases}$$

Answer. 目标函数是二次函数，等式约束是仿射函数，不等约束是二次函数，QCQP 问题是凸优化问题.

Lagrange 函数: $L(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+2y^2+2z^2+3u^2+\lambda(x^2+z^2-1)+\mu(x+y+z+u-1)$

KKT 条件如下：

- $x+y+z+u=1,\ x^2+z^2 \leq 1$
- $\lambda \geq 0$
- $\lambda(x^2+z^2-1)=0$
- $2x+2\lambda x+\mu=0, 4y+\mu=0, 4z+2\lambda z+\mu=0$

根据 $\lambda(x^2+z^2-1)=0$，

- 当 $\lambda=0$，$(x,y,z)=(\frac{2-2u}{5},\frac{1-u}{5},\frac{1-u}{5})$
- 当 $\lambda \neq 0 \Longrightarrow x^2+z^2=1$, ... difficult,