

1 (判断). 集合  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  是凸集.

**Answer.** 是.

2 (判断). 集合  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}$  是凸集.

**Answer.** 否.

3 (判断). 有限个凸集的并集是凸集.

**Answer.** 否.

4 (判断). 集合  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1, a^T x \leq 1\}$  是凸集, 其中  $a \in \mathbb{R}^n$  是给定的非 0 向量.

**Answer.** 是.

5 (判断). 集合  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |e^a x + e^{-a} y| \leq 1, -1 \leq a \leq 1\}$  是凸集.

**Answer.** 是.

6 (判断). 凸函数一定可微.

**Answer.** 否.

7 (判断). 对于一元可微函数  $f$ ,  $f$  是凸函数当且仅当  $f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x)$  对任何  $x, y$  成立.

**Answer.** 否, 还要求  $\text{dom}(f)$  是凸集.

8 (判断). 二元函数  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy$  是定义在  $\mathbb{R}^2$  上的凸函数.

**Answer.** 否.

9 (判断). 若一元函数  $f(x) > 0$  是开区间  $(a, b)$  上的凸函数, 则  $\log f(x)$  亦是  $(a, b)$  上的凸函数.

**Answer.** 否.

10 (判断). 定义在  $\mathbb{R}$  上的一元单调递增函数一定是凸函数.

**Answer.** 否.

11 (判断). 凸优化问题中, 强对偶永远成立.

**Answer.** 否.

12 (判断). 对于凸优化中的 QP 问题, KKT 条件永远成立.

Answer.

13 (判断). 线性模型的 SVM 中, 最后得到的解仅依赖于支撑向量.

Answer.

14 (判断). 通过梯度下降方法求解凸优化问题, 通常可以收敛到全局极小值点.

Answer. 是.

15 (判断). 定义在集合  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$  上的凸函数一定存在极小值点.

Answer. 是.

16 (判断). 定义在集合  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$  上的凸函数一定存在极小值点.

Answer. 否.

17 (问答). 写出  $f(x) = x \log x$  的对偶函数.

Answer.

18 (问答). 若整数  $n \geq 0$  使得  $f(x, y) = x^2 + xy^{n-1} + y^n$  是  $\mathbb{R}^2$  上的凸函数, 则  $n$  的所有取值是多少?

Answer.

19 (问答). 给出优化问题 
$$\begin{cases} \text{minimize} & a^t x \\ \text{subject to} & x \succeq 0 \end{cases}$$
 的解, 其中  $a \in \mathbb{R}^n$ .

Answer. 如果  $c \succeq 0$ , 则  $x^* = 0, p^* = 0$ , 否则  $c_i < 0$ , 当  $j \neq i$ ,  $x_j = 0$ ,  $x_i = \lambda c_i$ ,  $\lambda \rightarrow -\infty$ .

20 (问答). 叙述强凸函数 (strongly convex) 的定义.

Answer.  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{dom}(f)$  是凸集,  $\exists m > 0$ , s.t.  $g(x) = f(x) - \frac{m}{2}\|x\|^2$  是凸函数, 即  $g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$ .

21 (问答). 叙述严格凸函数 (strictly convex) 的定义.

Answer.  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{dom}(f)$  是凸集, 并且  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ .

22 (问答). 写出  $f(x) = \frac{1}{2}x^t P x + q^t x + r$  的极小值点和极小值, 其中  $P \in \mathbb{S}_{++}^n, q \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$ .

Answer.  $\nabla f(x) = Px + q$ , 令  $\nabla f(x) = 0$ , 极小值点  $x^* = -P^{-1}q$ , 极小值  $p^* = -\frac{1}{2}q^t P^{-1}q + r$ .

23 (问答). 写出优化问题 
$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{cases}$$
 的拉格朗日乘子函数, 其中  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ .

**Answer.**  $L(x, \mu) = f(x) + \mu^t(Ax - b)$ , 其中  $\mu \in \mathbb{R}^m$ .

**24 (问答).** 写出优化问题  $\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \preceq a \end{cases}$  的拉格朗日乘子函数, 其中  $a \in \mathbb{R}^n$ .

**Answer.**  $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t(x - a)$ , 其中  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ .

**25 (问答).** 写出优化问题  $\begin{cases} \text{minimize} & \|x\| \\ \text{subject to} & Ax = b \end{cases}$  的拉格朗日乘子函数, 其中  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ .

**Answer.**  $L(x, \mu) = \|x\| + \mu^t(Ax - b)$ , 其中  $\mu \in \mathbb{R}^m$ .

**26 (问答).** 给定点集  $A \subset \mathbb{R}^n$  以及  $B \subset \mathbb{R}^m$ , 定义其乘积为  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ . 证明: 若  $A$  和  $B$  皆为凸集, 则  $A \times B$  亦是凸集.

*Proof.*  $z = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 = (\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2, \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2)$ , 其中  $z_1, z_2 \in A \times B, z_1 = (a_1, b_1), z_2 = (a_2, b_2), a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$ . 由于  $A$  是一个凸集, 所以  $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in A$ , 同理  $\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2 \in B$ . 可得  $z_1 \in A, z_2 \in B \implies z \in A \times B$ .  $A \times B$  是一个凸集.  $\square$

**27 (问答).** 验证函数  $\|x\|^2/y$  是否是凸函数并给出理由, 其中  $x \in \mathbb{R}^n$  以及  $y > 0$ .

**Answer.**  $\nabla^2 f = \frac{2}{y^3} \begin{pmatrix} y^2 I & -yx \\ -yx^t & 2x^t x \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} y^2 I & -yx \\ -yx^t & 2x^t x \end{vmatrix} = y^2 x^t x \geq 0$ , 所以  $\nabla^2 f \succeq 0$ ,  $f(x, y) = \|x\|^2/y$  是一个凸函数.

**28 (问答).** 证明下述问题是凸优化问题并给出 KKT 条件:

$$\begin{cases} \text{minimize} & -\sum_{i=1}^m a_i \log(b_i^t x) \\ \text{subject to} & 0 \preceq x \preceq 1, \sum_{i=1}^n x_i = n - 1 \end{cases}$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n, a_i > 0$  以及  $b_i \succ 0$ .

**Answer.**

**29 (问答).** 使用梯度下降方法 (精确直线搜索) 求出三元函数  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$  的极小值点. 假设起始点为  $(1, 0, 0)$ , 需写出每次更新迭代的详细过程和结果.

**Answer.**

**30 (问答).** 证明下述问题是凸优化问题并求解:

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3u^2 \\ \text{subject to} & x + y + z + u = 1 \\ & x^2 + z^2 \leq 1 \end{cases}$$

**Answer.**