1. 写出下列原问题的对偶问题

$$
\begin{cases}
\max & 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\
s.t. & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15 \\
 & -x_1 + 2x_2 - 7x_3 \ge 3 \\
 & x_1 + x_3 = 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{cases}
$$

解. 对偶问题如下

$$
\begin{cases}
\min & 15w_1 + 3w_2 + w_3 \\
s.t. & 3w_1 - w_2 + w_3 \ge 4 \\
 & w_1 + 2w_2 \ge -3 \\
 & 2w_1 - 7w_2 + w_3 \ge 5 \\
 & w_1 \ge 0, w_2 \le 0, w_3 \text{ free}
\end{cases}
$$

2. 写出下列原问题的对偶问题

$$
\begin{cases}
\min & -4x_1 - 5x_2 - 7x_3 + x_4 \\
s.t. & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \ge 1 \\
 & 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 \le -3 \\
 & x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5 \\
 & x_1, x_2, x_4 \ge 0
\end{cases}
$$

解. 对偶问题如下

$$
\begin{cases}
\min & w_1 - 3w_2 - 5w_3 \\
s.t. & w_1 + 2w_2 + w_3 \le -4 \\
 & w_1 - 6w_2 + 4w_3 \le -5 \\
 & 2w_1 + 3w_2 + 3w_3 = -7 \\
 & -w_1 + w_2 + 2w_3 \le 1 \\
 & w_1 \ge 0, w_2 \le 0, w_3 \text{ free}
\end{cases}
$$

3. 给定原问题

$$
\begin{cases}
\min & 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\
s.t. & x_1 - x_2 + x_3 \ge 1 \\
 & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \ge 2 \\
 & x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{cases}
$$

已知对偶问题的最优解 $(w_1, w_2) = (\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$，利用对偶性质求原问题的最优解。

解. 对偶问题如下：

$$\begin{cases} \max & w_1 + 2w_2 \\ s.t. & w_1 + w_2 \geq 4 \\ & -w_1 + 2w_2 \geq 3 \\ & w_1 - 3w_2 \geq 1 \\ & w_1 \geq 0, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

得到对偶问题的最优解为 $w_1 = \frac{5}{3} > 0, w_2 = \frac{7}{3} > 0$，由互补松弛定理可得，$x_3 = 0$，从而

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = 2 \\ x_3 & = 0 \end{cases}$$

解得 $x^* = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0), f^*_{min} = \frac{19}{3}$

4. 给定下列线性规划问题

$$\begin{cases} \max & 10x_1 + 7x_2 + 30x_3 + 2x_4 \\ s.t. & x_1 - 6x_3 + x_4 \leq -2 \\ & x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 \leq -7 \\ & x_2, x_3, x_4 \leq 0 \end{cases}$$

1. 写出上述原问题的对偶问题
2. 用图解法求对偶问题的最优解
3. 利用对偶问题的最优解及对偶性质求原问题的最优解和目标函数的最优值

解. 1. 对偶问题如下

$$\begin{cases} \min & -2w_1 - 7w_2 \\ s.t. & w_1 + w_2 = 10 \\ & w_2 \leq 7 \\ & -6w_1 + 5w_2 \leq 30 \\ & w_1 - w_2 \leq 2 \\ & w_1 \geq 0, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. 对偶问题的可行域是直线 $w_1 + w_2 = 10$ 上的一线段，最优解为 $(w_1, w_2) = (3, 7)$，最优值为 $f_{min} = -55$

3. 由于对偶问题的最优解中，$w_1 > 0, w_2 > 0$，以及对偶问题约束的后两个条件没有取到等号，由互补松弛定理可得

$$\begin{cases} x_1 - 6x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = -7 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

解得 $x^* = (-2, -5, 0, 0), f_{max} = -55$。

5. 给定线性规划问题

$$\begin{cases} \min & 5x_1 + 21x_3 \\ s.t. & x_1 - x_2 + 6x_3 \geq b_1 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

其中 b_1 是某一个正数，已知这个问题的一个最优解为 $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$。

1. 写出对偶问题。
2. 求对偶问题的最优解。

解. 1. 对偶问题如下

$$\begin{cases} \max & b_1 w_1 + w_2 \\ s.t. & w_1 + w_2 \leq 5 \\ & -w_1 + w_2 \leq 0 \\ & 6w_1 + 2w_2 \leq 21 \\ & w_1 \geq 0, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. 原问题中 $x_1 > 0, x_3 > 0$，由互补松弛定理可得

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 5 \\ 6w_1 + 2w_2 = 21 \end{cases}$$

解得 $w_1 = \frac{11}{4}, w_2 = \frac{9}{4}, g_{max} = f_{min} = \frac{31}{4}$。