1 (判断). 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}$ 是凸集.

Answer. 是.

2 (判断). 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}$ 是凸集.

Answer. 否.

3 (判断). 有限个凸集的并集是凸集.

Answer. 否.

4 (判断). 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1, a^t x \le 1\}$ 是凸集，其中 $a \in \mathbb{R}^n$ 是给定的非 0 向量.

Answer. 是.

5 (判断). 集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |e^a x + e^{-a} y| \le 1, -1 \le a \le 1\}$ 是凸集.

Answer. 是.

6 (判断). 凸函数一定可微.

Answer. 否.

7 (判断). 对于一元可微函数 f，f 是凸函数当且仅当 $f(y) \ge f(x) + (y - x)f'(x)$ 对任何 x, y 成立.

Answer. 否，还要求 $\mathrm{dom}(f)$ 是凸集.

8 (判断). 二元函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的凸函数.

Answer. 否.

9 (判断). 若一元函数 $f(x) > 0$ 是开区间 (a, b) 上的凸函数，则 $\log f(x)$ 亦是 (a, b) 上的凸函数.

Answer. 否.

10 (判断). 定义在 $\mathbb{R}$ 上的一元单调递增函数一定是凸函数.

Answer. 否.

11 (判断). 凸优化问题中，强对偶永远成立.

Answer. 否.

12 (判断). 对于凸优化中的 QP 问题，KKT 条件永远成立.

Answer. 是.

13 (判断). 线性模型的 SVM 中，最后得到的解仅依赖于支撑向量.

Answer.

14 (判断). 通过梯度下降方法求解凸优化问题，通常可以收敛到全局极小值点.

Answer. 是.

15 (判断). 定义在集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ 上的凸函数一定存在极小值点.

Answer. 是.

16 (判断). 定义在集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ 上的凸函数一定存在极小值点.

Answer. 否.

17 (问答). 写出 $f(x) = x \log x$ 的对偶函数.

Answer.

18 (问答). 若整数 $n \geq 0$ 使得 $f(x, y) = x^2 + xy^{n-1} + y^n$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的凸函数，则 n 的所有取值是多少?

Answer.

19 (问答). 给出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & a^t x \\ \text{subject to} & x \succeq 0 \end{cases}$ 的解，其中 $a \in \mathbb{R}^n$.

Answer. 如果 $c \succeq 0$，则 $x^* = 0, p^* = 0$，否则 $c_i < 0$，当 $j \neq i$，$x_j = 0$，$x_i = \lambda c_i$，$\lambda \to -\infty$.

20 (问答). 叙述强凸函数 (strongly convex) 的定义.

Answer. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$\mathrm{dom}(f)$ 是凸集，$\exists m > 0$, s.t. $g(x) = f(x) - \frac{m}{2}\|x\|^2$ 是凸函数，即 $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$.

21 (问答). 叙述严格凸函数 (strictly convex) 的定义.

Answer. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$\mathrm{dom}(f)$ 是凸集，并且 $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

22 (问答). 写出 $f(x) = \frac{1}{2}x^t P x + q^t x + r$ 的极小值点和极小值，其中 $P \in \mathbb{S}^n_{++}, q \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$.

Answer. $\nabla f(x) = Px + q$, 令 $\nabla f(x) = 0$, 极小值点 $x^* = -P^{-1}q$, 极小值 $p^* = -\frac{1}{2}q^t P^{-1} q + r$.

23 (问答). 写出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

Answer. $L(x,\mu)=f(x)+\mu^t(Ax-b)$，其中 $\mu\in\mathbb{R}^m$.

24 (问答)**.** 写出优化问题 $\begin{cases}\text{minimize} & f(x)\\ \text{subject to} & x\preceq a\end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $a\in\mathbb{R}^n$.

Answer. $L(x,\lambda)=f(x)+\lambda^t(x-a)$，其中 $\lambda\in\mathbb{R}^n$.

25 (问答)**.** 写出优化问题 $\begin{cases}\text{minimize} & \|x\|\\ \text{subject to} & Ax=b\end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}, b\in\mathbb{R}^m$.

Answer. $L(x,\mu)=\|x\|+\mu^t(Ax-b)$，其中 $\mu\in\mathbb{R}^m$.

26 (问答)**.** 给定点集 $A\subset\mathbb{R}^n$ 以及 $B\subset\mathbb{R}^m$，定义其乘积为 $A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$. 证明：若 A 和 B 皆为凸集，则 $A\times B$ 亦是凸集.

Proof. $z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2=(\lambda a_1+(1-\lambda)a_2,\lambda b_1+(1-\lambda)b_2)$，其中 $z_1,z_2\in A\times B, z_1=(a_1,b_1), z_2=(a_2,b_2), a_1,a_2\in A, b_1,b_2\in B$. 由于 A 是一个凸集，所以 $\lambda a_1+(1-\lambda)a_2\in A$，同理 $\lambda b_1+(1-\lambda)b_2\in B$. 可得 $z_1\in A, z_1\in B\Longrightarrow z\in A\times B$. $A\times B$ 是一个凸集. □

27 (问答)**.** 验证函数 $\|x\|^2/y$ 是否是凸函数并给出理由，其中 $x\in\mathbb{R}^n$ 以及 $y>0$.

Answer. $\nabla^2 f=\frac{2}{y^3}\begin{pmatrix}y^2I & -yx\\ -yx^t & 2x^tx\end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix}y^2I & -yx\\ -yx^t & 2x^tx\end{vmatrix}=y^2x^tx\geq 0$，所以 $\nabla^2 f\succeq 0$，$f(x,y)=\|x\|^2/y$ 是一个凸函数.

28 (问答)**.** 证明下述问题是凸优化问题并给出 KKT 条件：

$$\begin{cases}\text{minimize} & -\sum_{i=1}^m a_i\log(b_i^tx)\\ \text{subject to} & 0\preceq x\preceq 1, \sum_{i=1}^n x_i=n-1\end{cases}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n, a_i>0$ 以及 $b_i\succ 0$.

Answer.

29 (问答)**.** 使用梯度下降方法（精确直线搜索）求出三元函数 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ 的极小值点。假设起始点为 $(1,0,0)$，需写出每次更新迭代的详细过程和结果.

Answer.

30 (问答)**.** 证明下述问题是凸优化问题并求解：

$$\begin{cases}\text{minimize} & f(x,y,z)=x^2+2y^2+2z^2+3u^2\\ \text{subject to} & x+y+z+u=1\\ & x^2+z^2\leq 1\end{cases}$$

Answer.