Remark 1. Farkas 引理：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{c}$ 为 n 维列向量，则 $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} > 0$ 有解的充要条件是 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ 无解。

Remark 2. Gordan 定理：给定矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，下列两个系统只有一个有解

$$\boldsymbol{A}x < 0$$
$$\boldsymbol{y} \geq 0, \boldsymbol{y} \neq 0, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} = 0$$

1. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $l \times n$ 矩阵，$c \in \mathbb{R}^n$，证明下列两个系统恰有一个有解：

- 系统 1：$Ax \leq 0, Bx = 0, c^Tx > 0$，对某些 $x \in \mathbb{R}^n$
- 系统 2：$A^Ty + B^Tz = c, y \geq 0$，对某些 $y \in \mathbb{R}^m$ 和 $z \in \mathbb{R}^l$

解. 证系统 1 有解，即

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ -B \end{bmatrix} x \leq 0, c^Tx > 0$$

有解，则根据 Farkas 定理，有

$$\begin{pmatrix} A^T & B^T & -B^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = c, \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

无解，即 $A^Ty + B^Tz_1 - B^Tz_2 = c, y \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0$ 无解，即 $A^T + B^Tz = c, y \geq 0$ 无解。

反之，若 $A^T + B^Tz = c, y \geq 0$ 有解，即 $A^Ty + B^Tz_1 - B^Tz_2 = c, y \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0$ 有解，根据 Farkas 定理，有

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ -B \end{bmatrix} x \leq 0, c^Tx > 0$$

无解，即 $Ax \leq 0, Bx = 0, c^Tx > 0$ 无解。

2. 证明：设 $f(x)$ 是凸集 S 上的凸函数，对每一个实数 c，则集合

$$S_c = \{x | x \in S, f(x) \leq c\}$$

是一个凸集。

解. $\forall x_1, x_2 \in S_c, z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$，有

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \\ &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \\ &\leq \lambda c + (1-\lambda)c \\ &= c \end{aligned}$$

得到 $f(z) \leq c$，所以 $z \in S_c$，则集合 S_c 是一个凸集。

3. 用定义验证下列集合是凸集。

$$S=\left\{(x_1,x_2)|x_1^2+x_2^2\leq 10\right\}$$

解. 任取 $x,y\in S$，满足 $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2),x_1^2+x_2^2\leq 10,y_1^2+y_2^2\leq 10$。

$$z=\lambda x+(1-\lambda)y=(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1,\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)$$

$$\begin{aligned}
&z_1^2+z_2^2\\
=&\lambda^2x_1^2+(1-\lambda)y_1^2+2\lambda x_1(1-\lambda)y_1\\
&+\lambda^2x_2^2+(1-\lambda)y_2^2+2\lambda x_2(1-\lambda)y_2\\
=&\lambda(x_1^2+x_2^2)+(1-\lambda)^2(y_1^2+y_2^2)+2\lambda(1-\lambda)(x_1y_1+x_2y_2)\\
\leq&10\lambda^2+10(1-\lambda)^2+\lambda(1-\lambda)(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)\\
\leq&10\lambda^2+10(1-\lambda)^2+\lambda(1-\lambda)\cdot 20\\
=&10
\end{aligned}$$

所以 z 也在集合内，集合 S 是一个凸集。

4. 证明下列集合 S 是凸集：

$$S=\{x|x=Ay,y\geq 0\}$$

其中 A 是 $n\times m$ 矩阵，$x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}^m$。

解. $\forall x^{(1)},x^{(2)}\in S$，$\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}=A\left[\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\right]$，而 $\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\geq 0$，则 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in S$，所以集合 S 是凸集。

5. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$c\in\mathbb{R}^m$，则下列两个系统中恰有一个有解：

- 系统 1：$Ax\leq 0,x\geq 0,c^Tx>0$，对某些 $x\in\mathbb{R}^n$。
- 系统 2：$A^Ty\geq c,y\geq 0$，对某些 $y\in\mathbb{R}^m$。

解. 证系统 1 有解，即

$$\begin{bmatrix}A\\-I\end{bmatrix}x\leq 0,c^Tx>0$$

有解，则根据 Farkas 定理，有

$$(A^T-I)\begin{bmatrix}y\\u\end{bmatrix}=c,\begin{bmatrix}y\\u\end{bmatrix}\geq 0$$

无解，即 $A^Ty-u=c,y\geq 0,u\geq 0$ 无解，即 $A^Tt\geq c,y\geq 0$ 无解。

反之，若 $A^Ty \geq c, y \geq 0$ 有解，即

$$A^Ty - u = c, y \geq 0, y \geq 0$$

有解，即

$$(A^T - I)\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = c, \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \geq 0$$

有解，根据 Farkas 定理，有

$$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} x \leq 0, c^T x > 0$$

无解，即 $Ax \leq 0, x \geq 0, c^T x > 0$ 无解。

6. 证明下列不等式组无解：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 < 0 \\ 3x_1 - x_2 < 0 \\ 17x_1 + 11x_2 > 0 \end{cases}$$

解. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ -17 & -11 \end{bmatrix}$，即证 $Ax < 0$ 无解。

根据 Gordan 定理，只需证明 $A^Ty = 0, y \geq 0, y \neq 0$ 有解，对系数矩阵 A^T 做初等行变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -17 \\ 3 & -1 & -11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -17 \\ 0 & -10 & 40 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

所以 $A^Ty = 0, y \geq 0, y \neq 0$ 有解，根据 Gordan 定理，原来的不等式组无解。

7. 判别下列函数是否为凸函数。

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 + e^{x_1 + x_2}$$

解.

$$\begin{aligned}
\partial f_{x_1} &= 2(x_1 - x_2) + 4x_2 + e^{x_1+x_2} \\
\partial f_{x_2} &= -2(x_1 - x_2) + e^{x_1+x_2} \\
\partial f_{x_1,x_1} &= 2 + e^{x_1+x_2} \\
\partial f_{x_1,x_2} &= 2 + e^{x_1+x_2} \\
\partial f_{x_2,x_2} &= 2 + e^{x_1+x_2} \\
\nabla^2 f(x) &= \begin{bmatrix} 2 + e^{x_1+x_2} & 2 + e^{x_1+x_2} \\ 2 + e^{x_1+x_2} & 2 + e^{x_1+x_2} \end{bmatrix} = (2 + e^{x_1+x_2}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\nabla^2 f(x)$ 矩阵是一个半正定矩阵，因此 $f(x)$ 是凸函数。

8. 设 $f(x_1, x_2) = 10 - 2(x_2 - x_1^2)^2$，

$$S = \{(x_1, x_2)| - 11 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$$

$f(x_1, x_2)$ 是否为 S 上的凸函数?

解.

$$\begin{aligned}
\partial f_{x_1} &= 8x_1(x_2 - x_1^2) \\
\partial f_{x_2} &= -4(x_2 - x_1^2) \\
\partial f_{x_1, x_1} &= 8(x_2 - 3x_1^2) \\
\partial f_{x_1, x_2} &= 8x_1 \\
\partial f_{x_2, x_2} &= -4 \\
\nabla^2 f(x) &= \begin{bmatrix} 8(x_2 - 3x_1^2) & 8x_1 \\ 8x_1 & -4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\nabla^2 f(x)$ 不是半正定矩阵，因此 $f(x_1, x_2)$ 不是 S 上的凸函数。