1. 设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$，函数 $f: S \to \mathbb{R}$ 二阶连续可微。考虑约束优化问题 (P2)：

$$\begin{cases} \min & f(x) \\ \text{subject to} & x \in S \end{cases}$$

1. 约束优化问题 (P2) 在什么条件下是凸规划？对于凸规划你知道有什么好的性质？

2. 考虑如下优化问题 (P3):

$$\begin{cases} \min & x_2^2 + 4x_1 - 7x_2 \\ \text{subject to} & x_1 - x_2 \le 4 \\ & x_2 \le 3 \\ & 6x_1 - x_1^2 + x_2 \ge 9 \end{cases}$$

   (P3) 是否是凸规划？说明理由。根据最优性条件求 (P3) 最优解。

Answer.

1. 如果满足函数 f 是凸函数，并且 S 是凸集，则约束优化问题 (P2) 是凸规划。

   凸规划下，极小值点就是最小值点，并且如果在 $\bar{x}$ 点处 KKT 条件成立，则这个点就是整体极小值点。

2. 目标函数是凸函数，不等约束 $f_i(x) \le 0$ 也都是凸函数，所以是凸规划。

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_2^2 + 4x_1 - 7x_2 + \lambda_1(x_1 - x_2 - 4) + \lambda_2(x_2 - 3) + \lambda_3(-6x_1 + x_1^2 - x_2 + 9)$$

   由 KKT 条件可得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & \le 4 \\ x_2 & \le 3 \\ 6x_1 - x_1^2 + x_2 & \ge 9 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0 & \\ (x_1 - x_2 - 4)\lambda_1 & = 0 \\ (x_2 - 3)\lambda_2 & = 0 \\ (-6x_1 + x_1^2 - x_2 + 9)\lambda_3 & = 0 \\ 4 + \lambda_1 - 6\lambda_3 + 2\lambda_3 x_1 & = 0 \\ 2x_2 - 7 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

   解得当 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ 时，取到全局极小值点 $x^* = (x_1, x_2) = (3 - \sqrt{3}, 3)$，$f^* = -4\sqrt{3}$.