1 (P243 2). 考虑非线性规划问题

$$\begin{cases} \min & (x_1-3)^2+(x_2-2)^2 \\ \text{subject to} & x_1^2+x_2^2 \le 5 \\ & x_1+2x_2=4 \\ & x_1,x_2 \ge 0 \end{cases}$$

检验 $\bar{x}=(2,1)^t$ 是否为 K-T 点.

Answer. 在点 $\bar{x}$，目标函数的梯度为 $\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}$，前两个约束是起作用约束，梯度分别是 $\begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.K-T 条件如下：

$$\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}-w\begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix}-v\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

解得 $w=\frac{1}{3}, v=-\frac{2}{3}, w\ge 0$，因此 $\bar{x}=(2,1)^t$ 是 K-T 点.

2 (P243 3). 考虑下列非线性规划问题

$$\begin{cases} \min & 4x_1-3x_2 \\ \text{subject to} & 4-x_1-x_2 \ge 0 \\ & x_2+7 \ge 0 \\ & -(x_1-3)^2+x_2+1 \ge 0 \end{cases}$$

求满足 K-T 必要条件的点.

Answer. 最优解的一阶必要条件如下：

$$\begin{cases} \nabla f(x)-\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\nabla g_i(x)=0 \\ \lambda_i g_i(x)=0, \quad i=1,2,3 \\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \ge 0 \\ g_i(x)\ge 0, \quad i=1,2,3 \end{cases}$$

解得 $x^*=(1,3)$，$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\frac{16}{3},0,\frac{7}{3})$.

3 (P243 5). 用 K-T 条件求解下列问题

$$\begin{cases} \min & x_1^2-x_2-3x_3 \\ \text{subject to} & -x_1-x_2-x_3 \ge 0 \\ & x_1^2+2x_2-x_3=0 \end{cases}$$

Answer. KKT 条件如下

$$\begin{cases} 2x_1 + w - 2wx_1 = 0, \\ -1 + w - 2v = 0 \\ -3 + w + v = 0 \\ w\left(-x_1 - x_2 - x_3\right) = 0 \\ w \geq 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \geq 0 \\ x_1^2 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

解得 K-T 点 $\bar{x} = (-\frac{7}{2}, -\frac{35}{12}, \frac{77}{12}), w = \frac{7}{3}, v = \frac{2}{3}$. 最优值 $f(\bar{x}) = -\frac{49}{12}$.

4 (P243 6)**.** 求解下列问题

$$\begin{cases} \max & 14x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2 + 7 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$

Answer. KKT 条件如下:

$$\begin{cases} 2x_1 - 14 + w_1 + w_2 = 0 \\ 2x_2 - 6 + w_1 + 2w_2 = 0 \\ w_1\left(-x_1 - x_2 + 2\right) = 0 \\ w_2\left(-x_1 - 2x_2 + 3\right) = 0 \\ w_1, w_2 \geqslant 0 \\ -x_1 - x_2 + 2 \geqslant 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解得 $\bar{x} = (3, -1)$，$f_{\max} = 33$.

5 (P243 7)**.** 求原点 $x^{(0)} = (0, 0)^t$ 到凸集

$$S = \{x \mid x_1 + x_2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \geq 5\}$$

的最小距离.

Answer. 求最小距离可表达成下列凸规划:

$$\begin{cases} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 - 4 \geq 0 \\ & 2x_1 + x_2 - 5 \geq 0 \end{cases}$$

KKT 条件如下:

$$\begin{cases}2x_1-w_1-2w_2=0\\2x_2-w_1-w_2=0\\w_1\left(x_1+x_2-4\right)=0\\w_2\left(2x_1+x_2-5\right)=0\\w_1,w_2\geqslant 0\\x_1+x_2-4\geqslant 0\\2x_1+x_2-5\geqslant 0\end{cases}$$

解得 $\bar{x}=(2,2)$，$d=2\sqrt{2}$.

6 (P243 8)**.** 考虑下列非线性规划问题

$$\begin{cases}\min & x_2\\ \text{subject to} & -x_1^2+(x_2-4)^2+16\geq 0\\ & (x_1-2)^2+(x_2-3)^2-13=0\end{cases}$$

判别下列各点是否为局部最优解:

$$x^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},x^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{16}{5}\\\frac{32}{5}\end{bmatrix},x^{(3)}=\begin{bmatrix}2\\3+\sqrt{13}\end{bmatrix}$$

Answer. $L(x,w,v)=x_2-w(-x_1^2-(x_2-4)^2+16)-v((x_1-2)^2+(x_2-3)^2-13)$, $\nabla_x^2L(x,w,v)=\begin{bmatrix}2(w-v)&0\\0&2(w-v)\end{bmatrix}$.

对 $x^{(1)}$ 两个约束都是起作用约束，并且满足一阶必要条件，并且方向集

$$G=\left\{d\mid d\neq 0,\nabla g(x^{(1)})d=0,\nabla h(x^{(1)})^td=0\right\}=\emptyset$$

因此 $x^{(1)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 是局部最优解. 同理可得 $x^{(1)}$ 是局部最优解，$x^{(2)}$ 不是局部最优解.

7 (P243 9)**.** 考虑下列非线性规划问题

$$\begin{cases}\min & \frac{1}{2}[(x_1-1)^2+x_2^2]\\ \text{subject to} & -x_1+\beta x_2^2=0\end{cases}$$

讨论 β 取何值时 $\bar{x}=(0,0)^t$ 是局部最优解?

Answer. K-T 条件为

$$\begin{cases}x_1-1+v=0\\x_2-2\beta vx_2=0\end{cases}$$

代入 $\bar{x}=(0,0)^t$，得到 $v=1$

$$\nabla_x^2 L(\bar{x},v)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-2\beta\end{bmatrix}, \nabla h(\bar{x})=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$$

方向集 $G=\{d \mid \nabla h(\bar{x})^t d=0\}=\{(0,d_2)^t\}$. 令

$$(0,d_2)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-2\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ d_2\end{bmatrix}=(1-2\beta)d_2^2>0$$

得到 $\beta<\frac{1}{2}$. 当 $\beta=\frac{1}{2}$ 时，$\min\frac{1}{2}(x_1^2+1)$ 极小点是 $x_1=0$. 综上 $\beta\leq\frac{1}{2}$.

8 (P243 10)**.** 给定非线性规划问题

$$\begin{cases}\min & c^t x\\ \text{subject to} & Ax=0\\ & x^t x\leq\gamma^2\end{cases}$$

其中 A 为 $m\times n$ 矩阵 $(m<n)$，A 的秩为 m，$c\in\mathbb{R}^n$ 且 $c\neq 0$，γ 是一个正数. 试求问题的最优解及目标函数最优值.

Answer. K-T 条件如下

$$\begin{cases}c-A^t v+2v_{m+1}x=0\\ Ax=0\\ -x^t x+\gamma^2=0\end{cases}$$

解得 $f_{\min}=-\gamma\sqrt{c^t(c-A^t v)}$, $x=\frac{\gamma^2}{f_{\min}}(c-A^t v)$. 当 $c=A^t v$ 时，最优解不唯一，最优值 $f_{\min}=0$.

9 (P243 12)**.** 给定原问题

$$\begin{cases}\min & (x_1-3)^2+(x_2-5)^2\\ \text{subject to} & -x_1^2+x_2\geq 0\\ & x_1\geq 1\\ & x_1+2x_2\leq 10\\ & x_1,x_2\geq 0\end{cases}$$

写出上述原问题的对偶问题. 将原问题中第 3 个约束条件和变量的非负限制记作

$$x\in D=\{x \mid x_1+2x_2\leq 10,\quad x_1,x_2\geq 0\}$$

Answer. 对偶函数

$$\theta(w_1, w_2) = \inf\left\{(x_1-3)^2 + (x_2-5)^2 - w_1(-x_1^2 + x_2) - w_2(x_1-1) \mid x \in D\right\}$$

对偶问题为

$$\begin{cases} \max & \theta(w_1, w_2) \\ \text{subject to} & w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

10. 求如下问题的 KKT 点并说明其 KKT 点是否是最优解:

$$\begin{cases} \min & f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\ \text{subject to} & g_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 5 \geq 0 \\ & g_2(x) = -3x_1 - x_2 + 6 \geq 0 \end{cases}$$

Answer. 最优解的一阶必要条件如下: $L(x, \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) + \lambda_2(3x_1 + x_2 - 6)$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0 \\ 3x_1 + x_2 - 6 \leq 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0 \\ \lambda_2(3x_1 + x_2 - 6) = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\lambda_1 x_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

解得 $x = (1, 2)$.