

北京交通大学 2021-2022 学年秋季学期

计算机与信息技术学院 硕士研究生《凸优化理论与应用》试题

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____

注意: 1. 请将所有答案写在答题纸上, 写在试卷上无效。2. 考完后试卷必须随答题纸一同上交, 否则成绩无效。
3. 试卷共 30 道题, 满分 100 分。4. 题目排序与难度无关。5. 判断题请回答“是”或“否”。

1. (2分) 判断: 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ 是凸集。
2. (2分) 判断: 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}$ 是凸集。
3. (2分) 判断: 有限个凸集的并集是凸集。
4. (2分) 判断: 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1, a^T x \leq 1\}$ 是凸集, 其中 $a \in \mathbb{R}^n$ 是给定的非0向量。
5. (2分) 判断: 集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |e^a x + e^{-a} y| \leq 1, -1 \leq a \leq 1\}$ 是凸集。
6. (2分) 判断: 凸函数一定可微。
7. (2分) 判断: 对于一元可微函数 f , f 是凸函数当且仅当 $f(y) \geq f(x) + (y - x)f'(x)$ 对任何 x, y 成立。
8. (2分) 判断: 二元函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy$ 是定义在 \mathbb{R}^2 上的凸函数。
9. (2分) 判断: 若一元函数 $f(x) > 0$ 是开区间 (a, b) 上的凸函数, 则 $\log f(x)$ 亦是 (a, b) 上的凸函数。
10. (2分) 判断: 定义在 \mathbb{R} 上的一元单调递增函数一定是凸函数。
11. (2分) 判断: 凸优化问题中, 强对偶永远成立。
12. (2分) 判断: 对于凸优化中的QP问题, KKT条件永远成立。
13. (2分) 判断: 线性模型的SVM中, 最后得到的解仅依赖于支撑向量。
14. (2分) 判断: 通过梯度下降方法求解凸优化问题, 通常可以收敛到全局极小值点。
15. (2分) 判断: 定义在集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ 上的凸函数一定存在极小值点。
16. (2分) 判断: 定义在集合 $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ 上的凸函数一定存在极小值点。
17. (2分) 问答: 写出 $f(x) = x \log x$ 的对偶函数。
18. (2分) 问答: 若整数 $n \geq 0$ 使得 $f(x, y) = x^2 + xy^{n-1} + y^n$ 是 \mathbb{R}^2 上的凸函数, 则 n 的所有取值是多少?
19. (2分) 问答: 给出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & a^T x \\ \text{subject to} & x \succeq 0 \end{cases}$ 的解, 其中 $a \in \mathbb{R}^n$ 。
20. (2分) 问答: 叙述强凸函数 (strongly convex) 的定义。
21. (2分) 问答: 叙述严格凸函数 (strictly convex) 的定义。
22. (2分) 问答: 写出 $f(x) = \frac{1}{2} x^T P x + q^T x + r$ 的极小值点和极小值, 其中 $P \in \mathbb{S}_{++}^n, q \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$ 。
23. (2分) 问答: 写出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & Ax = b \end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ 。
24. (2分) 问答: 写出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \preceq a \end{cases}$ 的拉格朗日乘子函数, 其中 $a \in \mathbb{R}^n$ 。
25. (2分) 问答: 写出优化问题 $\begin{cases} \text{minimize} & \|x\|^2 \\ \text{subject to} & Ax = b \end{cases}$ 的对偶函数, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ 。
26. (10分) 给定点集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 以及 $B \subset \mathbb{R}^m$, 我们定义其乘积为 $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ 。证明: 若 A 和 B 皆为凸集, 则 $A \times B$ 亦是凸集。
27. (10分) 验证函数 $\|x\|^2/y$ 是否是凸函数并给出理由, 其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及 $y > 0$ 。
28. (10分) 证明下述问题是凸优化问题并给出KKT条件: $\begin{cases} \text{minimize} & -\sum_{i=1}^m a_i \log(b_i^T x) \\ \text{subject to} & 0 \preceq x \preceq 1, \sum_{i=1}^n x_i = n-1 \end{cases}$, 其中 $x \in \mathbb{R}^n, a_i > 0$ 以及 $b_i > 0$ 。
29. (10分) 使用梯度下降方法 (精确直线搜索) 求出三元函数 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ 的极小值点。假设起始点为 $(1, 0, 0)$, 需写出每次更新迭代的详细过程和结果。
30. (10分) 证明下述问题是凸优化问题并求解: $\begin{cases} \text{minimize} & f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3u^2 \\ \text{subject to} & x + y + z + u = 1, \quad x^2 + z^2 \leq 1 \end{cases}$ 。