1. 用单纯形方法解下列线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 7 \\ & -2x_1 + 4x_2 \leqslant 12 \\ & -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leqslant 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

解. 引入松弛变量 x_4, x_5, x_6，化成标准形式：

$$\begin{aligned} \max - x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s. t. } 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_5 = 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \quad + x_6 = 10 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, 6 \end{aligned}$$

用单纯形法求解如图1：

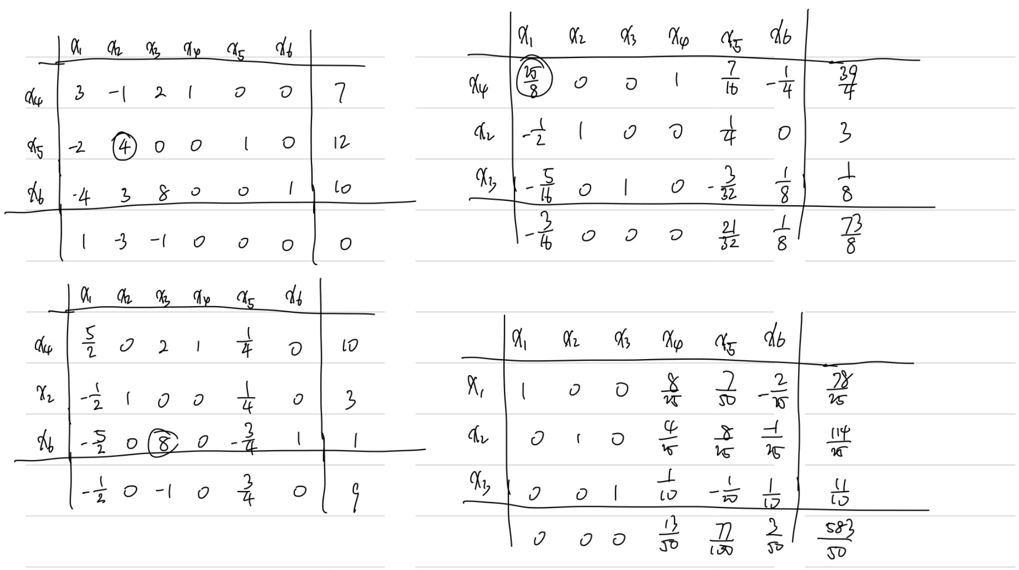


Figure 1: 第一题

最优解 $\bar{x} = \left(\frac{78}{25}, \frac{114}{25}, \frac{11}{10}, 0, 0, 0\right)$，最优值 $f_{max} = \frac{583}{50}$。

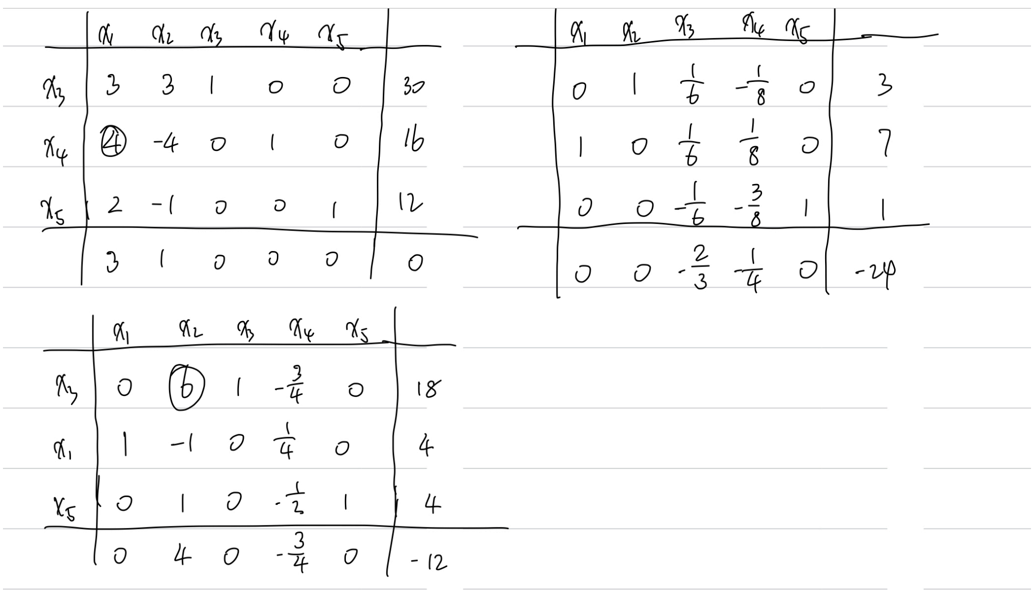
2. 用单纯形方法解下列线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 - x_2 \\
\text{s. t.} \quad & 3x_1 + 3x_2 + x_3 \quad = 30 \\
& 4x_1 - 4x_2 + x_4 = 16 \\
& 2x_1 - x_2 \quad \leqslant 12 \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, 4
\end{aligned}
$$

解. 化成标准形式:

$$
\begin{aligned}
&\min -3x_1 - x_2 \\
&\text{ s. t. } 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 30, \\
&4x_1 - 4x_2 + x_4 = 16, \\
&2x_1 - x_2 + x_5 = 12, \\
&x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, 5
\end{aligned}
$$

用单纯形法求解如图2:



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	3	3	1	0	0	30
x_4	4	-4	0	1	0	16
x_5	2	-1	0	0	1	12
	3	1	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	0	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	0	7
0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{8}$	1	1
0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	-24

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	6	1	$-\frac{3}{4}$	0	18
x_1	1	-1	0	$\frac{1}{4}$	0	4
x_5	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	4
	0	4	0	$-\frac{3}{4}$	0	-12

Figure 2: 第二题

最优解 $\bar{x} = (7, 3, 0, 0, 1)$，最优值 $f_{min} = -24$。

3. 求解下列线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 \\
\text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_3 \geqslant 3 \\
& x_2 + 2x_3 \geqslant 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

解. 化成标准形式:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 \\
\text{s. t.} \quad & x_1 \quad + 3x_3 - x_4 = 3, \\
& x_2 + 2x_3 - x_5 = 5, \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 5
\end{aligned}
$$

用单纯形法求解如图3：最优解 $\bar{x} = (0, 3, 1, 0, 0)$，最优值 $f_{min} = 36$。

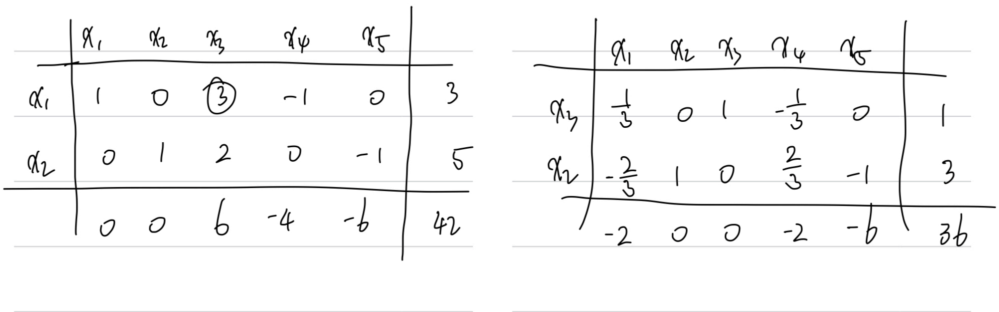


Figure 3: 第三题

4. 求解下列线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geqslant 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

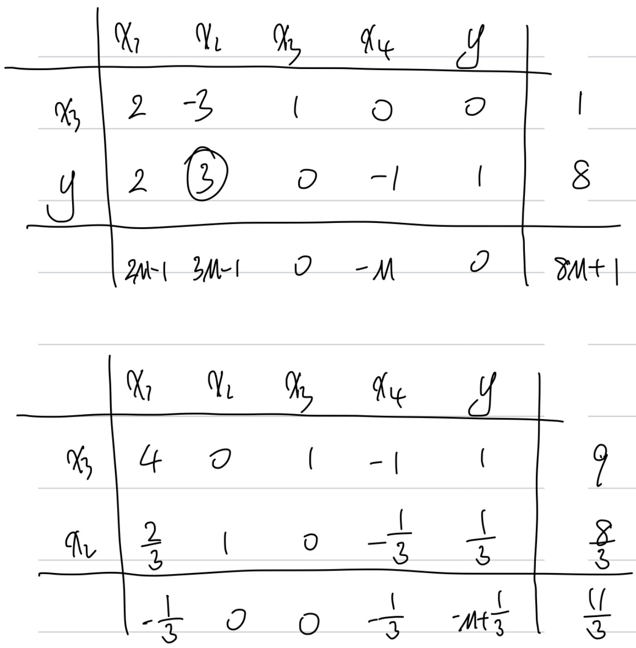
解. 化成标准形式:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\
\text{s. t.} \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\
& 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 8, \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

引入人工变量 y，取大正数 M，解下列线性规划:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 + My \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\
& 2x_1 + 3x_2 - x_4 + y = 8 \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad y \geqslant 0
\end{aligned}
$$

用单纯形法求解如图4：最优解 $\bar{x} = \left(0, \frac{8}{3}, 9, 0\right)$，最优值 $f_{min} = \frac{11}{3}$。



	x_1	x_2	x_3	x_4	y	
x_3	2	-3	1	0	0	1
y	2	3	0	-1	1	8
	$2M-1$	$3M-1$	0	$-M$	0	$8M+1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	
x_3	4	0	1	-1	1	9
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-M+\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$

Figure 4: 第四题

5. 求解下列线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
&\min 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\
&\text{ s. t. } x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\
&2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\
&x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, 4
\end{aligned}
$$

解. 用修正单纯形法求解。初始基本可行解末知，用两阶段法。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y_1 + y_2 + y_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + y_1 = 2 \\
& 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + y_2 = 6 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_3 = 7 \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,3,4; \quad y_j \geqslant 0, j = 1,2,3
\end{aligned}
$$

可得最优解 $\bar{x} = (3,0,1,3)$，最优值 $f_{min} = 2$。

6. 假设用单纯形方法解线性规划问题。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{cx} \\
\text{s. t.} \quad & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}..
\end{aligned}
$$

在某次迭代中对应变量 x_j 的判别数 $z_j - c_j > 0$，且单纯性表中相应的列 $y_i = B^{-1}p_j \leq 0$，证明

$$d = \begin{bmatrix} -y_i \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

是可行域的极方向，其中分量 1 对应 x_j。

解. 记

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & p_m & \cdots & p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & p_{m+1} & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$

由于

$$Ad = \begin{bmatrix} B & p_{m+1} & \cdots & p_j & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B^{-1}p_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -p_j + p_j = 0$$

且 $d \geqslant 0$，因此 d 是可行域的方向。

设 d 可表示成可行域的两个方向 $d^{(1)}$ 和 $d^{(2)}$ 的正线性组合，即 $d = \lambda d^{(1)} + \mu d^{(2)}$，则

$$\boldsymbol{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_{\mathbf{B}}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_{\mathbf{B}}^{(2)} \\ 0 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_j, b_j > 0$$

由于 $d^{(1)}$ 是可行域方向，因此 $Ad^{(1)} = 0, d^{(1)} \geqslant 0$，即 $Bd_B^{(1)} + a_j p_j = 0$，同理 $Bd_B^{(2)} + b_j p_j = 0$，可以得到 $\frac{1}{a_j}\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{B}}^{(1)} = \frac{1}{b_j}\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{B}}^{(2)}$，即 $\boldsymbol{d}_{\mathbf{B}}^{(2)} = \frac{b_j}{a_j}\boldsymbol{d}_{\mathbf{B}}^{(1)}$。代入方向 $d^{(2)}$, 得到 $\boldsymbol{d}^{(2)} = \frac{b_j}{a_j}\boldsymbol{d}^{(1)}$。即 $d^{(1)}, d^{(2)}$ 是同向非零向量，因此方向 d 不能表示成两个不同方向的正线性组合，因此 d 是可行域的方向。