Examen
Master 1 Informatique
UE HAI718I
Probabilités, statistiques
Vendredi 14 janvier 2022

1h00 - Documents de cours, TD et TP autorisés - (10 pts)

A) Histogramme, densité de probabilité et fonction de répartition (5 pts)

Soit l'image I ci-dessous composée de pixels codés sur 32 niveaux de gris, de taille 10x10 pixels.

1) Tracer l'histogramme de l'image I. En déduire la valeur maximale (en niveaux de gris) des 2 modes de cette image.
2) A partir de l'histogramme de l'image I, en déduire les probabilités de chaque niveau de gris αi pour $i \in [0, 31]$. Tracer la densité de probabilité (ddp) de l'image I.
3) A partir de la ddp de I, calculer et tracer la fonction de répartition de l'image I.

29	29	16	19	16	17	27	25	25	29
29	27	26	20	20	17	20	26	26	27
27	26	20	18	18	19	18	20	27	29
28	22	21	19	19	19	18	18	20	27
22	20	19	18	19	19	19	19	20	20
22	20	19	19	20	19	19	18	18	17
28	21	20	18	19	19	20	18	21	27
28	26	20	19	19	19	20	21	27	28
28	28	26	21	21	21	27	28	28	29
30	28	27	27	23	28	27	25	30	30

Image I

Image I seuillée

B) Mélange de 2 Gaussiennes (5 pts)

1) A partir de l'histogramme obtenu à la question A.1, proposer une valeur de seuil T afin de séparer les pixels de l'image I en 2 classes suivant les 2 modes. Représenter l'image I seuillée : en noir les pixels avec un niveau de gris inférieur au seuil T (mode 1) et en blanc les pixels ayant un niveau de gris supérieur ou égal au seuil T (mode 2).
2) Pour chacun des modes, calculer la valeur moyenne et l'écart type.
3) Par rapport à la proportion du nombre de pixels par mode (x1 et x2), proposer un modèle de mélange de 2 Gaussiennes - paramètres à introduire $\mu 1$, $\sigma 1$, $\mu 2$, $\sigma 2$ et x1 (sachant que x2=1-x1)

William PUECH Université Montpellier william.puech@lirmm.fr

HAI718I Probabilités, statistiques
Examen final - Janvier 2022

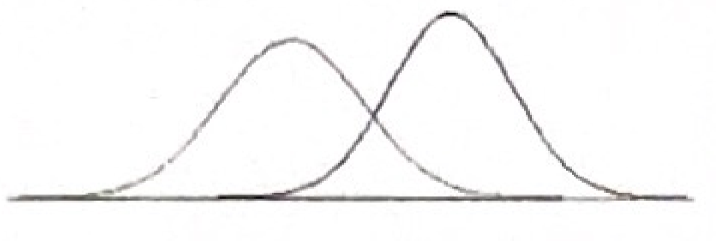
Durée de l'examen : 1h. Documents de cours, TD et TP ainsi que tables statistiques autorisés

Exercice 1 (6p.) Calcul de probabilités.

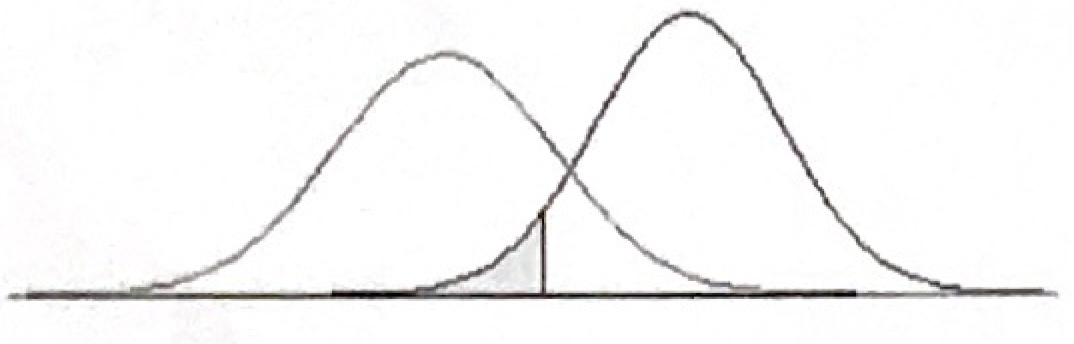
1. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu = 2, \sigma^2 = 2^2)$ (Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$).
   — Calculer les probabilités suivantes et donner les commandes R correspondantes ; dessiner l'aire sous la courbe de la loi normale qui correspond à chaque probabilité : $P(X < 3)$; $P(X > 2)$; $P(1 < X < 3)$.
   — Trouver la valeur de x telle que : $P(X < x) = 0.95$; $P(X > x) = 0.4$; $P(2-x < X < 2+x) = 0.9$. Donner les commandes R correspondantes.
2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires. On note $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne empirique.
   — On est dans un cas de variables normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et indépendantes. Quelle est la loi de $\bar{X}$?
   — Au cas de n variables indépendantes de Bernoulli $\mathcal{B}e(p)$, que vaut $\bar{X}$? Quelle est sa loi et peut-on l'approximer par une loi normale ? Justifiez.
3. Melody Nelson lance 150 fois une pièce de monnaie non-pipée et compte le nombre de fois où elle obtient "pile". Quelles sont les probabilités :
   — qu'elle obtienne un nombre de "pile" supérieur à 50 et inférieur à 105 ?
   — qu'elle obtienne moins de 40 fois "face" ?

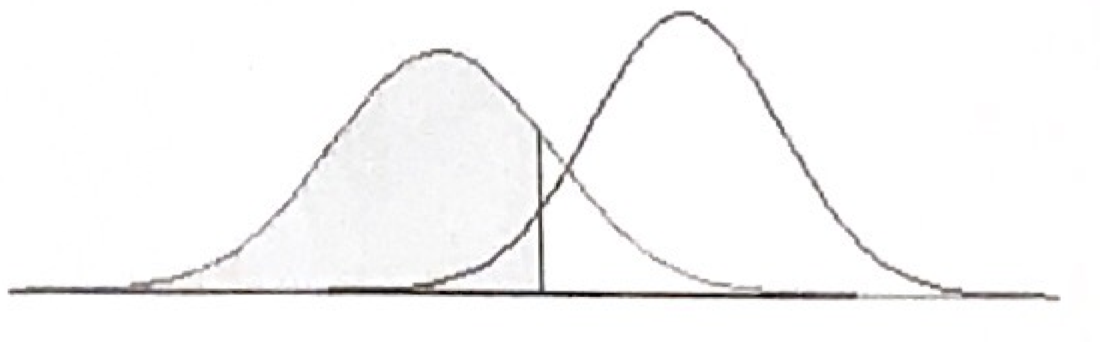
Exercice 2 (4p.) On effectue un test d'une hypothèse H_0 contre une hypothèse H_1 au niveau 5% à l'aide de l'observation d'une variable aléatoire X.

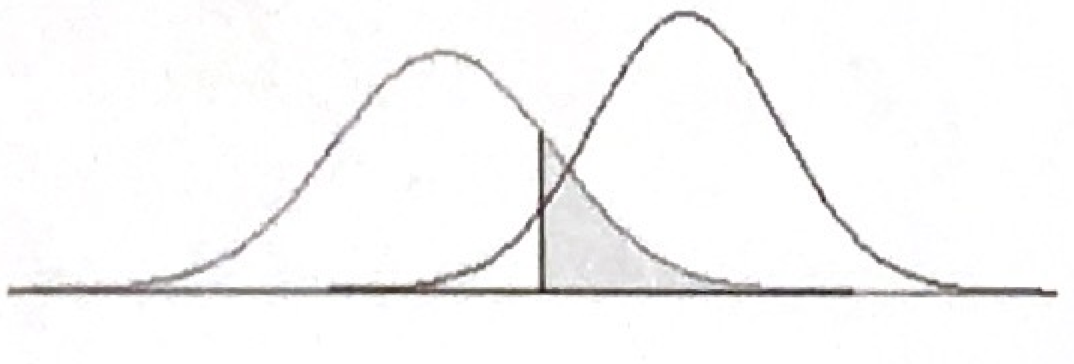
1. Sur la figure ci-dessous, on a représenté la densité de la loi de X sous H_0 à droite et la densité de la loi de X sous H_1 à gauche. Quel est la forme de la zone de rejet de H_0 ?

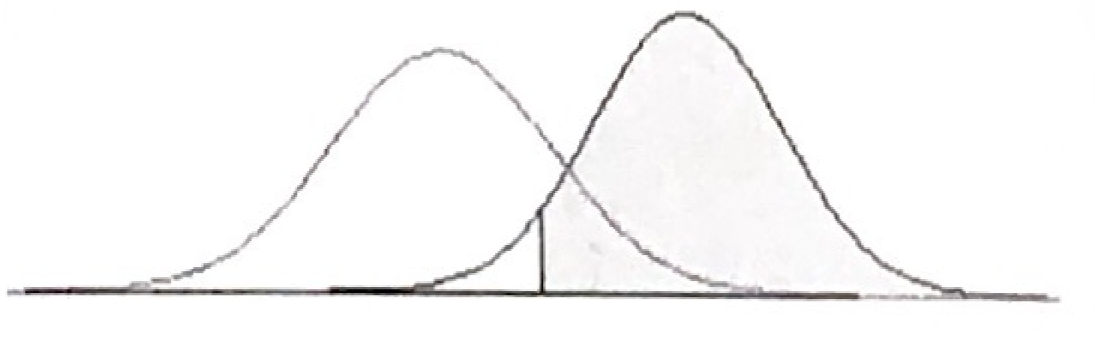


2. Dans quelle figure parmi les figures ci-dessous l'aire de la zone coloriée correspond à (i) l'erreur de première espèce du test, (ii) l'erreur de deuxième espèce du test, (iii) la puissance du test ?

a) 

b) 

c) 

d) 

3. La valeur observée $\bar{x}$ de la variable X correspond à un niveau de signification du test (appelé aussi la p-valeur) de 1%. Quelle décision vous prenez pour le test de niveau 5% : rejet de H_0 ou non ?