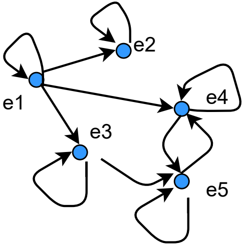
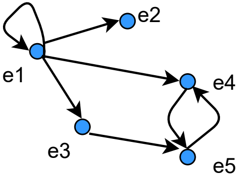
# Relation réflexive

## Définition

*Soient un ensemble $E$ et une relation binaire $R$ sur $E$, $R$ est réflexive si :*
$\forall e \in E, (e, e) \in R$ *(que l'on note aussi* $eRe$*)*

## Exemple

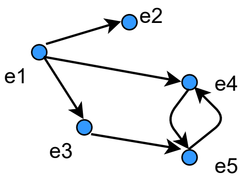
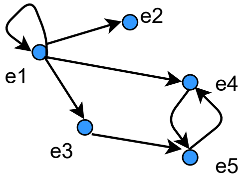
| *Une relation réflexive* | *Une relation non réflexive* |
|---|---|
|  |  |

# Relation irréflexive

## Définition

*Soient un ensemble $E$ et une relation binaire $R$ sur $E$, $R$ est irréflexive si :* $\forall e \in E$, $(e, e) \notin R$

## Exemple

| *Une relation irréflexive* | *Une relation non irréflexive* |
|---|---|
|  |  |

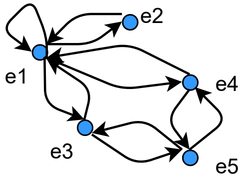
# Relation symétrique

## Définition

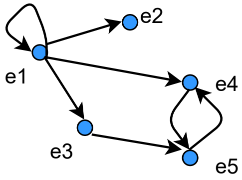
*Soient un ensemble $E$ et une relation binaire $R$ sur $E$, $R$ est symétrique si :*
$\forall e_1, e_2 \in E$, *si* $(e_1, e_2) \in R$, *alors* $(e_2, e_1) \in R$

## Exemple

*Une relation symétrique*




*Une relation non symétrique*



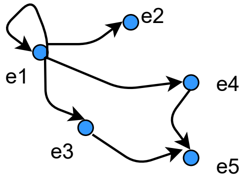
# Relation antisymétrique

## Définition

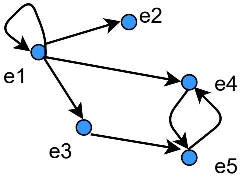
*Soient un ensemble $E$ et une relation binaire $R$ sur $E$, $R$ est anti-symétrique si :*
$\forall e_1, e_2 \in E$, *si* $(e_1, e_2) \in R$ *et* $(e_2, e_1) \in R$, *alors* $e_2 = e_1$

## Exemple

*Une relation antisymétrique*




*Une relation non antisymétrique*



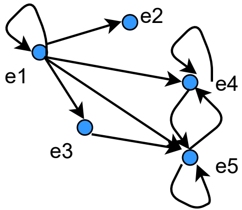
# Relation transitive

## Définition

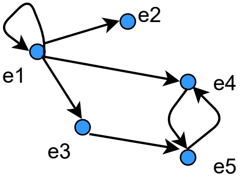
*Soient un ensemble $E$ et une relation binaire $R$ sur $E$, $R$ est une relation transitive si* $\forall e_1, e_2, e_3 \in E,\ e_1 R e_2 \text{ et } e_2 R e_3 \implies e_1 R e_3$

## Exemple

*Une relation transitive*




*Une relation non transitive*



# Relation d'équivalence

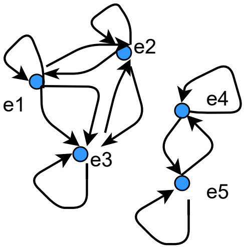
## Définition

*Soient un ensemble $E$ une relation binaire $R$ sur $E$, $R$ est une relation d'équivalence si :*

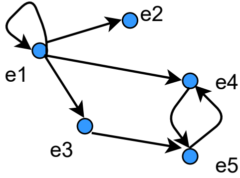
- *réflexive*
- *symétrique*
- *transitive*

## Exemple

*Une relation d'équivalence*




*Une relation qui n'est pas une relation d'équivalence*



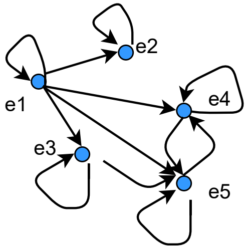
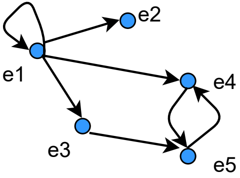
# Préordre

## Définition

*Soient un ensemble E une relation binaire R sur E est un pré-ordre si :*

- *réflexive*
- *transitive*

## Exemple

| *Un pré-ordre* | *Une relation qui n'est pas un préordre* |
| --- | --- |
|   |   |

# Ordre

## Définition

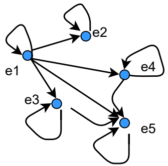
*Soient un ensemble $E$ une relation binaire $R$ (notée $\leq$) sur $E$ est un ordre si elle est :*

- *réflexive*
- *antisymétrique*
- *transitive*

*$(E, \leq)$ est appelé un ensemble ordonné. On écrit $x \leq y$ plutôt que $(x, y) \in \leq$.*

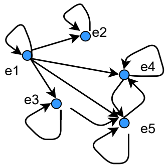
## Exemple

*Un ordre*




$e_1 \leq e_1$, $e_1 \leq e_2$, $e_1 \leq e_5$

*Une relation qui n'est pas un ordre*

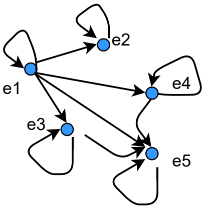


# Vocabulaire

- $y$ couvre $x$ si $x \neq y$, $y \geq x$ et $\forall z$, si $y \geq z$ et $z \geq x$, on a $x = z$ ou $y = z$
- $x$ est un minorant de $y$ si $x \leq y$ (resp. majorant si $y \leq x$ )
- $x$ et $y$ sont comparables si $x \leq y$ ou $y \leq x$
- $x$ et $y$ sont incomparables si $x \not\leq y$ et $y \not\leq x$ (notation m $x||y$ )

## Exemple

$e_2$ *majore et couvre* $e_1$, $e_5$ *majore mais ne couvre pas* $e_1$, $e_2$ *et* $e_4$ *sont incomparables*



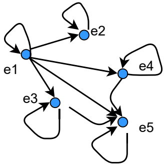
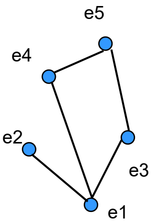
# Diagramme de Hasse

## Définition

*Soit un ensemble ordonné $(E, \leq)$ son diagramme de Hasse est une représentation graphique de sa relation de couverture telle que chaque élément $x$ de $E$ est représenté par un point $p(x)$ du plan avec :*

- *si $x \leq y$, la droite horizontale passant par $p(x)$ est au-dessous de la droite horizontale passant par $p(y)$.*
- *lorsque $y$ couvre $x$, un segment de droite joint $p(x)$ et $p(y)$.*

## Exemple

| *Un ordre* | *Son diagramme de Hasse* |
|---|---|
|   |   |

# Relation d'ordre strict

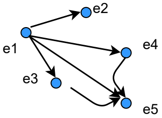
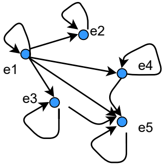
## Définition

*Soit un ensemble $E$, une relation binaire $R$ sur $E$ est une relation d'ordre strict (notée $<$) si elle est :*

- *irréflexive*
- *transitive*

*Elle est alors asymétrique : quand $xRy$, on n'a pas $yRx$.*

## Exemple

| *Un ordre strict* | *Une relation qui n'est pas un ordre strict* |
|---|---|
|   |   |

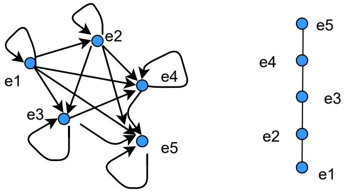
# Relation d'ordre total

## Définition

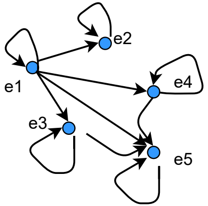
*Soit un ensemble ordonné* $(E, \leq)$, $\leq$ *est un ordre total si* $\forall x, y \in E$ *on a*
$x \not\leq y \implies y \leq x$

## Exemple

*Un ordre total et son diagramme de Hasse*




*Un ordre qui n'est pas total*



# Morphisme entre relations binaires sur un ensemble $E$

Definition (Morphisme entre relations binaires sur un ensemble $E$)

Si $R_p$ et $R_q$ sont deux relations binaires sur $E$, un morphisme de $R_p$ vers $R_q$ est une application $m$ de $E$ vers $E$ vérifiant : $\forall x, y \in E$, $xR_py \implies m(x)R_qm(y)$.
Un morphisme préserve les couples et peut en ajouter.

# Isomorphismes et types d'ordre, Morphismes

## Définition (morphisme d'ordre)

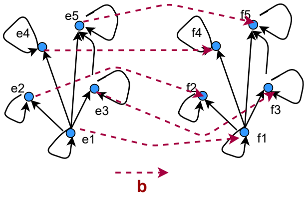
*Soient deux ensembles ordonnés $P = (E_P, \leq_P)$ et $Q = (E_Q, \leq_Q)$, une application a de $E_P$ vers $E_Q$ vérifiant :* $\forall x, y \in E_P,\ x \leq_P y \implies a(x) \leq_Q a(y)$. *a est appelée un morphisme d'ordre. a préserve l'ordre $\leq_P$.*

## Définition (isomorphisme d'ordre)

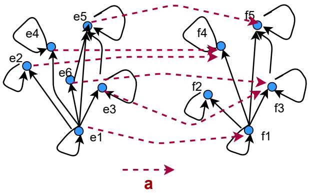
*Deux ensembles ordonnés $P = (E_P, \leq_P)$ et $Q = (E_Q, \leq_Q)$ sont isomorphes (on dira aussi qu'ils sont du même type) lorsqu'il existe une bijection b de $E_P$ and $E_Q$ vérifiant :* $\forall x, y \in E_P,\ x \leq_P y \Leftrightarrow b(x) \leq_Q b(y)$. *b est appelée un isomorphisme d'ordre. b préserve l'ordre $\leq_P$ et sa réciproque $b^{-1}$ préserve l'ordre $\leq_Q$.*

## Exemple

*Un isomorphisme d'ordre*

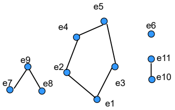



*Un morphisme d'ordre qui n'est pas un isomophisme*



# Exercices

1. Dessiner des modèles UML pour les notions rencontrées et discuter des modélisations et de la sémantique apportée par la sémantique mathématique sous-jacente.
2. On donne le diagramme de Hasse ci-dessous, reconstruire l'ordre qu'il représente.




3. Formaliser la relation « est isomorphe à » et indiquer ses propriétés.
4. Formaliser pour Java les relations suivante et indiquer leurs propriétés :
   1. les relations *extends* et *implements*
   2. la relation *extends*+ qui relie une classe à elle-même ou à chacune de ses super-classes ; ou une interface à elle-même ou à chacune de ses super-interfaces
5. Soit un programme Java contenant des classes et des interfaces, existe-t-il un morphisme de la relation *extends* restreinte aux classes vers la relation *extends* $\cup$ *implements* ? Et inversement ? Poser formellement les éléments en jeu.
6. Formaliser la relation d'inclusion entre paquetages en Java et indiquer ses propriétés.