

HAI718 Probabilité et statistiques

Examen session 2 Mars 2022

Exercice 1 Dans une urne se trouvent 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement deux boules sans remise. Calculer et comparer les probabilités des deux événements suivants :

- Tirer deux boules de même couleur
- Tirer deux boules de couleurs différentes

On suppose que $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (Loi normale centrée réduite).

Exercice 2 Calculer les probabilités suivantes : $P(U < 2.5)$; $P(U > -1.5)$; $P(-1.5 < U < 2.5)$

Exercice 3 Trouver la valeur de u telle que : $P(U > u) = 0.05$; $P(U < u) = 0.99$;

On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\mu = 2, \sigma^2 = 5^2)$ (Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$).

Exercice 4 Calculer les probabilités suivantes : $P(X < 10)$; $P(2 < X < 10)$

Exercice 5 Trouver la valeur de x telle que : $P(X < x) = 0.95$; $P(3 - x < X < 3 + x) = 0.95$

Exercice 6 Soit X_1, \dots, X_n n variables aléatoires normales $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et indépendantes. On note $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne empirique. Quelle est la loi de \bar{X} ?

Exercice 7 Appliquer le théorème de la limite centrale au cas de n variables indépendantes de Bernoulli $\text{Be}(p)$. Que vaut \bar{X} ? En déduire une approximation de la loi binomiale par une loi normale.

Exercice 8 Dans le cadre d'un test statistique paramétrique, donner les définitions du risque de première espèce, du risque de deuxième espèce et de la puissance du teste. Accompagner votre réponse par des dessins montrant les courbes des densités de l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative.

Examen
Master 1 Informatique
UE HAI718I
Probabilités, statistiques
Session 2 - mardi 29 mars 2022

1h00 - Documents de cours, TD et TP autorisés - (10 pts)

A) Histogramme, densité de probabilité et fonction de répartition (5 pts)

Soit l'image I ci-dessous composée de pixels codés sur 64 niveaux de gris, de taille 10x10 pixels.

- 1) Tracer l'histogramme de l'image I. Décrire cet histogramme. En déduire les valeurs maximales (en niveaux de gris) des 2 modes de cette image.
- 2) A partir de l'histogramme de l'image I, en déduire les probabilités de chaque niveau de gris α_i pour $i \in [0, 63]$. Tracer la densité de probabilité (ddp) de l'image I. Décrire cette ddp.
- 3) A partir de la ddp de I, calculer et tracer la fonction de répartition de l'image I. Décrire cette fonction de répartition.

29	29	16	19	16	17	27	25	25	29
29	27	26	20	20	17	20	26	26	27
27	26	20	18	18	19	18	20	27	29
28	22	21	19	19	19	18	18	20	27
22	20	19	18	19	19	19	19	20	20
22	20	19	19	20	19	19	18	18	17
28	21	20	18	19	19	20	18	21	27
28	26	20	19	19	19	20	21	27	28
28	28	26	21	21	21	27	28	28	29
30	28	27	27	23	28	27	25	30	30

Image I

B) Algorithme EM (5 pts)

- 1) Quel est l'objectif d'un algorithme EM ?
- 2) Décrire les 2 étapes d'un algorithme EM.
- 3) A partir de l'histogramme obtenu à la question A.1 :
 - 3.1) Proposer une utilisation de l'algorithme EM pour modéliser cet histogramme.
 - 3.2) En supposant qu'un mélange de 2 Gaussiennes est suffisant pour modéliser cet histogramme, quels sont les paramètres nécessaires en entrée de l'algorithme EM ? Quels seront les paramètres obtenus en sortie ?