

# 云南大学数学与统计学院

## 实验报告

实验课名称： 随机过程实验

指导教师： 韩博 王晓波

实验名称： 更新过程的模拟与计算

专业（年级）： 统计学 2021 级

学生姓名： 枫叶

学 号：

实验成绩：

# 《随机过程实验》实验报告 8

实验名称	更新过程的模拟与计算	指导教师	韩博 王晓波
实验时间	2024 年 5 月 5 日	实验地点	格物楼 3508
学号		姓名	枫叶

## 一、实验目的

学习使用 R 软件对更新过程进行模拟和计算。

## 二、实验要求

1. 对所使用的方法与所得到的结果进行适当的文字描述。
2. 在实验结果的相应部分附上完整的代码与适当的注释。
3. 采用一定的可视化方法体现出对应计算结果。

注：所有结果保留小数点后 1 位数字。

## 三、实验内容

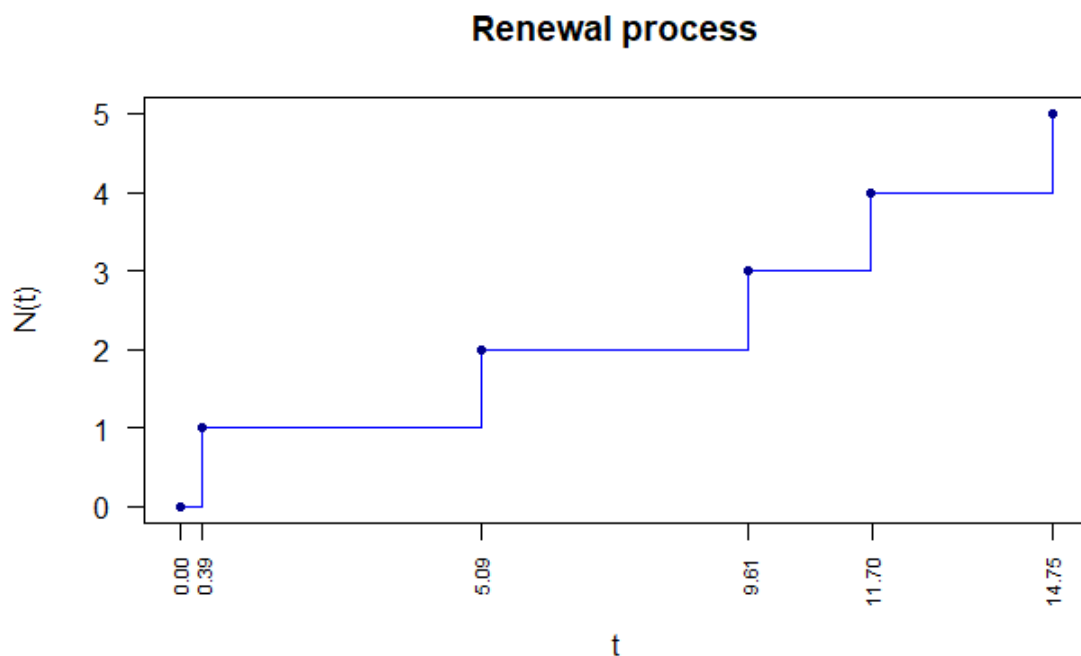
**第一题.** 对更新过程  $\{N(t), t \geq 0\}$ ，设更新时间间隔  $X_n$  独立同分布于  $Gamma(\alpha, \sigma)$  分布，其中 shape 参数  $\alpha = 1$ ，scale 参数  $\sigma = 2.5$ ：

1. 生成更新时间间隔  $X_n$ 。特别地，在 R 语言中设置 `set.seed(1)`，然后产生 5 个更新时间间隔  $X_n$  的随机数  $x_1, \dots, x_5$ ，将结果填在表格中。

2. 计算第  $n$  次更新的更新时刻  $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 。特别地，利用  $X_n$  的随机数  $x_1, \dots, x_5$ ，计算出更新时刻  $T_1, \dots, T_5$ ，将结果填在表格中。

3. 根据更新过程的定义  $N(t) = \sup\{n: T_n \leq t\}$ ，计算更新过程  $N(t)$ 。特别地，结合第 2 题的结果  $T_1, \dots, T_5, \dots$ ，计算更新过程  $N(t)$  在  $t = 0, 3, 7, 10, 12$  处的值。

4. 绘制更新过程  $N(t)$  的路径图。提示，首先产生更新时间间隔  $X_n$  的随机数  $x_1, \dots, x_5$ ，然后计算更新时刻  $T_1, \dots, T_5$ ，进一步计算出更新过程  $N(t)$  在  $t = T_1, \dots, T_5$  处的值，以  $N(t)$  为纵轴，以  $T_n$  为横轴，绘制阶梯函数曲线。样例图示如下。



**第二题.** 已知如下命题:

如果随机变量  $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1), X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ , 则独立随机变量和

$$X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

证明如下:

$X_1 + X_2$  的矩母函数为

$$M_{X_1 + X_2}(t) = Ee^{t(X_1 + X_2)} = Ee^{tX_1} Ee^{tX_2} = e^{\lambda_1(e^t - 1)} e^{\lambda_2(e^t - 1)} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)}$$

证毕。

题目: 对更新过程  $\{N(t), t \geq 0\}$ , 设更新时间间隔  $X_n$  独立同分布于

$\text{Poisson}(\lambda)$  分布, 其中参数  $\lambda = 2$ :

1. 计算第  $n$  次更新的更新时刻  $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$  的分布  $F_n(t) = P(T_n \leq t)$ 。特别地,

当  $n = 5$  时, 计算  $F_n(t)$  在  $t = 3, 6, 9, 12$  处的值, 将结果填在表格中。提示:

$$T_n \sim \text{Poisson}(n\lambda).$$

2. 计算更新过程  $\{N(t), t \geq 0\}$  的分布  $P(N(t) = n)$ 。特别地, 分别计算在

$t = 3, 6, 9, 12$  时,  $N(t)$  取值为  $n, n = 0, 1, \dots, 10$  的概率  $P(N(t) = n)$ , 将结果填在

表格中。提示:  $P(N(t) = n) = P(T_n \leq t) - P(T_{n+1} \leq t) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$ 。

3. 计算更新函数  $M(t) = E(N(t))$  的值。特别地, 分别在  $t = 3, 6, 9, 12$  处, 计

算  $M(t) = E(N(t)) \approx \sum_{n=0}^{1000} n P(N(t) = n)$ , 将结果填在表格中。

**第三题.** 本题计算结果保留小数点后 2 位数字。对更新过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ ，设更新时间间隔 $X_n$ 独立同分布于 $Poisson(\lambda)$ 分布，其中参数 $\lambda = 2$ ：

1. 验证 Feller 初等更新定理。计算更新平均速率 $M(t)/t = E(N(t))/t$ 在 $t = 0.5, 1, 10, 100$ 处的值；计算 $1/\mu = 1/E(X_n)$ 的值，将计算结果填在表格中。

2. 验证 Blackwell 更新定理。设 $\mu = E(X_n)$ ，计算 $M(t+a) - M(t)$ 在 $t = \{0.5, 100\}, a = \{2, 4, 6, 8\}$ 的值，计算 $a/\mu$ 的值，将计算结果填在表格中。

#### 四、 实验软件

R 语言

## 五、 实验结果

### 【第一题】

#### 1. 模拟结果

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
0.4	4.7	4.5	2.1	3.1

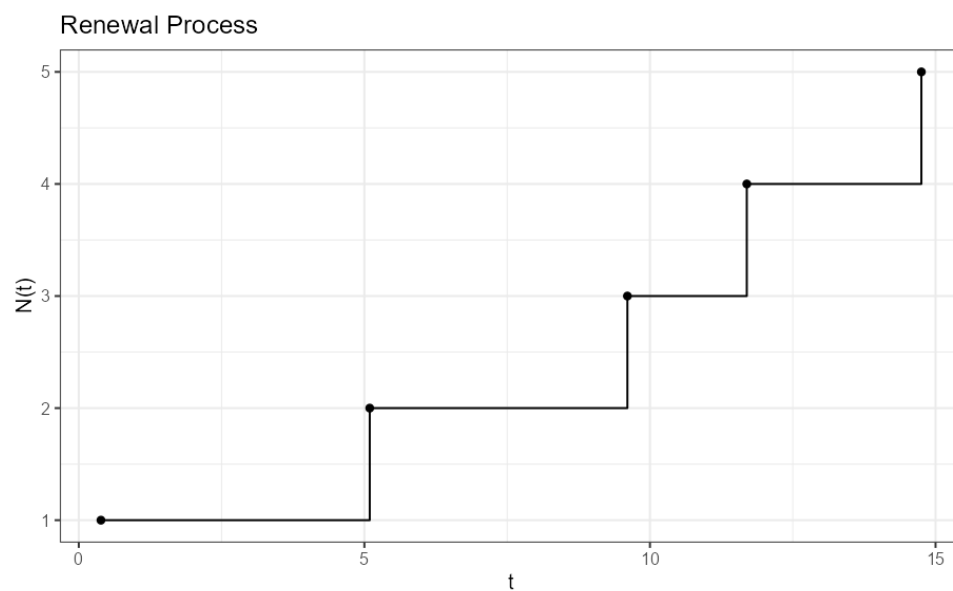
#### 2. 模拟结果

$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
0.4	5.0	9.6	11.7	14.8

#### 3. 模拟结果

$t$	0	3	7	10	12
$N(t)$	0	1	2	3	4

#### 4. 更新过程 $N(t)$ 的路径图



**【第二题】**

## 1. 模拟结果

$t$	3	6	9	12
$F_n(t)$	0.01	0.1	0.5	0.8

## 2. 模拟结果

$n$	$P(N(3) = n)$	$P(N(6) = n)$	$P(N(9) = n)$	$P(N(12) = n)$
1	1.4E-01	4.5E-03	4.6E-05	2.1E-07
2	4.2E-01	1.1E-01	8.1E-03	2.7E-04
3	2.8E-01	2.8E-01	7.6E-02	8.6E-03
4	1.1E-01	2.9E-01	2.0E-01	5.5E-02
5	3.2E-02	1.8E-01	2.6E-01	1.4E-01
6	8.0E-03	8.4E-02	2.2E-01	2.2E-01
7	1.8E-03	3.2E-02	1.3E-01	2.2E-01
8	3.8E-04	1.0E-02	6.6E-02	1.7E-01
9	7.6E-05	3.0E-03	2.8E-02	1.0E-01
10	1.4E-05	7.9E-04	1.0E-02	5.3E-02

## 3. 模拟结果

$t$	3	6	9	12
$M(t)$	1.5	3	4.5	6

【第三题】

1. 模拟结果

$t$	0.1	1	10	100	$1/\mu$
$M(t)/t$	0.3	0.5	0.5	0.5	0.5

2. 模拟结果

$a$	2	4	6	8
$a/\mu$	1	2	3	4
$t=0.5$ $M(t+a)-M(t)$	0.8	1.8	2.8	3.8
$t=100$ $M(t+a)-M(t)$	1	2	3	4



## 附上 R code 及其运行结果:

注: R code 运行结果的输出格式, 按照如下示意图的格式:

```
===== 1th simulation =====
Name: 你的姓名

-----Question 1-----
Xn:  0.4 4.7 4.5 2.1 3.1

-----Question 2-----
Tn:  0.4 5.1 9.6 11.7 14.8

-----Question 3-----
N(t):  0 1 2 3 4


===== 2th simulation =====
Name: 你的姓名

-----Question 1-----
Fn:  0 0.1 0.5 0.8

-----Question 3-----
M(t):  1.5 3 4.5 6

-----Question 2-----
> round(fit,1)
      n Pr.Nt1 Pr.Nt2 Pr.Nt3 Pr.Nt4
1    0   0.1   0.0   0.0   0.0
2    1   0.4   0.1   0.0   0.0
3    2   0.3   0.3   0.1   0.0
4    3   0.1   0.3   0.2   0.1
5    4   0.0   0.2   0.3   0.1
6    5   0.0   0.1   0.2   0.2
7    6   0.0   0.0   0.1   0.2
8    7   0.0   0.0   0.1   0.2
9    8   0.0   0.0   0.0   0.1
10   9   0.0   0.0   0.0   0.1
11  10   0.0   0.0   0.0   0.0
~

===== 3th simulation =====
Name: 你的姓名

-----Question 1-----
M(t)/t:  0.31 0.52 0.5 0.5
1/mu 0.5

-----Question 2-----
M(t+a)-M(t) at t=0.5:  0.84 1.84 2.84 3.84
M(t+a)-M(t) at t=100: 1 2 3 4
a/mu:  1 2 3 4
```

## Show your R code:

### 【第一题】

```
library(purrr)
library(ggplot2)
library(dplyr)
library(tidyr)
set.seed(1)
X_n <- rgamma(5, shape = 1, scale = 2.5)
T_n <- cumsum(X_n)
t <- c(0, 3, 7, 10, 12)
N_t <- map(t, function(t) T_n[t]) %>%
  map_vec(sum)
ggplot(data.frame(时刻=T_n, 次数=1:5)) +
  geom_step(aes(x=时刻, y=次数)) +
  geom_point(aes(x=时刻, y=次数)) +
  xlab("t") +
  ylab("N(t)") +
  labs(title = "Renewal Process") +
  theme_bw()
result_out <- function(order, name, q_num, answers, answers_names){
  split_1 <- paste(rep("=", 25), collapse = "")
  split_2 <- paste(rep("-", 20), collapse = "")
  cat(split_1, paste0(order, "th Simulation"), split_1, "\n")
  cat("Name:", name, "\n")
  cat("\n")
  for (i in 1:q_num){
    cat(split_2, paste0("Question ", i), split_2, "\n")
    if (is.data.frame(answers[[i]])){
      print(round(answers[[i]], 1))
    }else{
      cat(answers_names[[i]], ": ", round(answers[[i]], 1), "\n")
    }
    cat("\n")
  }
}
options(digits = 2)
result_out(1, "孙浩杰", 3, list(X_n, T_n, N_t), c("Xn", "Tn", "N(t)"))
```

### 【第二题】

由 Poisson 分布的可加性知,  $T_n \sim \text{Poisson}(n\lambda)$ , 即  $P(T_n = k) = e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$ , 则  $F_n(t) = e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$

```
F_n <- function(t, n, lambda=2){
  t <- floor(t); lambda <- n*lambda
  exp(-lambda)*sum(lambda^(0:t)/factorial(0:t))
}
```

```

}
F_n_out <- map_vec(c(3,6,9,12),F_n,n=5)

利用 $P(N(t) = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$ 得到分布列

P_n <- function(t,n){
  F_n(t,n)-F_n(t,n+1)
}
# 分布列
P_data <- data.frame(t=rep(c(3,6,9,12),each=11),
  n=rep(0:10,4)) %>%
  rowwise() %>%
  mutate(p=P_n(t,n)) %>%
  ungroup() %>%
  pivot_wider(names_from = t,names_glue = "P(N({t})=n)",values_from = p)
# 更新函数
M <- function(t){
  data.frame(t=rep(t,each=101),#由于n过大时,分布函数趋近于0,考虑这一部分意义不大,故
    只取到100
    n=0:100) %>%
  rowwise() %>%
  mutate(p=P_n(t,n)) %>%
  ungroup() %>%
  summarise(M=sum(n*p)) %>%
  .$M
}
M_t <- map_vec(c(3,6,9,12),M)
result_out(3,"孙浩杰",3,list(F_n_out,P_data,M_t),c("Fn","分布列","M(t)"))

```

### 【第三题】

```

#沿用第二题的函数
#Feller 初等更新定理
a1 <- map_vec(c(0.5,1,10,100),M)/c(0.5,1,10,100)
#Blackwell 更新定理
a2 <- map_vec(c(2,4,6,8),function(a) M(0.5+a)-M(0.5))
a3 <- map_vec(c(2,4,6,8),function(a) M(100+a)-M(100))
special_out <- function(){
  split_1 <- paste(rep("=",25),collapse = "")
  split_2 <- paste(rep("-",20),collapse = "")
  cat(split_1,"3th Simulation",split_1,"\n")
  cat("Name:", "孙浩杰", "\n")
  cat("\n")
  cat(split_2,"Question 1",split_2,"\n")
  cat("M(t)/t: ",a1,"\n")
  cat("1/mu",0.5,"\n")
  cat("\n")
  cat(split_2,"Question 2",split_2,"\n")
  cat("M(t+a)-M(t) at t=0.5: ",a2,"\n")
  cat("M(t+a)-M(t) at t=100: ",a3,"\n")
}

```

```
cat("a/mu",1,2,3,4)
}
special_out()
```

## Show your results from the R code:

### 【第一题】

```
## ===== 1th Simulation =====
## Name: 孙浩杰
##
## ----- Question 1 -----
## Xn : 0.4 4.7 4.5 2.1 3.1
##
## ----- Question 2 -----
## Tn : 0.4 5.1 9.6 12 15
##
## ----- Question 3 -----
## N(t) : 0 1 2 3 4
```

### 【第二题】

```
## ===== 3th Simulation =====
## Name: 孙浩杰
##
## ----- Question 1 -----
## Fn : 0 0.1 0.5 0.8
##
## ----- Question 2 -----
## # A tibble: 11 × 5
##       n `P(N(3)=n)` `P(N(6)=n)` `P(N(9)=n)` `P(N(12)=n)`
##   <dbl>   <dbl>   <dbl>   <dbl>   <dbl>
## 1     0     0.1     0     0     0
## 2     1     0.4     0.1     0     0
## 3     2     0.3     0.3     0.1     0
## 4     3     0.1     0.3     0.2     0.1
## 5     4     0     0.2     0.3     0.1
## 6     5     0     0.1     0.2     0.2
## 7     6     0     0     0.1     0.2
## 8     7     0     0     0.1     0.2
## 9     8     0     0     0     0.1
## 10    9     0     0     0     0.1
## 11   10     0     0     0     0
##
## ----- Question 3 -----
## M(t) : 1.5 3 4.5 6
```

### 【第三题】

```
## ===== 3th Simulation =====  
## Name: 孙浩杰  
##  
## ----- Question 1 -----  
## M(t)/t:  0.3 0.5 0.5 0.5  
## 1/mu 0.5  
##  
## ----- Question 2 -----  
## M(t+a)-M(t) at t=0.5:  0.8 1.8 2.8 3.8  
## M(t+a)-M(t) at t=100:  1 2 3 4  
## a/mu 1 2 3 4
```

教师评语:

实验成绩: