云南大学数学与统计学院

实验报告

实验课名称：随机过程实验

指导教师：韩博 王晓波

实验名称：Markov 链的模拟与计算

专业（年级）：统计学 2021 级

学生姓名：枫叶

学　　号：

实验成绩：

《随机过程实验》实验报告_9_

实验名称	Markov 链的模拟与计算	指导教师	韩博 王晓波
实验时间	2024 年 5 月 26 日	实验地点	格物楼 3508
学号		姓名	枫叶

一、实验目的

学习使用 R 软件对 Markov 链进行模拟和计算。

二、实验要求

1. 对所使用的方法与所得到的结果进行适当的文字描述。
2. 在实验结果的相应部分附上完整的代码与适当的注释。
3. 采用一定的可视化方法体现出对应计算结果。

注：所有结果保留小数点后 4 位数字。

三、实验内容

第一题. 设 Markov 链$\{X_n, n=0,1,2,...\}$的状态空间$S=\{0,1,2\}$，初始分布

$p_j^{(0)}=P(X_0=j)=\dfrac{1}{3}, j=0,1,2$，一步转移概率矩阵$P=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$。

1. **计算**两步转移概率矩阵$P^{(2)}$. 提示：由 C-K 方程知$P^{(2)}=P^2$.

2. **计算联合概率** $P(X_0=0, X_2=1)$. **提示** $P(X_0=0, X_2=1)=P(X_0=0)P(X_2=1 \mid X_0=0)=p_0^{(0)}p_{01}^{(2)}$.

3. **计算边际概率** $P(X_2=1)$ ，**提示**

$P(X_2=1)=\sum_{j=0}^{3} P(X_2=1|X_0=j)P(X_0=j)=\sum_{j=0}^{3} p_j^0 p_{j1}^{(2)}$.

4. 计算 X_2 **的边际分布** $p^{(2)}=\{p_j^{(2)},j\in S\}$ **，其中** $p_j^{(2)}=P(X_2=j)$ **. 提示** $p^{(n)}=p^{(0)}P^{(n)}=p^{(0)}P^n$.

第二题.设 Markov 链$\{X_n,n=0,1,2,...\}$的状态空间$S=\{1,2,3\}$，一步转移概率为$p_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$，一步转移概率矩阵$P=\begin{pmatrix}1/4 & 1/2 & 1/4\\ 1/2 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 1/4 & 3/4\end{pmatrix}$：

1. 求这个遍历 Markov 链的平稳分布$\pi=(\pi_1,...,\pi_3)^\top$。提示：有限状态的遍历 Markov 链的极限分布$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\pi_j$是平稳分布，并且$\pi_j, j=1,2,3$是平稳方程 $\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}, \sum_{j=1}^{3}\pi_j=1$的解；即，平稳分布满足$P^T\pi=\pi,\quad 1^T\pi=1$，这是一个超定方程组$A\pi=b$，其中$A=\begin{pmatrix}P^T-I\\ 1^T\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，方程个数（4 个）大于未知量个数（3 个），可以使用最小二乘解；对于超定方程组$A\pi=b$，有$A^TA\pi=A^Tb$，最小二乘解$\pi=(A^TA)^{-1}A^Tb$。

2. 验证遍历 Markov 链的极限分布与平稳分布的关系：有限状态的遍历 Markov 链的极限分布$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$是平稳分布。特别地，计算 n 步转移概率矩阵 $P^{(n)}=(p_{ij}^{(n)}), n=10,100,500$。提示：由 C-K 方程知$P^{(n)}=P^n$.

第三题. 设今日有雨明日也有雨的概率是 0.7，今日无雨明日有雨的概率是 0.5.

1 计算周一有雨，周三也有雨的概率是多少。

2 计算周一有雨，下周一也有雨的概率是多少。

3 计算：长时间以后，下雨的概率是多少。

提示：设X_n表示第 n 天的降雨情况，状态空间为$S=\{0,1\}$，其中 0 表示有雨，1 表示无雨，则$\{X_n, n=0,1,...\}$构成 Markov 链。计算该 Markov 链的两步转移概率矩阵，七步转移概率矩阵，极限分布（遍历 Markov 链的极限分布是平稳分布）。

实验软件

R 语言

四、 实验结果

【第一题】

1. $P^{(2)}= \begin{matrix} 0.6250 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.3125 & 0.5000 & 0.1875 \\ 0.1875 & 0.5625 & 0.2500 \end{matrix}$

2. $P(X_0=0,X_2=1)=$ 0.1042

3. $P(X_2=1)=$ 0.4583

4. $p^{(2)}=\{p_j^{(2)}, j\in S\}=$ (0.375, 0.4583, 0.1667)

【第二题】

1.平稳分布$\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_3)^\top$ = (0.2,0.3,0.5)

2. $$P^{(10)}=\begin{matrix} 0.2003 & 0.3002 & 0.4995 \\ 0.2003 & 0.3002 & 0.4995 \\ 0.1997 & 0.2998 & 0.5005 \end{matrix}$$

$$P^{(100)}=\begin{matrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{matrix}$$

$$P^{(500)}=\begin{matrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{matrix}$$

【第三题】

1. *P*(周三也有雨|周一有雨) = 0.64

2. *P*(下周一也有雨|周一有雨) = 0.6250

3. 当$n\to\infty$时, *P*(下雨) = 0.625

附上 R code 及其运行结果:

注：R code 运行结果的输出格式，按照如下示意图的格式:

```
==================== 1th Simulation =======================
 Name: 你的姓名

> cat('Question 1, P2:')
Question 1, P2:> round(P2,4)
       [,1]   [,2]   [,3]
[1,] 0.6250 0.3125 0.0625
[2,] 0.3125 0.5000 0.1875
[3,] 0.1875 0.5625 0.2500
> cat('Question 2, P(X0=0, X2=1):',  round(p01,4))
Question 2, P(X0=0, X2=1): 0.1042> cat('Question 3, P(X2=1):',  round(p21,4))
Question 3, P(X2=1): 0.4583> cat('Question 4, P(X2=j):')
Question 4, P(X2=j):> round(p2,4)
      [,1]   [,2]   [,3]
[1,] 0.375 0.4583 0.1667
>
```

```
==================== 2th Simulation =======================
 Name: 你的姓名

> cat('stationary distribution: ', fit)
stationary distribution:  0.2 0.3 0.5> cat('limit distribution: ')
limit distribution: > round(P10, 4)
       [,1]   [,2]   [,3]
[1,] 0.2003 0.3002 0.4995
[2,] 0.2003 0.3002 0.4995
[3,] 0.1997 0.2998 0.5005
> round(P100,4)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  0.2  0.3  0.5
[2,]  0.2  0.3  0.5
[3,]  0.2  0.3  0.5
> round(P500,4)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  0.2  0.3  0.5
[2,]  0.2  0.3  0.5
[3,]  0.2  0.3  0.5
```

```
=========== 3th Simulation ================
 Name: 你的姓名

 周一有雨，周三也有雨的概率是：   0.64
 周一有雨，下周一也有雨的概率是： 0.625
 长时间以后，下雨的概率是：       0.625
```

Show your R code:

【第一题】

第一题

```r
#加载包，结果输出函数
library(dplyr)
library(expm)
result_out <- function(order,name,q_num,answers,answers_names){
  split_1 <- paste(rep("=",25),collapse = "")
  split_2 <- paste(rep("-",20),collapse = "")
  cat(split_1,paste0(order,"th Simulation"),split_1,"\n")
  cat("Name:",name,"\n")
  cat("\n")
  for (i in 1:q_num){
    cat(split_2,paste0("Question ",i),split_2,"\n")
    cat(answers_names[[i]],": ")
    if (is.list(answers[[i]])){
      lapply(answers[[i]],print)
    }else if (is.data.frame(answers[[i]])){
      print(answers[[i]])
    }else if (is.matrix(answers[[i]])){
      print(answers[[i]])
    }else{
      cat(answers[[i]],"\n")
    }
    cat("\n")
  }
}
```

第一题

第一问

```r
P1 <- matrix(c(3/4,1/4,0,1/4,1/2,3/4,0,1/4,1/4),nrow = 3)
P2 <- P1%*%P1
```

第二问

```r
p_q2 <- 1/3*P2[1,2]
```

第三问

```r
p_q3 <- sum(1/3*P2[,2])
```

第四问

```r
p_q4 <- rep(1/3,3)%*%P2
```

输出结果

```r
result_out(1,"孙浩杰",4,list(P2,p_q2,p_q3,p_q4),c("P2:","P(X0=0,X2=1):","P(X2=1):","P(X2=j):"))
```

【第二题】

第二题

第一问

```r
P <- matrix(c(1/4,1/2,0,1/2,1/4,1/4,1/4,1/4,3/4),ncol = 3)
A <- rbind(t(P)-diag(1,3),rep(1,3))
b <- c(0,0,0,1)
p_lim <- solve(t(A)%*%A)%*%t(A)%*%b
```

第二问

```r
P10 <- P%^%10
P100 <- P%^%100
P500 <- P%^%500
```

结果输出

```r
result_out(2,"孙浩杰",2,list(p_lim,list(P10,P100,P100)),c("stationary distribution:","limit distrbution"))
```

【第三题】

第三题

第一问

```r
P <- matrix(c(0.5,0.5,0.3,0.7),nrow = 2,byrow = T)
P2 <- P%^%2
```

第二问

```r
P7 <- P%^%7
```

第三问

```r
A <- rbind(t(P)-diag(1,2),rep(1,2))
b <- c(0,0,1)
p_lim <- solve(t(A)%*%A)%*%t(A)%*%b
```

结果输出

```r
result_out(3,"孙浩杰",3,list(P2[2,2],P7[2,2],p_lim[2]),c("周一有雨，周三也有雨的概率是","周一有雨，下周一也有雨的概率是","长时间以后，下雨的概率是"))
```

Show your results from the R code：

【第一题】

```
## ========================= 1th Simulation =========================
## Name: 孙浩杰
##
## -------------------- Question 1 --------------------
## P2: :        [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.6250 0.3125 0.0625
## [2,] 0.3125 0.5000 0.1875
## [3,] 0.1875 0.5625 0.2500
##
## -------------------- Question 2 --------------------
## P(X0=0,X2=1): : 0.1041667
##
## -------------------- Question 3 --------------------
## P(X2=1): : 0.4583333
##
## -------------------- Question 4 --------------------
## P(X2=j): :       [,1]      [,2]      [,3]
## [1,] 0.375 0.4583333 0.1666667
```

【第二题】

```
## ========================= 2th Simulation =========================
## Name: 孙浩杰
##
## -------------------- Question 1 --------------------
## stationary distribution: :      [,1]
## [1,]  0.2
## [2,]  0.3
## [3,]  0.5
##
## -------------------- Question 2 --------------------
## limit distrbution :           [,1]      [,2]      [,3]
## [1,] 0.2003260 0.3001623 0.4995117
## [2,] 0.2003250 0.3001633 0.4995117
## [3,] 0.1996746 0.2998371 0.5004883
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]  0.2  0.3  0.5
## [2,]  0.2  0.3  0.5
## [3,]  0.2  0.3  0.5
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]  0.2  0.3  0.5
## [2,]  0.2  0.3  0.5
## [3,]  0.2  0.3  0.5
```

【第三题】

```
## ========================= 3th Simulation =========================
## Name: 孙浩杰
##
## -------------------- Question 1 --------------------
## 周一有雨，周三也有雨的概率是 : 0.64
##
## -------------------- Question 2 --------------------
## 周一有雨，下周一也有雨的概率是 : 0.6250048
##
## -------------------- Question 3 --------------------
## 长时间以后，下雨的概率是 : 0.625
```

教师评语：

实验成绩：