云南大学数学与统计学院
实验报告

实验课名称：随机过程实验

指导教师：韩博 王晓波

专业（年级）：统计学 **2021** 级

学生姓名：枫叶 学号：

实验名称：分布特征的数值计算

实验成绩：**A+**（**100** 分）

随机过程实验 3

题目要求

第一题：求正态分布的极大似然估计

第二题：设置随机数种子为 401, 生成 100 个服从正态分布 N(5,3) 的随机数，将生成的随机数带入第一题推导的极大似然估计表达式，求出样本数据的极大似然估计.

第三题：写出一元正态分布的-2 倍对数似然函数，用 R 语言定义该函数，再用 optim 函数求对数似然函数的极小值点 (基于第二题生成的随机数).

第一题

样本的似然函数为 $L(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，对数似然函数为 $lnL(\mu,\sigma^2) = \frac{n}{2}ln(2\pi) - \frac{n}{2}(ln\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，分别对参数求导有 $\frac{\partial lnL(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$ 和 $-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，可以解得 $\hat{\mu} = \bar{x}$ 和 $\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$，验证二阶导可以确定此时取到极大值

第二题

```
set.seed(401)
num <- rnorm(100,5,sqrt(3))
mu_1 <- mean(num)
sigma2_1 <- sum((num-mean(num))^2)/length(num)
```

为便于比较，公式计算结果一并列于第三题中

第三题

n 个样本的情形为 $nln(2\pi) + nln(\sigma^2) + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}$

```
loglikely <- function(theta, x){
  mu <- theta[1]
  sigma2 <- theta[2]
  n <- length(x)
  n*log(2*pi)+n*log(sigma2)+1/sigma2*sum((x -mu)^2)
}
mu_0 <- 5
sigma2_0 <- 3
num_max <- optim(c(2,2),loglikely,x=num)
cat('真实 mu=', mu_0, ' 公式估计 mu=', mu_1,
      ' 数值优化估计 mu=', num_max$par[1], '\n')
```

```
## 真实mu= 5  公式估计mu= 4.870699  数值优化估计mu= 4.87064
```

```
cat('真实 sigma2=', sigma2_0,
      '公式估计 sigma2=', sigma2_1,
      ' 数值优化估计 sigma2=', num_max$par[2], '\n')
```

```
## 真实sigma2= 3 公式估计sigma2= 2.865519  数值优化估计sigma2= 2.864674
```

可以看到基于极大似然估计量的估计结果和基于数值优化的估计结果是很接近的，但二者与参数真实值仍旧有一定差距，可以通过增大样本量来改善这一情况，试验发现在 1000 个随机数时均值真值与估计量极为接近，但方差依旧相差 0.3 左右，当随机数达到 10000 时方差也极为接近