Interp(d, x, t, p)

1. Keterangan: Pada awalnya d dan x adalah vektor dari $f[x_0,\ldots,x_i]$ dan x_i, i = 0, 1 , …, n. Pada saat 'exit' p akan berisi $p_n(t)$.
2. $p := d_n$
3. Kerjakan s/d langkah 4 untuk i = n-1 , n--2, …, 0
4. $p := d_i + (t - x_i)p$
5. ' exit'

3.2. Interpolasi dengan tabel beda hingga

3.2.1. Beda Maju

Notasi: $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ dengan $x_i = x_0 + ih$, i = 0, 1, 2, 3, …
Untuk $r \geq 0$,

$$\Delta^{r+1} f(z) = \Delta^r f(z+h) - \Delta^r f(z)$$

$\Delta^r f(z)$ disebut ' beda maju order r ,' Δ disebut 'operator beda maju '

Contoh:

$$\begin{aligned} \Delta^0 f(x) &= f(x) \\ \Delta f(x) &= \Delta^0 f(z+h) - \Delta^0 f(z) \\ &= f(x+h) - f(x) \\ \Delta^2 f(x) &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \end{aligned}$$

Contoh hitungan : Kita gunakan polinomial $x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ dengan h = 1,0

i	x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0.0	-5.0	6	2	6	0
1	1.0	1.0	8	8	6	
2	2.0	9.0	16	14		
3	3.0	25.0	30			
4	4.0	55.0				

Korelasi antara 'beda maju' dengan ' beda terbagi'

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}$$

Secara umum: $f[x_0, x_1, ..., x_n] = \dfrac{\Delta^n f(x_0)}{n!\, h^n}$

Akan dijabarkan rumus interpolasi 'beda maju' dari rumus interpolasi 'beda terbagi' Newton. Didefinisikan $\alpha = \dfrac{x - x_0}{h}$ yang menunjukkan letak titik x terhadap x_0. Jadi misalnya $\alpha = 1.6$, maka x terletak pada jarak 6/10 dari x_1 ke arah x_2.

Diinginkan rumus untuk:

$$(x - x_0)\,(x - x_1)\,\dots\,(x - x_k)$$

dinyatakan dalam α

$$x - x_j = x_0 + \alpha h - (x_0 + jh) = (\alpha - j)h$$

Jadi

$$(x - x_0)\,(x - x_1)\,\dots\,(x - x_k) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - k)h^{k+1}$$

sehingga

$$p_n(x) = f_0 + \alpha h \frac{\Delta f_0}{h} + \alpha(\alpha-1)h^2 \frac{\Delta^2 f_0}{2!\, h^2} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)h^n \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n}$$

Jika didefinisikan koefisien binomial sbb:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!},\ k>0 \text{ dan } \binom{\alpha}{0} = 1$$

maka didapat rumus interpolasi 'beda maju' sbb:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} \Delta^j f(x_0) \quad \text{dengan} \quad \alpha = \frac{x - x_0}{h}$$

Contoh hitungan: $p(x=1.5) = ?$

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.5 - 1.0}{1.0} = 1.5$$

1) $p_1(x) = f(x_0) + \alpha\Delta f(x_0)$
   $= -5 + 1.5\ (6) = 4$
2) $p_2(x) = f(x_0) + \alpha\Delta f(x_0) + \alpha(\alpha-1)\Delta^2 f(x_0)/2!$
   $= -5 + 1.5\ (6) + 1.5\ (0.5)2/2! = 4.75$

3.2.2. Beda Mundur

Notasi: $\nabla f(z) = f(z) - f(z-h)$

$\nabla^{r+1} f(z) = \nabla^r f(z) - \nabla^r f(z-h) \quad r \geqslant 1$

Rumus interpolasinya

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{j-1-\alpha}{j} \nabla^j f(x_0) \quad \text{dengan } \alpha = \frac{x_0 - x}{h}, \binom{-1-\alpha}{0} = 1$$

i	x_i	$f(x_i)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$
-4	0.0	-5.0	6	2	6	0
-3	1.0	1.0	8	8	6	
-2	2.0	9.0	16	14		
-1	3.0	25.0	30			
0	4.0	55.0				

Contoh hitungan: $p(x=3.5) = ?$

$$\alpha = \frac{x_0 - x}{h} = \frac{-3.5 + 4.0}{1.0} = 0.5$$

1) $p_1(x) = f(x_0) + (-\alpha)\nabla f(x_0)$

$= 55 + (-0.5)\,30 = 40$

2) $p_2(x) = p_1(x) + (-\alpha)(-\alpha+1)\nabla^2 f(x_0)/2!$

$= 40 + (-0.5)(0.5)14/2! = 38.25$

3) $p_3(x) = p_2(x) + (-\alpha)(-\alpha+1)\,(-\alpha+2)\nabla^3 f(x_0)/3!$

$= 38.25 + (-0.5)(0.5)(1.5)6/3! = 37.875$

3.3. Lagrange

Polinomial Lagrange dibentuk dengan fomulasi berikut:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i = 0,1,\ldots,n$$

Contoh:

$$p_i(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x - x_{01}} f(x_1)$$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_{12})} f(x_2)$$

Contoh: hitung $p_2(x)$ yang melalui titik-titik $(0,15);(1,1);(3,25)$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)}=\frac{x^2-4x+3}{3}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}=\frac{x^2-3x}{-2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_{01})(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}=\frac{x^2-x}{6}$$

Jadi $p_2(x)=L_0(x)\times(-5)+L_1(x)\times(1)+L_2(x)\times(25)=2x^2+4x-5$

3.4. Beberapa fakta penting dari'beda terbagi'

1. $f[x_0,x_1,.....,x_m]=\dfrac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$ untuk $\xi\in X\{x_0,x_1,...,x_n\}$ dimana $X\{x_0,...,x_m\}$ artinya interval terkecil dimana $x_0,x_1,...,x_m$ tercakup!

   Contoh:

   $$f[x_0]=\frac{f^{(0)}(\xi)}{0!}=f(x_0)$$

   $$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f'(\xi) \qquad \xi\in[x_0,x_1]$$

   $$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{1}{2}f'(\xi) \qquad \xi\in X\{x_0,x_1,x_2\}$$

2. Jika $f(x)$ adalah polynomial derajad m, maka

   $$f[x_0,...,x_n,x]=\begin{cases}\text{polinomial derajad } m-n-1 & n<m-1\\ a_m & n=m-1\\ 0 & n>m-1\end{cases}$$

   dengan $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1x+a_0$

3. Kesalahan dalam interpolasi

   $$f(x)-p_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)$$

   dengan $\xi_x\in \mathrm{H}\{x_0,....,x_n,x\}$

4. $\dfrac{d}{dx}f[x_0,...,x_n,x]=f[x_0,x,...,x_n,x,x]$

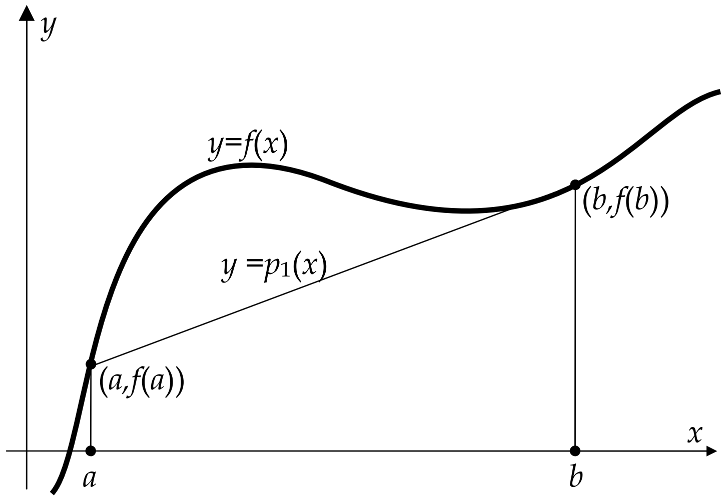
Bab
4. INTEGRASI NUMERIS

4.1. Rumus trapesium dan Simpson

Pada bab ini akan dibicarakan cara menghitung integral secara numeris dari

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

dimana [a,b] berhingga



Gambar 8 Konsep integrasi trapesium

Rumus trapesium pada dasarnya adalah mendekati $f(x)$ dengan garis lurus yang melalui (a,$f(a)$) dan (b,$f(b)$)

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) - f(b)\right]$$