Bab 3. TEORI INTERPOLASI

Jika kita mempunyai satu set data:

$$(x_0, y_0) , (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

maka dalam bab ini akan di jelaskan bagaimana harus mencarti polinomial yang melalui, data di atas.

Jika polinomial ini ditulis sebagai:

$$p(\mathrm{x}) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

maka jika data diatas disubstitusikan akan didapat (n+1) persamaan dengan (n+1) variabel tidak diketahuinya yaitu:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + & a_1x_0 & + & \cdots & + & a_nx_0^n & = & y_0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_0 & + & a_1x_n & + & \cdots & + & a_nx_n^n & = & y_n \end{array}$$

Persamaan diatas jika diselesaikan akan menghasilkan a_0, …, a_n sehingga polinomial $p(x)$ dapat dicari .

3.1. Metoda Beda Terbagi Newton

Notasi yang digunakan:

$$f[x_o, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_1, \ldots, x_n]}{x_n - x_0}$$

Contoh

Order 0: $f[x_0] = f[x_n]$

Order 1: $f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$

Order 2: $f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

Order 3: $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

Rumus beda terbagi Newton:

$$p_n(x) = f[x_0] + (x_3\text{-}x_0)f[x_0,x_1] + (x_3\text{-}x_0)(x\text{-}x_1)f[x_0,x_1] + \ldots$$
$$+ (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})f[\, x_0,x_1,\ldots,x_n\,]$$

Contoh: Kita buat tabel beda terbagi berdasarkan polinomial

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f_2[\,]$	$f_3[\,]$
0	0.0	-5.0	6	2	1
1	1.0	1.0	12	6	
2	3.0	25.0	30		
3	4.0	55.0			

Keterangan:

$$A = \frac{1-(-5)}{1-0} = 6 \qquad B = \frac{25-1}{3-1} = 12$$
$$C = \frac{55-25}{4-3} = 30 \qquad D = \frac{B-A}{3-0} = 2$$
$$E = \frac{30-12}{4-1} = 6 \qquad F = \frac{E-D}{4-0} = 1$$

Contoh hitungan $p_n(x{=}0.5)$ = ?

- $p_1(x) = -5 + (x\text{-}0)6 = 6x - 5$
  $\therefore\ p_1\,(0.5) = -2$
- $p_2(x) = -5 + (x\text{-}0)6 + (x\text{-}0)(x-1)2 = 2x^2 + 4x - 5$
  $\therefore\ p_2\,(0.5) = -2{,}5$
- $p_3(x) = -5 + (x\text{-}0)6 + (x\text{-}0)(x-1)2 + (x\text{-}0)(x\text{-}1)(x\text{-}3)1 = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$
  $\therefore$ p$_2$ (0.5) = -15/8 = - 1.875

♦ Algoritma metoda beda terbagi Newton

Divdif (d, x , n)

1. Keterangan: d dan x adalah vektor $f(x_i)$ dan x_i = 0,1,…,n. Pada saat 'exit' d_i akan terisi oleh nilai $f\,[x_0,\ldots,x_i]$
2. Kerjakan s/d langkah 4 untuk i = 1, 2 ,… ,n
3. Kerjakan sampai dengan langkah 4 untuk j = n, n-1, i
4. $d_j := (d_j - d_{j-1}) \,/\, (x - x_{j-1})$
5. 'exit'

Interp(d, x, t, p)

1. Keterangan: Pada awalnya d dan x adalah vektor dari $f[x_0,\ldots,x_i]$ dan x_i, i = 0, 1 , …, n. Pada saat 'exit' p akan berisi $p_n(t)$.
2. $p := d_n$
3. Kerjakan s/d langkah 4 untuk i = n-1 , n--2, …, 0
4. $p := d_i + (t - x_i)p$
5. ' exit'

3.2. Interpolasi dengan tabel beda hingga

3.2.1. Beda Maju

Notasi: $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ dengan $x_i = x_0 + ih$, i = 0, 1, 2, 3, …

Untuk $r \geq 0$,

$$\Delta^{r+1} f(z) = \Delta^r f(z+h) - \Delta^r f(z)$$

$\Delta^r f(z)$ disebut ' beda maju order r ,' Δ disebut 'operator beda maju '

Contoh:
$$\begin{aligned} \Delta^0 f(x) &= f(x) \\ \Delta f(x) &= \Delta^0 f(z+h) - \Delta^0 f(z) \\ &= f(x+h) - f(x) \\ \Delta^2 f(x) &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \end{aligned}$$

Contoh hitungan : Kita gunakan polinomial $x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ dengan h = 1,0

i	x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0.0	-5.0	6	2	6	0
1	1.0	1.0	8	8	6	
2	2.0	9.0	16	14		
3	3.0	25.0	30			
4	4.0	55.0				

Korelasi antara 'beda maju' dengan ' beda terbagi'

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}$$

Secara umum: $f[x_0, x_1, ..., x_n] = \dfrac{\Delta^n f(x_0)}{n!\, h^n}$

Akan dijabarkan rumus interpolasi 'beda maju' dari rumus interpolasi 'beda terbagi' Newton. Didefinisikan $\alpha = \dfrac{x - x_0}{h}$ yang menunjukkan letak titik x terhadap x_0. Jadi misalnya $\alpha = 1.6$, maka x terletak pada jarak 6/10 dari x_1 ke arah x_2.

Diinginkan rumus untuk:

$$(x - x_0)\ (x - x_1)\ \ldots\ (x - x_k)$$

dinyatakan dalam α

$$x - x_j = x_0 + \alpha h - (x_0 + jh) = (\alpha - j)h$$

Jadi

$$(x - x_0)\ (x - x_1)\ \ldots\ (x - x_k) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k)h^{k+1}$$

sehingga

$$p_n(x) = f_0 + \alpha h \frac{\Delta f_0}{h} + \alpha(\alpha - 1)h^2 \frac{\Delta^2 f_0}{2!\, h^2} + ... + \alpha(\alpha - 1)...(\alpha - n + 1)h^n \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n}$$

Jika didefinisikan koefisien binomial sbb:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1)...(\alpha - k + 1)}{k!},\ k>0 \text{ dan } \binom{\alpha}{0} = 1$$

maka didapat rumus interpolasi 'beda maju' sbb:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} \Delta^j f(x_0) \quad \text{dengan} \quad \alpha = \frac{x - x_0}{h}$$

Contoh hitungan: $p(x=1.5) = ?$

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.5 - 1.0}{1.0} = 1.5$$

1) $p_1(x) = f(x_0) + \alpha\Delta f(x_0)$
   $= -5 + 1.5\ (6) = 4$
2) $p_2(x) = f(x_0) + \alpha\Delta f(x_0) + \alpha(\alpha-1)\Delta^2 f(x_0)/2!$
   $= -5 + 1.5\ (6) + 1.5\ (0.5)2/2! = 4.75$