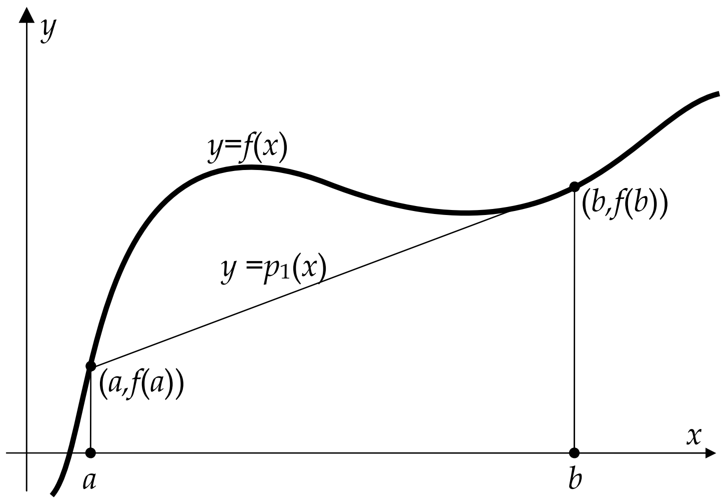
Bab
4. INTEGRASI NUMERIS

4.1. Rumus trapesium dan Simpson

Pada bab ini akan dibicarakan cara menghitung integral secara numeris dari

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

dimana [a,b] berhingga



Gambar 8 Konsep integrasi trapesium

Rumus trapesium pada dasarnya adalah mendekati $f(x)$ dengan garis lurus yang melalui (a,$f(a)$) dan (b,$f(b)$)

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) - f(b)\right]$$

Error:

$$f(x)-p_1(x)=f(x)-\left\{\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\right\}$$
$$=(x-a)(x-b)f[a,b,x]$$

ingat definisi 'beda terbagi $f[a,b,x]$.

Jadi 'error':

$$E_1(f)=\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$$
$$=\int_a^b (x-a)(x-b)f[a,b,x]dx$$

dengan harga tengah integral, didapat:

$$E_1(f)=f[a,b,\xi]\int_a^b (x-a)(x-b)dx \quad a\le\xi\le b$$
$$=\left(\frac{1}{2}f''(\eta)\right)\left(-\frac{1}{6}(b-a)^3\right) \quad \eta\in[a,b]$$
$$=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$$

Jika interval $[a,b]$ dibagi menjadi n pias sehingga untuk $n\geq 1$, $h=(b-a)/n$ dan $x_j=a+jh$, $j=0,1,\ldots,n$, didapat:

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{h}{2}\left[f(x_{j-1})-f(x_j)\right]-\frac{h^3}{12}f''(\eta_j)\right\}$$

dengan xj-1⩽nj⩽xj.

Sehingga integralnya dapat didekati dengan

$$I_n(f)=h\left[\frac{1}{2}f_0+f_1+\ldots+f_{n=1}+\frac{1}{2}f_n\right] \qquad n\ge 1$$

Kesalahan $I_n(f)$ terhadap $I(f)$ adalah

$$E_n(f)=I(f)-E_n(f)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}-\frac{h^3}{12}f''(\eta_j)$$
$$=-\frac{h^3 n}{12}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f''(\eta_j)\right]$$

Perlu diingat bahwa

$$\underset{a\le x\le b}{Min}\, f''(x) \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f''(\eta_j) \le \underset{a\le x\le b}{Max}\, f''(x)$$

karena $f''(x)$ menerus pada $a \leqslant x \leqslant b$, maka

$$\begin{aligned} E_n(f) &= -\frac{h^3 n}{12} f''(\eta) \quad \eta \in [a,b] \\ &= -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(\eta) \\ &= -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta \end{aligned}$$

Estimasi kesalahan asimtotis $\tilde{E}_n(f)$

$$\begin{aligned} \underset{n\to\infty}{Limit} \frac{E_n(f)}{h^2} &= \underset{n\to\infty}{Limit}\left[-\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\eta_j)h\right] \\ &= -\frac{1}{12}\underset{n\to\infty}{Limit}\left[\sum_{j=1}^{n} f''(\eta_j)h\right] \\ &= -\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx \end{aligned}$$

maka $\tilde{E}_n(f) \equiv -\frac{h^2}{12}\{f'(b) - f'(a)\}$

Definisi:

Jika $E_n(f)$ adalah kesalahan eksak, sedangkan $\tilde{E}_n(f)$ adalah estimasi darinya, maka $\tilde{E}_n(f)$ disebut estimasi kesalahan asimtotis dari $E_n(f)$ jika:

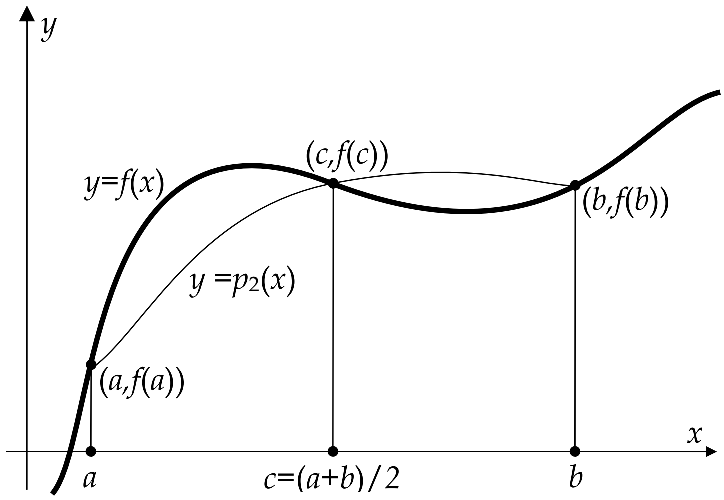
$$\underset{n\to\infty}{Limit} \frac{\tilde{E}_n(f)}{E_n(f)} = 1 \quad \text{atau} \quad \underset{n\to\infty}{Limit} \frac{E_n(f) - \tilde{E}_n(f)}{E_n(f)} = 0$$

4.1.1. Rumus trapesium terkoreksi

Dengan menggunakan $\tilde{E}_n(f)$, rumus trapesium dapat ditingkatkan menjadi:

$$\begin{aligned} CT_n(f) &= I_n(f) + \tilde{E}_n(f) \\ &= h\left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \ldots + f_{n=1} + \frac{1}{2}f_n\right] - \frac{h^2}{12}\{f'(b) - f'(a)\} \end{aligned}$$

4.1.2. Rumus Simpson



Gambar 9 Konsep integrasi Simpson

Dalam metode Simpson fungsi $f(x)$ didekati dengan $p_2(x)$ yang melalui 3 titik $(a,f(a))$, $(c,f(c))$ dan $(b,f(b))$ dimana $c = (a+b)/2$.

$$I_2(f) = \int_a^b \left[\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) \right] dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(c) + f(b) \right] \text{ dengan } h = \frac{b-a}{2}$$

Kesalahannya:

$$E_2(f) = I(f) - I_2(f)$$

$$= \int_a^b (x-a)(x-b)(x-c) f[a,b,c,x] dx$$

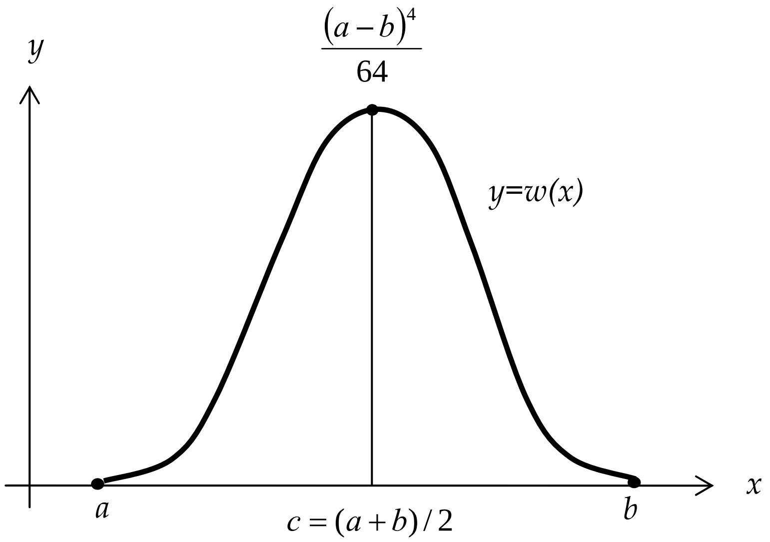
Harga tengah integral tidak dapat digunakan karena $(x\text{-}a)(x\text{-}c)(x\text{-}b)$ berganti tanda pada $x = c$.

Didefinisikan: $w(x) = \int_a^x (t-a)(t-c)(t-b) dt$

Beberapa fakta mengenai $w(x)$:

$$w(a) = w(b) = 0,\ w(c) = \frac{(a-b)^4}{64},\ w(x) > 0 \text{ untuk } a < x < b$$

$$w'(x) = (x-a)(x-c)(x-b)$$



Gambar 10 Fungsi $y = w(x)$ untuk metoda Simpson

Jadi $E_2(f)$ dapat ditulis sebagai:

$$E_2(f) = \int_a^b w'(x) f[a,b,c,x]dx$$

$$= w(x) f[a,b,c,x]\Big]_a^b - \int_a^b w(x) \frac{d}{dx} f[a,b,c,x]$$

$$E_2(f) = -\int_a^b w(x) f[a,b,c,x,x]dx$$

$$= -f[a,b,c,\xi,\xi]\int_a^b w(x)dx \qquad \xi \in [a,b]$$

$$= -\frac{f^{(4)}(\eta)}{24}\left[\frac{4}{15}h^5\right]$$

$$= -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

Jika interval $[a,b]$ dibagi menjadi n pias, $n \geqslant 2$, $h = (b-a)/n$, $x_j = a + jh$ untuk $j = 1,2,3,\ldots,n$, sehingga

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)dx \qquad n = \text{genap}$$

$$= \sum_{j=1}^{n/2} \left\{ \frac{h}{3}\left[f_{2j-2} + 4f_{2j-1} + f_{2j}\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_j) \right\}$$

dengan $x_{2j-2} \leqslant n_j \leqslant x_{2j}$

Rumus Simpson:

$$I_n(f) = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

Kesalahan estimasi:

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = -\frac{h^5 (n/2)}{90}\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\eta_j)$$

$$= -\frac{h^4 (b-a)}{180} f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [a,b]$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{180 n^4} f^{(4)}(\eta)$$

Estimasi kesalahan asimtotis: $\tilde{E}_n(f) = -\frac{h^4}{180}\left[f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)\right]$

4.2. Rumus Newton–Cotes

Rumus trapesium dan Simpson sebetulnya merupakan dua buah rumus pertama dari rumus Newton-Cotes.

Untuk $n \geqslant 1$, $h = (b\text{-}a)/n$, $x_j = a + jh$ untuk $j = 0,1,2,3,\ldots,n$. Didefinisikan $I_n(f)$ dengan mengganti $f(x)$ dengan polinomial $p_n(x)$ pada titik-titik $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \doteq \int_a^b p_n(x)dx$$

Dengan interpolasi Lagrange untuk $p_n(x)$, maka

$$I_n(f) = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} l_{j,n}(x) f(x_j) dx = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n}(x) f(x_j)$$

dengan $w_{j,n} = \int_a^b l_{j,n}(x)dx \quad j = 0,1,\ldots,n$

Untuk nilai n = 1 dan 2 telah disajikan sebagai rumus trapesium dan Simpson. Sekarang untuk n = 3, contoh untuk menghitung w_0 adalah:

$$w_0 = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} dx$$

Jika $x = x_0 + \mu h$, $0 \leqslant \mu \leqslant 3$, maka:

$$w_0 = \int_{x_0}^{x_3} -\frac{1}{6h^3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx$$
$$= -\frac{1}{6h^3}\int_0^3 (\mu-1)h\,(\mu-2)h\,(\mu-3)h\,hd\mu$$
$$= -\frac{h}{6}\int_0^3 (\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)d\mu = \frac{3h}{8}$$

Jika w_1, w_2, w_3 dihitung dengan cara di atas, akhirnya akan didapat untuk n = 3

$$I_3(f) = \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]$$

Kesalahan pada $I_n(f)$ dinyatakan sebagai berikut:

a) Untuk n genap:

$$E_n(f) = C_n h^{n+3} f^{(n+2)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

dengan $C_n = \dfrac{1}{(n+2)!}\displaystyle\int_0^n \mu^2(\mu-1)...(\mu-n)d\mu$

b) Untuk n gasal:

$$E_n(f) = C_n h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

dengan $C_n = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^n \mu^2(\mu-1)...(\mu-n)d\mu$

4.2.1. Rumus Newton-Cotes Tertutup

n = 1, rumus trapesium

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right] - \frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

n = 2, rumus Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

n = 3

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[f(a)+3f(a+h)+3f(b-h)+f(b)\right] - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$$

n = 4, rumus Boole

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{45}\left[7f(a)+32f(a+h)+12f(\frac{a+b}{2})+32f(b-h)+7f(b)\right] - \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi)$$

Definisi: Integrasi numerik $\tilde{I}(f)$ yang mendekatri $I(f)$ disebut mempunyai derajat ketepatan m jika: (a) $\tilde{I}(f) = I(f)$ untuk semua polinomial $f(x)$ derajat $\leq m$, (b) $\tilde{I}(f) \neq I(f)$ untuk beberapa polinomial $f(x)$ derajat $m+1$

Contoh:

Pada rumus Newton-Cotes untuk n = 1, 3 dikatakan mempunyai derajat ketepatan m = 1, 3. Sedangkan untuk n = 2, 4 mempunyai derajat ketepatan $m = n + 1$ = 3, 5. Tampak bahwa rumus Newton–Cotes dengan n genap menghasilkan derajat ketepatan ekstra dibandingkan dengan n gasal.

4.2.2. Rumus Newton–Cotes terbuka

Ada rumus Newton–Cotes yang tidak menggunakan salah satu atau kedua titik di ujung interval. Contoh yang paling sederhana adalah rumus titik tengah:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta) \quad \eta \in [a,b]$$

Rumus kompositnya:

$$\int_a^b f(x)dx = I_n(f) + E_n(f)$$

$$I_n(f) = h[f(x_1) + \cdots + f(x_n)]$$

$$E_n(f) = \frac{h^2(b-a)}{24} f''(\eta) \quad \eta \in [a,b]$$

dengan $h = \frac{(b-a)}{n}$, $x_j = a + (j - \frac{1}{2})h$ sebagai titik tengah dari titik-titik $\left(a+(j-1)h, a+jh\right)$ untuk $j = 1,2,\ldots,n$.

Rumus Newton–Cotes yang sedemikian ini disebut dengan rumus terbuka, sedangkan rumus yang terdahulu disebut tertutup.

$n = 2$:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(\xi)$$

$n = 3$:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi)$$

$n = 4$:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{4h}{3}[2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi)$$

$n = 5$: