Задача 1. В n-мерном евклидовом пространстве дан куб с ребром a. Найти:

1. длину d_n диагонали куба;
2. $\lim_{n\to\infty}$;
3. угол φ_n между диагональю куба и его k-мерной гранью, $k < n$;
4. $\lim_{n\to\infty} \varphi_n$;
5. число вершин куба;
6. число диагоналей куба, ортогональных данной диагонали.

Задача 2. Найти $\lambda \in R$, при котором векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ ортогональны:

1. $\mathbf{a} = (1;\quad 2;\quad 1;\quad 3)\,,\quad \mathbf{b} = (4;\quad 1;\quad 1;\quad 1)\,;$
2. $\mathbf{a} = (1;\quad 2;\quad 3;\quad \ldots;\quad n)\,,\quad \mathbf{b} = (n;\quad n-1;\quad n-2;\quad \ldots;\quad 1)\,,\quad n > 1.$

Задача 3. Найти расстояние между прямыми Γ_1^4 и $\Gamma_2 \in R^4$, заданными параметрическими уравнениями $x_1 = 1+2t$, $x_2 = -2t$, $x_3 = 2+2t$, $x_4 = 2t$ и $x_1 = 1$, $x_2 = t$, $x_3 = 1+2t$, $x_4 = t$, $t \in R$. Указать точки $x^0 \in \Gamma_1$ и $y^0 \in \Gamma_2$, такие что $\rho\left(x^0;\quad y^0\right) = d\left(\Gamma_1;\quad \Gamma_2\right)$.

Задача 4. Найти $\lim_{m\to\infty} x^{(m)}$, если:

1. $x^{(m)} = \left(\sqrt{m+1} - \sqrt{m};\quad \frac{m-1}{m};\quad \frac{2m^2-1}{m^2};\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right);$
2. $x^{(m)} = \left(\frac{(-1)^m}{m};\quad (-1)^m\right);$
3. $x^{(m)} = \left(\frac{\cos\varphi_n}{m};\quad \frac{\sin\varphi_n}{\varphi_n}\right)$, где а) φ_n – бесконечно большая последовательность, б) φ_n – бесконечно малая последовательность;
4. $x^{(m)} = (r^m \cos m\varphi;\quad r^m \sin m\varphi)\,,\quad r,\quad \varphi \in R;$
5. $x^{(m)} = \left(m\left(\sqrt[m]{r}\cos\frac{\varphi}{m} - 1\right);\quad m\sqrt[m]{r}\sin\frac{\varphi}{m}\right)\,,\quad r,\quad \varphi \in R,\quad r > 0.$

Задача 5. Докажите, что следующие множества являются открытыми в R^n: произвольный n-мерный шар, произвольный n-мерный куб, произвольный n-мерный прямоугольный параллелепипед.

Задача 6. Является ли открытым в R^n, $n > 1$ множество всех точек круга $E = \{x \in R^n; \quad x_1^2 + x_2^2 < \delta^2, \quad x_i = 0, \quad i = 3, \quad \ldots, \quad n\}$?

Задача 7. Найти все точки прикосновения множества $E = \{x \in R^2\colon\ x_2 = \sin\left(\frac{1}{x_1}\right)\}$, не принадлежащие E.

Задача 8. Найти $d\,(E_1; \quad E_2)$, если:

1. $E_1 = \{x \in R^2\colon\ x_2 = x_1^2\}, \quad E_2 = \{x \in R^2\colon\ x_2 = x_1 - 2\}$;
2. $E_1 = \{x \in R^2\colon\ x_1^2 + 4x_2^2 = 4\}, \quad E_2 = \{x \in R^2\colon\ x_1 + 2\sqrt{3}x_2 = 8\}$;
3. $E_1 = \{x \in R^3\colon\ x_1 = x_2 = x_3\}, \quad E_2 = \{x \in R^3\colon\ x_1 + x_2 = 1; \quad x_3 = 0\}$;