Задача 1. Доказать, что функция удовлетворяет уравнению:

1. $z = x\varphi\left(y/x\right) + \psi\left(y/x\right)$, где φ, ψ – функции имеющие первую и вторую производные. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^z}{\partial y^2} = 0$

2. $z = x + y + \varphi\left(z\right),\quad 1 - y\varphi'\left(z\right) \neq 0,$ что $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi\left(z\right)\frac{\partial z}{\partial x}$

Задача 2. Доказать, что для однородной и имеющей производные функции $f\left(tx,\ ty,\ tz\right) = t^m f\left(x,\ y,\ z\right)$ выполняется $f'_x\left(x,\ y,\ z\right)x + f'_y\left(x,\ y,\ z\right)y + f'_z\left(x,\ y,\ z\right)z = mf\left(x,\ y,\ z\right)$.

Задача 3. Найти f'_x, $f'_x\left(0,\ 0\right)$, $f'_y\left(0,\ 0\right)$, $f''_{xy}\left(0,\ 0\right)$, $f''_{y,\ x}\left(0,\ 0\right)$, f''_{xy} для функции $f\left(x,\ y\right) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\left(x^2 + y^2 > 0,\ f\left(0,\ 0\right) = 0\right)$.

Задача 4. Исследовать на максимум и минимум $z = \frac{x^2}{2p} \pm \frac{y^2}{2q}$, $\left(p > 0,\ q > 0\right)$.

Задача 5. Найти максимум:

1. $u = \sin x + \sin y - \sin\left(x + y\right)$ на треугольнике, образованным осями координат и прямой $x + y = 2\pi$.

2. $u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - \left(ax^2 + by^2 + cz^2\right)^2$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $a > b > c > 0$.

3. $u = xyzt$, если $x + y + z + t = 4c$ (сделать вывод о среднем геометрическом и среднем).

4. минимум для $u = x + y + z + t$, $xyzt = c^4$

Задача 6. Предположим какой-нибудь газ (например, воздух) сжимается в поршневом компрессоре от атмосферного давления p_0 до давления $p > p_0$. Работа, затрчиваемая при этом на сжатие 1 кг газа, выразится так: $A = RT_0\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)$. R, T_0, γ – газовая постоянная, абсолютная температура газа до сжатия, постоянная большая единицы, зависящая от конструкции компрессора. Пусть процесс трёхступенчатый, температура между сжатиями возвращается холодильниками в T_0, промежуточные давления $p_1, \quad p_2$ (после первой и второй ступеней сжатия), то работа вычисляется аддитивно $(A_{01} + A_{12} + A_{23})$. Какие выбрать $p_1, \quad p_2$ при заданных $p_0, \quad p, \quad T_0,$ чтобы величина затрачиваемой работы была минимальна?

Задача 7. Найти y'': $\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \arctan\frac{y}{x}$.

Задача 8. Найти экстремум $F(x, \quad y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Задача 9. Вычислить угловой коэффициент касательной в полярных координатах $\tan\alpha = y'_x(r, \quad \theta)$; Вычислить угол между касательной и радиусом-вектором $\tan\omega = \tan(\alpha - \theta)$, где θ – угол наклона радиус-вектора.

Задача 10. **Лемниската Бернулли**. Найти геометрическое место точек М, произведение от каждой из двух наперёд заданных до М на расстоянии 2а друг от друга равно a^2 (а если не a^2, а b^2, то **овалы Кассини**).