Задача 1. Найти якобиан $\frac{\partial(x, \quad y, \quad z)}{\partial(r, \quad \mathbf{r}, \quad \psi)}$ отображения $x = r\cos^p\varphi\cos^q\psi, \quad y = r\sin^p\varphi\cos^q\psi, \quad z = r\sin^q\psi, \quad p, \quad q \in N$.

Решение задачи тупо в конспекте

Задача 2. Пусть $E_1 \subset R^n, \quad E_2 \in R^m, \quad f : \quad E_1 \to E_2, \quad E_2 \to R^k$, причём отображение f дифференцируемо в точке $x \in E_1$, а отображение g дифференцируемо в точке $f(x) \ inE_2$. Доказать, что:

- композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x и производная композиции отображений равна произведений. производных, т.е. $(g(f(x)) \circ f(x))' = g'(f(x)) f'(x)$

  Просто посмотреть в конспекте, как доказывается теоремы на композицию

- в случае $k = m = n$ якобиан композиции $g \circ f$ в точке x равен произведениб якобианов отображений $f(u_1; \quad u_2; \quad \ldots; \quad u_n)$ и $g(v_1; \quad v_2; \quad \ldots; \quad v_n)$ т.е.
$$\frac{\partial(v_1, \quad \ldots, \quad v_n)}{\partial(x_1, \quad \ldots, \quad x_n)} = \frac{\partial(v_1, \quad \ldots, \quad v_n)}{\partial(u_1, \quad \ldots, \quad u_n)} \frac{\partial(u_1, \quad \ldots, \quad u_n)}{\partial(x_1, \quad \ldots, \quad x_n)}$$
  ; в частности, если $g = f^{-1}$: $\frac{\partial(x_1, \quad ..., \quad x_n)}{\partial(u_1, \quad ..., \quad u_n)} \frac{\partial(u_1, \quad ..., \quad u_n)}{\partial(x_1, \quad ..., \quad x_n)} = 1$

Задача 3. Привести пример непрерывно дифференцируемого отображения области, якобиан которого нигде в этой области не обращается в нуль и которое не взаимно однозначно.

Задача 4. Найти второй дифференциал функции $u = xe^y$, если $d^2x, \quad d^2y$ известны.

дифференциал второго порядка сложной функции

Задача 5. Найти $d^2u(2; \quad 0), \quad 2x^2 + 2y^2 + u^2 - 8xu - u + 8 = 0$.

дифференциал второго порядка в точке неявно заданной функции

Задача 6. Разложить по формуле Маклорена до $o(\rho^5), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, функцию $f = \sin x \sinh 2y$.

формула маклорена

Задача 7. Доказать, что *одномерному волновому уравнению* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ удовлетворяют следующие функции:

- $u = x/\left(x^2 - a^2t^2\right);$

- $u = A \sin \omega x \cos a\omega t$
- $u = f(x + at) + g(x - at)$, f, g — — произвольные дважды дифференцируемые функции.

Задача 8. Исследовать функцию $u = f(x;\quad y)$ на условный экстремум при заданных уравнениях связи (выяснить, можно ли при этом использовать метод Лагранжа):

- $u = (x-1)^2 + (y+1)^2$, $x^2 + y^2 - 2xy = 0$, $x - y = 0$
- $u = x^4 + y^4$, $(x-1)^3 - y^2 = 0$

Задача 9. Исследовать функцию $u = f(x;\quad y)$ на условный экстремум при заданных уравнениях связи:

- $u = 1 + 1/x + 1/y$, $1/x^2 + 1/y^2 = 1/8$
- $u = \ln xy$, $x^3 + xy + y^3 = 0$

Задача 10. Доказать, что наибольшее и наименьшее значения функции $u = \sum\limits_{i,\quad k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$, $a_{ik} = a_{ki}$, на сфере $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ равны наибольшему и наименьшему корню характеристического уравнения матрицы (a_{ik}).

Задача 11. Найти расстояние между поверхностями $x^2/96 + y^2 + z^2 = 1$, $3x + 4y + 12z = 288$.

Задача 12. Определить наибольшую вместимость цилиндрического ведра, поверхность которого (без крышки) равна S.

Задача 13. Определить размеры открытого прямоугольного аквариума с заданной толщиной стенок d и ёмкостью V, на изготовление которого потребуется наименьшее количество материала.

Задача 14. До кр посмотреть видео https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs