Задача 1. **Канторово множество.** В пространстве R построим множество C следующим образом. Из отрезка $[0;\quad 1]$ удалим интервал $(1/3;\quad 2/3)$. Каждый из оставшихся отрезков разделим на три части и удалим средние интервалы $(1/9;\quad 2/9)$, $(7/9;\quad 8/9)$. Затем каждый из четырёх оставшихся интервалов делим на три равные части и средние интервалы удаляем. В результате неограниченного продолжения этого процесса деления оставшихся отрезков на три равные части и удаления средних интеравлов получим множество C точек отрезка $[0;\quad 1]$. Доказать, что

- Множество C является замкнутым и совершенным (см.ниже);
- сумма интервалов, удалённых при построении множества, равна длине отрезка $[0;\quad 1]$;

Задача 2. **Ковер Серпинского.** Множество E называют совершенным, если множество всех его предельных точек $E^{(1)} = E$. Пусть C' – дополнение канторова множества C до отрезка $[0;\quad 1]$. Доказать, что множество $S = ([0;\quad 1] \times [0;\quad 1]) \setminus (C' \times C')$ совершенно.

Задача 3. Найти предел функции $f(x;\quad y) = \frac{x^2 y}{y^2 + x^4}$ в точке $(0;\quad 0)$ по прямой $x = \alpha t,\quad y = \beta t,\quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Доказать, что предела по определению не существует.

Задача 4. Найти функцию $v = f(x_1;\quad x_2;\quad x_3;\quad x_4)$, если v – объём тетраэдра, а $x_i,\quad i = 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4$ – площади его граней, причём двугранные углы, прилегающие к грани с площадью x_1 равны между собой.

Задача 5. Является ли множество, на котором определена функция замкнутым, открытым?

- $u = \sqrt{x \sin y}$
- $u = \arcsin(y/x)$
- $u = \ln\left(1 - 2x - x^2 - y^2\right) + \ln\left(1 + 2x - x^2 - y^2\right)$

- $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$
- $u = (xy)^z$

Задача 6. Найти функцию $f(x;\quad y)$, если

- $f(x+y;\quad x-y) = y(x+y)$
- $f(xy;\quad y/x) = x^2 - y^2$
- $f(x;\quad y) = x\varphi(y/x), \quad f(1;\quad y) = \sqrt{1+y^2}$
- $f(x;\quad y) = \varphi(xy) + \psi(y/x), \quad f(x;\quad 1) = \sin(\pi x/2), \quad f(x;\quad x) = 1$

Задача 7.

Найти $u = f(x/z,\quad y/z - x), \quad u = x,$ если $y = x$

Найти $u = f\left(\frac{z-x}{xz},\quad \frac{z^2}{e^y - z}\right), \quad u = \left(1 - \frac{z}{x}\right)^2,$ если $y = \ln x$

Задача 8. Предел по множеству, на котором определена функция $u(x)$. Найти $\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} u, \quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0} u, \quad \lim_{x\to0\ y\to0} u$

- $u = \frac{x^3 - y}{x^3 + y}$
- $u = \frac{xy}{x^2 + y^2}$
- $u = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}$
- $u = \log_{1+x}(1 + x + y)$

Задача 9. Найти $\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty} u, \quad \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty} u, \quad \lim_{x\to\infty\ y\to\infty} u$

- $u = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^3}$
- $u = \sin\frac{\pi y^2}{x^2 + 3y^2}$

Задача 10. Дана функция $u = \frac{x^y}{1 + x^y}$. Найти

- $\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+0} u$

- $\lim_{x\to+0}\lim_{y\to+\infty} u$
- $\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to-0} u$
- $\lim_{x\to-0}\lim_{y\to+\infty} u$
- $\lim_{x\to+\infty\; y\to0}$ не существует

Задача 11. $u_{m,\quad n}(x) = \cos^m(\pi n! x)\,,\quad m,\quad n \in R,\quad x \in R$. При каких x: $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} u_{m,\quad n}(x) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} u_{m,\quad n}(x)$

Задача 12. Найти предел функции $u = x^2 e^{y-x^2}$ по лучу $x = t\cos\varphi,\quad y = t\sin\varphi,\quad \varphi \in [0;\quad 2\pi,\quad t \to +\infty;$ доказать, что $\lim_{x\to infty\; y\to\infty} f(x;\quad y)$ не существует.

Задача 13. Найти образы:

- $x^2 + y^2 = 1$
- $y = |x|,\quad y \neq 0$

при отображении $u = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right),\quad v = \frac{y}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right)$

Задача 14. Найти образ куба $0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1,\quad 0 \le z \le 1$ при отображении $u = x(1-y)\,,\quad v = xy(1-z)\,,\quad w = xyz$.