Задача 1. Найти дифференциал функции:

- $f = e^{xy\sin z}$
- $f = \sin \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$
- $f = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$ в точке $(1; \quad 1; \quad 1)$

Задача 2. Доказать, что функция $f = \ln\left(2 - |x|^{7/6} + |y|^{5/4}\right)$ дифференцируема в нуле.

Задача 3. Доказать, что функция $f = \arctan\left(2x + \sqrt[3]{x^3 - 27y^3}\right)$ недифференцируема в нуле.

Задача 4. Доказать, что функция

$$f = \begin{cases} \left(x^2 + y^2 \sin\left(1/\left(x^2+y^2\right)\right)\right), & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

дифференцируема, но не непрерывно дифференцируема в R^2.

Задача 5. Доказать, что функция

$$f = \begin{cases} (x^2 + y^{2\alpha}, & \text{если } x, \quad y \text{ – рациональные числа} \\ 0, & \text{если по крайней мере одно из чисел } x, \quad y \text{ иррационально} \end{cases}$$

при $\alpha > 1/2$ дифференцируема в только в точке $(0; \quad 0)$ и не является непрерывно дифференцируемой в этой точке.

Задача 6. Исследовать на дифференцируемость в нуле функцию $f(x; \quad y)$, $f(0, \quad 0) = 0$, а при $x^2 + y^2 > 0$ функция задаётся формулой:

- $f = \frac{|x^3 y|^{1/2}}{(x^2+xy+y^2)^\alpha}, \quad \alpha = 1/2, \quad \alpha = 1/4$
- $f = \frac{x^3 y^2}{(x^6+y^6)^\alpha}, \quad \alpha = 1/2, \quad \alpha = 2/3$
- $f = \frac{\sqrt{1+xy} - e^{xy/2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

- $f = \frac{xe^y - ye^x + y - x + (xy/2)(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

Задача 7. Доказать, что если функция f дифференцируема в точке $(x_1;\quad x_2;\quad \ldots;\quad x_n)$, то в этой точке суествует производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ по направлению произвольного единичного вектора $\mathbf{l} = (\cos\alpha_1;\quad \cos\alpha_2;\quad \ldots;\quad \cos\alpha_n)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos^2\alpha_k = 1$, причём $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cos\alpha_k$.

Задача 8. Пусть функция $f(x)$, $x \in R^n$ дифференцируема в некоторой точке и $\mathbf{l}$ – произвольный единичный вектор. Доказать, что в этой точке: если $gradf \neq 0$, то производная $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ достигает наибольшего значения при $\mathbf{l} = \frac{gradf}{|gradf|}$

Задача 9. Найдите производную функции f по направлению вектора $\mathbf{l}$ в точке:

- $f = 2x^2 + 5y^2,\quad \mathbf{l} = \left(-1/\sqrt{2},\quad 1/\sqrt{2}\right),\quad M(1;\quad 1)$
- $f = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right),\quad \mathbf{l} = (-1/3;\quad 2/3;\quad 2/3),\quad M(1;\quad 2;\quad 1)$

Задача 10. Найти градиент функции в точке:

- $f = 1 + x^2y^3,\quad (-1-;\quad 1)$
- $f = yx^y,\quad (2;\quad 1)$
- $f = \ln\left(1 = x^2 - 2y^2 - 3z^2\right),\quad M(x_0;\quad y_0;\quad z_0),\quad x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 < 1$

Задача 11. Найти $f'_y\left(x;\quad x^2\right)$ для дифференцирумой функции $f(x;\quad y)$, удовлетворяющей условиям $f\left(x;\quad x^2\right) = const,\quad f'_x\left(x;\quad x^2\right) = x$