Исправленная лаба №1 по матану

Часть 1: Аналитический ход

1.1) $z = \varphi(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + 5y^2)$

нужно найти частные производные 1-го порядка

$$z'_x = 2xy^2 \ln(x^2+5y^2) + \frac{2x^3y^2}{x^2+5y^2}$$

$$z'_y = 2x^2y \ln(x^2+5y^2) + \frac{10x^2y^3}{x^2+5y^2}$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$ ← это не кукарек, а необходимое условие экстремума в данной т-ке.

$$\begin{cases} 2xy^2\left(\frac{x^2}{x^2+5y^2} + \ln(x^2+5y^2)\right) = 0 \\ 2x^2y\left(\frac{5y^2}{x^2+5y^2} + \ln(x^2+5y^2)\right) = 0 \end{cases}$$ тут была вычисл. ошибка

у нас x и y не могут быть одновременно равные 0, т.к $x^2+5y^2 \neq 0$

имеем:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{x^2+5y^2} + \ln(x^2+5y^2) = 0 \\ \frac{5y^2}{x^2+5y^2} + \ln(x^2+5y^2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+5y^2} = 0 \\ \frac{5y^2}{x^2+5y^2} + \ln(x^2+5y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x| = |y| \\ \frac{5y^2}{6y^2} + \ln(6y^2) = 0 \end{cases}$$

$\ln(6y^2) = -\frac{5}{6}$

$6y^2 = e^{-\frac{5}{6}}$

$y^2 = \frac{\sqrt[6]{e}}{6e}$

$|y| = \sqrt{\frac{\sqrt[6]{e}}{6e}}$

$$M_0 = \begin{cases} A = \left(\sqrt{\frac{\sqrt[6]{e}}{6e}}; \sqrt{\frac{\sqrt[6]{e}}{6e}}\right) \\ B = \left(\sqrt{\frac{\sqrt[6]{e}}{6e}}; -\sqrt{\frac{\sqrt[6]{e}}{6e}}\right) \\ C = \left(-\sqrt{\frac{\sqrt[6]{e}}{6e}}; \sqrt{\frac{\sqrt[6]{e}}{6e}}\right) \\ D = \left(-\sqrt{\frac{\sqrt[6]{e}}{6e}}; -\sqrt{\frac{\sqrt[6]{e}}{6e}}\right) \end{cases}$$

подставим эти точки в $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$ и убедимся, что необходимое условие соблюдается

подставим т. А в исходное ур-е, получим $\varphi(A) \approx 0{,}00029$

1.2)

Поскольку в найденной точке может быть минимум, максимум, перевал, то нужно найти в част. производные 2-го порядка, вычислить их в точке и составить матрицу Гессе (это и есть проверка достаточного условия):

$$z''_{xx} = \frac{2y^2(3x^4 + 25x^2y^2 + (x^2+5y^2)^2(\ln(x^2+5y^2)))}{(x^2+5y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{4xy(x^4 + 5x^2y^2 + (x^2+5y^2)^2\ln(x^2+5y^2) + 25y^4)}{(x^2+5y^2)^2}$$

$$z''_{yy} = \frac{2x^2(75y^4 + 25x^2y^2 + (x^2+5y^2)^2\ln(x^2+5y^2))}{(x^2+5y^2)^2}$$

$$M_\Gamma = \begin{pmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{pmatrix}$$

$$z''_{xx}\Big|_{A,B,C,D} = \frac{2\cdot\frac{6\sqrt[6]{e}}{6e}\left(\frac{\sqrt[3]{e}}{36e^2} + 25\cdot\frac{\sqrt[3]{e}}{36e^2} + \frac{\sqrt[3]{e}}{e^2}\cdot\ln\left(\frac{\sqrt[6]{e}}{e}\right)\right)}{\left(\frac{6\sqrt[6]{e}}{6e}\right)^2} \Rightarrow$$

$$z''_{xx} = -\frac{\sqrt[6]{e}}{54e}$$

$$z''_{yy} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt[6]{e}}{6e}\left(75\cdot\frac{\sqrt[3]{e}}{36e^2} + 25\frac{\sqrt[3]{e}}{36e^2} + \frac{\sqrt[3]{e}}{e^2}\ln\left(\frac{\sqrt[6]{e}}{e}\right)\right)}{\left(\frac{\sqrt[6]{e}}{e}\right)^2} =$$

$$= \frac{35\sqrt{e}}{54e^3} \quad \text{в т-х } A, B, C, D$$

$$z''_{xy}\Big|_A = z''_{xy}\Big|_D = \frac{\sqrt{e}}{54e^3}\cdot\frac{e^2}{\sqrt[3]{e}} = \frac{\sqrt[6]{e}}{54e}$$

$$z''_{xy}\Big|_C = z''_{xy}\Big|_B = -\frac{\sqrt[6]{e}}{54e}$$

Пусть у нас есть 2 мн-ва $a(0; R\backslash 0)$ и $b(R\backslash 0; 0)$

тогда

$$z''_{xx}(a) = 4y^2\ln|5y$$

$$z''_{xy}(a) = z''_{xy}(b) = z''_{xx}(b) = z''_{yy}(a) = 0$$

$$z''_{xx}(a) = 4y^2\ln|5y|$$

$$z''_{yy}(b) = 4x^2\ln|5x|$$

$$M_F(A) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt[6]{e}}{54e} & \frac{\sqrt[6]{e}}{54e} \\ \frac{\sqrt[6]{e}}{54e} & \frac{35\sqrt{e}}{54e^3} \end{pmatrix} = \Delta_2 \approx -0{,}0036\ldots \quad \Delta_1 < 0$$

$$M_F(B) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt[6]{e}}{54e} & -\frac{\sqrt[6]{e}}{54e} \\ -\frac{\sqrt[6]{e}}{54e} & \frac{35\sqrt{e}}{54e^3} \end{pmatrix} = \Delta_2 \approx -0{,}0036 \quad \Delta_1 < 0$$

$$M_Г(C) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{e}}{54e} & -\frac{\sqrt{e}}{54e} \\ -\frac{\sqrt[6]{e}}{54e} & \frac{35\sqrt{e}}{54e^3} \end{pmatrix} = \Delta_2 \approx -0{,}0036 \quad \Delta_1 < 0$$

$$M_Г(D) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt[6]{e}}{54e} & \frac{\sqrt[6]{e}}{54e} \\ \frac{\sqrt[6]{e}}{54e} & \frac{35\sqrt{e}}{54e^3} \end{pmatrix} = \Delta_2 \approx -0{,}0036 \quad \Delta_1 < 0$$

$$a = \begin{pmatrix} 4y^2\ln|5y| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta_2 = 0 \qquad \Delta_1 = 4y^2\ln|5y|$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4x^2\ln|5x| \end{pmatrix} \approx \Delta_2 = 0 \qquad \Delta_1 = 0$$

1.3) $z(a) = 0$ $\quad z(b) = 0$

- при $0 < x^2 + 5y^2 < 1$ точки являются экстремумами, т.к. есть возможность выбрать окрестность $\varphi_{окр} < \varphi(a,b)$
- при $x^2 + 5y^2 > 1$ являются экстремами

1.4.) график остаётся тот же

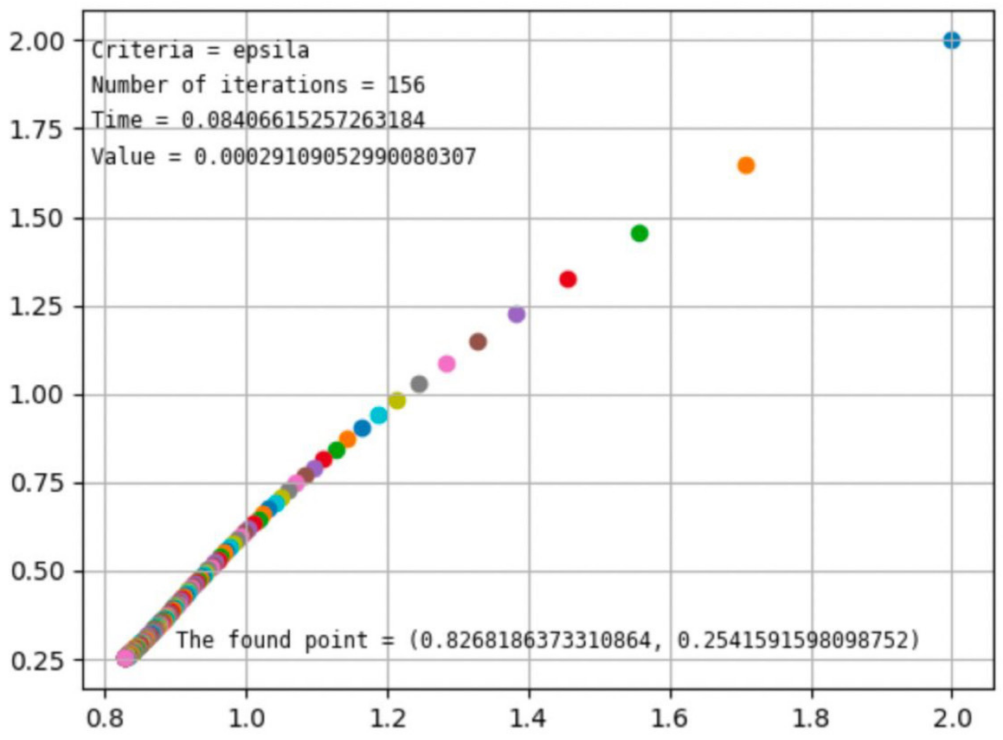
Часть 2:

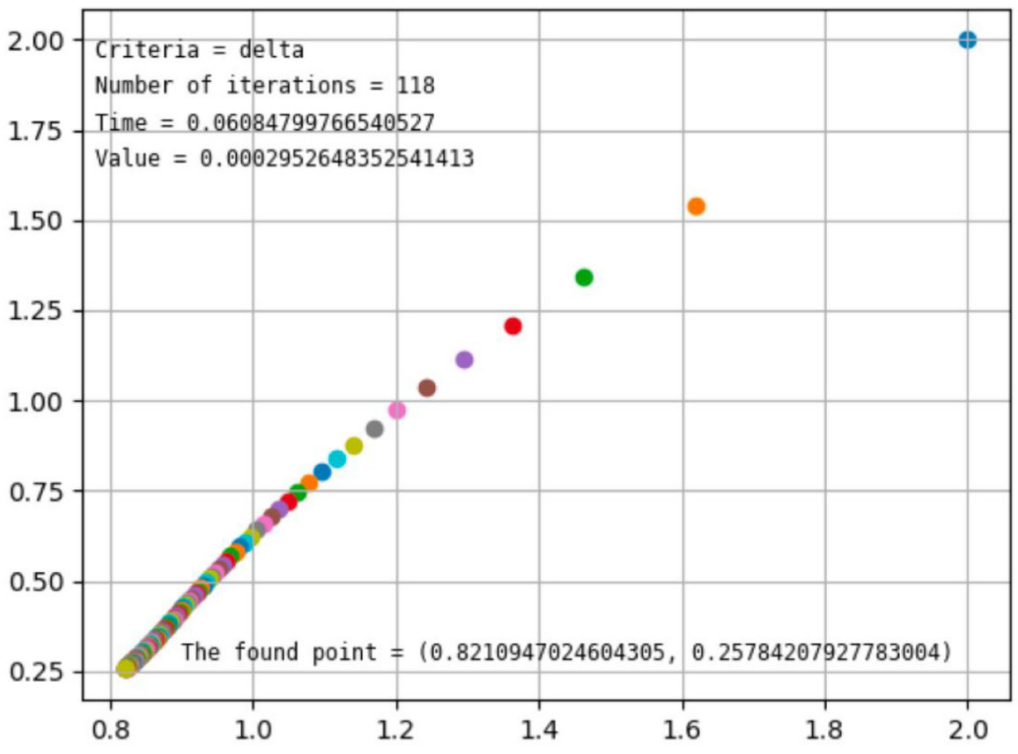
2.1.) я выбрала точку A, в ней значение ф-ции будет равным:

$\varphi(A) \approx 0{,}00029$

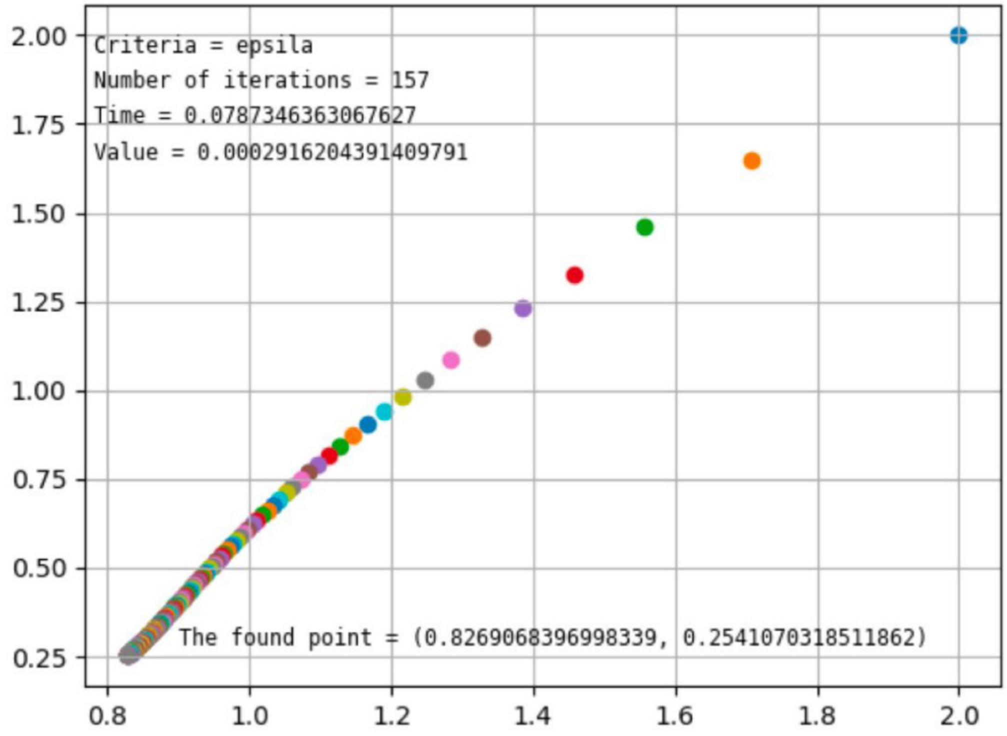
2.2.) стартовая точка - $(2,2)$

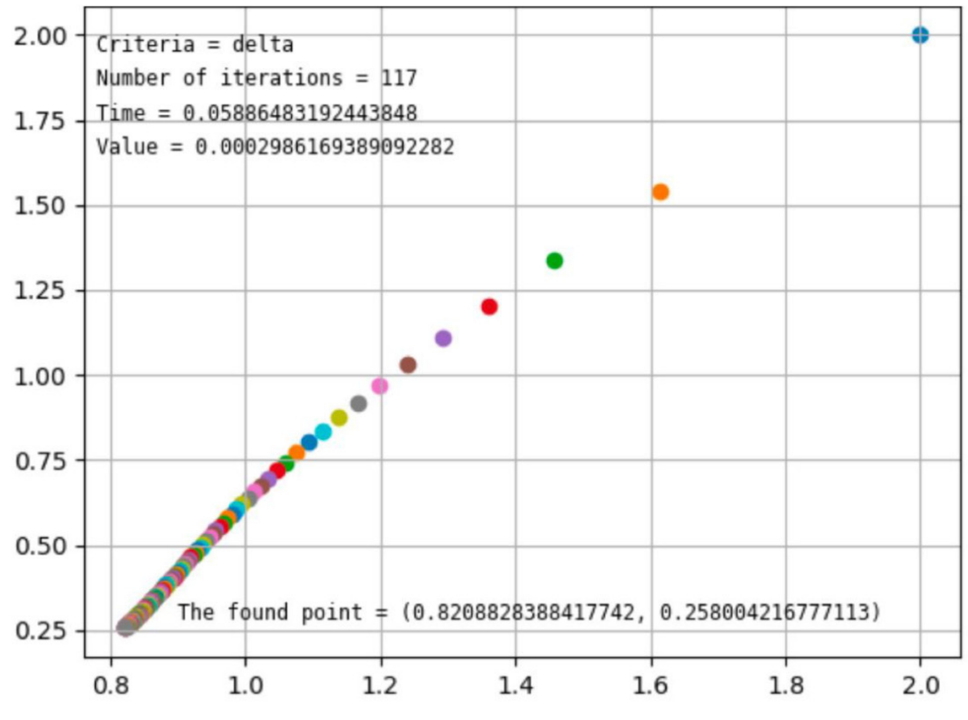
2.3.) значение ф-ции, приращение ф-ции, градиент в текущей точке вычисляется программой. Для a_1^k я выбрала (при epsila) постоянное значение. $a_k = 5{,}479 \cdot 10^{-3}$. Является оптимальным, потому что иначе программа проскакивает экстремумы. При delta $a_k = 7{,}13 \cdot 10^{-3}$. При epsila и delta $\varphi(A) = 0{,}0002$


Criteria = epsila
Number of iterations = 156
Time = 0.08406615257263184
Value = 0.00029109052990080307
The found point = (0.8268186373310864, 0.2541591598098752)
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0


Criteria = delta
Number of iterations = 118
Time = 0.06084799766540527
Value = 0.0002952648352541413
The found point = (0.8210947024604305, 0.25784207927783004)
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0

a^k - линейное убывание
при epsila $= 10^{-4}$ $a_k = 5{,}453 \cdot 10^{-3}$
$\varphi(A) \approx 0{,}00029$ Значение функции в т. A.
при delta $= 10^{-6}$ $a_k = 7{,}191 \cdot 10^{-3}$
$\varphi(A) \approx 0{,}00029$
a^k - геом. прогрессия





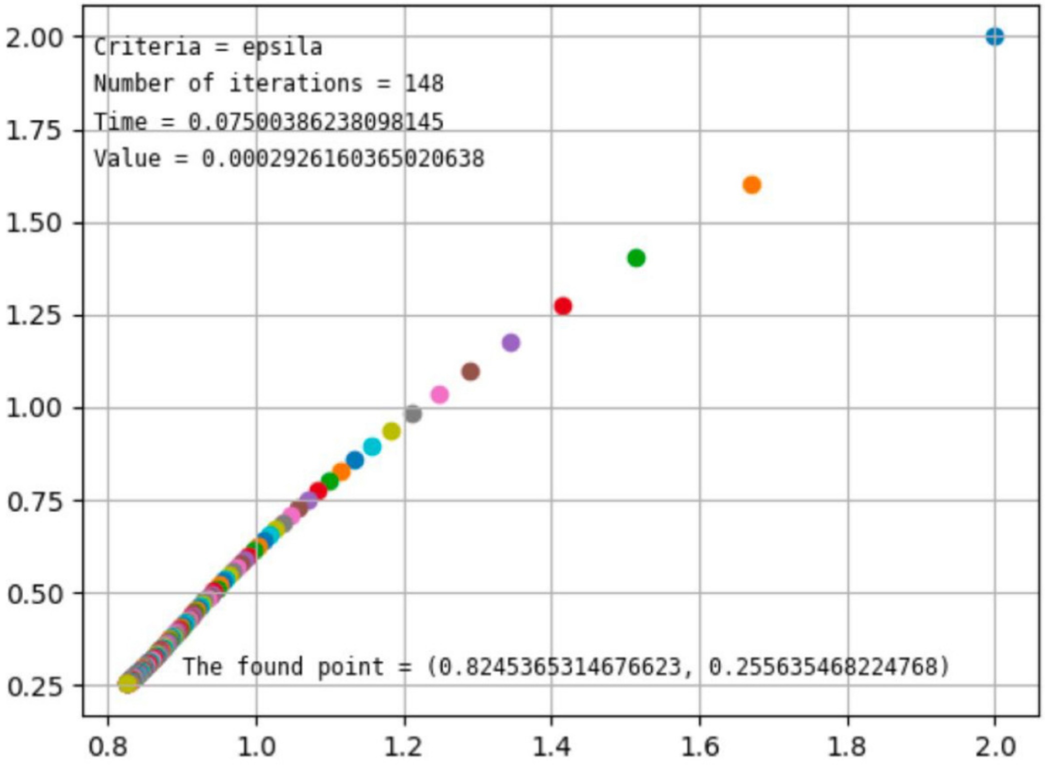
a^k - геом. прогрессия

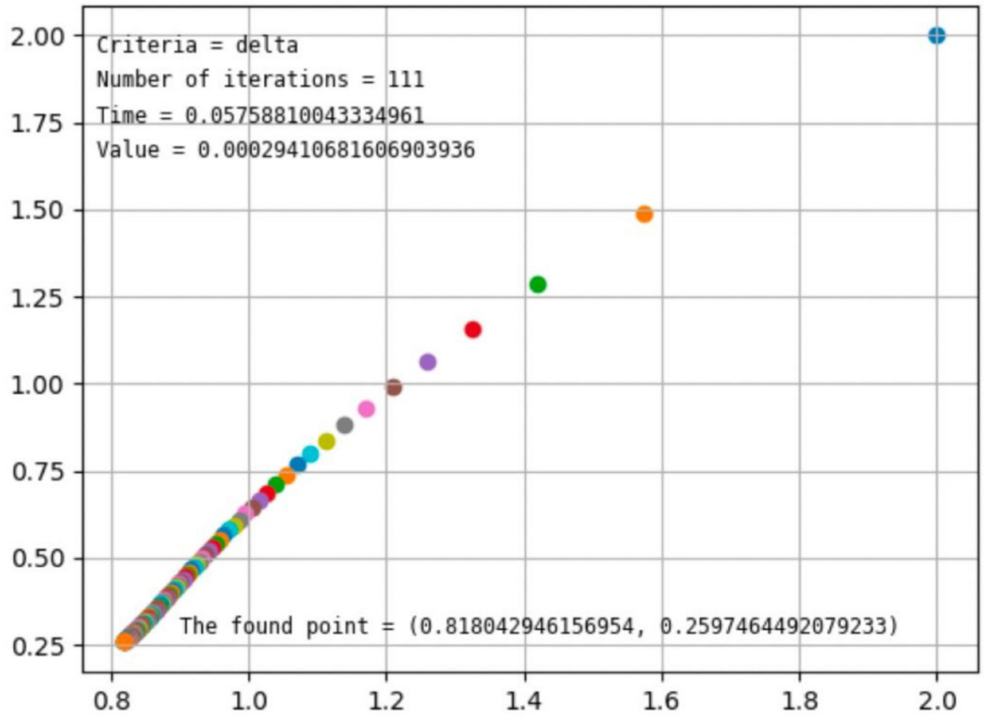
при epsila $=10^{-4}$ $a_k = 6{,}169 \cdot 10^{-3}$

$\varphi(A) \approx 0{,}0029$

при delta $=10^{-6}$ $a_k = 7{,}940 \cdot 10^{-3}$

$\varphi(A) \approx 0{,}00029$.





2.5.) Вывод: Критерий останова.

Через delta точка достигается быстрее чем через epsila (причём стабильно на 0,002 единицы времени)

Через delta проводится меньше операций чем через epsila (причём разница в количестве операций колеблется от 37 до 40 единиц)